

228-0244

Stavební mechanika I

Opora pro kombinované studium

Jiří Brožovský

Ostrava 2025

Obsah

1	Informace o předmětu	6
2	Úvod do předmětu	8
2.1	Co je to stavební mechanika?	8
2.2	Základní předpoklady lineární stavební mechaniky	8
2.2.1	Shrnutí	9
2.2.2	Otázky k procvičení	9
3	Reakce a vnitřní síly nosníků zatížených osamělými silami a momenty	10
3.1	Nosné stavební konstrukce	10
3.2	Typy prvků konstrukcí podle tvaru	10
3.3	Idealizované zatížení	11
3.4	Výslednice liniového zatížení	12
3.5	Podepření	13
3.5.1	Možnosti pohybu tělesa v rovině	13
3.5.2	Vnější vazby	14
3.5.3	Vnější vazby: alternativní znázornění pro 2D	14
3.5.4	Vnější vazby – pootočení	14
3.5.5	Vnější vazby – vetknutí ve 2D	14
3.5.6	Vazby tělesa (desky) v rovině	15
3.5.7	Kinematická určitost	15
3.5.8	Statická určitost	16
3.5.9	Stupeň statické neurčitosti	16
3.5.10	Výjimkové případy vazeb	16
3.6	Prutové konstrukce	17
3.6.1	Prut – geometrický popis	17
3.7	Kinematicky a staticky určité prutové konstrukce (příklady)	18
4	Výpočet reakcí nosníků	19
4.1	Podmínky rovnováhy uvolněného prutu v rovině	19
4.2	Postup stanovení reakcí nosníku	20
4.3	Stanovení reakcí nosníku 1	20
4.4	Stanovení reakcí nosníku 2	20
4.5	Stanovení reakcí nosníku 3	21
4.6	Stanovení reakcí nosníku 4	21
4.7	Příklad stanovení reakcí nosníku	22

4.7.1	Shrnutí	22
4.7.2	Otázky k procvičení	22
5	Vnitřní síly nosníku	23
5.1	Rovinný nosník (2D, rovina XZ)	23
5.2	Prostorový nosník (3D)	24
5.3	Normálová síla (osová úloha)	24
5.3.1	Normálová síla – znaménka	25
5.3.2	Normálová síla – síla v průřezu	25
5.3.3	Normálová síla – příklad	25
5.4	Posouvající síla	26
5.4.1	Posouvající síla – konvence	26
5.4.2	Posouvající síla – příklad	26
5.5	Ohybový moment	27
5.5.1	Ohybový moment – konvence	27
5.5.2	Ohybový moment – příklad	28
5.6	Příklad výpočtu M a V	29
5.6.1	Extrémní hodnota momentu	31
5.7	Vztah V a M	31
5.7.1	Shrnutí	31
5.7.2	Otázky k procvičení	32
6	Lomený nosník – rám	33
6.1	Ukázky lomených nosníků	33
6.2	Přenos momentů ve styčnicku	33
6.3	Podmínky rovnováhy ve styčnicku	34
6.4	Lomený nosník – příklad 1	34
6.5	Lomený nosník – příklad 2	35
6.6	Lomený nosník – příklad 3	36
6.6.1	Shrnutí	39
6.6.2	Otázky k procvičení	39
7	Nosníky s šikmým podepřením	41
7.1	Nosník se šikmým podepřením	41
7.2	Nosník se šikmým podepřením: příklad	41
8	Nosníky se šikmým zatížením	44
9	Šikmý nosník	47
9.1	Šikmý nosník – reakce: příklad	47
9.1.1	Shrnutí	49
9.1.2	Otázky k procvičení	49
10	Rám (lomený nosník) se šikmým prutem	50
10.0.1	Shrnutí	53
10.0.2	Otázky k procvičení	53

11 Nosníky a rámy s klouby	56
11.1 Kloub	56
11.2 Násobnost kloubů	56
11.3 Stupeň statické neurčitosti	56
11.4 Gerberův nosník	57
11.5 Gerberův nosník – příklad	58
11.5.1 Shrnutí	59
11.5.2 Otázky k procvičení	59
12 Rámy s klouby	60
12.1 Rám s kloubem - příklad	60
12.1.1 Shrnutí	62
12.1.2 Otázky k procvičení	62
13 Rámy s klouby a táhly	65
13.1 Rám s táhlem	65
13.2 Rám s táhlem 1 – příklad	65
13.2.1 Shrnutí	68
13.2.2 Otázky k procvičení	68
14 Oblouky	70
14.1 Rovinný oblouk (rovinný zakřivený nosník)	70
14.2 Rovinný oblouk – popis	70
14.3 Rovinný oblouk: kvadratická parabola	71
14.4 Kvadratická parabola: vnitřní síly v průřezu	72
14.5 Kvadratická parabola: příklad	72
14.5.1 Shrnutí	75
14.5.2 Otázky k procvičení	75
15 Příhradové konstrukce	76
15.1 Názvosloví příhradové konstrukce	76
15.2 Výpočet statické neurčitosti	77
15.3 Styčnicková metoda	78
15.4 Styčnicková metoda – příklad	78
15.5 Průsečná metoda	82
15.6 Průsečná metoda – příklad	82
15.6.1 Shrnutí	83
15.6.2 Otázky k procvičení	83
16 Prut v prostoru, kroucení	84
16.1 Vnější vazby v prostoru (ve 3D)	84
16.2 Stupeň statické neurčitosti ve 3D	85
16.3 Prostorový nosník – vnitřní síly	85
16.4 Kroucení nosníku	85
16.5 Kroucení nosníku – příklad	86
16.5.1 Shrnutí	86
16.5.2 Otázky k procvičení	86

17 Pohyblivé zatížení, příčinkové čáry	87
17.1 Pohyblivé zatížení	87
17.2 Příčinkové čáry	88
17.3 Příčinkové čáry reakcí	88
17.4 Příčinková čára posouvající síly	93
17.5 Příčinková čára ohybového momentu	96
17.6 Příčinková čára V_x na konzole	97
17.7 Příčinková čára M_x na konzole	97
17.8 Nosník s převislými konci (1)	100
17.9 Použití příčinkových čar	101
17.9.1 Výpočet účinků od skutečného zatížení $F_c \neq 1$	101
17.9.2 Výpočet účinků od skupiny sil	101
17.9.3 Výpočet účinků od spojitého rovnoměrného zatížení	102
17.9.4 Shrnutí	102
17.9.5 Otázky k procvičení	102
18 Využití symetrie	103
18.1 Symetrie zatížení	103
18.2 Rozklad obecného zatížení	103
19 Porovnání plnostěnného a příhradového nosníku	105
19.1 Popis úlohy	105
19.2 Příhradová konstrukce	105
19.3 Výpočet rámu pro stejné rozpětí a zatížení	108
19.4 Porovnání	108
19.4.1 Shrnutí	109

Kapitola 1

Informace o předmětu

Cíle předmětu vyjádřené dosaženými dovednostmi a kompetencemi

Student získá po absolvování předmětu dovednosti a znalosti v následujících oblastech:

- znalost řešení staticky určitých prutových konstrukcí v rovině;
- schopnost aplikovat metody řešení základních úloh stavební mechaniky i na další typy konstrukcí.

Anotace

V rámci předmětu „Stavební mechanika I” se studenti seznámí se základními principy řešení staticky určitých prutových konstrukcí v rovině. Kromě výpočtu stupně přetvárné a statické neurčitosti se seznámí s vnitřními silami prutů, s jejich vztahy a metodami jejich určování.

Povinná literatura

- Kadlčák, J., Kytýr, J., Statika stavebních konstrukcí I., VUTUM, 2001.
- Benda, J. Stavební statika I, VŠB-TUO, 2004.
- Russell C. Hibbeler, Structural Analysis (10th Edition), 736 pages, 2017, ISBN-13: 978-0134610672, ISBN-10: 0134610679.

Doporučená literatura

- Kytýr, J., Gratza, R., Plášek, J., Ekr, J., Ridoško, T.: Statika I – Řešené příklady. Skriptum. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2014.
- Chobot, Benda, Hájek, Novotná: Statika stavebních konstrukcí II, SNTL Praha 1983

- Harvančík, Pekarovič, Sobota: Stavebná mechanika. Příklady, ALFA 1986.

Forma způsobu ověření studijních výsledků a další požadavky na studenta

Průběžné odevzdávání úkolů zadaných na cvičení v termínech stanovených vyučujícím, úspěšné zvládnutí kontrolních písemných testů. Písemný test, diskuse nad odbornými tématy, která byla probírána v rámci přednášek.

Osnova:

1. Reakce a vnitřní síly nosníků zatížených osamělými silami a momenty.
2. Vnitřní síly nosníků zatížených dalšími druhy zatížení.
3. Lomené nosníky – rámy, řešení pravoúhlých rámců.
4. Šikmo podepřené nosníky, nosníky s šikmým zatížením.
5. Rámy se šikmými pruty.
6. Klouby v prutových konstrukcích, přímý nosník s klouby.
7. Rámy s klouby.
8. Rámy s klouby a táhly.
9. Oblouky.
10. Příhradové konstrukce.
11. Prutové konstrukce v prostoru.
12. Příčinkové čáry na staticky určitých nosnících.
13. Využití symetrie, porovnání vnitřních sil plnostěnného a příhradového nosníku.

Kapitola 2

Úvod do předmětu

2.1 Co je to stavební mechanika?

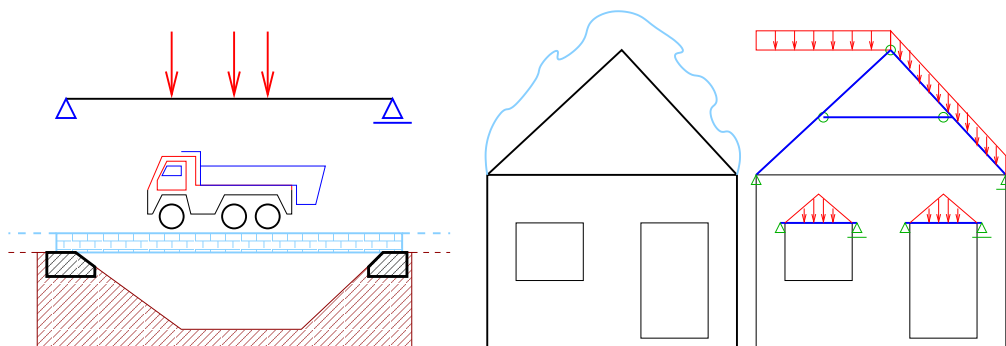
Skutečné stavební konstrukce jsou velmi složité. Ve fyzice zpravidla převádíme reálné úlohy na zjednodušené (**idealizované**) případy, které jsme schopni popsat rovnicemi. Stavební mechanika je praktickou aplikací části fyziky – mechaniky na problémy stavebních konstrukcí.

Skutečné konstrukce převádíme na jejich zjednodušené modely, které za určitých podmínek s dostatečnou přesností popisují chování původních skutečných konstrukcí. Zejména zjednodušujeme jejich tvar, například dlouhé (prutové) prvky nahrazujeme jejich osami. Idealizujeme však i zatížení a vlastnosti materiálu. Tyto poznatky už byly probírány v předchozích předmětech, proto zde jen shrneme základní **předpoklady**.

2.2 Základní předpoklady lineární stavební mechaniky

Velkou množinu problémů je možné vyřešit pomocí tzv. lineární stavební mechaniky, kdy všechny problémy je možné – jednodušeji nebo obtížněji – popsat soustavou lineárních rovnic.

Abychom mohli takto počítat, musíme pro počítanou konstrukci stanovit některé



Obrázek 2.1: Idealizace skutečných konstrukcí

podmínky (předpokaldy, za kterých řešení provádíme):

- Zkoumáme objekty z **lineárně pružného materiálu** (platí Hookeův zákon: vztah mezi zatížením a deformací je lineární).
- Materiál všech zkoumaných těles je **izotropní** (má ve všech směrech stejné vlastnosti).
- Předpokládáme, že deformace vyvolané zatížením jsou **malé** (vliv deformací na polohu sil můžeme zanedbat, zpravidla se uvádí, že deformace musí být menší než 1/100 největšího rozměru konstrukce).
- Zatížení je statické (nemění se v čase, nebo se mění tak pomalu, že lze jeho změny zanedbat).

Tyto předpoklady umožňují, že

1. můžeme účinky různých zatížení (např. sil) na konstrukci počítat (velké **zjednodušení** výpočtů, tzv. *princip superpozice*),
2. výsledky (jak silové, tak deformační veličiny) zatížení jsou přímo úměrné zatížení – tedy pokud 2-krát zvětšíme zatížení, všechny výsledky se také zvětší 2-krát (za předpokladu, že se **všechna zatížení na konstrukci zvětšila stejně!**), *princip úměrnosti*.

Skutečné stavební materiály a konstrukce (a zatížení) ne vždy vyhovují uvedeným zjednodušením. V takových případech není možné uvedené postupy použít, musí se provádět přesnější nelineární řešení. Velmi často se však využívá výpočtu pomocí lineární stavební mechaniky, a výsledky jsou následně upraveny – to bude probíráno detailněji v předmětech věnovaných zejména betonovým, zděným a dřevěným konstrukcím.

2.2.1 Shrnutí

V kapitole byly probrány základní předpoklady za kterých sestavujeme zjednodušené a idealizované modely konstrukcí.

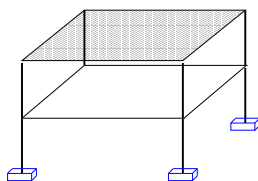
2.2.2 Otázky k procvičení

- Vyjmenujte základní předpoklady ve stavební mechanice.
- Uvažte, který stavební materiál nejlépe odpovídá předpokladu izotropního materiálu.
- Platí-li princip superpozice, jak se změní výsledek o velikosti 10 kN, pokud zatížení se zvětšilo 3x.

Kapitola 3

Reakce a vnitřní síly nosníků zatížených osamělými silami a momenty

3.1 Nosné stavební konstrukce



Obrázek 3.1: Idealizovaná stavební konstrukce

Nosná stavební konstrukce slouží k přenosu **zatížení** do **podloží** (horninového masivu):

- horní stavba,
- základová konstrukce (na obr. 3.1 značena modře).

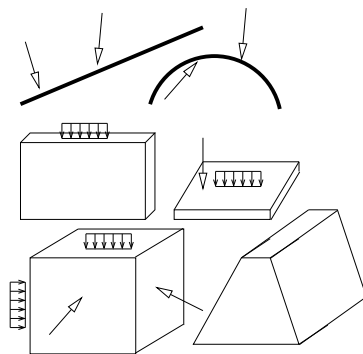
Základová konstrukce je velmi často idealizována dokonalými **podporami**, které zavedeme v dalším textu.

Z toho vyplývají požadavky na konstrukci:

- dostatečná **únosnost**,
- dlouhodobá **použitelnost**.

3.2 Typy prvků konstrukcí podle tvaru

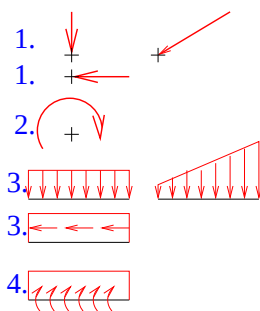
Tvar konstrukcí a jejich prvků musí být často pro potřeby výpočtů zjednodušován (idealizován):



Obrázek 3.2: Typy prvků podle tvaru

- **prut** - jeden rozměr je výrazně větší než ostatní (idealizace čarou – **nejčastější případ**, v tomto textu budeme pracovat výhradně s ním),
- **plošný prvek** (stěna, deska, skořepina) - dva rozměry mnohem větší než třetí (idealizace rovinnou nebo zakřivenou plochou),
- masivní prvek – **těleso** (*idealizace tvaru není třeba*).

3.3 Idealizované zatížení



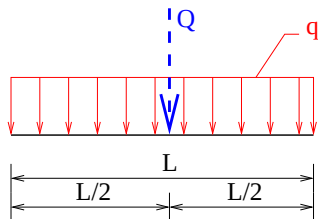
Obrázek 3.3: Idealizace zatížení

Skutečné zatížení vyvolané buď prvky nosné konstrukce nebo přenášeným zatížením (osoby, vozidla, sníh, vítr aj.) zpravidla zjednodušujeme do podoby (nejčastěji) silového zatížení, jak je uvedeno na obr. 3.3:

1. bodová síla (osamělá síla), $[kN]$,
2. bodový moment (osamělý...), $[kNm]$,
3. liniové silové zatížení, $[kN/]$,
4. liniové momentové zatížení, $[kNm/m]$, $[kN]$.

3.4 Výslednice liniového zatížení

Liniové zatížení s konstantní velikostí spočítáme podle následujících vztahů.



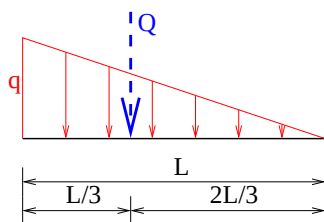
Obrázek 3.4: Liniové zatížení a jeho výslednice

Rozměry veličin: Q [N], q [N/m], L [m];

$$Q = L \times q$$

Pozn.: výslednice působí v těžišti zatěžovacího obrazce (zde „uprostřed“).

V případě trojúhelníkového liniového zatížení budeme postupovat analogicky.

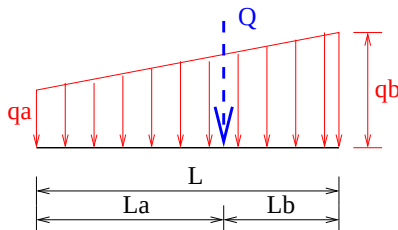


Obrázek 3.5: Trojúhelníkové liniové zatížení a jeho výslednice

$$Q = \frac{1}{2} L \times q$$

Pozn.: výslednice působí v těžišti zatěžovacího obrazce – trojúhelníka.

V případě, že liniové zatížení má tvar lichoběžníka, lze postupovat obdobně a využít znalostí o ploše lichoběžníka.

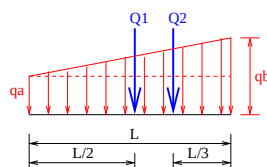


Obrázek 3.6: Lichoběžníkové liniové zatížení a jeho výslednice

$$Q = L \times \frac{qa + qb}{2}$$

$$La = \frac{L \times qa \times \frac{L}{2} + \frac{1}{2} L \times (qb - qa) \times \frac{2}{3} L}{L \times qa \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} L \times (qb - qa)} = \frac{L}{3} \left(1 + \frac{qb}{qa + qb} \right)$$

Často je však jednodušší rozdělit lichoběžníkové zatížení na případ konstatního („obdélníkového“) zatížení a trojúhelníkového zatížení a stanovit výslednice dvě (Q_1, Q_2) podle obr. 3.4.



Obrázek 3.7: Alternativní způsob stanovení výslednice lichoběžníkového zatížení

$$Q_1 = L \times qa, \quad Q_2 = \frac{1}{2} L \times (qb - qa)$$

Tento postup je možný díky principu superpozice.

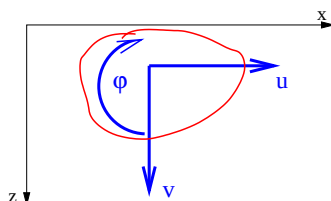
3.5 Podepření

Podepření nahrazuje ve výpočtech účinek základových konstrukcí. Brání pohybu konstrukce v prostoru nebo rovině.

Idealizace podepření:

- Vnější vazby – brání **absolutnímu** posunu nebo pootočení tělesa (připojením k dokonale tuhé **podporové konstrukci**)
- Vnitřní vazby brání **vzájemnému posunutí** nebo pootočení těles tvořících konstrukci.

3.5.1 Možnosti pohybu tělesa v rovině

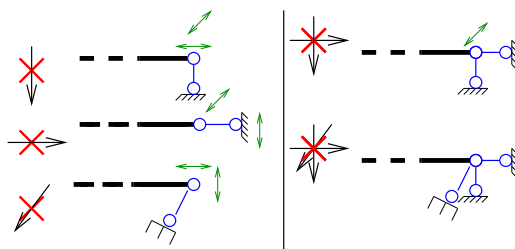


Obrázek 3.8: Možnosti pohybu tělesa v rovině

Celkem **3** možnosti pohybu: posunutí **u**, **v**, pootočení **φ**.
(V prostoru celkem 6).

3.5.2 Vnější vazby

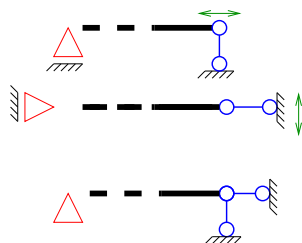
Vazba proti **posunu** v daném směru:



Obrázek 3.9: Značení a význam vnějších vazeb

3.5.3 Vnější vazby: alternativní znázornění pro 2D

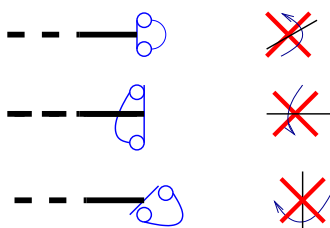
Vazba proti **posunu** v daném směru – posuvné a pevné klouby.



Obrázek 3.10: Alternativní značení vnějších vazeb (vlevo)

3.5.4 Vnější vazby – pootočení

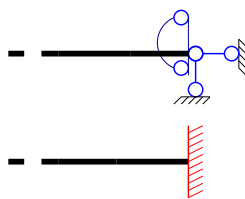
Vazba proti **pootočení** v daném směru:



Obrázek 3.11: Značení a význam vnějších vazeb proti pootočení

3.5.5 Vnější vazby – vetknutí ve 2D

Je zabráněno všem posunům (v rovině 2) a pootočení daného bodu prutu v rovině.



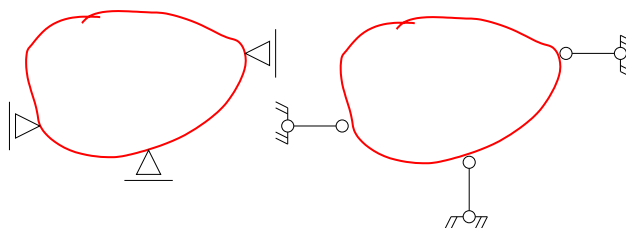
Obrázek 3.12: Vetknutí

3.5.6 Vazby tělesa (desky) v rovině

Pro další úvahy budeme stavební konstrukci považovat za objekt („těleso“) v rovině.

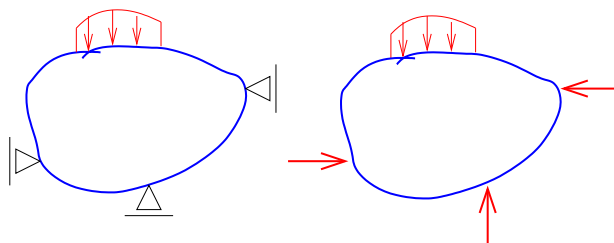
Zajištění **nehybnosti tělesa**: 3 možnosti pohybu (stupně volnosti) $\Rightarrow$ **3 vazby**

Například:



Obrázek 3.13: Vnější vazby tělesa v rovině

Zatížení tělesa vyvolává **reakce ve vazbách**:



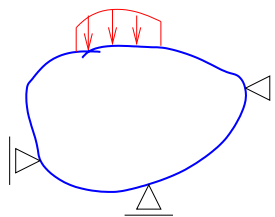
Obrázek 3.14: Vnější vazby tělesa v rovině

- Vazba brání posunutí $\Rightarrow$ síla.
- Vazba brání pootočení $\Rightarrow$ moment.

3.5.7 Kinematická určitost

Pokud je použito **právě tolik** vazeb (3), aby bylo zabráněno pohybu tělesa $\Rightarrow$ **kinematická určitost**.

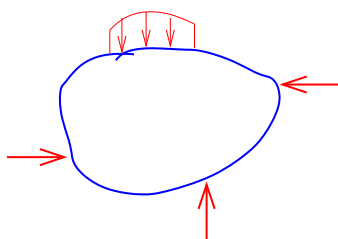
- **Více** vazeb $\Rightarrow$ kinematická **pře**určitost.
- **Méně** vazeb $\Rightarrow$ kinematická **neur**čitost (mechanismus!).



Obrázek 3.15: Vnější vazby tělesa v rovine

3.5.8 Statická určitost

V úloze je **právě tolik** reakcí ve vazbách, kolik je **podmínek rovnováhy** (3) $\Rightarrow$ **statická určitost**.



- **Více** vazeb $\Rightarrow$ statická **neurčitost** (staticky neurčité konstrukce jsou mnohdy výhodné a metody jejich výpočtu budou probírány v dalších předmětech).
- **Méně** vazeb $\Rightarrow$ statická **přeurčitost** (*mechanismus*, tedy konstrukce, která **nesmí** sloužit jako stavební konstrukce).

3.5.9 Stupeň statické neurčitosti

V tomto textu budeme počítat jen **staticky určité konstrukce**.

Zda je nebo není konstrukce staticky určitá lze stanovit následujícím vztahem.

$$S_n = v - 3 + X$$

v ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami

X ... další členy (klouby apod... upřesníme později)

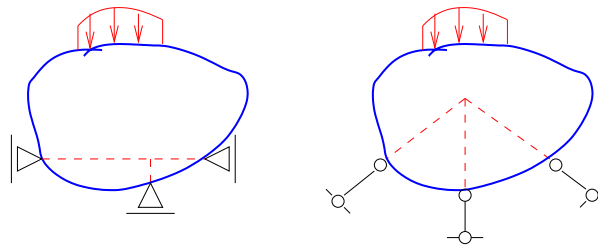
Je-li $S_n > 0$ je konstrukce staticky neurčitá. Staticky určitá konstrukce musí mít $S_n = 0$.

3.5.10 Výjimkové případy vazeb

Lze nalézt případy, kdy sice $S_n = 0$, ale:

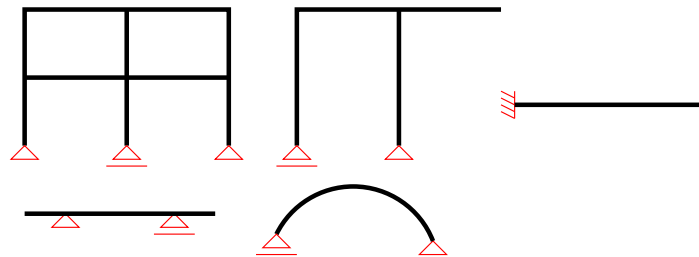
1. konstrukce je staticky určitá nebo neurčitá,
2. vazby nezajišťují nehybnost tělesa (nevhodné uspořádání).

Tyto případy nazýváme **výjimkové případy**, např. obr. 3.5.10.



Obrázek 3.16: Výjimečné případy podepření

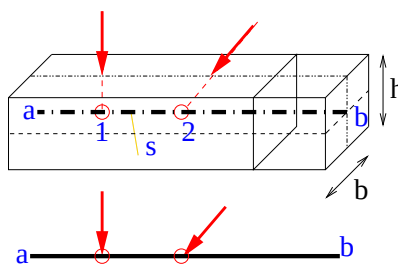
3.6 Prutové konstrukce



Obrázek 3.17: Příklady prutových konstrukcí

- Nejčastější nosné stavební konstrukce.
- Pro výpočet idealizujeme: řešíme osově jako schéma.
- V tomto semestru: **jen staticky určité**.

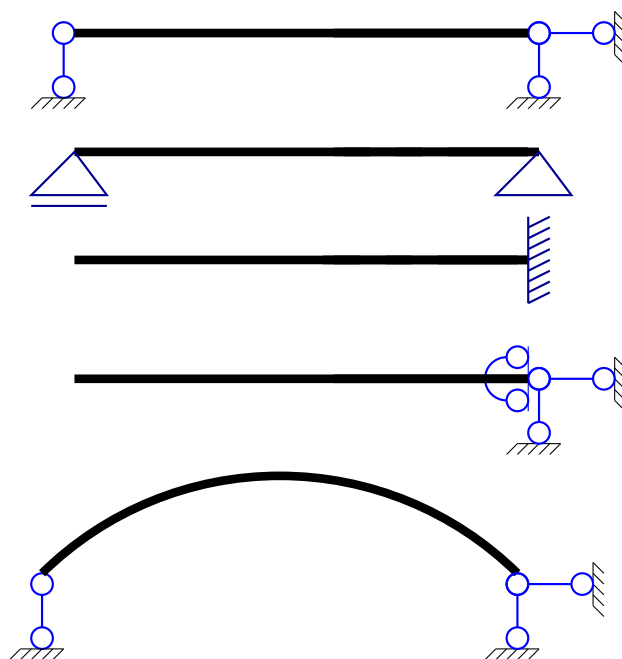
3.6.1 Prut – geometrický popis



Obrázek 3.18: Příklady prutových konstrukcí

- s - řídící čára (**střednice**, u přímého prutu také **osa prutu**)
- b, h - šířka a výška **průřezu prutu**
- $1, 2$ - **působíště sil**

3.7 Kinematicky a staticky určité prutové konstrukce (příklady)



Obrázek 3.19: Příklady prutových konstrukcí

Kapitola 4

Výpočet reakcí nosníků

Je-li nosník uložen a zatížen, pak ve vazbách vznikají silové účinky – reakce. Ty jsou důsledkem skutečnosti, že v místech vazeb je bráněno posunům nebo pootočením. Konstrukce působí na vazbu a ve vazbě působí síla nebo moment stejné velikosti, ale opačné orientace – **reakce**.

Zpravidla počítáme tyto reakce.

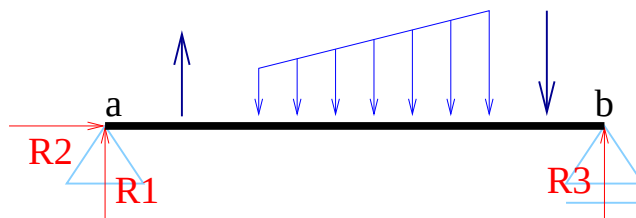
4.1 Podmínky rovnováhy uvolněného prutu v rovině

Protože stavební konstrukce jsou **statické** nepohybují se, síly a momenty působící na takovou konstrukci musí být **v rovnováze**.

Tedy výsledný účinek všech sil působících na takovou konstrukci (tedy silová i momentová výslednice všech zatížení a reakcí) musí být nulový.

To platí i pro nosník – prut:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n F_{i,x} &= 0 \\ \sum_{j=1}^m F_{j,z} &= 0 \\ \sum_{k=1}^g M_{k,a} &= 0\end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Příklad prutu se zatížením a reakcemi

4.2 Postup stanovení reakcí nosníku

Je třeba provést následující kroky:

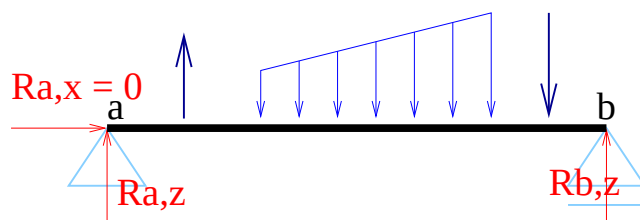
- **vždy** ověříme, zda je nosník opravdu **staticky určitý**
- z podmínek rovnováhy, zpravidla ($\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0$, $\sum_{j=1}^m F_{j,z} = 0$, $\sum_{k=1}^g M_{k,a} = 0$) vyjádříme neznámé reakce.

Je třeba mít na paměti:

- máme k dispozici vždy tři (3) podmínky rovnováhy, můžeme použít i 2 momentové a 1 silovou, je-li to vhodné.
- momentové podmínky píšeme pro působiště reakcí (reakce v tomto místě z rovnice vypadnou)

4.3 Stanovení reakcí nosníku 1

Jen svislé zatížení, **prostý nosník**.



$$R_{a,x} = 0,$$

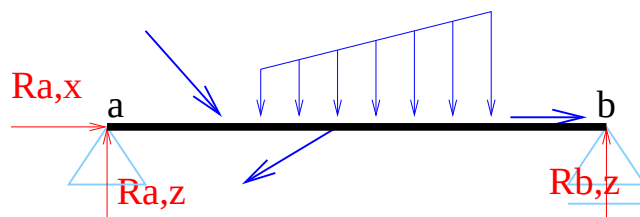
$$\sum_{j=1}^m M_{j,a} = 0 \rightarrow R_{b,z},$$

$$\sum_{k=1}^g M_{k,b} = 0 \rightarrow R_{a,z}$$

Kontrola:

$$\sum_{i=1}^m F_{i,z} = 0$$

4.4 Stanovení reakcí nosníku 2



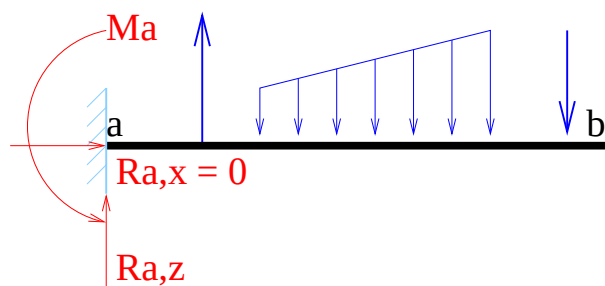
$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0 \rightarrow R_{a,x}$$

$$\sum_{j=1}^m M_{j,a} = 0 \rightarrow R_{b,z},$$

$$\sum_{k=1}^g M_{k,b} = 0 \rightarrow R_{a,z}$$

Kontrola:
 $\sum_{i=1}^m F_{i,z} = 0$

4.5 Stanovení reakcí nosníku 3

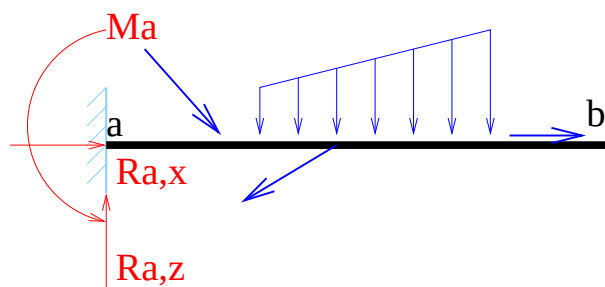


$$R_{a,x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^m F_{i,z} = 0 \rightarrow R_{a,z}$$

$$\sum_{k=1}^g M_{k,a} = 0 \rightarrow M_a$$

4.6 Stanovení reakcí nosníku 4

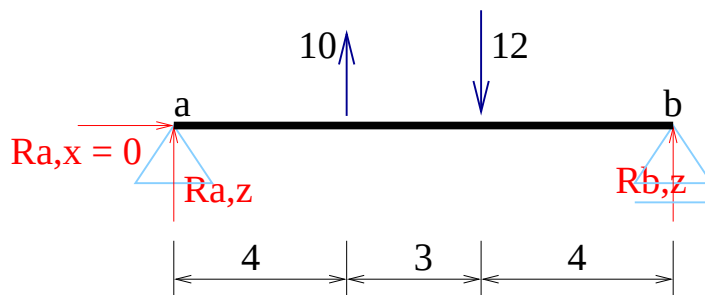


$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0 \rightarrow R_{a,x}$$

$$\sum_{i=1}^m F_{i,z} = 0 \rightarrow R_{a,z}$$

$$\sum_{k=1}^g M_{k,a} = 0 \rightarrow M_a$$

4.7 Příklad stanovení reakcí nosníku



Vodorovné reakce (není zde žádné zatížení ve směru X):

$$\sum R_{i,x} = 0: \quad R_{a,x} + 0 = 0$$

Svislé reakce:

$$\sum M_{i,a} = 0: \quad 4 \times 10 - 7 \times 12 + 11 \times R_{b,z} = 0$$

$$R_{b,z} = \frac{-4 \times 10 + 7 \times 12}{11} = 4 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{k,b} = 0: \quad 11 \times R_{a,z} + 7 \times 10 - 4 \times 12 = 0$$

$$R_{a,z} = \frac{-7 \times 10 + 4 \times 12}{11} = -2 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum F_{i,z} = 0: \quad R_{a,z} + (10 - 12) + R_{b,z} = 4 + 10 - 12 - 2 = 0$$

Kontrola: $\sum F_{i,z} = 0$:

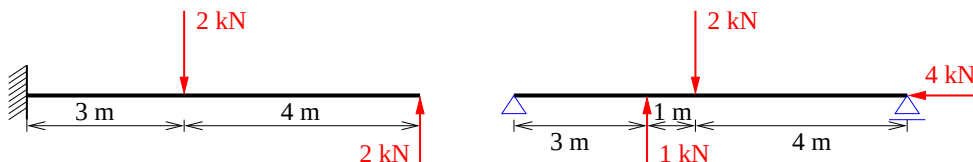
$$R_{a,z} + (10 - 12) + R_{b,z} = 4 + 10 - 12 - 2 = 0 \Rightarrow \text{kontrola vyšla!}$$

4.7.1 Shrnutí

V kapitole byly probrány okrajové podmínky – podpory a reakce v podporách a byl popsán postup, jak tyto reakce stanovovat na staticky určitých nosnících.

4.7.2 Otázky k procvičení

- Stanovte reakce zakreslených nosníků:

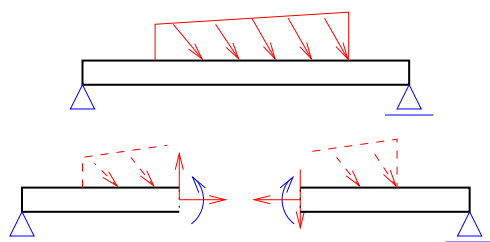


Kapitola 5

Vnitřní síly nosníku

Vnější zatížení vyvolává účinky „uvnitř“ konstrukce (nosníku) – **vnitřní síly**.
Tedy vnitřní síly působí „proti“ účinkům zatížení.

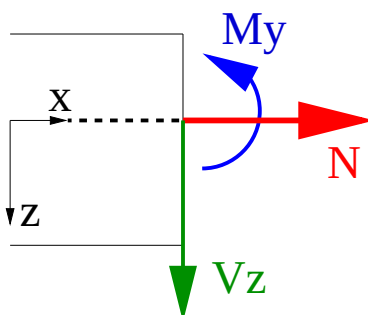
Pro představu myšleně „rozřízneme“ nosník:



Obrázek 5.1: Vnitřní síly nosníku

Síly v „řezu“: viz výslednice rovinné soustavy sil.

5.1 Rovinný nosník (2D, rovina XZ)



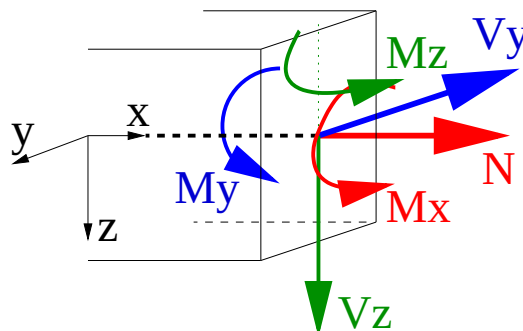
Obrázek 5.2: Vnitřní síly nosníku

- N ... normálová síla
- V (V_z) ... posouvající síla
- M (M_y) ... ohybový moment

Celkem 2 síly a 1 moment.

Stejně tak je možné počítat rovinný nosník pro rovinu XY (N , V_y , M_z).

5.2 Prostorový nosník (3D)

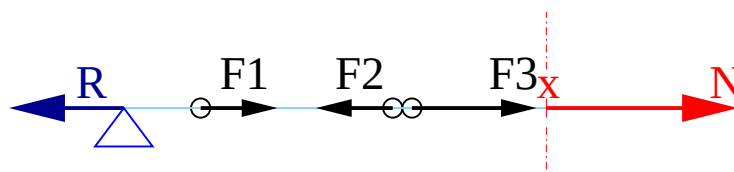


Obrázek 5.3: Vnitřní síly nosníku ve 3D

- N ... normálová síla
- V_y , V_z ... posouvající síly
- M_x ... krouticí moment
- M_y , M_z ... ohybové momenty

Celkem 3 síly a 3 momenty (**6** vnitřních sil).

5.3 Normálová síla (osová úloha)



Obrázek 5.4: Normálová síla

$$N = \sum F_{i,x}$$

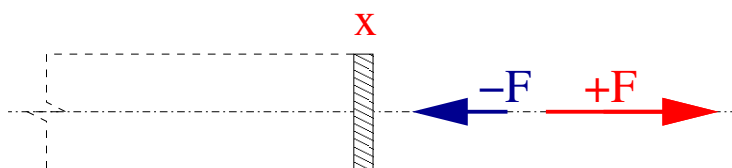
Normálová síla v průřezu x se určí jako výslednice všech osových sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

5.3.1 Normálová síla – znaménka

Síla je **kladná** – tahová, působí-li **od** sledovaného průřezu.

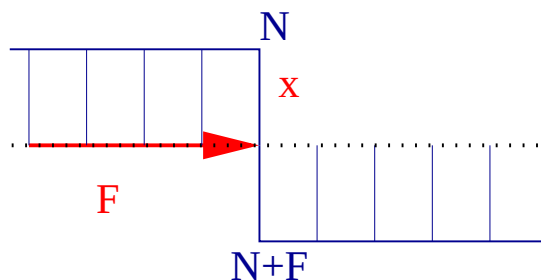
Síla je **záporná** – tlaková, působí-li **k** sledovanému průřezu.



Obrázek 5.5: Normálová síla – konvence

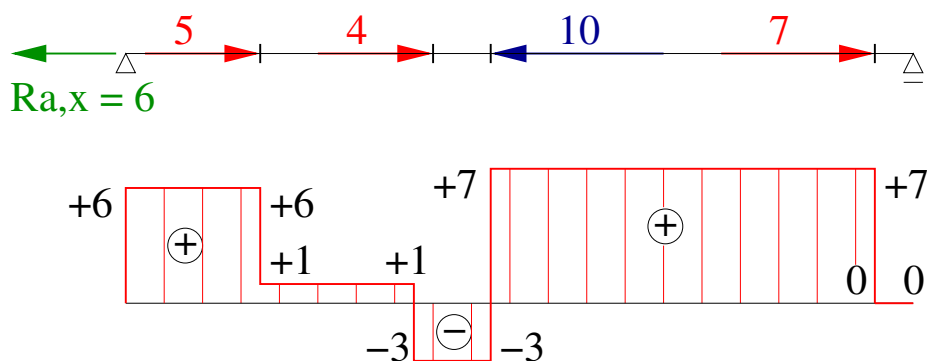
5.3.2 Normálová síla – síla v průřezu

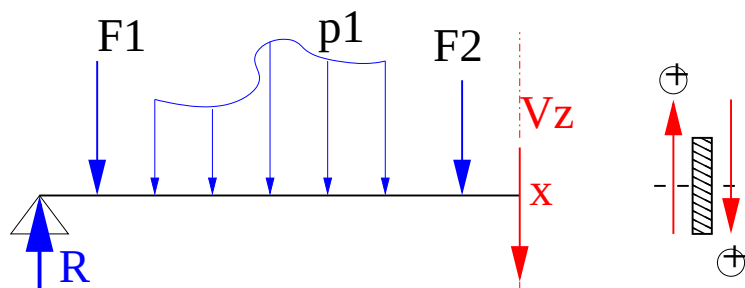
Působí-li zatížení právě ve sledovaném průřezu, pak v něm stanovujeme dvě hodnoty - **před** (N) a **za** ($N+F$) silou.



Obrázek 5.6: Normálová síla v průřezu

5.3.3 Normálová síla – příklad





Obrázek 5.7: Posouvající síla

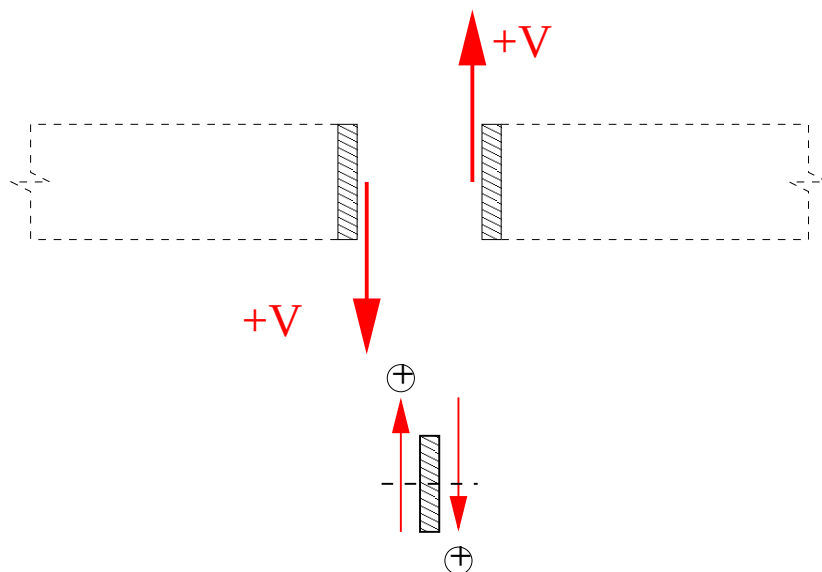
5.4 Posouvající síla

$$V_z(x) = v(x) = \sum F_{i,z}$$

Posouvající síla v průřezu x se určí jako výslednice všech příčných sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

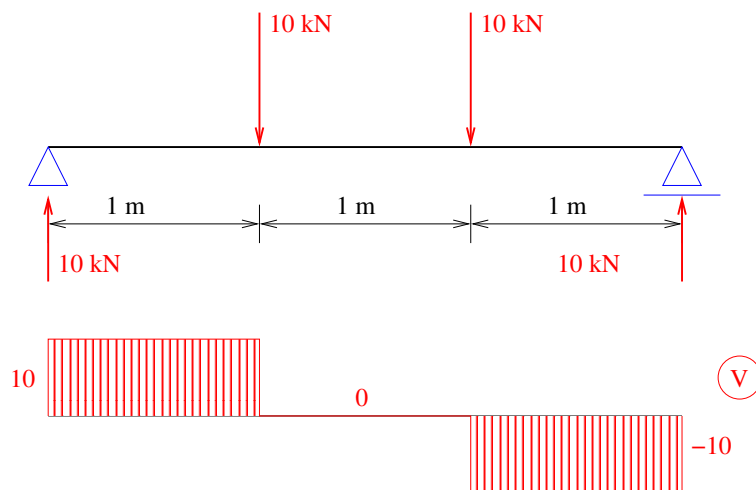
Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

5.4.1 Posouvající síla – konvence

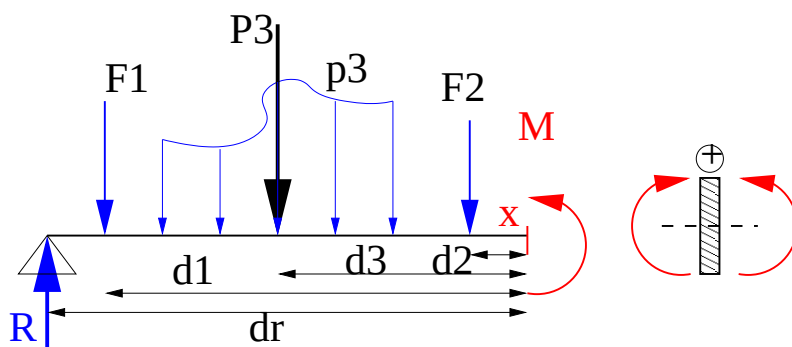


Obrázek 5.8: Posouvající síla – konvence

5.4.2 Posouvající síla – příklad



5.5 Ohybový moment



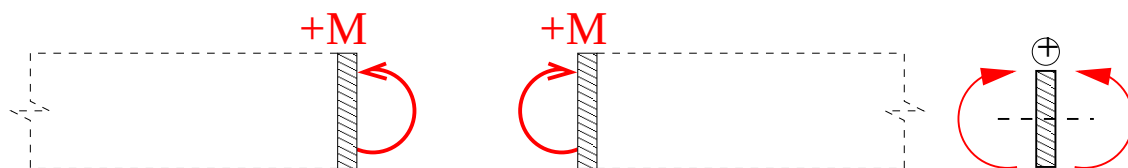
Obrázek 5.9: Ohybový moment

$$M_y(x) = M(x) = \sum F_{i,z} d_i$$

Ohybový moment v průřezu x se určí jako součet momentů všech příčných sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

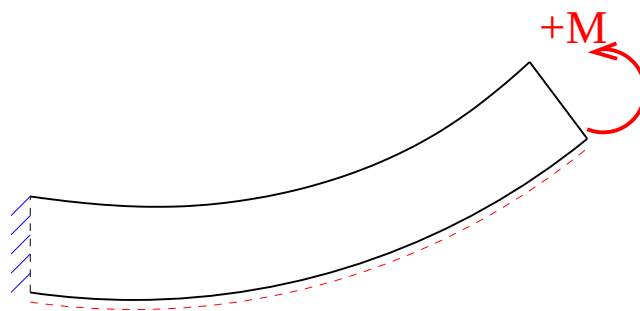
Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

5.5.1 Ohybový moment – konvence



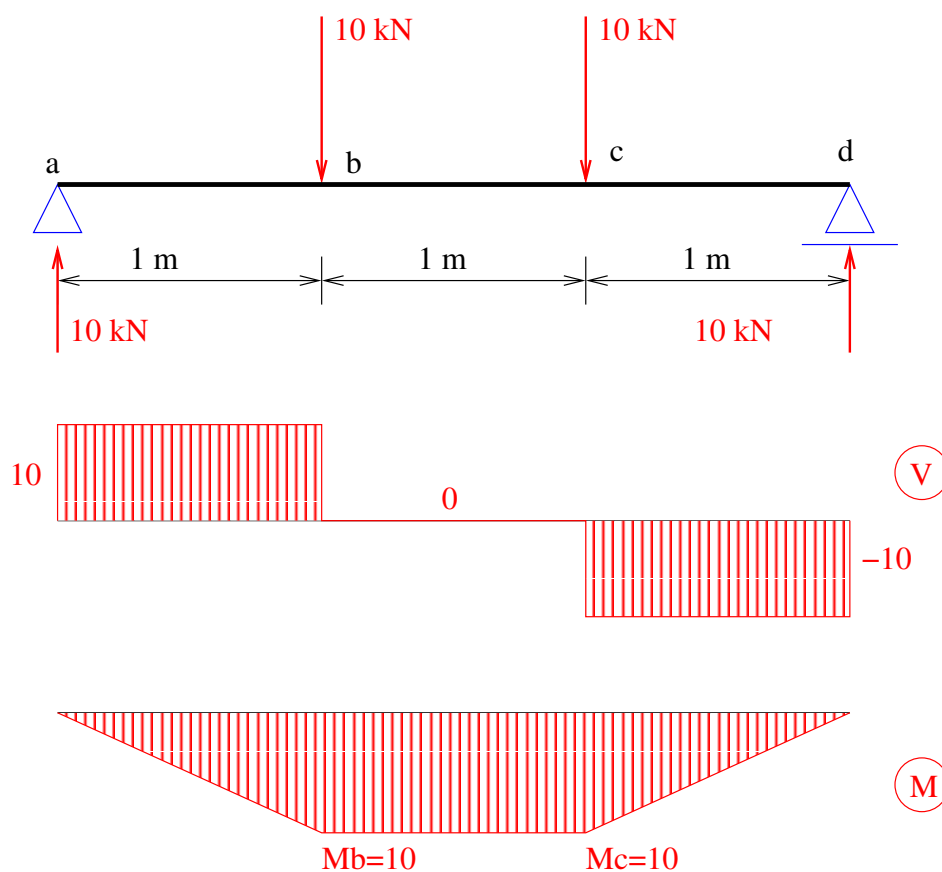
Obrázek 5.10: Ohybový moment – konvence

Ohybový moment se považuje za **kladný**, pokud vyvozuje **tah** ve **spodních vláknech** nosníku, viz obr 5.5.1.



Obrázek 5.11: Ohybový moment – vysvětlení konvence

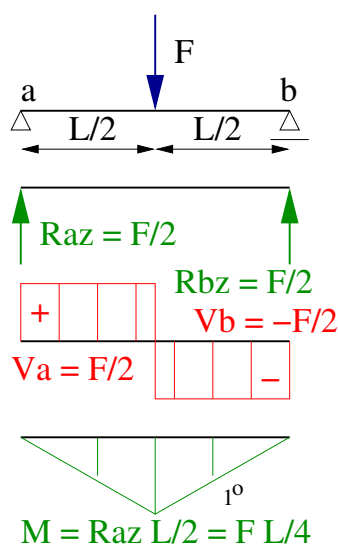
5.5.2 Ohybový moment – příklad



$$M = \sum_0^x F_i \times d_i \quad [kNm]$$

$$\begin{aligned}
M_b &= R_{a,z} d_{ab} = 10 \times 1 \\
&= 10 \text{ kNm} \\
M_c &= R_{a,z} d_{ac} - 10 d_{bc} \\
&= 10 \times 2 - 10 \times 1 = 10 \text{ kNm} \\
M_d &= R_{a,z} d_{ad} - 10 d_{bd} - 10 d_{cd} \\
&= 10 \times 3 - 10 \times 2 - 10 \times 1 \\
&= 0 \text{ kNm}
\end{aligned}$$

5.6 Příklad výpočtu M a V



Reakce (z podm. rovnováhy):

$$\begin{aligned}
R_{az} &= \frac{F}{2}(\uparrow) \\
R_{bz} &= \frac{F}{2}(\uparrow)
\end{aligned}$$

Posouvající síla:

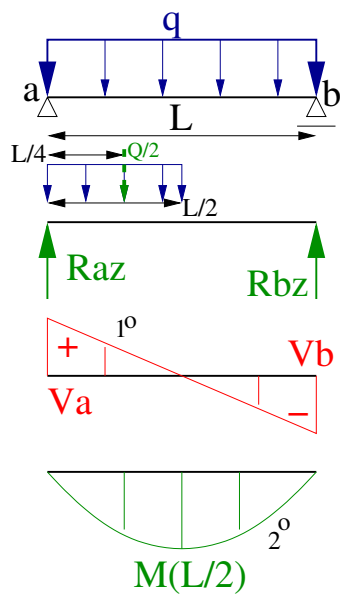
$$\begin{aligned}
V_a &= +\frac{F}{2} \\
V_b &= -\frac{F}{2} \\
V(L/2)^L &= +\frac{F}{2} \\
V(L/2)^P &= -\frac{F}{2}
\end{aligned}$$

Moment:

$$M(L/2) = R_{az} \frac{L}{2} = \frac{FL}{4}$$

Reakce (z podm. rovnováhy):

$$\begin{aligned}
R_{az} &= \frac{Q}{2} = \frac{qL}{2}(\uparrow) \\
R_{bz} &= \frac{Q}{2} = \frac{qL}{2}(\uparrow)
\end{aligned}$$



Posouvající síla:

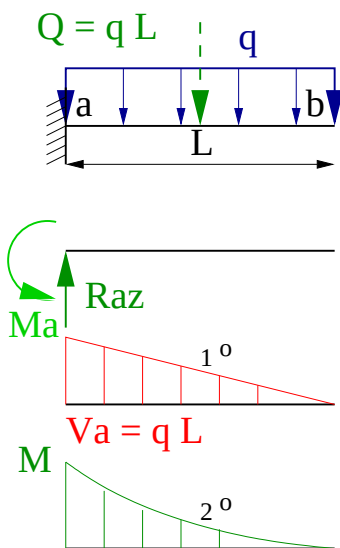
$$V_a = +\frac{qL}{2}$$

$$V_b = -\frac{qL}{2}$$

Moment:

$$M(L/2) = R_{az} \frac{L}{2} - \frac{L}{2} q \frac{L}{4} =$$

$$= q \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{8} q = \frac{1}{8} q L^2$$



Reakce (z podm. rovnováhy):

$$R_{az} = Q = qL (\uparrow)$$

$$M_a = Q L \frac{1}{2} = \frac{qL^2}{2}$$

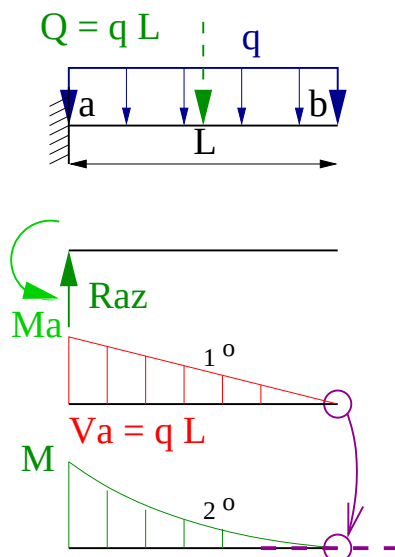
Posouvající síla:

$$V_a = +R_{az} = q L$$

Moment:

$$M(x) = -M_a + R_a x - q x \frac{x}{2}$$

5.6.1 Extrémní hodnota momentu



Extrém M:

- v místě **b**: $V_b = 0$,
- M zde má vodorovnou tečnu,
- i nula je extrém (M_a je záporné, 0 je větší než záporné číslo),
- ale i M_a je důležité! (největší záporný moment na nosníku).

5.7 Vztah V a M

Jistě jste si všimli, že extrémní (minimální nebo maximální) ohybový moment **M** nastává v místech, kde je posouvající síla **V** rovna **nule**.

Příště si ukážeme, že to není náhoda a vysvětlíme si proč (a vy mi to pak u zkoušky zopakujete...).

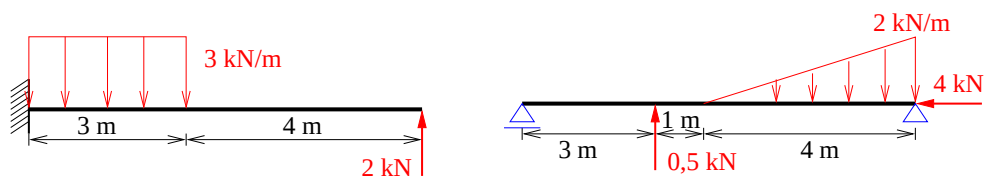
Připomeňte si proto, prosím, derivační a integrační počet.

5.7.1 Shrnutí

V kapitole byly probrány vnitřní síly nosníků a byl popsán postup, jak je stanovovat na staticky určitých nosnících.

5.7.2 Otázky k procvičení

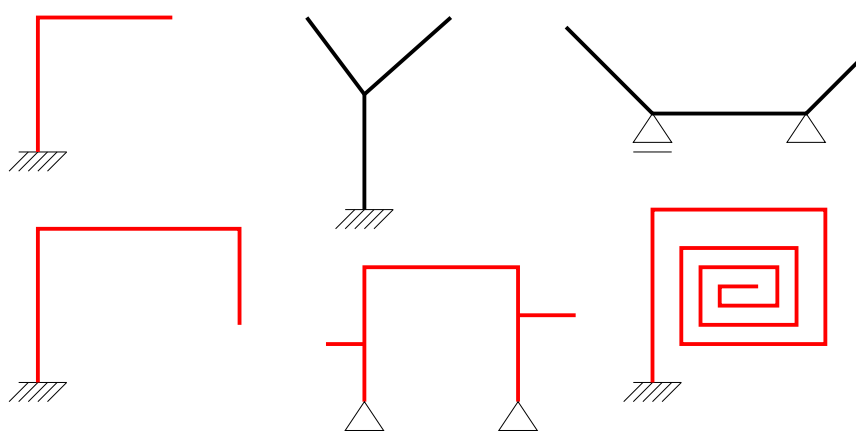
- Stanovte vnitřní síly zakreslených nosníků:



Kapitola 6

Lomený nosník – rám

6.1 Ukázky lomených nosníků



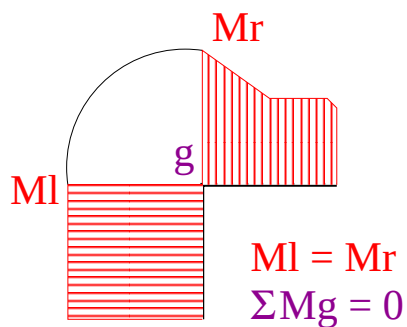
Obrázek 6.1: Ukázky lomených nosníků

V této kapitole budeme řešit jen **pravoúhlé** (v obrázku červené).
Základní předpoklady:

- opět tuhá deska (čára),
- staticky určitý lomený nosník se řeší shodně s nosníkem přímým (šikmým),
- N se počítají **v ose** každého prutu,
- V se počítají **kolmo na osu** každého prutu.

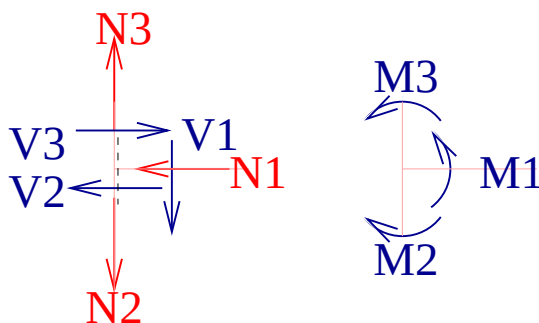
6.2 Přenos momentů ve styčnicku

Ve styčnicku musí platit podmínka silové i **momentové** rovnováhy. Při znalosti momentu na jednom nosníku tak známe i velikost a orientaci momentu na druhém nosníku. Slangově se tento postup označuje jako „přenos momentů ve styčnicku.“



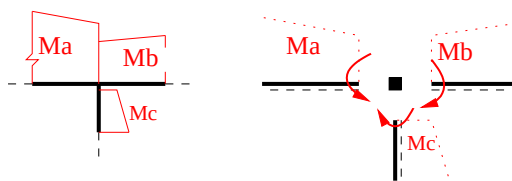
Obrázek 6.2: Momenty ve styčnicku se 2 pruty

6.3 Podmínky rovnováhy ve styčnicku



Obrázek 6.3: Momenty ve styčnicku se 3 pruty

$$\sum F_{i,x} = 0, \quad \sum F_{i,z} = 0, \quad \sum M_i = 0$$

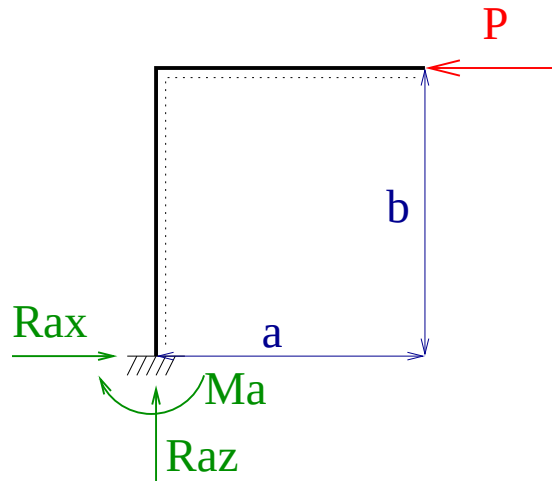


Obrázek 6.4: Momenty ve styčnicku

$$\begin{aligned} \sum M_i &= 0 \\ M_a - M_b - M_c &= 0 \end{aligned}$$

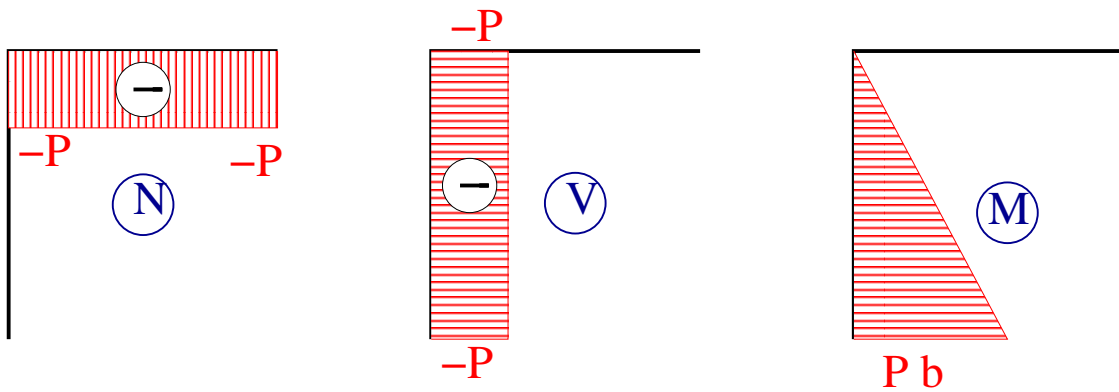
6.4 Lomený nosník – příklad 1

$$\sum M_{i,a} = 0 : M_a - P b = 0 \Rightarrow M_a = P b$$



$$\sum F_{i,x} = 0 : R_{a,x} - P = 0 \Rightarrow R_{a,x} = P$$

$$\sum F_{i,z} = 0 : R_{a,z} - 0 = 0 \Rightarrow R_{a,z} = 0$$



6.5 Lomený nosník – příklad 2

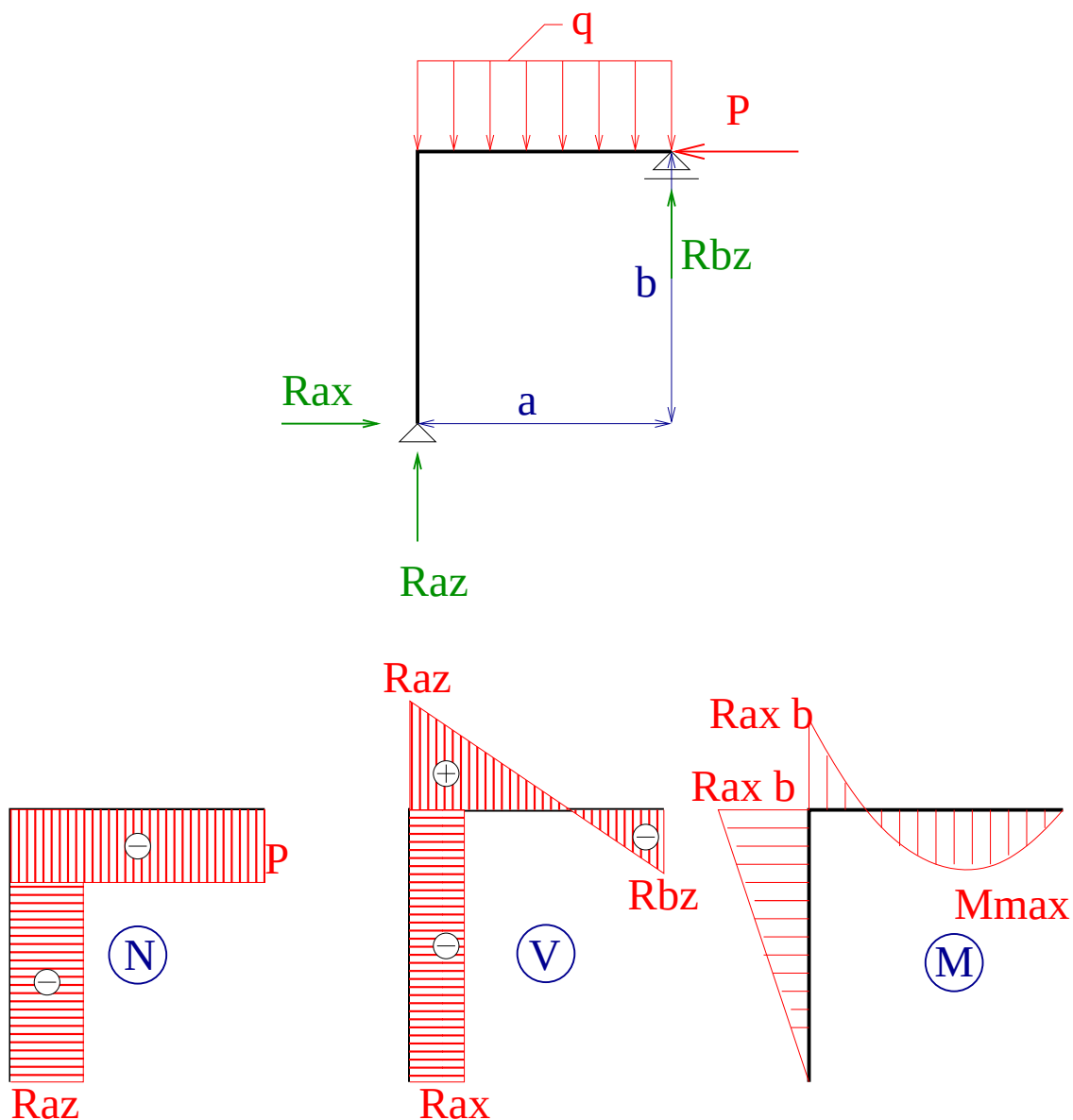
$$\sum F_{i,x} = 0 : R_{a,x} - P = 0 \Rightarrow R_{a,x} = P$$

$$\sum M_{i,a} = 0 : P b - \frac{a^2 q}{2} + a R_{b,z} = 0 \Rightarrow$$

$$R_{b,z} = \frac{\frac{a^2 q}{2} - P b}{a} \quad (\uparrow)$$

$$\sum M_{b,i} = 0 : R_{a,x} b - R_{a,z} a + \frac{a^2 q}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$R_{b,z} = \frac{R_{a,x} b + \frac{a^2 q}{2}}{b} \quad (\uparrow)$$



6.6 Lomený nosník – příklad 3

Stanovte reakce a vnitřní síly uvedeného staticky určitého lomeného nosníku.

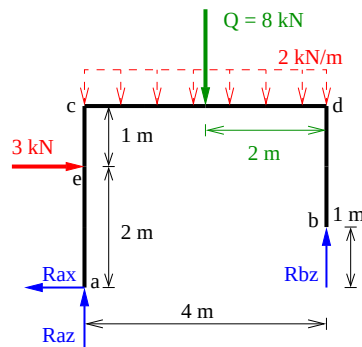
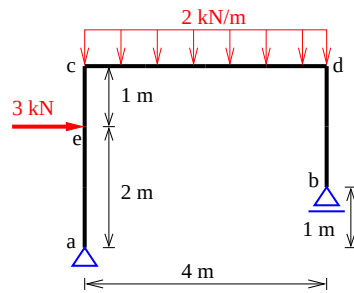
Pozor: podpory **a** a **b** nejsou ve stejné výšce.

Náhradní břemeno:

$$Q = q \times L = 2 \times 4 = 8 \text{ kN}$$

Vodorovná reakce:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{i,x} &= 0 : \\ 3 - R_{ax} &= 0 \\ R_{ax} &= 3 \text{ kN} (\leftarrow) \end{aligned}$$



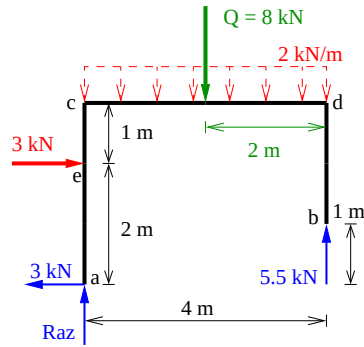
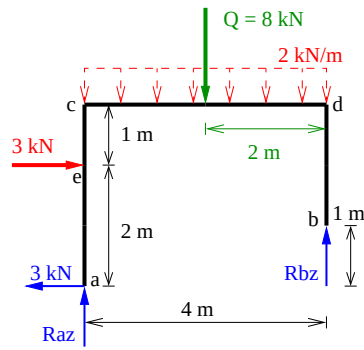
Momentová podmínka k bodu **a**:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n M_{i,a} &= 0 : \\ -3 \times 2 - 8 \times 2 + R_{bz} \times 4 &= 0 \\ R_{bz} &= \frac{1}{4}(3 \times 2 + 8 \times 2) \\ R_{bz} &= \frac{22}{4} = 5,5 \text{ kN}(\uparrow)\end{aligned}$$

Momentová podmínka k bodu **b**:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n M_{i,a} &= 0 : \\ -R_{ax} \times 1 - R_{az} \times 4 - 3 \times 1 + 8 \times 2 &= 0 \\ -3 \times 1 - R_{az} \times 4 - 3 \times 1 + 8 \times 2 &= 0 \\ R_{az} &= \frac{1}{4}(3 \times 1 - 3 \times 1 + 8 \times 2) \\ R_{az} &= \frac{10}{4} = 2,5 \text{ kN}(\uparrow)\end{aligned}$$

Pozn.: podpory nejsou ve stejné výšce, tedy i vodorovná reakce R_{ax} vyvozuje moment k bodu **b**!



Kontrola:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0 :$$

$$-R_{az} - R_{bz} + 8 = 0$$

$$-2,5 - 5,5 + 8 = 0$$

$$0 = 0$$

Kontrola vyšla!

$$\frac{x}{2,5} = \frac{4}{8} \Rightarrow x = 2,5 \times \frac{4}{8} = 1,25 \text{ m}$$

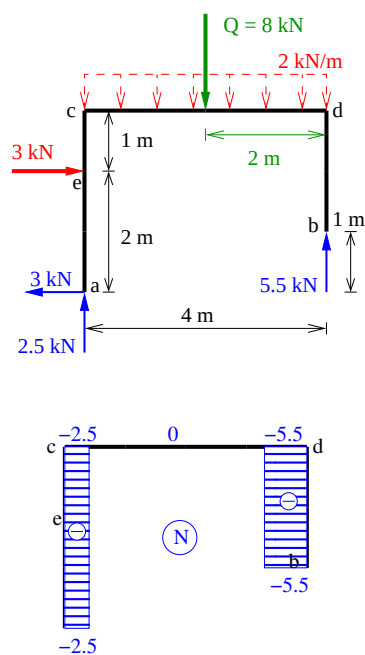
Ohybové momenty:

Ohybové momenty – $M_x = M_{max}$:

$$M_x = (4 - x) \times R_{b,z} - q \times (4 - x) \times \frac{4 - x}{2}$$

$$M_x = (4 - 1,25) \times 5,5 - 2 \times \frac{(4 - 1,25)^2}{2}$$

$$M_x = M_{max} = 7,56 \text{ kNm}$$

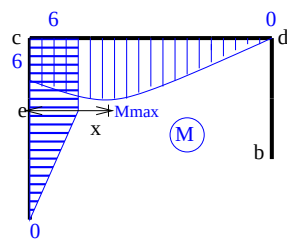
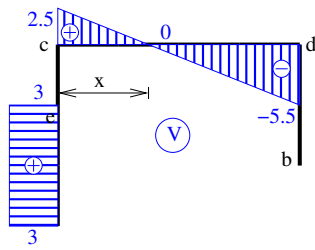


6.6.1 Shrnutí

V kapitole byly rozdíly v řešení lomených nosníků oproti nosníkům přímým, zejména nutnost ověření rovnováhy sil a momentů ve styčnicích.

6.6.2 Otázky k procvičení

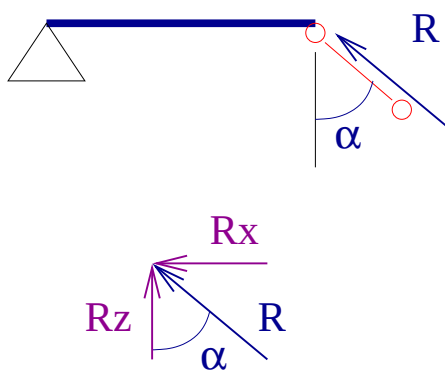
- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení $4x$, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.



Kapitola 7

Nosníky s šikmým podepřením

7.1 Nosník se šikmým podepřením



Obrázek 7.1: Nosník se šikmým podepřením

- Šikmou podporu R rozložíme na složky:

$$R_x = R \sin \alpha$$

$$R_z = R \cos \alpha$$

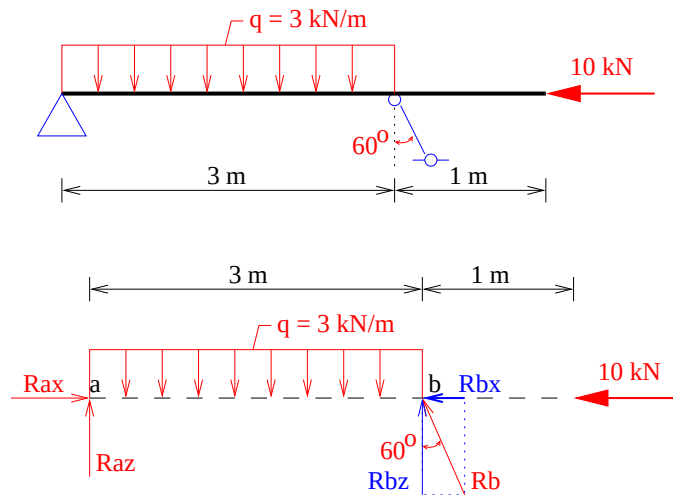
- Stanovíme R_x a R_y obvyklým způsobem ($\sum M_i = 0$ apod.)
- spočteme R

7.2 Nosník se šikmým podepřením: příklad

Stanovte reakce a vnitřní síly zadaného nosníku:

Rozklad reakce R_b :

$$R_{bx} = R \sin 60^\circ, \quad R_{bz} = R \cos 60^\circ.$$



Momentová podmínka k bodu a :

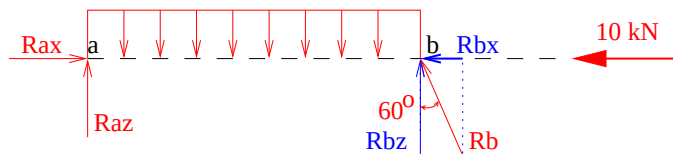
$$\begin{aligned}\sum M_{ia} = 0 : R_{bz} \times 3 - q \times 3 \times \frac{3}{2} &= 0 \\ R_b \cos(60^\circ) \times 3 - 3 \times 3 \times 1.5 &= 0 \Rightarrow R_b = 9 \text{ kN } (\uparrow)\end{aligned}$$

Momentová podmínka k bodu b :

$$\begin{aligned}\sum M_{ib} = 0 : -R_{az} \times 3 + q \times 3 \times \frac{3}{2} &= 0 \\ -R_{az} \times 3 + 3 \times 3 \times 1.5 &= 0 \Rightarrow R_{az} = 4.5 \text{ kN } (\uparrow)\end{aligned}$$

Kontrola svislých reakcí pomocí $\sum F_{iz} = 0$:

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} = 0 : -R_{az} - R_b \cos(60^\circ) + q \times 3 &= 0 \\ -4.5 - 9 \times \cos(60^\circ) + 3 \times 3 &= -4.5 - 4.5 + 9 = 0\end{aligned}$$



Výpočet vodorovných reakcí:

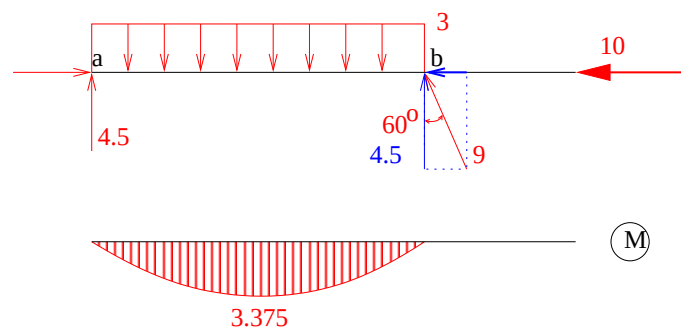
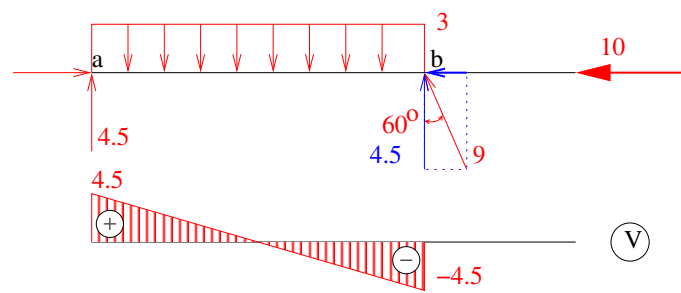
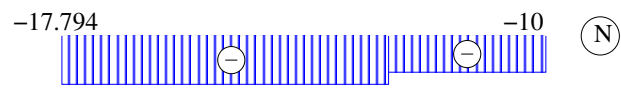
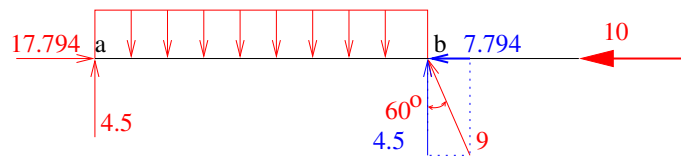
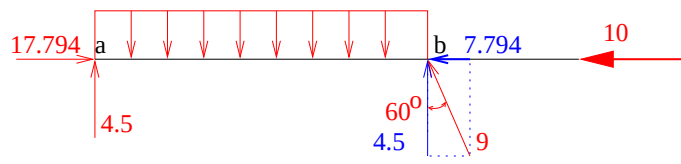
$$\begin{aligned}R_{bx} &= R_b \times \sin(60^\circ) = 9 \times \sin(60^\circ) = 7.794 \text{ kN } (\leftarrow) \\ \sum F_{ix} = 0 : R_{ax} - R_{bx} - 10 &= 0 \\ R_{ax} - 7.794 - 10 &= 0 \Rightarrow R_{ax} = 17.794 \text{ kN } (\rightarrow)\end{aligned}$$

Výpočet N , V , M je shodný s jakýmkoli jiným nosníkem.

Normálové síly:

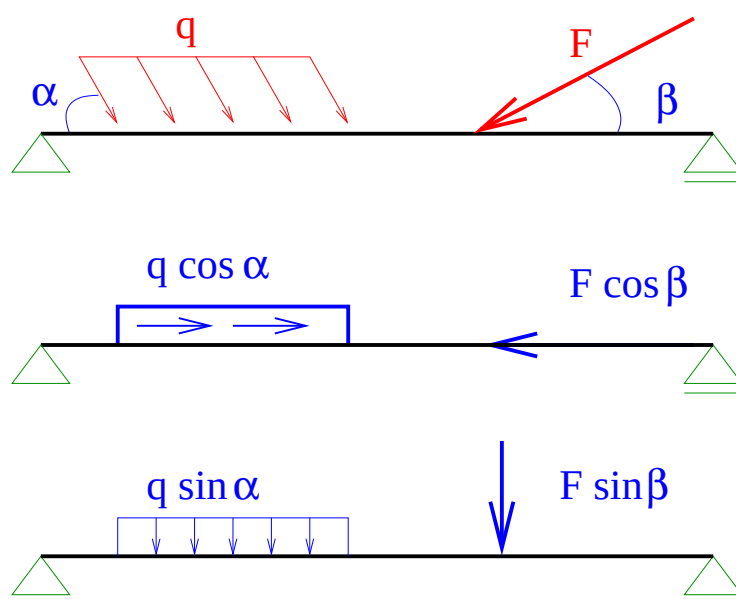
Posouvající síly:

Ohybové momenty ($M_{max} = \frac{1}{8} q L^2$):



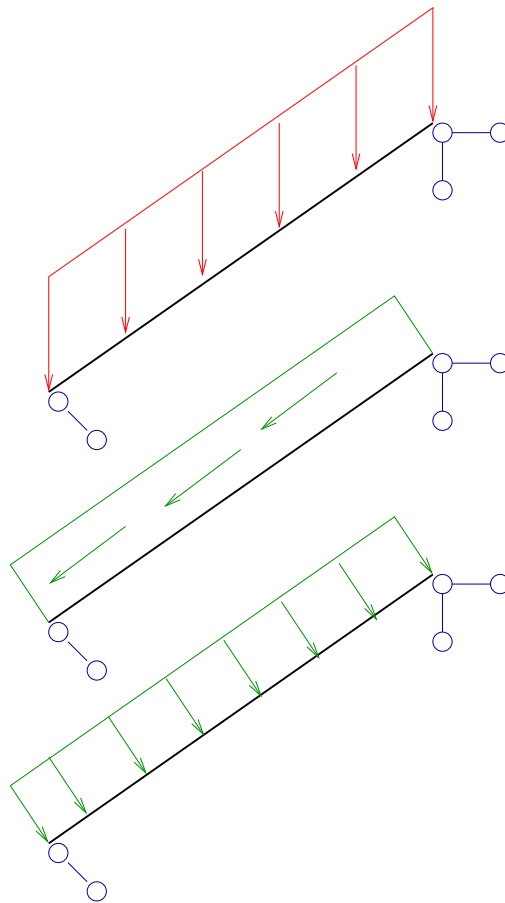
Kapitola 8

Nosníky se šikmým zatížením



Zatížení rozložíme do směrů X a Z a dále počítáme normálně.

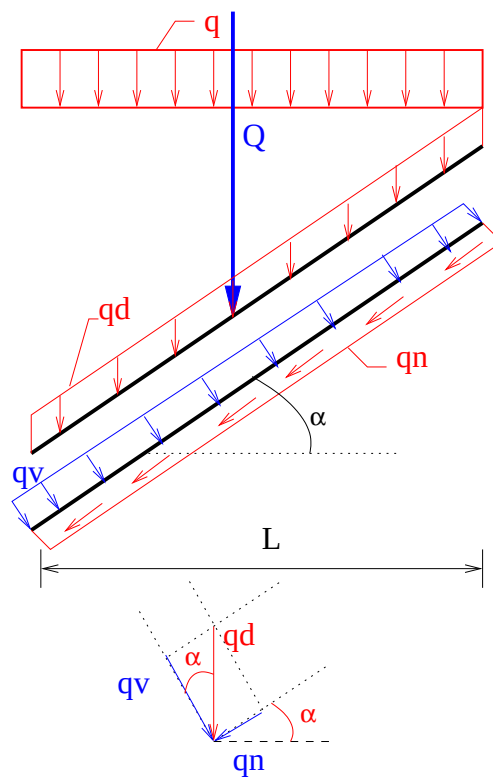
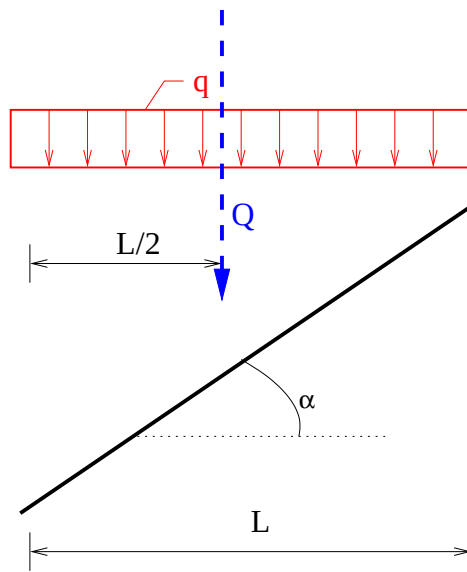
- Například prvky střešních konstrukcí.
- Řešíme rozkladem sil a následným výpočtem jako každého jiného nosníku.
- Obvykle prvky střešních konstrukcí.
- Zatížení **na průmět**: zjednodušený model zatížení sněhem.
- Náhradní břemeno $Q = q \times L$ (!)
- Zatížení **na průmět**: zjednodušený model zatížení sněhem.



$$qd = q \cos \alpha$$

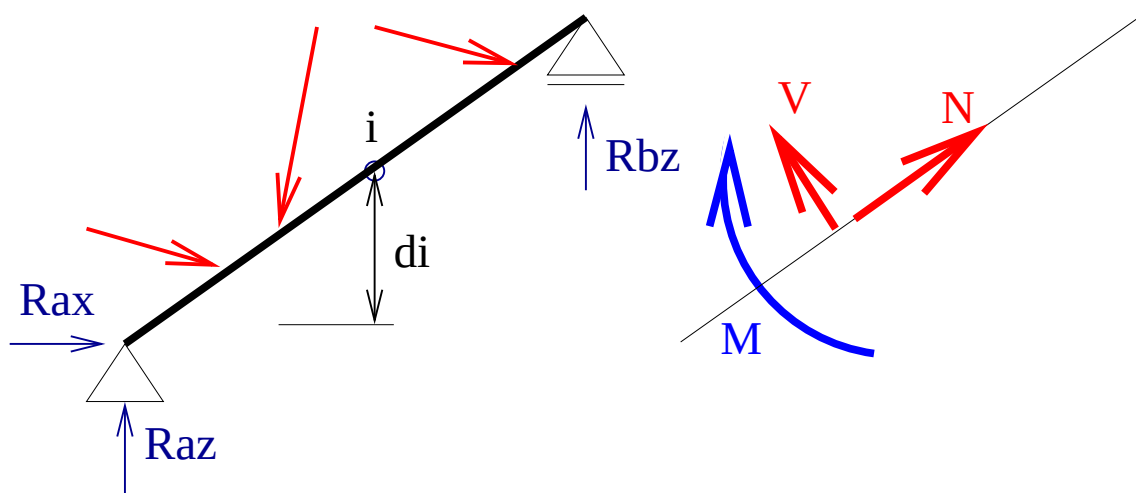
$$qv = qd \cos \alpha = q \cos^2 \alpha$$

$$qn = qd \sin \alpha = q \sin \alpha \cos \alpha$$



Kapitola 9

Šikmý nosník

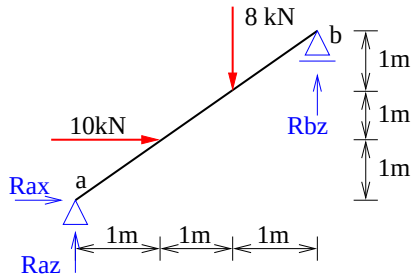


Obrázek 9.1: Šikmý nosník

- Reakce spočteme z podmínek rovnováhy ($\sum M_{i,a} = 0$ aj.)
- Pozor – i vodorovná reakce může vyvolat moment (její působíště **neleží** na přímce procházející žádným dalším bodem nosníku)
- Spočtené reakce rozložíme do směrů rovnoběžných s N a V a pokračujeme obvyklým způsobem.

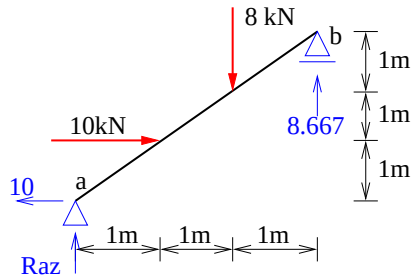
9.1 Šikmý nosník – reakce: příklad

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} = 0 : R_{ax} + 10 &= 0 \\ R_{ax} &= -10 \text{ kN} \\ R_{ax} &= 10 \text{ kN} (\leftarrow)\end{aligned}$$



$$\sum M_{ia} = 0 : -10 \times 1 - 8 \times 2 + R_{bz} \times 3 = 0$$

$$R_{bz} = \frac{10 \times 1 + 8 \times 2}{3} = 8.\overline{666} \text{ kN } (\uparrow)$$



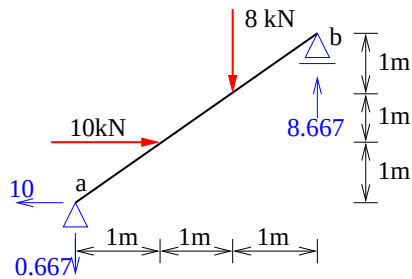
$$\sum M_{ib} = 0 : -R_{ax} \times 3 - R_{az} \times 3 + 10 \times 2 + 8 \times 1 = 0$$

$$-10 \times 3 - R_{az} \times 3 + 10 \times 2 + 8 \times 1 = 0$$

$$R_{az} = -\frac{10 \times 3 - 10 \times 2 - 8 \times 1}{3} = -0.\overline{666} \text{ kN}$$

$$R_{az} = 0.\overline{666} \text{ kN } (\downarrow)$$

(9.1)



Kontrola rovnováhy svislých sil:

$$\sum F_{iy} = 0 : R_{az} - R_{bz} + 8 = 0$$

$$0.\overline{666} - 8.\overline{666} + 8 = 0$$

Vnitřní síly (zkontrolujete samostatně):

Například:

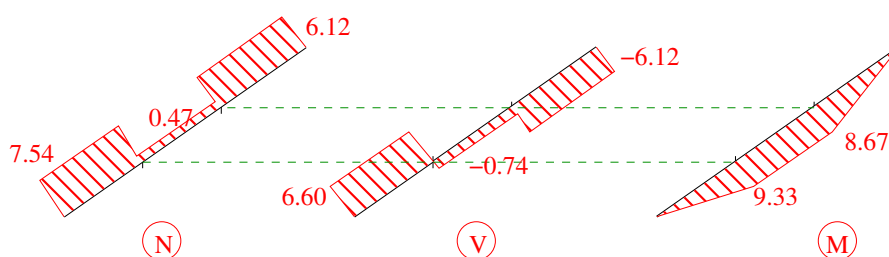
$$M_{10} = R_{ax} \times 1 - R_{az} \times 1 = 10 \times 1 - 0.667 \times 1 = 9.333 \text{ kNm}, \dots$$

9.1.1 Shrnutí

V kapitole byly rozdíly v řešení nosníků s šikmým zatížením nebo podepřením oproti nosníkům přímým.

9.1.2 Otázky k procvičení

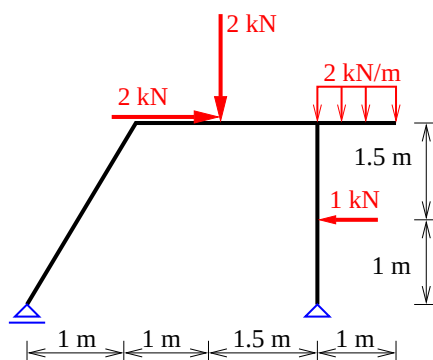
- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení $4x$, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.



Kapitola 10

Rám (lomený nosník) se šikmým prutem

K řešení takové úlohy použijeme poznatky předchozích kapitol.



Zadání:

Stanovte reakce a vnitřní síly zadaného rámu.

Řešení (jako vždy):

- výpočet reakcí
- rozložení sil na šikmém prutu
- vykreslení průběhů N , V , M

Náhradní břemeno:

$$Q = q \times L_q = 2 \times 1 = 2 \text{ kN}$$

Reakce:

$$\begin{aligned} \sum M_{i,a} &= 0 : \\ -2 \times 2,5 - 2 \times 2 - 2 \times 4 + \\ + 1 \times 1 + R_{bz} \times 3,5 &= 0 \\ R_{bz} &= 4,5714 \text{ kN } (\uparrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{i,b} &= 0 : \\ -R_{az} \times 3,5 - 2 \times 2,5 + \\ + 2 \times 1,5 - 2 \times 0,5 + 1 \times 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$R_{az} = -0,5714 \text{ kN } (\downarrow)$$

Kontrola ($\sum F_{i,z} = 0$):

$$\begin{array}{rcl} -R_{az} + R_{bz} - 2 - 2 & = & 0 \\ -0,5714 + 4.5714 - 2 - 2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Reakce vodorovná:

$$\begin{array}{rcl} \sum F_{i,x} & = & 0 : \\ R_{bx} + 1 - 2 & = & 0 \\ R_{bx} & = & 1 \text{ kN } (\leftarrow) \end{array}$$

Rozložení R_{az} :

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{atan}\left(\frac{2,5}{1}\right) = 1.190 \text{ rad} \\ \beta &= \frac{\pi}{2} - \alpha = 0.381 \text{ rad} \\ N_a &= R_{az} \times \cos(\beta) = 0,531 \text{ kN} (\swarrow) \\ V_a &= R_{az} \times \sin(\beta) = 0,212 \text{ kN} (\searrow)\end{aligned}$$

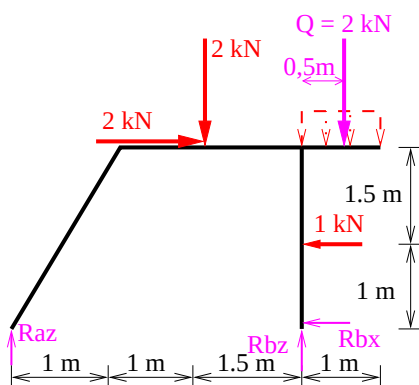
Normálové síly:

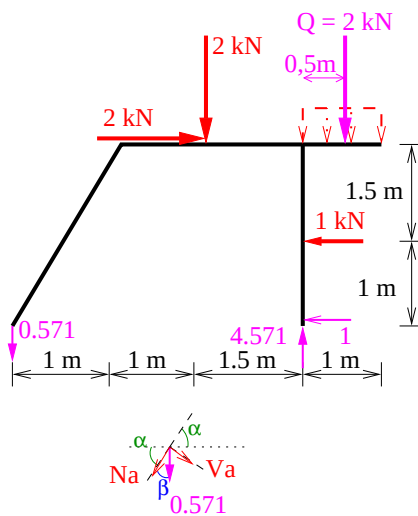
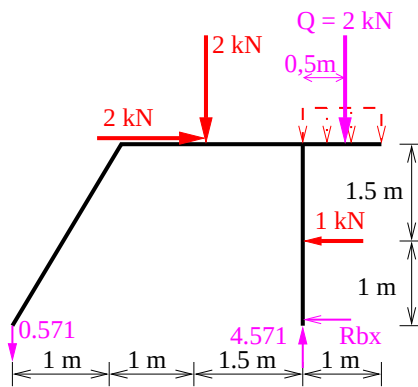
Posouvající síly:

Moment na šikmém prutu:

$$M_c = R_{qz} \times 1 = 0,571 \times 1 = 0,571 \text{ kNm}$$

Moment pod svislou silou 2 kN:





$$M_c = R_{az} \times 2 = 0,571 \times 2 = 1,142 \text{ kNm}$$

Moment v trojném styčnicku **zleva**:

$$M_d^l = R_{az} \times 2 = 0,571 \times 3,5 + 2 \times 1,5 = 5,0 \text{ kNm}$$

Moment pod silou 1 kN na svislém prutu:

$$M_e = R_{bz} \times 1 = 1 \times 1 = 1,0 \text{ kNm}$$

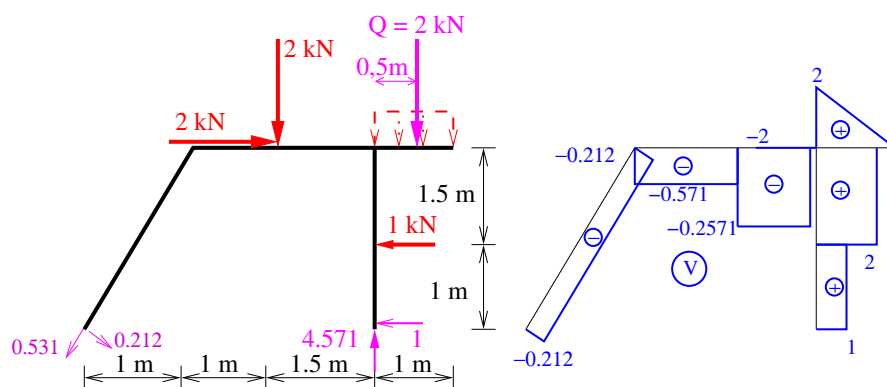
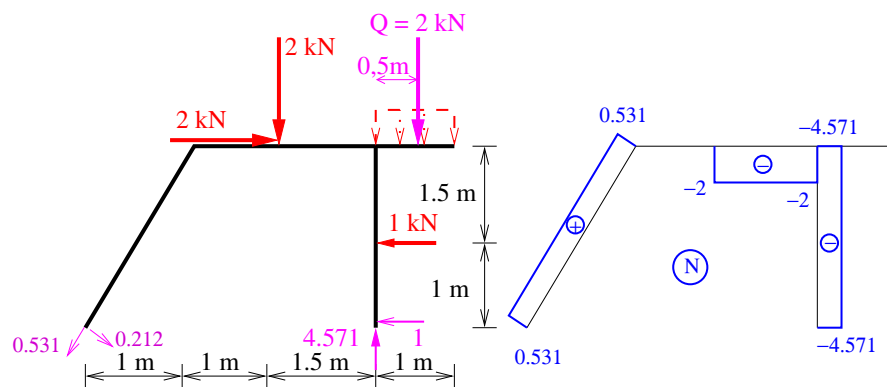
Moment v trojném styčnicku **zdola**:

$$M_d^d = R_{bz} \times 2 + 1 \times 1 = 1 \times 2 + 1 \times 1 = 4,0 \text{ kNm}$$

Momentová podmínka rovnováhy v trojném styčnicku:

$$\sum M_{i,d} = 0 : 5 - 4 - 1 = 0$$

Pozn.: Je vhodné značit smysl momentů dle konvence (točí proti směru hodin
⇒ kladný...).

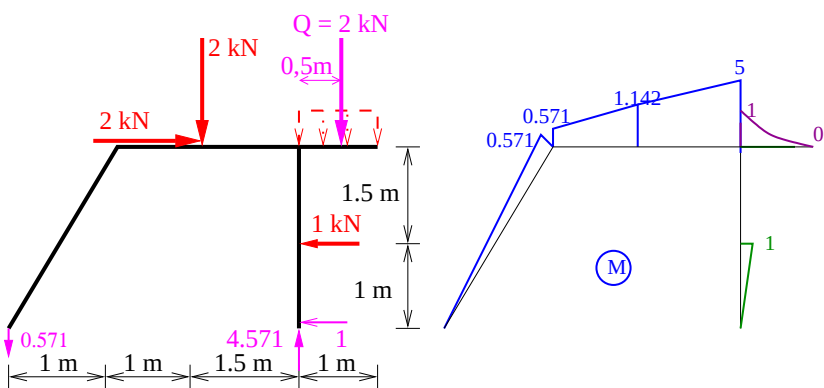
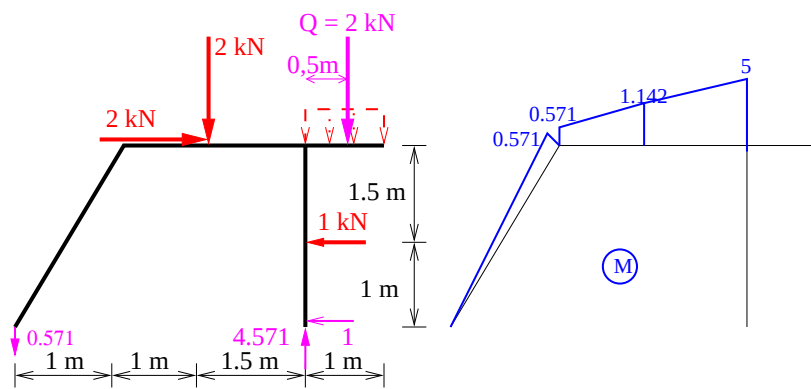
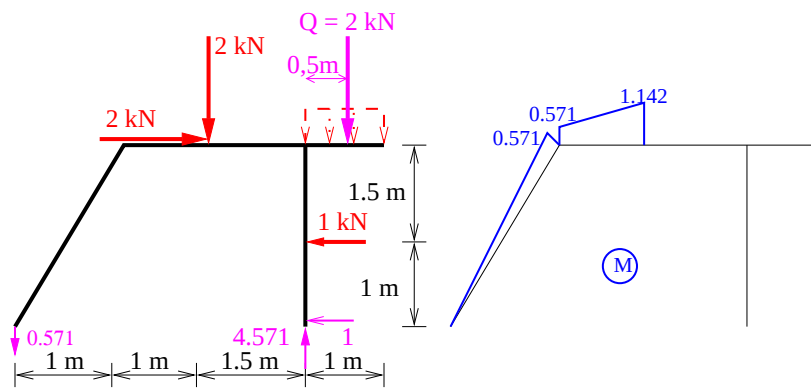
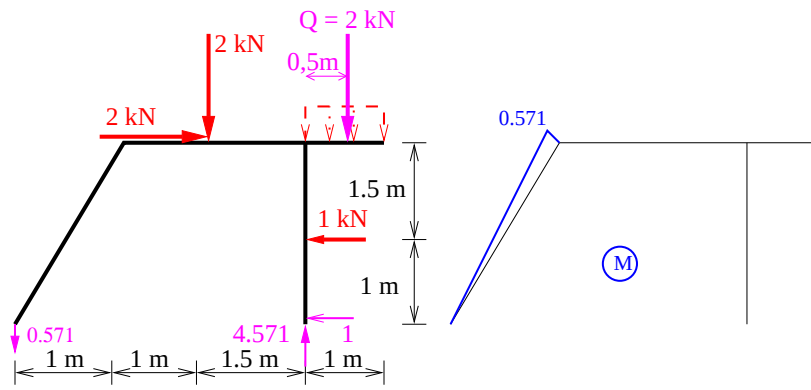


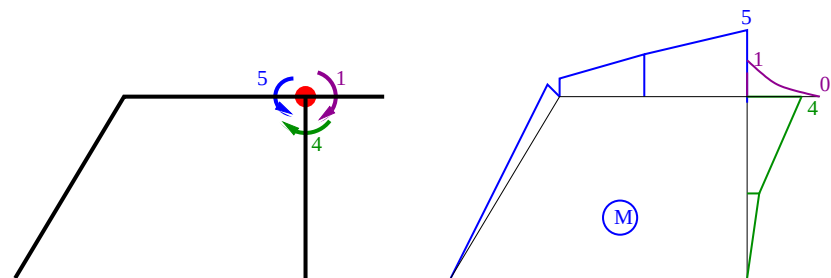
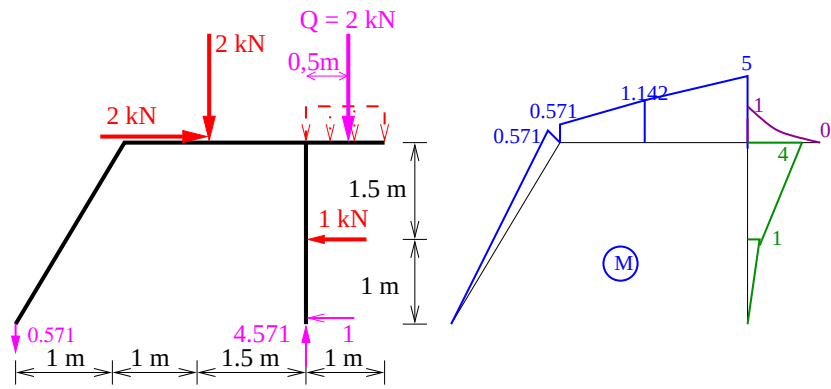
10.0.1 Shrnutí

V kapitole byly ukázány složitější konfigurace nosníků, přičemž postup řešení byl aplikací předchozích poznatků.

10.0.2 Otázky k procvičení

- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení $4x$, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.



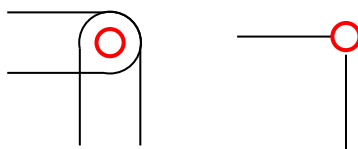


Kapitola 11

Nosníky a rámy s klouby

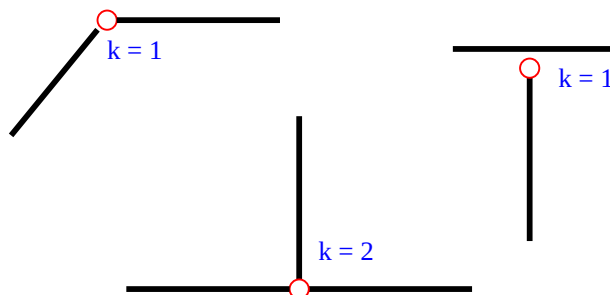
11.1 Kloub

Kloub: spojení dvou nebo více prutů umožňující jejich vzájemné pootáčení.



11.2 Násobnost kloubů

Násobnost: počet stupňů volnosti přidanych konstrukci kloubem.



11.3 Stupeň statické neurčitosti

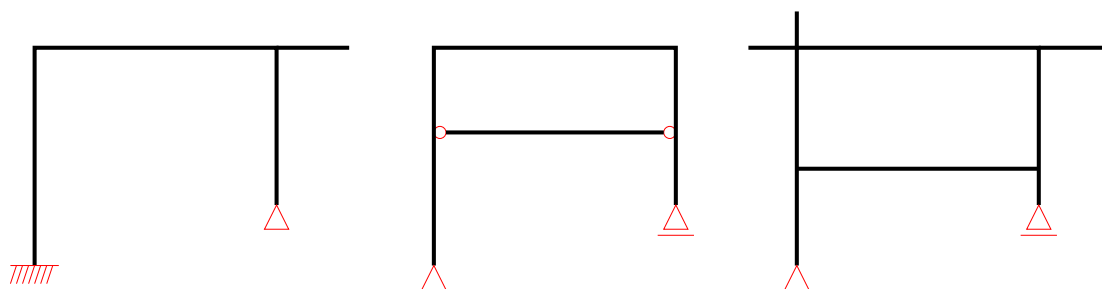
Uvedený vzorec byl probrán v předchozích kapitolách, zde je doplněn o vliv uzavřených částí a kloubů.

$$S_n = v - 3 + 3 \times u - k$$

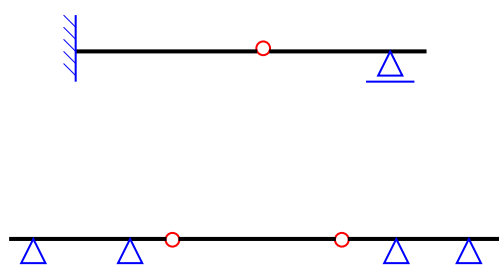
v ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami

u ... počet uzavřených částí

k ... počet stupňů volnosti přidanych klouby

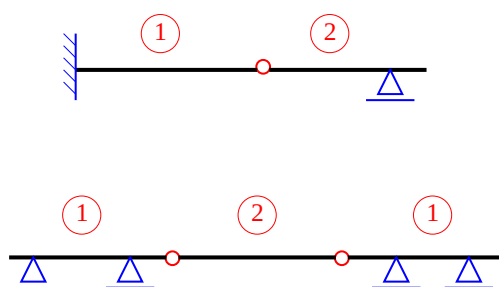


11.4 Gerberův nosník



Obrázek 11.1: Příklad Gerberova nosníku

- **staticky určitý** *obvykle přímý* nosník s vloženými klouby

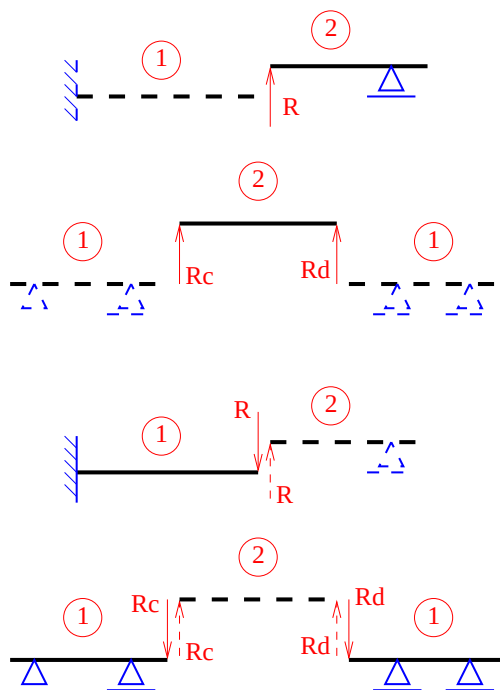


- 1... **nesoucí** (podporující) části (nesou i samostatně)
- 2... **nesené** (podporované) části

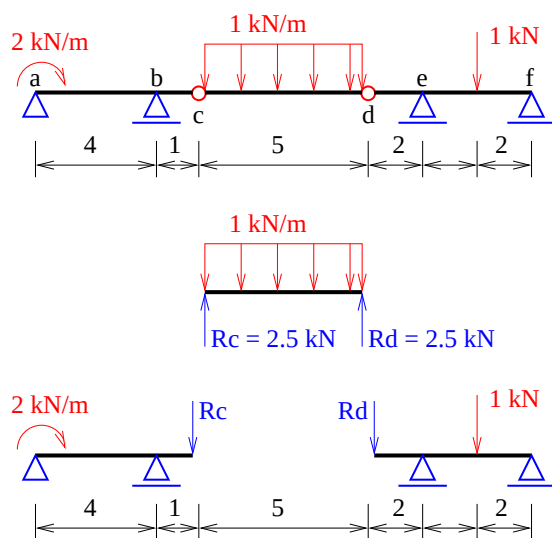
Postup výpočtu reakcí

Určení reakcí na oddělených **nesených** částech:

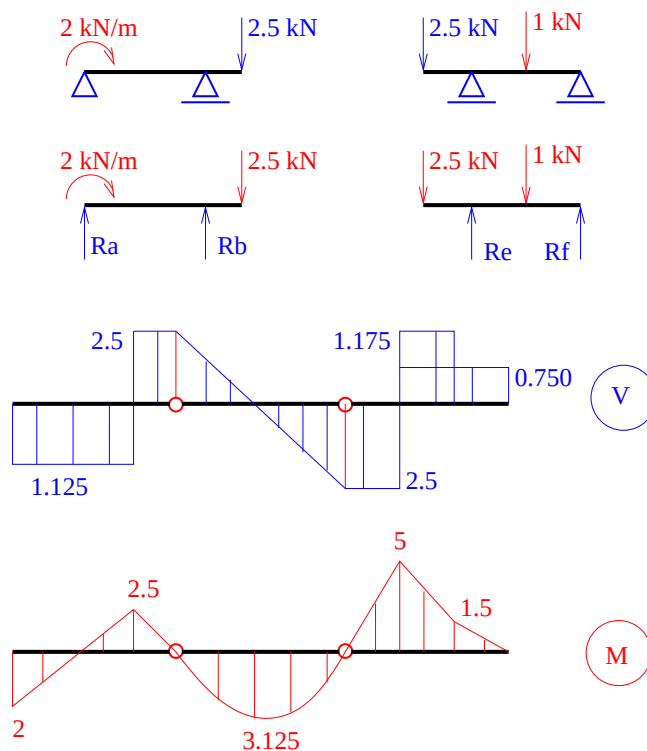
Zatížení **nesoucích** částí vypočtenými reakcemi (plus původní zatížení) a výpočet reakcí **nesoucích** částí:



11.5 Gerberův nosník – příklad



$$\begin{aligned}\sum M_a = 0 : -2 + 4 \times R_b - 5 \times 2.5 &= 0 \Rightarrow R_b = 3.625 \text{ kN}(\uparrow) \\ \sum M_b = 0 : -2 - 4 \times R_a - 1 \times 2.5 &= 0 \Rightarrow R_a = -1.125 \text{ kN}(\downarrow) \\ R_e &= 4.250 \text{ kN}(\uparrow), \quad R_f = -0.750 \text{ kN}(\downarrow)\end{aligned}$$



11.5.1 Shrnutí

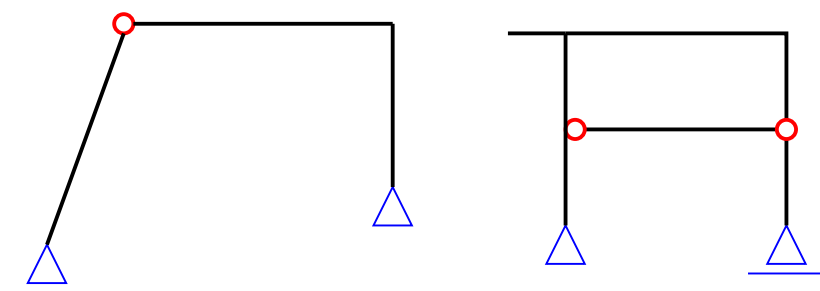
V kapitole byly ukázány nosníky s klouby, přičemž postup řešení byl aplikací předchozích poznatků s využitím poznatků o chování kloubů.

11.5.2 Otázky k procvičení

- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení $4x$, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.

Kapitola 12

Rámy s klouby

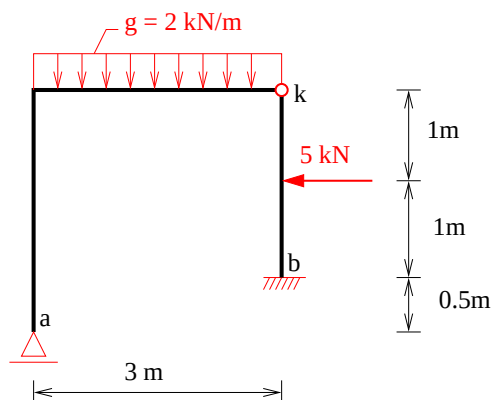


Obrázek 12.1: Rámy s klouby

Rámy s klouby řešíme stejně jako rámy z předchozích kapitol. Při výpočtu reakcí využíváme poznatku, že moment v kloubu je vždy roven nule. Tedy moment na konci každého prutu připojeného do kloubu je také roven nule. Podmínku rovnováhy je tak možné psát pro libovolnou část konstrukce „končící“ v kloubu (typicky pro část konstrukce od kloubu „vlevo“ nebo „vpravo“).

Lépe se tato skutečnost ilustruje na příkladu.

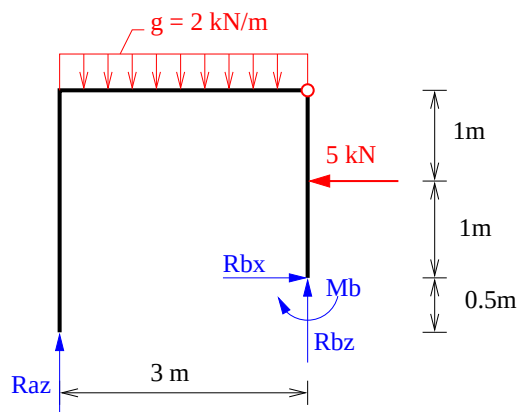
12.1 Rám s kloubem - příklad



Stupeň statické neurčitosti:

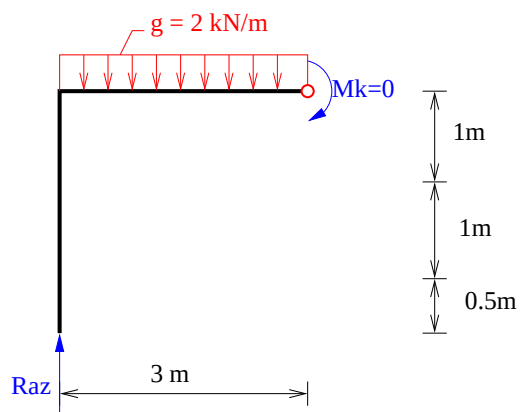
$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ S_n &= 1 + 3 - 3 + 3 \times 0 - 1 \\ S_n &= 0 \end{aligned}$$

Uvedený lomený nosník (rám) je **staticky určitý**.



Podmínky statické rovnováhy pro určení neznámých reakcí:

$$\begin{aligned} \sum M_{ki}^l &= 0 \\ \sum F_{xi} &= 0 \\ \sum M_{bi} &= 0 \\ \sum M_{ai} &= 0 \end{aligned}$$



$$\sum M_{k,i}^l = 0 :$$

$$- R_{az} \times 3 + q \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

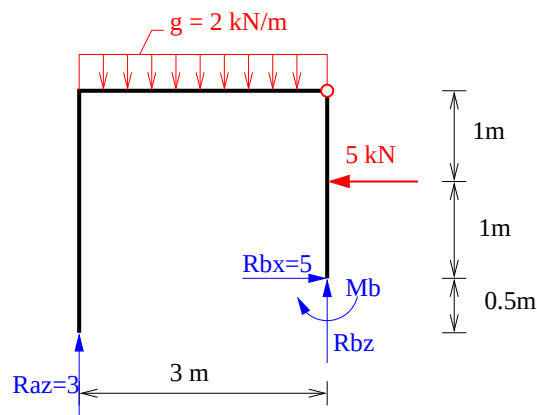
$$- R_{az} \times 3 + 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$R_{az} = \frac{9}{3} = 3 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_{i,x} = 0 :$$

$$R_{bx} - 5 = 0$$

$$R_{bx} = 5 \text{ kN}(\rightarrow)$$



$$\sum M_{i,b} = 0 : -M_b - R_{az} \times 3 + q \times 3 \times \frac{3}{2} + 5 \times 1 = 0$$

$$-M_b - 3 \times 3 + 2 \times 3 \times \frac{3}{2} + 5 \times 1 = 0$$

$$M_b = 9 + 5 - 9 = 5 \text{ kNm}$$

Kontrola svislých reakcí ($\sum F_{i,z} = 0$):

$$R_{az} + R_{bz} - q \times 3 = 0$$

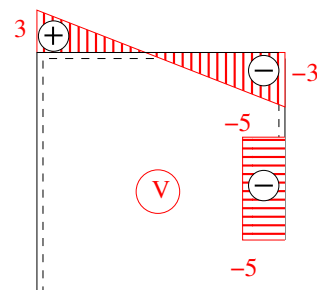
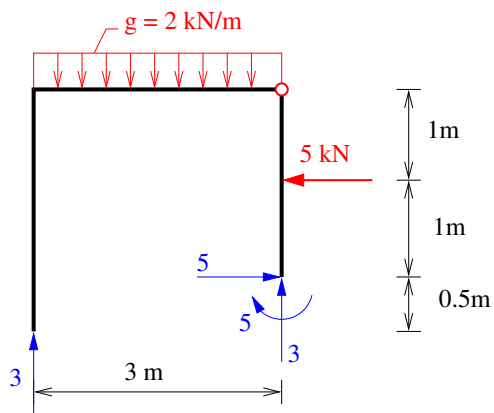
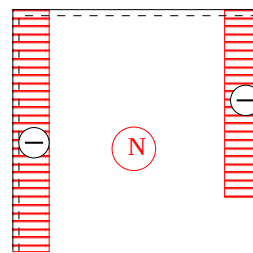
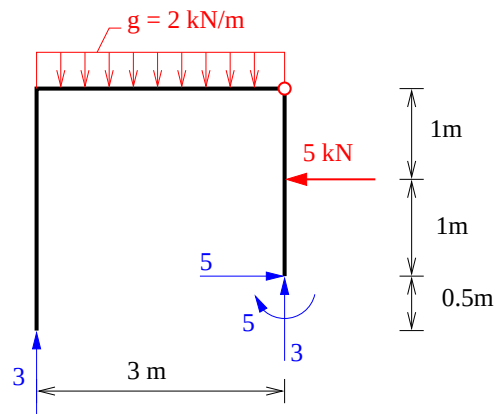
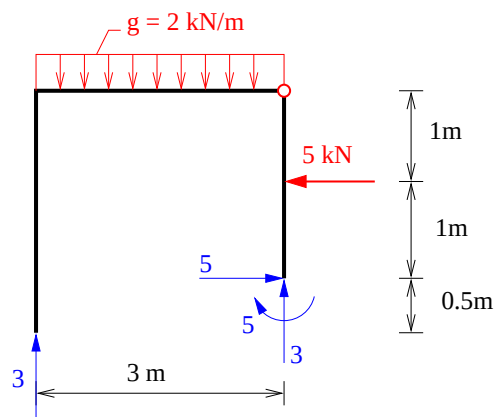
$$3 + 3 - 6 = 0$$

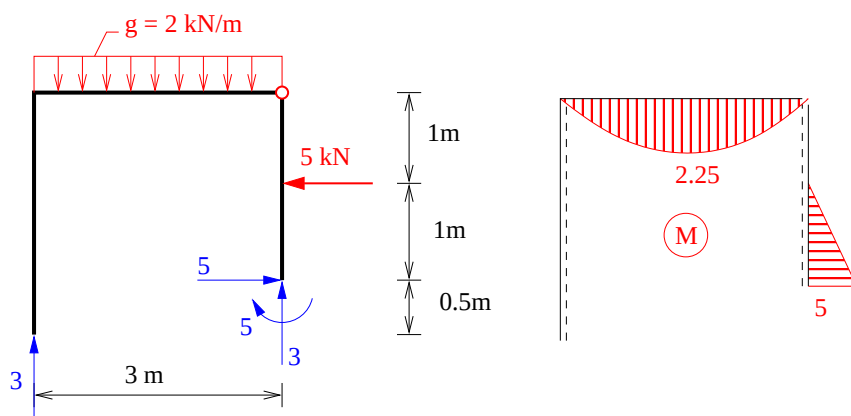
12.1.1 Shrnutí

V kapitole byly ukázány rámy s klouby, přičemž postup řešení byl aplikací předchozích poznatků s využitím poznatků o chování kloubů.

12.1.2 Otázky k procvičení

- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení 4x, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.

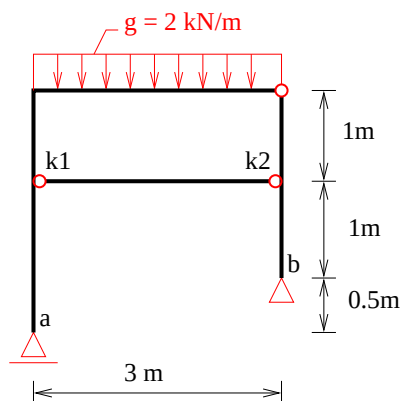




Kapitola 13

Rámy s klouby a táhly

13.1 Rám s táhlem



Obrázek 13.1: Ukázka rámu s táhlem

Táhlo je často používaný prvek ve stavebních konstrukcích. Jde o přímý, zpravidla velmi štíhlý, prut na obou koncích **kloubově** připojený ke zbytku konstrukce, který **není po své délce zatížený**. V důsledku kloubového připojení na obou jeho koncích v něm vznikají pouze **normálové síly**. Táhlo se umísťuje tak, aby bylo zbytkem konstrukce natahováno, vzniká v něm tedy **tahová normálová síla**.

Na obr. 13.1 jsou klouby označeny $k1$ a $k2$. Pověsiměte si, že klouby nezasahují do svislých prutů a pouze slouží k připojení táhla.

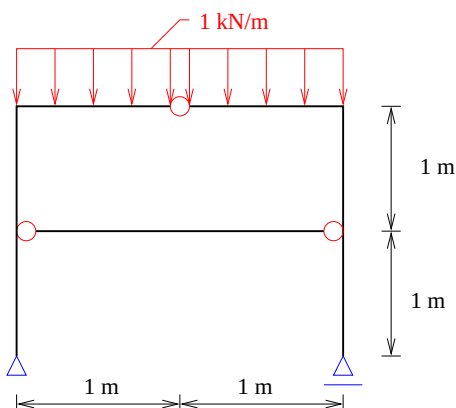
Pokud je tento prvek umístěn tak, že je tlačěn, nazývá se **vzpěra** a pravidla má mnohem větší dimenze (není štíhlý).

Pozn.: při běžných výpočtech se *zanedbává* posouvající síla i moment, které vznikají v důsledku působení tíhové síly táhla.

13.2 Rám s táhlem 1 – příklad

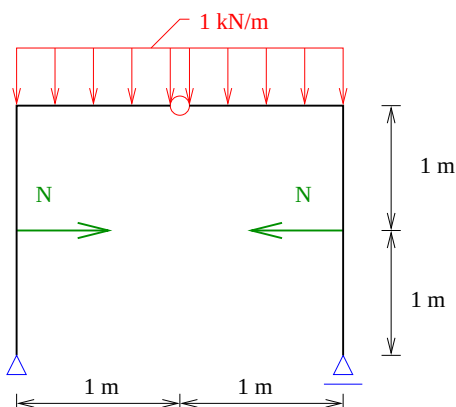
Výpočet rámu s táhlem se neliší od výpočtu jiných typů rámu. Táhlo nahradíme silami působícími v kloubech (jsou stejné velikosti, ale opačného směru). Staticky

určitý rám z táhlem zpravidla obsahuje i další kloub, který můžeme využít pomocí například podmínky $\Sigma M_{i,k}^L = 0$ k určení síly v táhle.



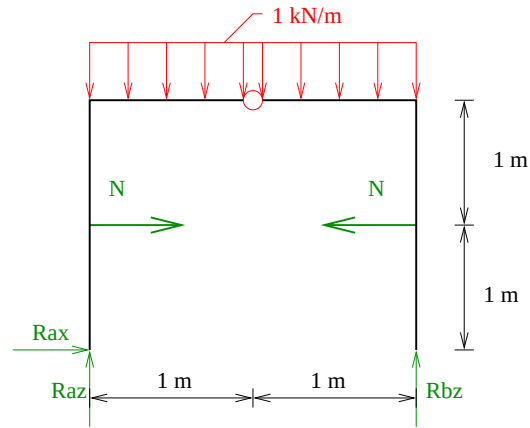
Stupeň statické neurčitosti:

$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ &= (2 + 1) - 3 + 3 \times 1 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

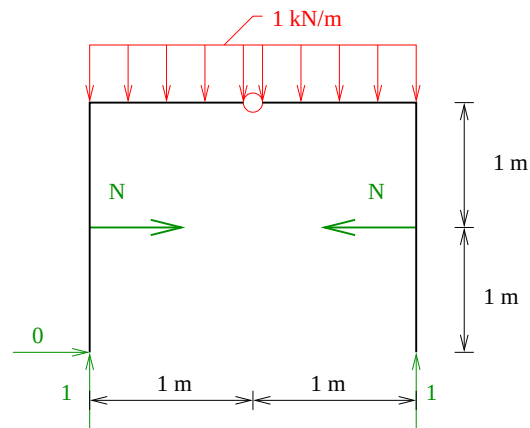


Podmínky statické rovnováhy pro určení neznámých reakcí:

$$\begin{aligned} \sum M_{ki}^l &= 0 \\ \sum F_{xi} &= 0 \\ \sum M_{bi} &= 0 \\ \sum M_{ai} &= 0 \end{aligned}$$

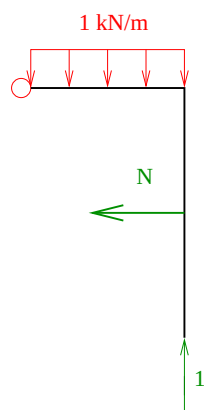


$$\begin{aligned}\sum M_{i,b} &= 0 : \\ -R_{az} \times 2 + q \times 2 \times \frac{2}{2} &= 0 \\ -R_{az} \times 2 + 1 \times 2 \times \frac{2}{2} &= 0 \\ R_{az} &= \frac{2}{2} = 1 \text{ kNm}(\uparrow)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0 : \\ R_{bx} &= 0 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ai} &= 0 : \\ R_{bz} \times 2 - q \times 2 \times \frac{2}{2} &= 0 \\ R_{bz} \times 2 - 1 \times 2 \times \frac{2}{2} &= 0 \\ R_{bz} &= \frac{2}{2} = 1 \text{ kNm} \quad (\uparrow)\end{aligned}$$



Kontrola svislých reakcí ($\sum F_{iy} = 0$):

$$R_{az} + R_{bz} - q \times 2 = 0$$

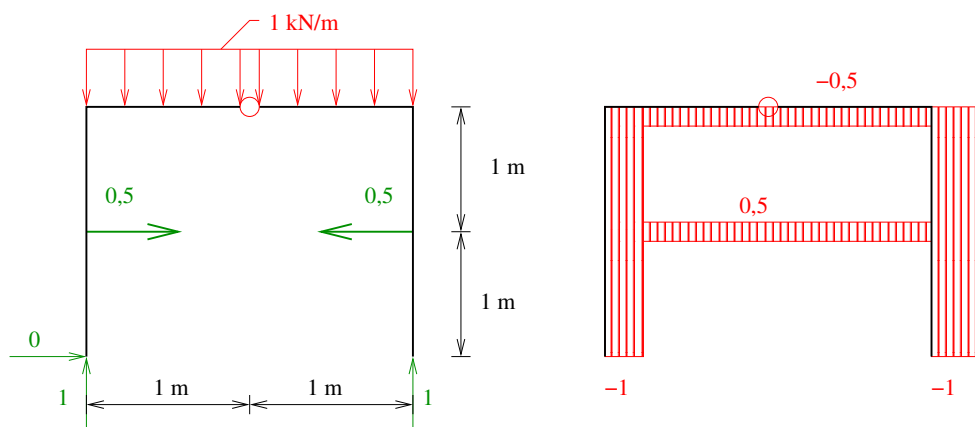
$$1 + 1 - 2 = 0$$

$$\sum M_{ki}^p = 0 :$$

$$R_{bz} \times 1 - q \times 1 \times \frac{1}{2} - N \times 1 = 0$$

$$1 \times 1 - 1 \times 1 \times \frac{1}{2} - N \times 1 = 0$$

$$N = 1 \times 1 - 0,5 = 0,5 \text{ kN}(tah)$$

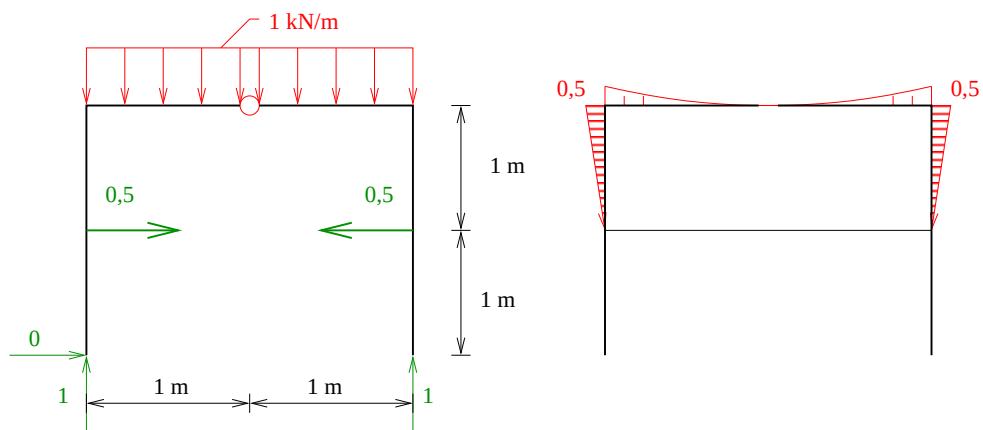
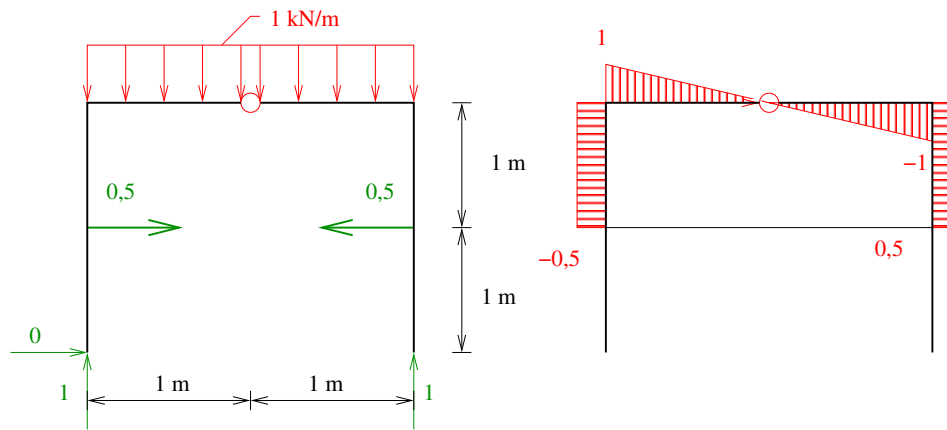


13.2.1 Shrnutí

V kapitole byly ukázány rámy s klouby a táhly, přičemž postup řešení byl aplikací předchozích poznatků s využitím poznatků o chování kloubů.

13.2.2 Otázky k procvičení

- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení $4x$, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.



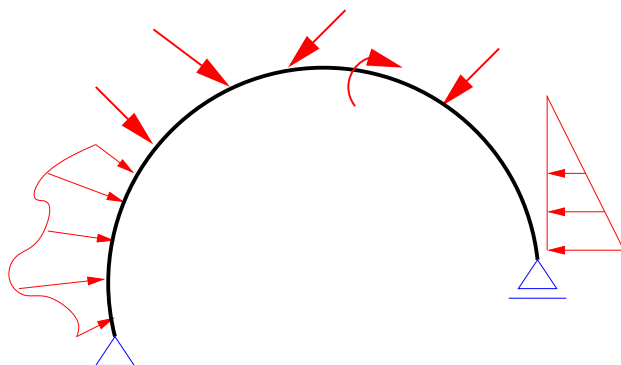
Kapitola 14

Oblouky

14.1 Rovinný oblouk (rovinný zakřivený nosník)

Oblouk je konstrukcí používanou od starověku. Jeho výhodou je, že při vhodném tvaru a zatížení vznikají v oblouku převážně normálové síly (v běžných případech tlakové) a posouvající síly a ohybové momenty nabývají ve srovnání s normálovými silami malých až zanedbatelných hodnot. Takový způsob namáhání (tlakové síly) vyhovuje řadě kalsických materiálů (zdivo, beton) Proto byly oblouky často využívány k překlenutí velkých rozpětí (mosty, chrámy, haly), často v úlohách, kdy by přímý nosník obdobných rozměrů bylo obtížné nebo nemožné vybudovat.

Zde budeme studovat oblouk jako staticky určitý rovinný nosník se zakřivenou střednicí. Oblouk může být opatřen klouby i táhlem. Výpočet reakcí se zásadně neliší od nosníku a rámu s přímými pruty, pracnější je však určování vnitřních sil.

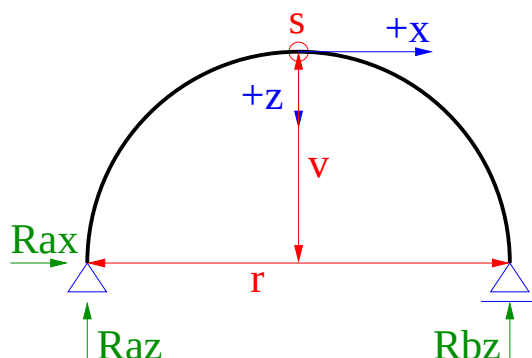


Obrázek 14.1: Ukázka oblouku

14.2 Rovinný oblouk – popis

Geometrie oblouku je vyznačena v obr. 14.2:

- o ... vrchol,
- r ... rozpětí,



Obrázek 14.2: Názvosloví oblouku

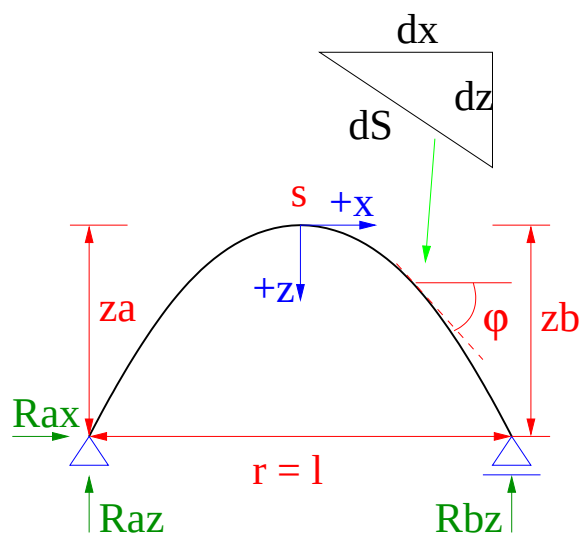
- v ... vzepětí.

Oblouk může mít různý tvar střednice. Nejčastěji se používají:

- kvadratická parabola,
- parabola 4^o,
- kružnice.

14.3 Rovinný oblouk: kvadratická parabola

Oblouky se střednicí ve tvaru kvadratické paraboly jsou poměrně časté, nicméně zde je uvádíme jako ukázkou výpočtu zejména proto, že rovnice kvadratické paraboly je poměrně jednoduchá a snadno se s ní pracuje. Při použití například kružnice (valená klenba aj.) je postup shodný, liší se však vztahy pro popis geometrie střednice.

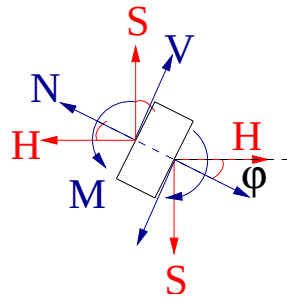


Obrázek 14.3: Oblouk se střednicí ve tvaru kvadratické paraboly

$$\begin{aligned}
z(x) &= k \times x^2 \\
k &= \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2} \\
\tan \varphi &= \frac{dz}{dx} = [k \times x^2]' \\
&= 2 \times k \times x
\end{aligned}$$

14.4 Kvadratická parabola: vnitřní síly v průřezu

Na **vodorovných** přímých nosnících obvykle vynášíme normálovou sílu (zde značenou H) a posouvající sílu (zde V). Průřez oblouku je však obecně pootočen o úhel φ je jeho normálová (N) a posouvající (V) síla mají také pootočený směr. Mezi uvedenými silami je možné najít geometrické vztahy.

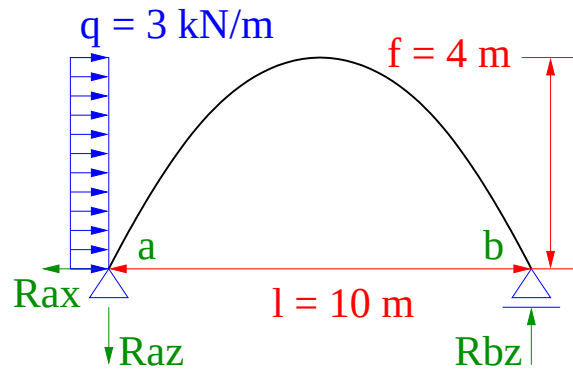


Obrázek 14.4: Síly v průřezu oblouku

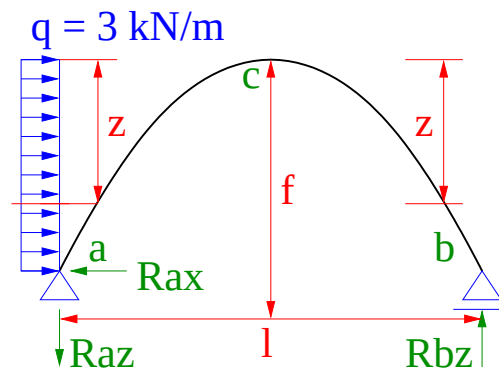
$$\begin{aligned}
\tan \varphi &= 2 \times k \times x \\
N &= H \cos \varphi + S \sin \varphi \\
V &= -H \sin \varphi + S \cos \varphi \\
\cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \\
\sin \varphi &= \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}
\end{aligned}$$

14.5 Kvadratická parabola: příklad

$$\begin{aligned}
z(x) &= k \times x^2 \\
\tan \varphi &= 2 \times k \times x \\
\cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \\
\sin \varphi &= \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum F_{i,x} &= 0 : \\ R_{a,x} - 3 \times 4 &= 0 \\ R_{a,x} &= 12 \text{ kN} (\leftarrow) \\ \sum M_{a,i} &= 0 : \\ -3 \times 4 \times \frac{4}{2} + R_{b,z} \times 10 &= 0 \\ R_{b,z} &= \frac{3 \times 4 \times 2}{10} = 2,4 \text{ kN} (\uparrow) \\ \sum M_{b,i} &= 0 : \\ -3 \times 4 \times \frac{4}{2} + R_{a,z} \times 10 &= 0 \\ R_{a,z} &= \frac{3 \times 4 \times 2}{10} = 2,4 \text{ kN} (\downarrow) \end{aligned}$$



H – levá polovina:

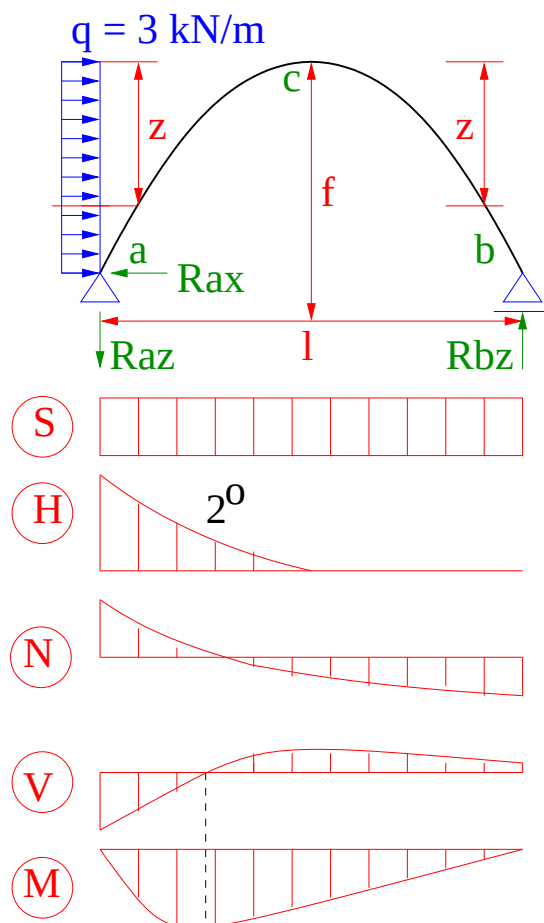
$$H = R_{a,x} - q(f - z)$$

H – pravá polovina:

$$H = R_{a,x} - qf$$

S – celý nosník:

$$S = -R_{a,z}$$



$$N = H \cos \varphi + S \sin \varphi$$

$$V = -H \sin \varphi + S \cos \varphi$$

M – levá polovina:

$$M = R_{a,x}(f - z) - R_{a,z}\left(\frac{l}{2} + x\right) - \frac{q(f - z)^2}{2}$$

M – pravá polovina:

$$M = R_{a,x}(f - z) - R_{a,z}\left(\frac{l}{2} + x\right) + q \times f\left(\frac{f}{2} - z\right)$$

14.5.1 Shrnutí

V kapitole byly ukázány oblouky, přičemž postup řešení byl aplikací předchozích poznatků. Hlavní rozdíl spočítá ve výpočtu vnitřních sil, kde je třeba zohlednit vliv zakřivené střednice na ramena sil a dalších zatížení. S výhodou lze vypočítat vnitřní síly na pomocném nosníku a poté je transformovat do V a N na oblouku.

14.5.2 Otázky k procvičení

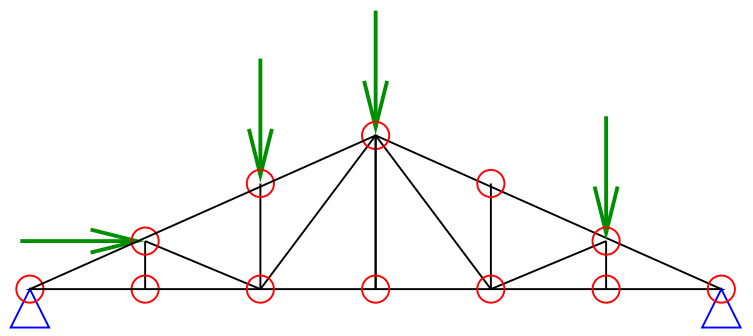
- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení $4x$, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.

Kapitola 15

Příhradové konstrukce

Příhradové konstrukce, někdy nazývané kloubové prutové soustavy, se v nejjednodušším případě skládají z přímých prutů ve všech styčnicích spojovaných klouby a zatížených opět pouze ve styčnicích.

Podobně jako u táhel a vzpěr to znamená, že pruty této konstrukce jsou namáhány jen normálovou silou. Taková konstrukce je složitější a rozměrnější než by byl přímý plnostěnný nosník nebo plnostěnný oblouk, obsahuje však mnohem méně materiálu. V určitých obdobích byl příhradové konstrukce jediným systémem, který umožňoval vybudovat některé druhy staveb (viz například Eiffelova věž).



Obrázek 15.1: Příklad příhradové konstrukce

Tedy pro příhradovou konstrukci platí:

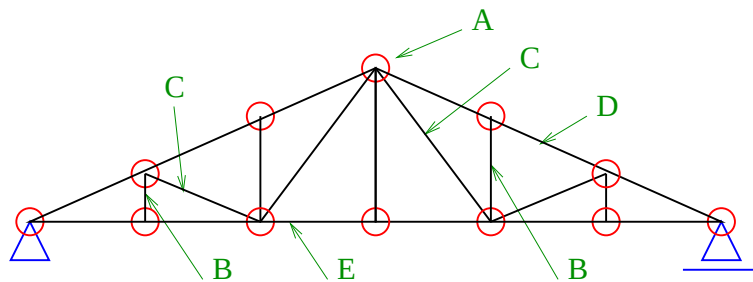
1. všechny pruty jsou spojeny ve styčnicích **kloubově**,
2. zatížení jen ve styčnicích,
3. v prutech jsou jen osově síly.

Výjimky z bodů 2 a 3 existují, budou uvedeny později.

15.1 Názvosloví příhradové konstrukce

Na obr. 15.1 jsou označeny jednotlivé části:

A ... kloub (styčník),



Obrázek 15.2: Názvosloví příhradové konstrukce

B ... svislice,
 C ... diagonála,
 D ... horní pás,
 E ... dolní pás.

15.2 Výpočet statické neurčitosti

Pokud je příhradová konstrukce staticky určitá, pak platí následující vztah:

$$2 \times b = p + a$$

1. b ... počet styčníků
2. p ... počet prutů
3. a ... počet vnějších vazeb

Zde:

$$2 \times 12 = 21 + 3$$

Staticky neurčitá (kinematicky přeurčitá): $2 \times b < p + a$

Samozřejmě platí i vzorec pro statickou určitost používaný dříve:

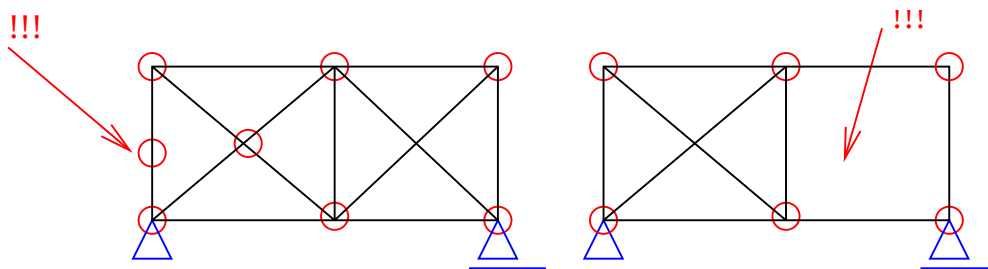
$$s_n = v - 3 + 3 \times u - k$$

Zde konkrétně:

- složky vazeb: 3
- uzavřené části: 10
- klouby: 30

$$s_n = 3 - 3 + 3 \times 10 - 30 = 0$$

Problémy a výjimečné případy:



Obrázek 15.3: Výjimečné případy příhradových konstrukcí

15.3 Styčnicková metoda

Styčnicková metoda využívá skutečnosti, že v každém styčnicku můžeme napsat 2 podmínky rovnováhy:

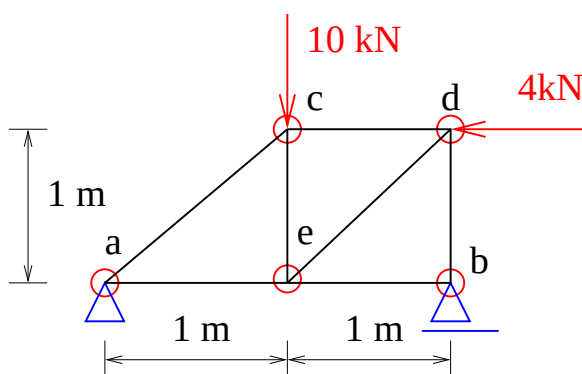
$$\sum F_{i,x} = 0$$

$$\sum F_{i,z} = 0$$

Nejprve tedy stanovíme reakce vnějších vazeb stejně jako u jakékoli jiné staticky určité konstrukce. Poté hledáme styčník, ve které jsou nejvýše 2 neznámé vnitřní síly. Po jejich stanovení z podmínek rovnováhy postupujeme k dalšímu styčníku s nejvýše 2 neznámými.

V některých případech není v některé fázi výpočtu možné takový styčník nalézt. Pak není možné uvedenou formu styčnickové metody použít a je nutné použít např. průsečnou metodu.

15.4 Styčnicková metoda – příklad



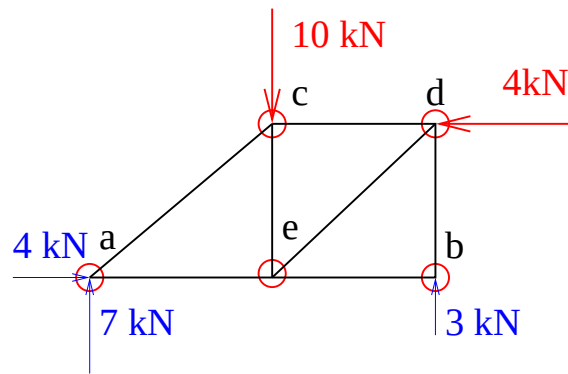
Výpočet reakcí: $\sum M_{i,a} = 0$:

$$R_{z,b} \times 2 - 10 \times 1 + 4 \times 1 = 0$$

$$R_{z,b} = 3 \text{ kN}$$

$$\sum M_{i,b} = 0:$$

$$R_{z,a} \times 2 - 10 \times 1 - 4 \times 1 = 0$$

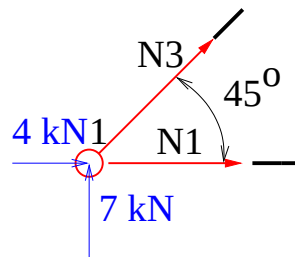
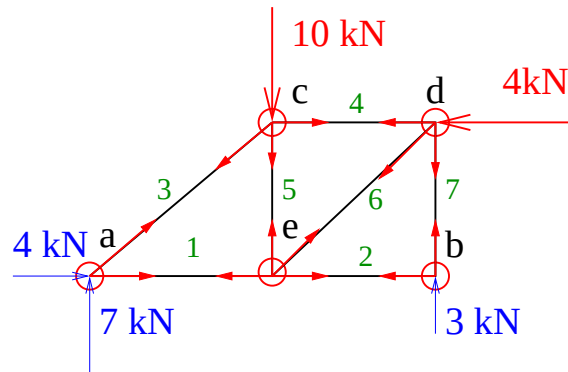


$$R_{z,a} = 7 \text{ kN}$$

$$\sum F_{i,x} = 0: R_{x,a} - 4 = 0$$

$$R_{x,a} = 4 \text{ kN}$$

Styčník a:



$$\sum F_{i,z} = 0:$$

$$-R_{z,a} - N_3 \times \sin(45^\circ) = 0$$

$$-7 - N_3 \times \sin(45^\circ) = 0$$

$$N_3 = -9.9 \text{ kN (tlak!)}$$

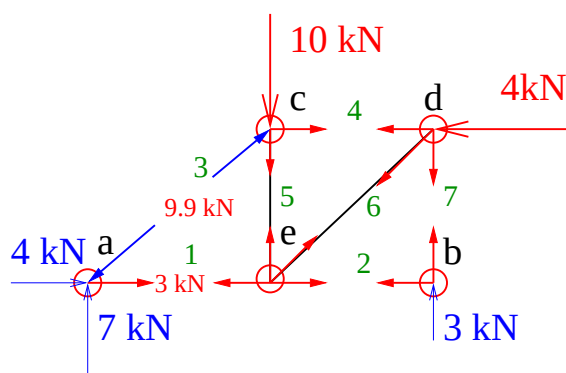
$$\sum F_{i,x} = 0:$$

$$R_{x,a} + N_3 \times \cos(45^\circ) + N_1 = 0$$

$$4 + N_3 \times \cos(45^\circ) + N_1 = 0$$

$$N_1 = 3 \text{ kN (tah)}$$

Styčník c:



$$\sum F_{i,z} = 0:$$

$$N_5 + N_3 \times \sin(45^\circ) + 10 = 0$$

$$N_5 - 9.9 \times \sin(45^\circ) + 10 = 0$$

$$N_5 = -3 \text{ kN (tlak)}$$

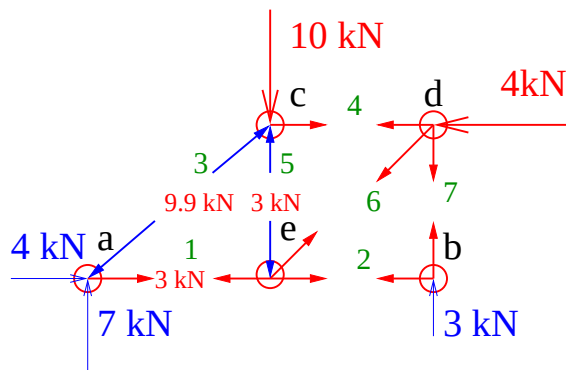
$$\sum F_{i,x} = 0:$$

$$N_4 - N_3 \times \cos(45^\circ) = 0$$

$$N_4 + 9.9 \times \cos(45^\circ) = 0$$

$$N_4 = -7 \text{ kN (tlak)}$$

Styčník b:



$$\sum F_{i,z} = 0:$$

$$-R_{z,b} - N_7 = 0$$

$$-3 - N_7 = 0$$

$$N_7 = -3 \text{ kN (tlak)}$$

$$\sum F_{i,x} = 0:$$

$$N_2 + 0 = 0$$

$$N_2 = 0 \text{ kN}$$

Styčník e:

$$\sum F_{i,z} = 0:$$

$$-N_5 - N_6 \times \sin 45^\circ = 0$$

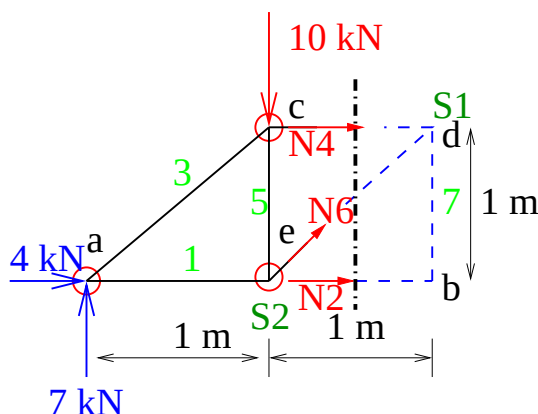
15.5 Průsečná metoda

Jiný přístup představuje *průběžná metoda*. Ta vychází z úvahy, že můžeme část kostrukce odříznout, její účinek nahradit silami a ty následně vypočítat z vhodně sestavených **momentových** podmínek rovnováhy.

Uvedeme postup tzv. **Ritterovz úpravy** průběžné metody:

- Vedeme řez 3 pruty (ev. více).
- Účinek odříznuté části konstrukce nahradíme příslušnými vnitřními silami.
- Všechny rozříznuté pruty **kromě jednoho** musí mít společný průsečík.
- K onomu průsečíku sestavíme momentovou podmínku rovnováhy tak, aby v ní byla jen 1 neznámá.

15.6 Průměrná metoda – příklad



Momentový střed S1:

$$\sum M_{i,S1} = 0:$$

$$N_2 \times 1 + 4 \times 1 - 7 \times 2 + 10 \times 1 = 0$$

$$N_2 = 14 - 10 - 4 = 0 \text{ kN}$$

Momentový střed S2:

$$\sum M_{i,S2} = 0:$$

$$-N_4 \times 1 - 7 \times 1 = 0$$

$$N_4 = -7 \text{ kN (tlak)}$$

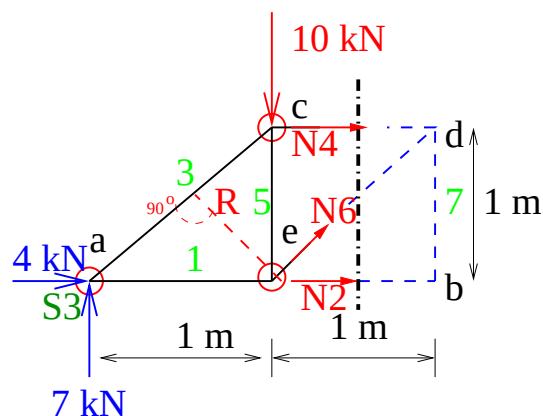
Co se silou N_6 ?

Rameno R síly N_6 ke středu S_3 : $\frac{R}{1} = \sin 45^\circ \Rightarrow R = 0.707 \text{ m}$

Momentový střed S3:

$$\sum M_{i,S3} = 0:$$

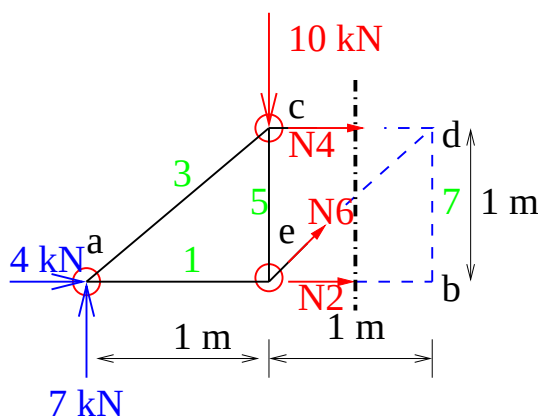
$$N_6 \times R - N_4 \times 1 - 10 \times 1 = 0$$



$$N_6 = 4.24 \text{ kN (tah)}$$

Zbývající síly lze dopočítat styčnickovou metodou.

Sílu N_6 lze i **jinak**: jen pokud jsou **ostatní síly vzájemně rovnoběžné** (zde N_2 a N_4): *silovou podmínkou* do směru **kolmého** na směr N_2 i N_4 .



$$\begin{aligned} \sum F_{i,z} &= 0 : \\ -N_6 \sin \alpha + 10 - 7 &= 0 \\ -N_6 \sin 45^\circ + 10 - 7 &= 0 \\ -N_6 &= \frac{7-10}{\sin 45^\circ} \\ N_6 &= 4.24 \text{ kN (tah)} \end{aligned}$$

15.6.1 Shrnutí

V kapitole byly ukázány příhradové konstrukce, přičemž postup řešení byl aplikací předchozích poznatků. Ty byly aplikovány v styčnickové i průsečné metodě.

15.6.2 Otázky k procvičení

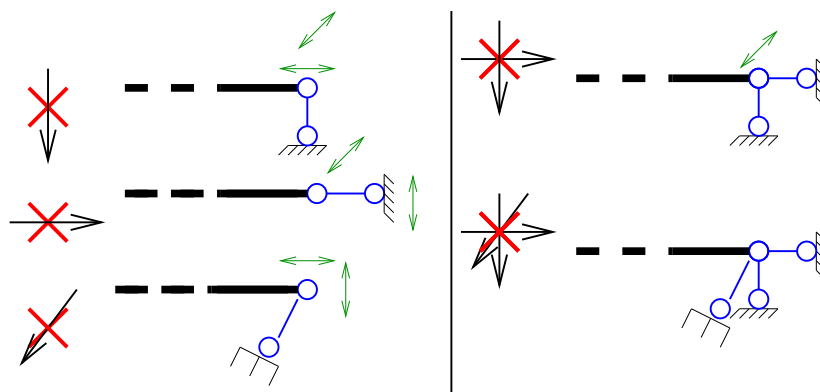
- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení 4x, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.

Kapitola 16

Prut v prostoru, kroucení

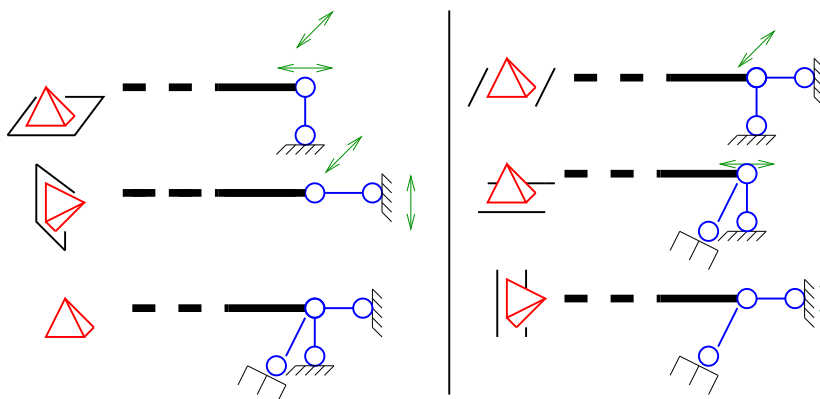
16.1 Vnější vazby v prostoru (ve 3D)

Vazba proti **posunu** v daném směru.



Obrázek 16.1: Vazba proti posunutí v prostoru

Vazba proti **posunu** v daném směru (posuvné a pevné klouby):



Obrázek 16.2: Vazba proti posunutí v prostoru značené jako pevné a posuvné klouby

16.2 Stupeň statické neurčitosti ve 3D

$$S_n = v - 6 + 6 \times u - k$$

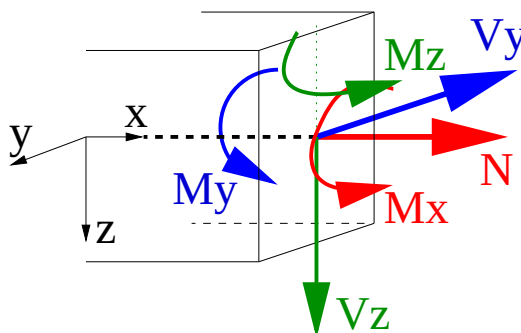
v ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami,

6 ... počet podmínek rovnováhy **v prostoru**,

u ... počet uzavřených částí,

k ... počet stupňů volnosti přidanych klouby.

16.3 Prostorový nosník – vnitřní síly



Obrázek 16.3: Vnitřní síly nosníku ve 3D

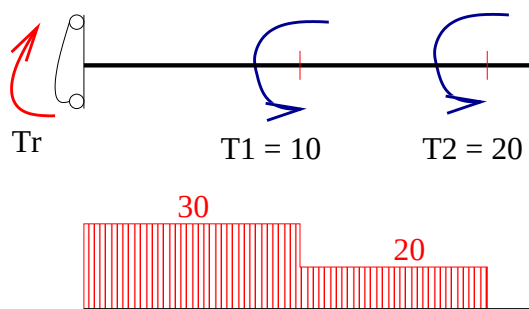
- N ... normálová síla
- V_y, V_z ... posouvající síly
- M_x ... krouticí moment
- M_y, M_z ... ohybové momenty

Celkem 3 síly a 3 momenty.

16.4 Kroucení nosníku

Moment M_x na prostorovém nosníku se často značí T a nazývá se **krouticí moment**. Jeho výpočet je analogický ostatním vnitřním silám

16.5 Kroucení nosníku – příklad



$$\sum T = T_r - 10 - 20 = 0 \Rightarrow T_r = 30 \text{ kN m}$$

16.5.1 Shrnutí

V kapitole byly ukázány síly na nosníku v prostoru a byl řešen krouticí moment, který se v rovině nepočítá.

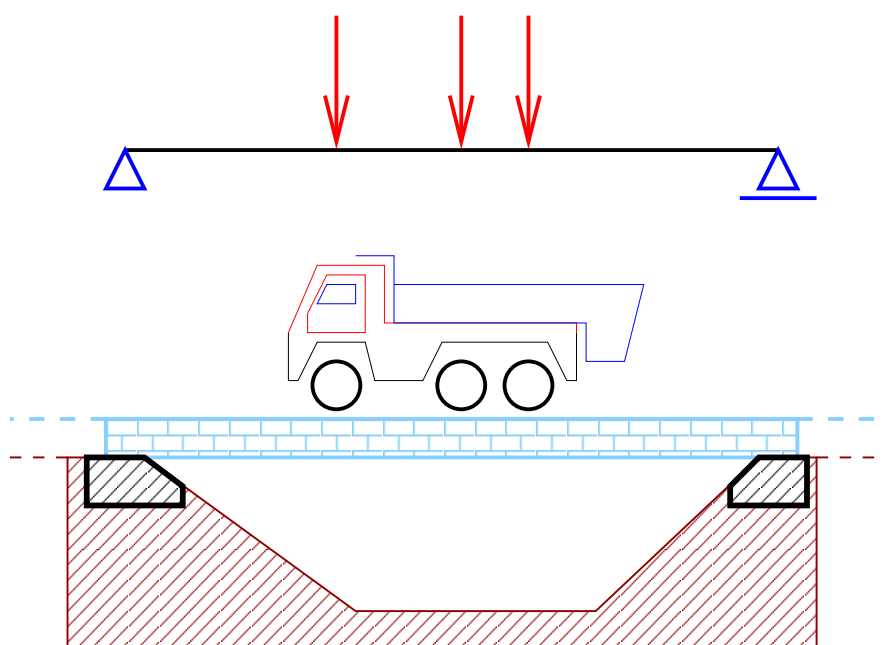
16.5.2 Otázky k procvičení

- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení $4x$, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.

Kapitola 17

Pohyblivé zatížení, příčinkové čáry

17.1 Pohyblivé zatížení



Obrázek 17.1: Ilustrace pohyblivého zatížení

U některých druhů zatížení nelze zanedbat skutečnost, že se po stavebních konstrukcích pohybují. Může jít například o **jeřábové dráhy v halách** nebo o **mostní konstrukce**. Ale i v dalších případech mohou nastávat situace, kdy zatížení mění svoji polohu na konstrukci tak, že tento jev nelze zanedbat.

Pohyblivé zatížení obecně vyvolává na konstrukci **dynamické účinky** (typicky *kmitání*). Touto problematikou se zabývá **dynamika stavebních konstrukcí**. Protože jde o velmi složitou oblast, nebudeme se jí v tomto textu zabývat.

Pokud se **zatížení pohybuje velmi pomalu** a jeho dynamické účinky jsou zanedbatelné, pak můžeme *zjednodušeně* úlohu zjednodušeně řešit jako **statickou**. K tomu můžeme využít například **příčinkové čáry**, které budou probírány v dalších odstavcích.

17.2 Příčinkové čáry

Příčinková čára statické veličiny v průřezu x vyjadřuje hodnotu této veličiny v závislosti na poloze zatížení.

Tedy, hodnota této čáry v průřezu a vyjadřuje, jak velká bude veličina v průřezu x , pokud zatížení je umístěno v a .

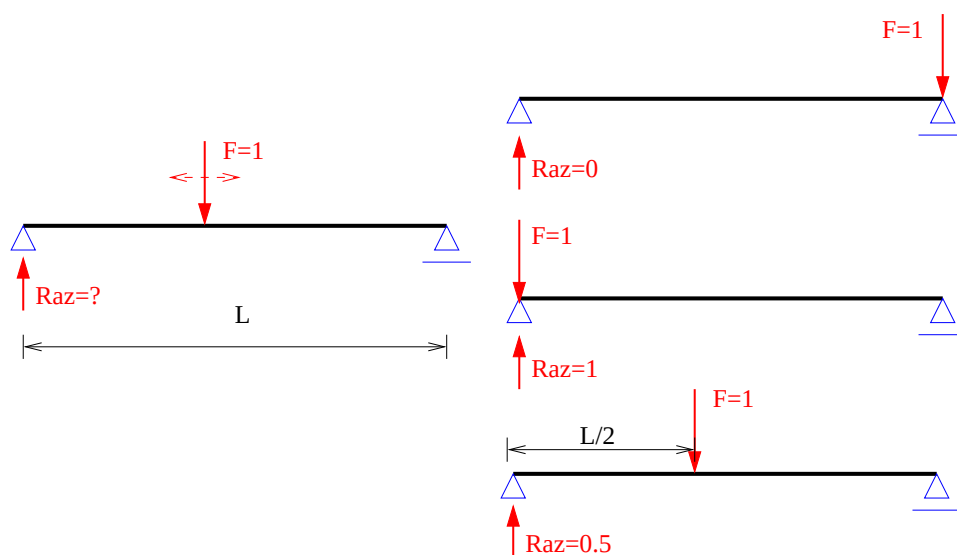
17.3 Příčinkové čáry reakcí

Příčinková čára tedy popisuje velikost vnitřní síly (nebo jiné statické veličiny) v daném místě **nosníku** v závislosti na poloze jednotkového zatížení.

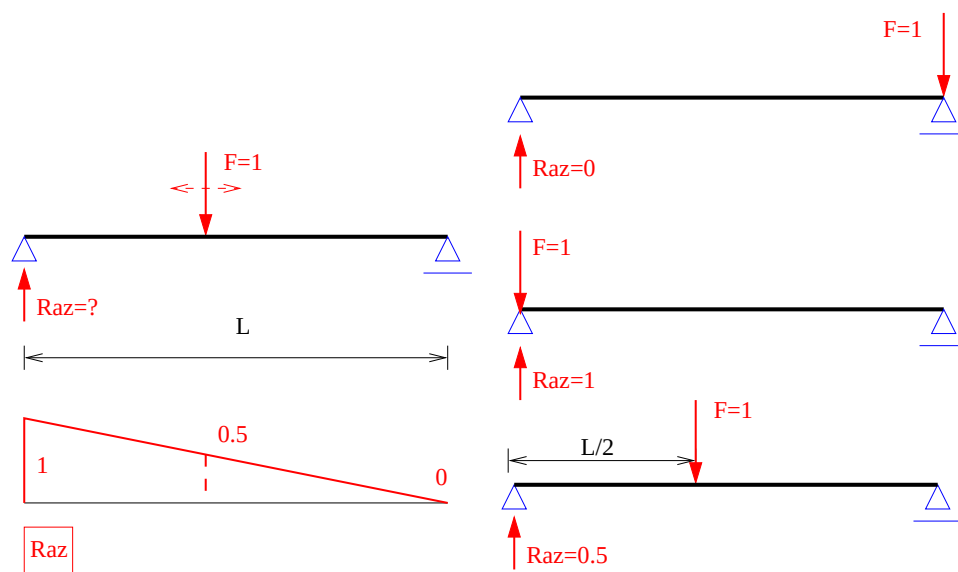
Nejednodušší způsob jejího stanovení je ten, že do různých průřezů nosníku vložíme jednotkovou svislou sílu a vypočítáme hodnotu hledané statické veličiny v průřezu x . Tedy, pokud do průřezu a vložíme jednotkovou sílu a vypočítám její účinek v průřezu x , pak tuto jednu vypočtenou hodnotu použijí jako hodnotu příčinkové čáry v průřezu a (tj. v tom místě, kde jsem vkládal síly).

U reakcí je samozřejmě průřez x vždy umístěn v místě hledané reakce.

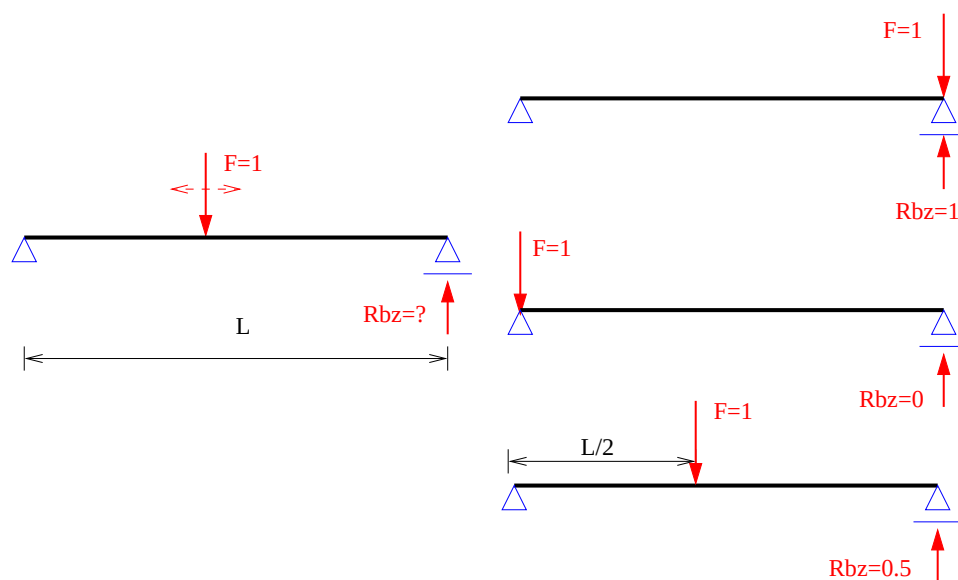
Pozn.: příčinkové čáry silových veličin jsou **bezrozměrné**. Příčinková čára momentů má jednotku $[m]$.



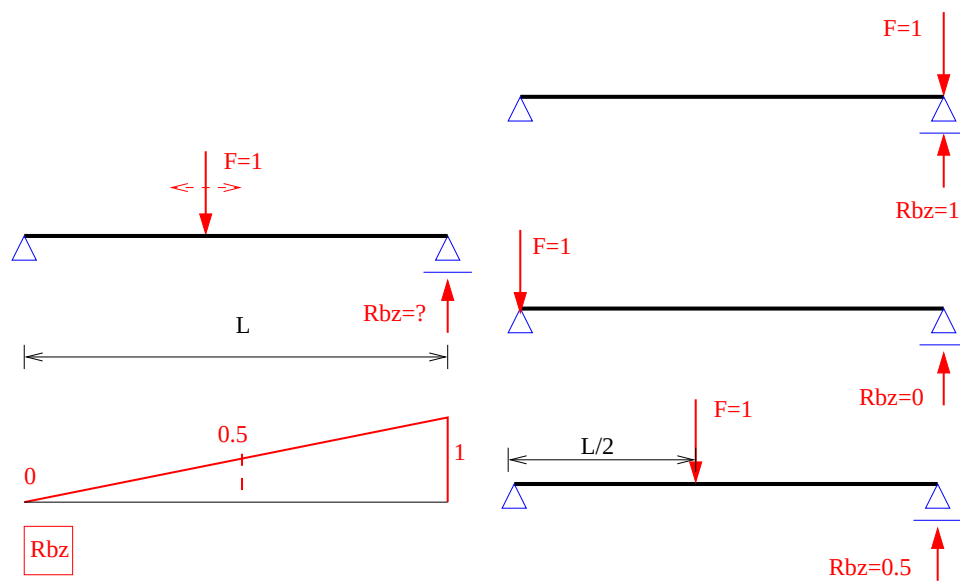
Obrázek 17.2: Příčinková čára reakce R_{az}



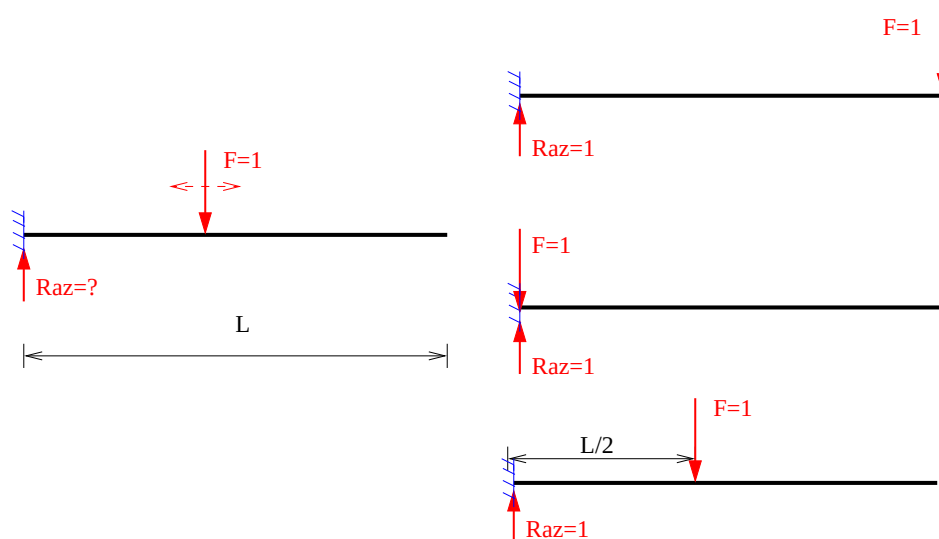
Obrázek 17.3: Příčinková čára reakce R_{az}



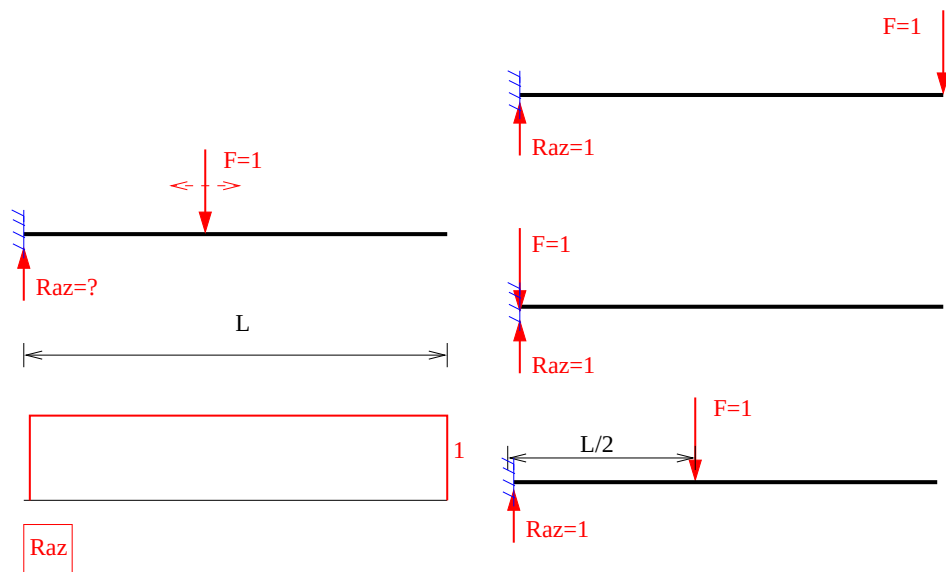
Obrázek 17.4: Příčinková čára reakce R_{bz}



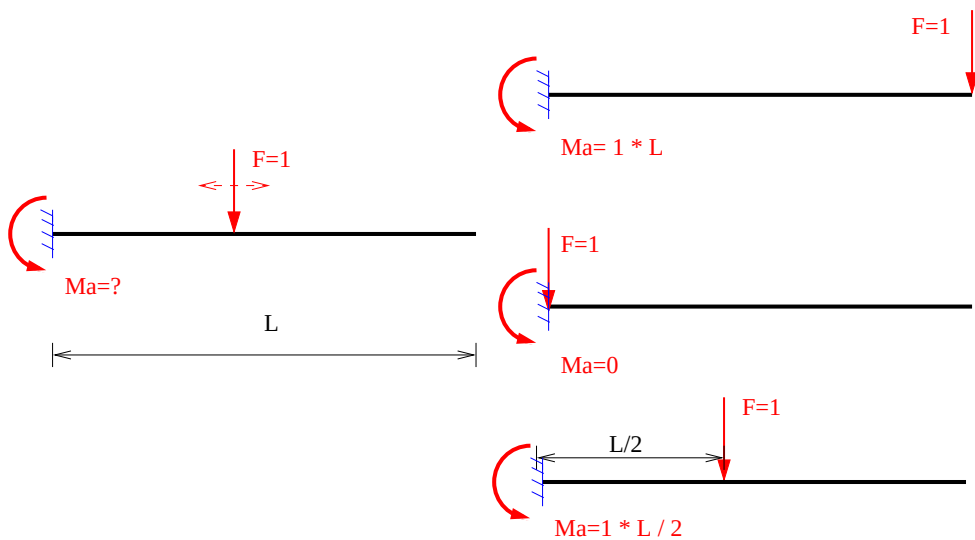
Obrázek 17.5: Příčinková čára reakce R_{bz}



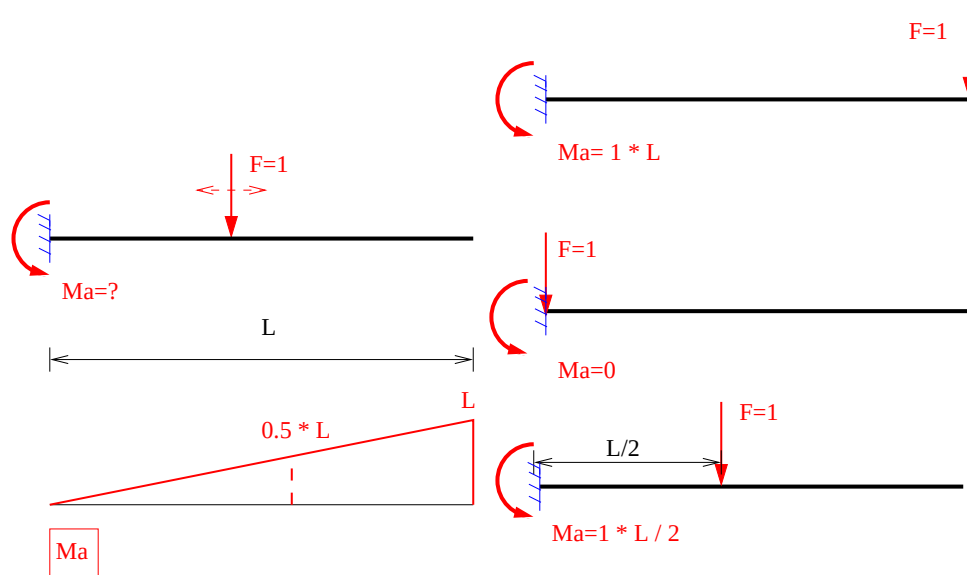
Obrázek 17.6: Příčinková čára reakce R_{az} na konzole



Obrázek 17.7: Příčinková čára reakce R_{az} na konzole

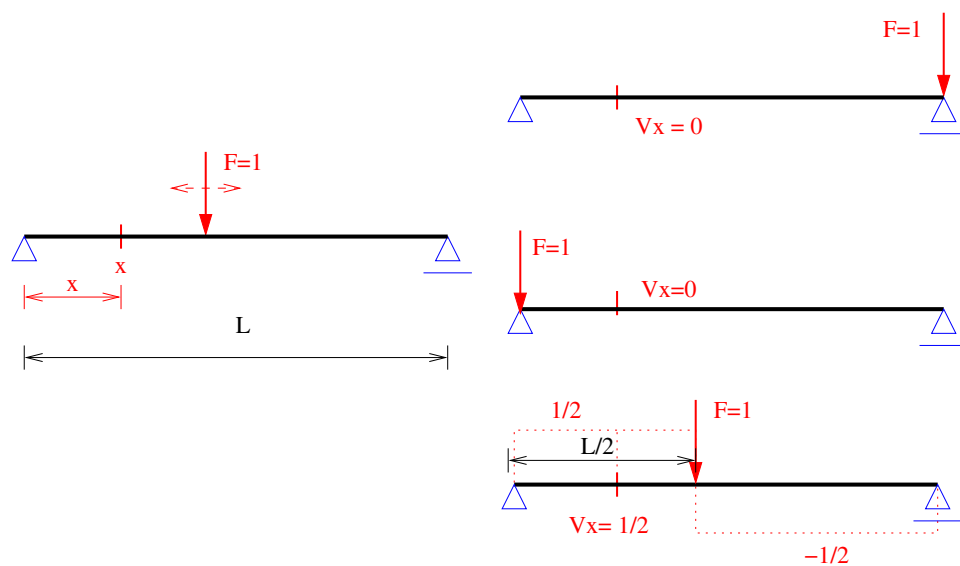


Obrázek 17.8: Příčinková čára podporového momentu M_a na konzole

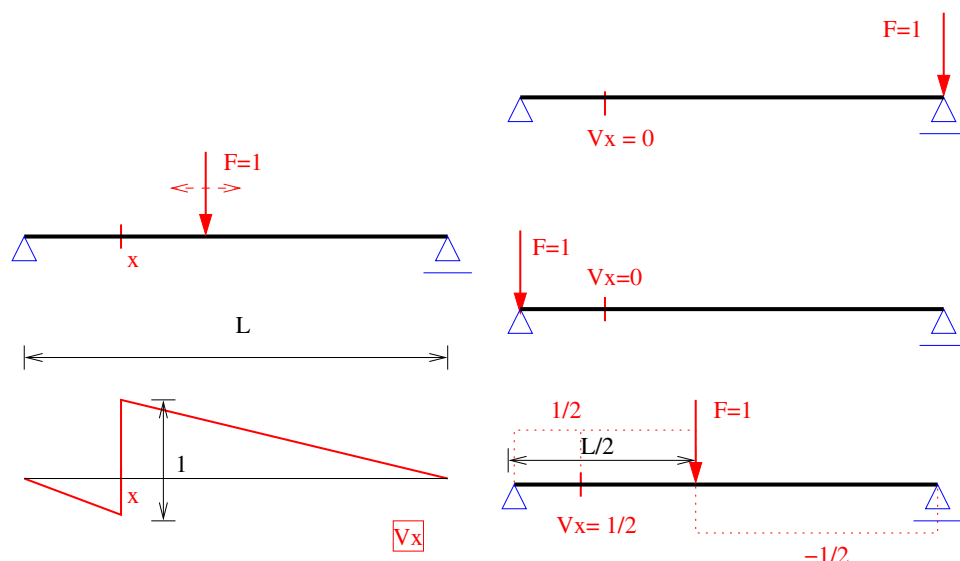


Obrázek 17.9: Příčinková čára podporového momentu M_a na konzole

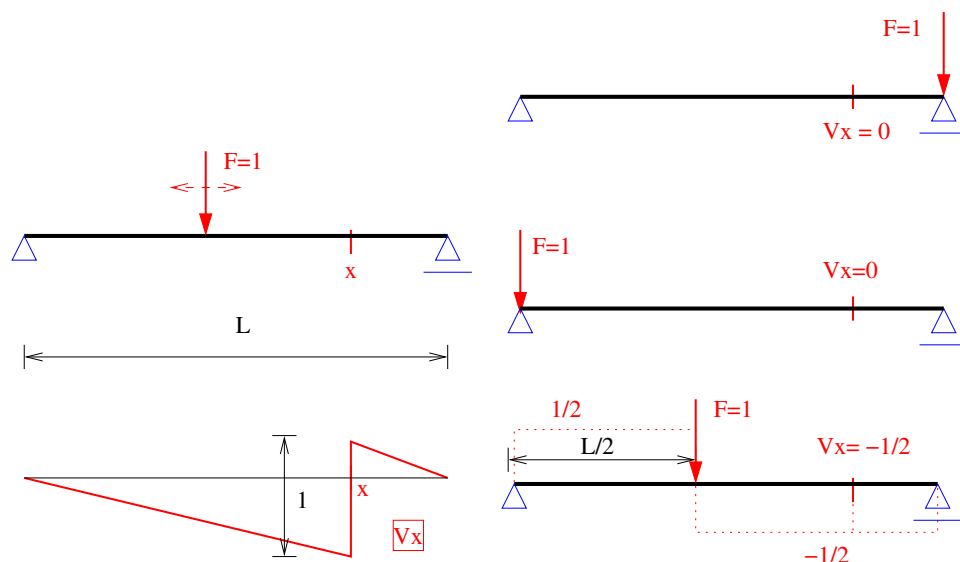
17.4 Příčinková čára posouvající síly



Obrázek 17.10: Příčinková čára posouvající síly V v místě x (1)



Obrázek 17.11: Příčinková čára posouvající síly V v místě x (2)



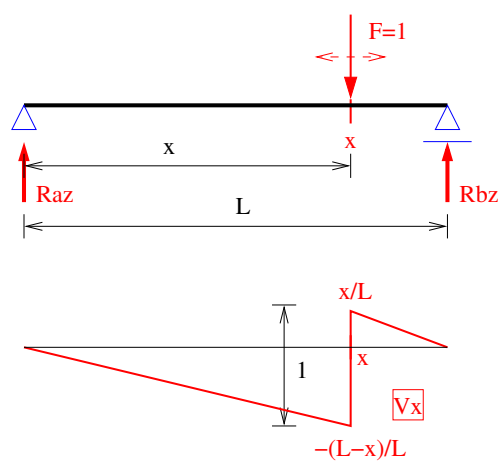
Obrázek 17.12: Příčinková čára posouvající síly V v místě x (3)

$$R_{az} = \frac{F \times (L - x)}{L}$$

$$R_{az} = \frac{(L - x)}{L} \quad (\uparrow)$$

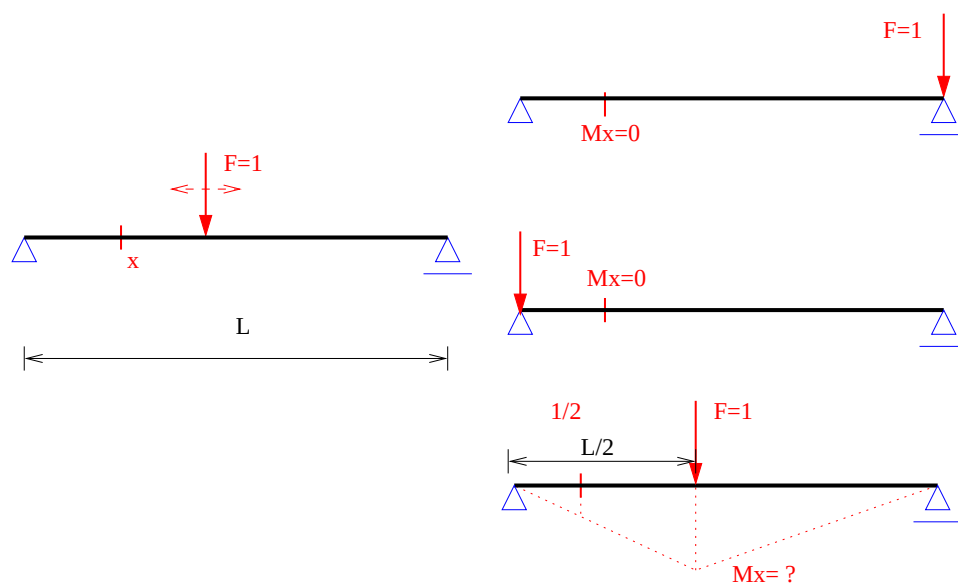
$$R_{bz} = \frac{F \times x}{L}$$

$$R_{bz} = \frac{x}{L} \quad (\uparrow)$$

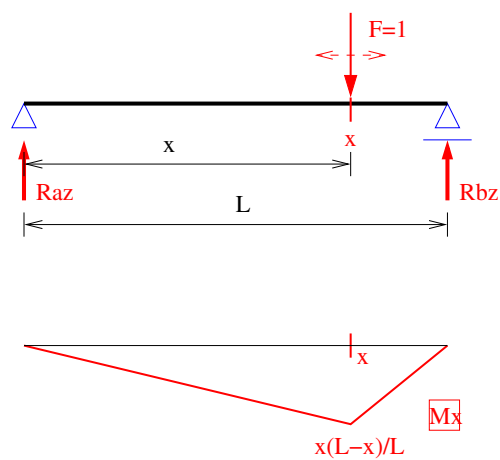


Obrázek 17.13: Příčinková čára posouvající síly V v místě x (4)

17.5 Příčinková čára ohybového momentu



Obrázek 17.14: Příčinková čára ohybového momentu (1)



Obrázek 17.15: Příčinková čára ohybového momentu (2)

$$R_{az} = \frac{F \times (L - x)}{L}$$

$$R_{az} = \frac{(L - x)}{L} \quad (\uparrow)$$

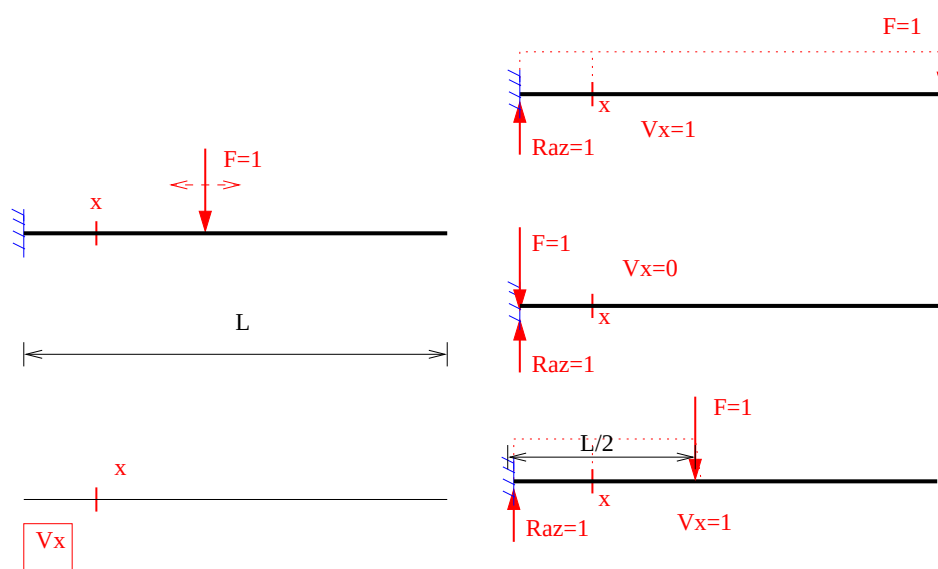
$$R_{bz} = \frac{F \times x}{L}$$

$$R_{bz} = \frac{x}{L} \quad (\uparrow)$$

$$M_x = R_{az} \times x$$

$$M_x = \frac{(L - x) \times x}{L}$$

17.6 Příčinková čára V_x na konzole

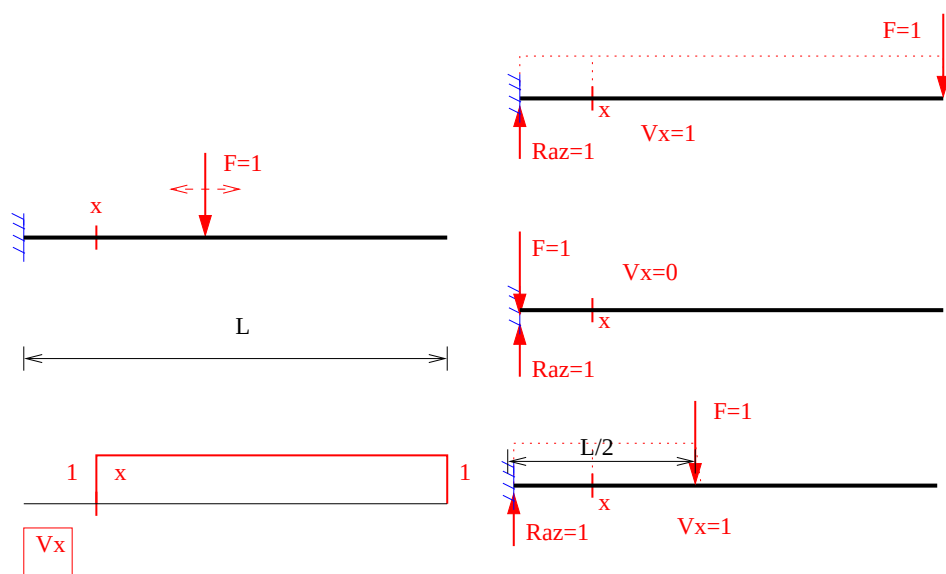


Obrázek 17.16: Příčinková čára V_x na konzole (1)

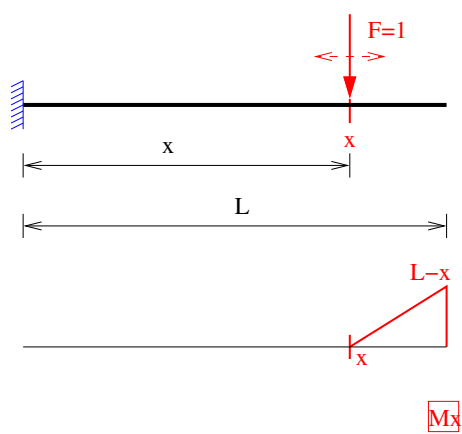
17.7 Příčinková čára M_x na konzole

$$M_x = F \times (L - x)$$

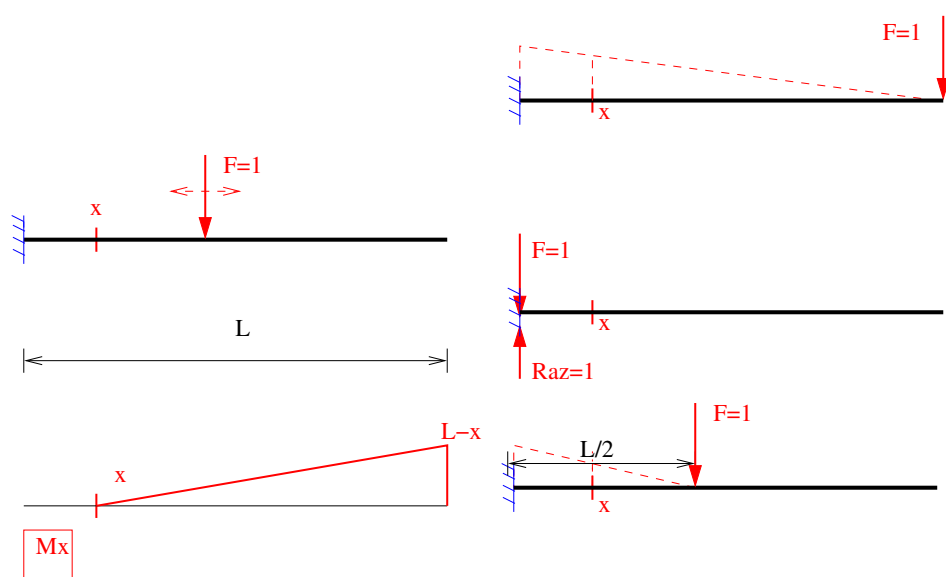
$$M_x = L - x$$



Obrázek 17.17: Příčinková čára V_x na konzole (2)

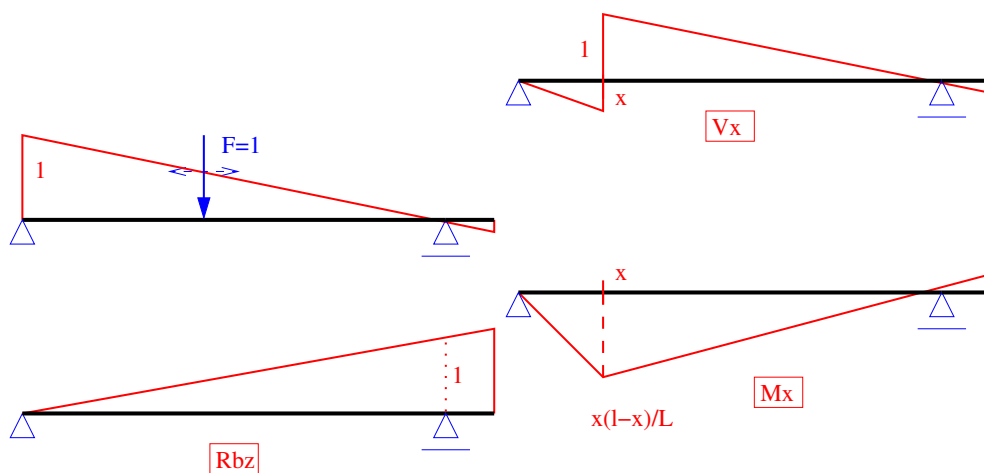


Obrázek 17.18: Příčinková čára M_x na konzole (1)



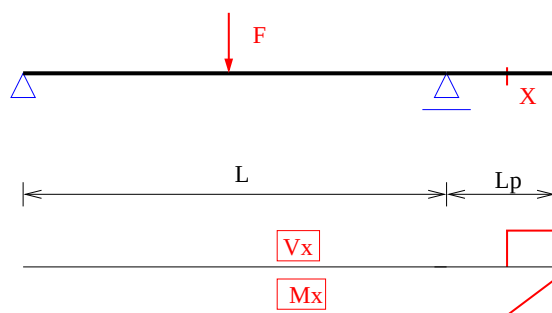
Obrázek 17.19: Příčinková čára M_x na konzole (2)

17.8 Nosník s převislými konci (1)



Obrázek 17.20: Příčinková čára nosníku s převislými konci

Příčinková čára pokračuje na převislém konci *lineárně* – hodnoty stanovíme z podobnosti trojúhelníků.

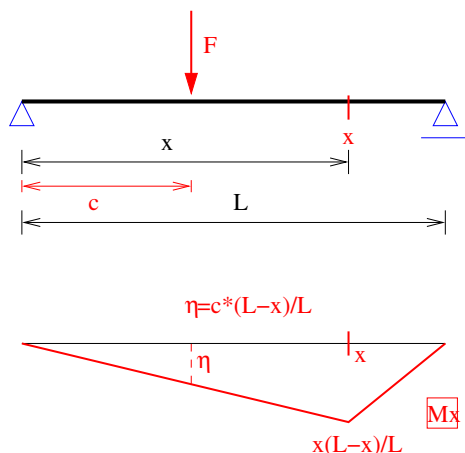


Obrázek 17.21: Příčinková čára nosníku s převislými konci, průřez x na převislém konci

Je-li průřez x **na převislém konci**, řešíme jej jako konzolu, viz obr. 17.8

17.9 Použití příčinkových čar

17.9.1 Výpočet účinků od skutečného zatížení $F_c \neq 1$



Obrázek 17.22: Výpočet účinků od skutečného zatížení

Pořadnice příčinkové čáry v bodě c :

$$\eta = \frac{x(L-x)}{L} \times \frac{c}{x} = \frac{c(L-x)}{L}$$

Velikost momentu v místě x od síly F_c působící v bodě c :

$$M_x = \eta \times F_c = F_c \frac{c(L-x)}{L}$$

- Příčinkové čáry jsou odvozeny pro jednotkovou sílu $F = 1$
- Účinky od skutečné síly $F_c \neq 1$ získáme vynásobením pořadnice η hodnotou této síly:

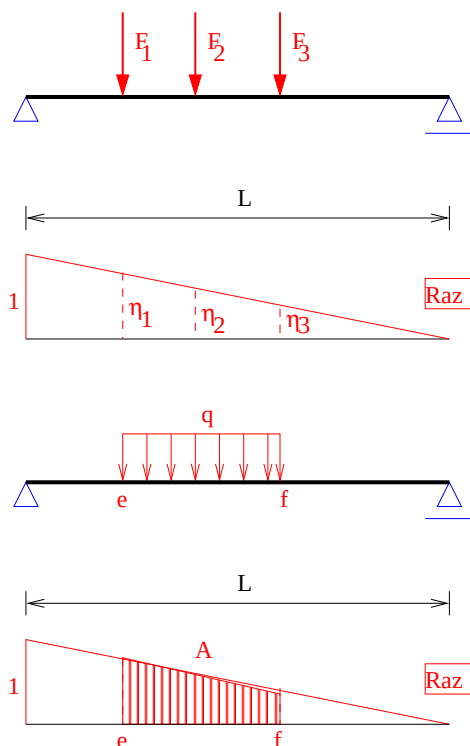
$$M_c = \eta \times F_c$$

- (Stále) platí zákon superpozice $\Rightarrow$ účinky více sil můžeme sčítat:

$$M_c = \sum \eta_i \times F_{c,i}$$

17.9.2 Výpočet účinků od skupiny sil

$$\begin{aligned} R_{az} &= \sum \eta_i \times F_{c,i} \\ R_{az} &= \eta_1 \times F_1 + \eta_2 \times F_2 + \eta_3 \times F_3 \end{aligned}$$



17.9.3 Výpočet účinků od spojitého rovnoměrného zatížení

$$R_{az} = \int_e^f q(x)\eta(x) dx$$

$$R_{az} = q \int_e^f \eta(x) dx$$

$$R_{az} = A \times q$$

17.9.4 Shrnutí

V kapitole byly ukázány příčinkové čáry vyjadřující hodnotu statických veličin ve vybraném průřezu v závislosti na poloze zatížení. Ty je možné použít jak pro určení vlivu pohyblivého zatížení, tak pro zjednodušení některých výpočtů.

17.9.5 Otázky k procvičení

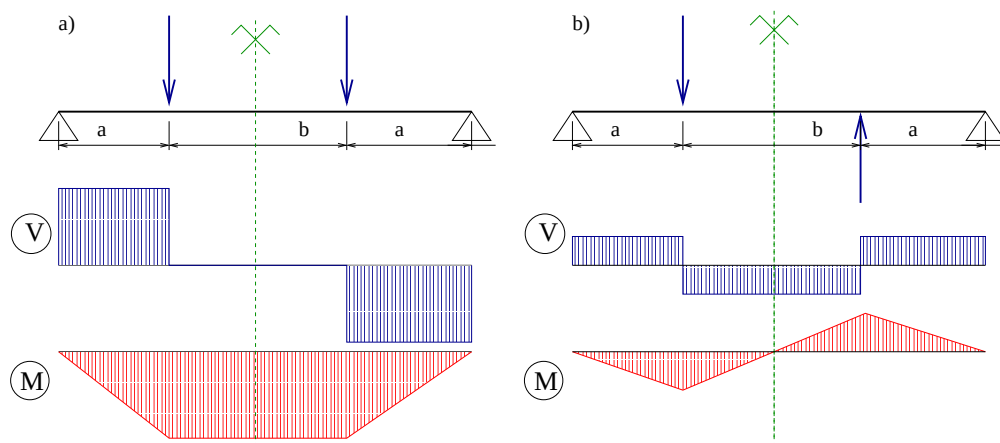
- V předchozích příkladech zvětšete všechna zatížení $4x$, a výpočty zopakujte a samostatně vykreslete i vnitřní síly.

Kapitola 18

Využití symetrie

18.1 Symetrie zatížení

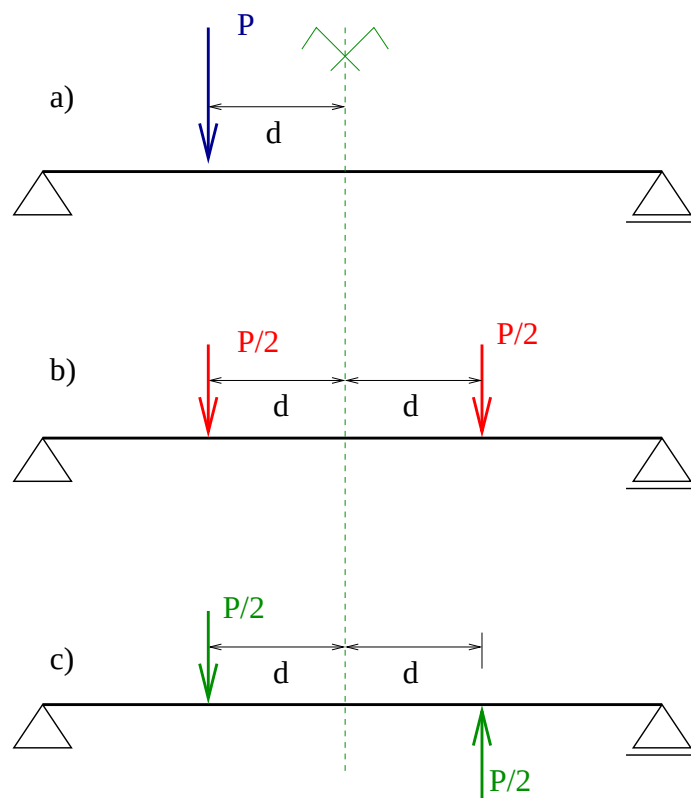
Při práci se **svislým** symetrickým nebo antisymetrickým zatížením musí být vždy **symetrické** svislé okrajové podmínky.



Obrázek 18.1: Zatížení: a) symetrické, b) antisymetrické

18.2 Rozklad obecného zatížení

- obecné zatížení (a) rozdělíme na symetrickou (b) a antisymetrickou (c) složku
- provedeme samostatný výpočet obou složek
- výsledné obrazce sečteme
- u složitých případů zatížení může usnadnit výpočet (především při ručním výpočtu)

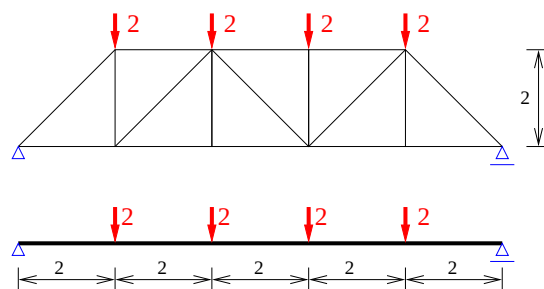


Kapitola 19

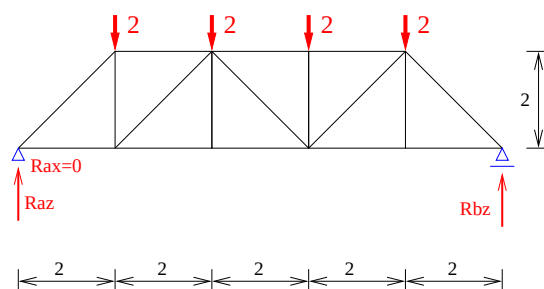
Porovnání plnostěnného a příhradového nosníku

19.1 Popis úlohy

Porovnejme vnitřní síly uprostřed rozpětí zakreslených nosníků (síly v kN , délky v m).

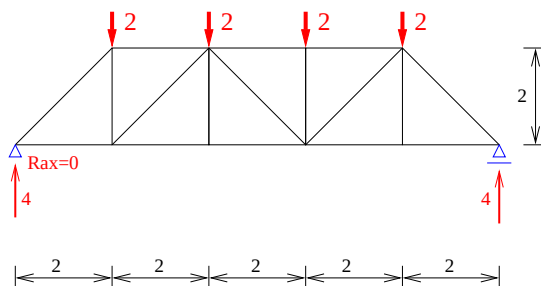


19.2 Příhradová konstrukce



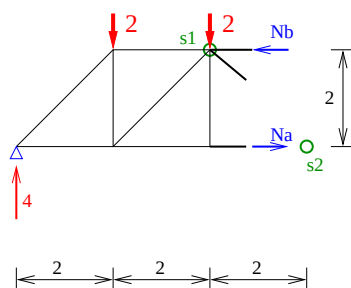
$$\begin{aligned} \sum M_{i,a} &= 0 : \\ R_{bz} \times 10 - 2 \times 2 - 2 \times 4 - 2 \times 6 - 2 \times 8 &= 0 \\ R_{bz} &= 4kN(\uparrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{i,b} &= 0 : \\ R_{az} \times 10 - 2 \times 2 - 2 \times 4 - 2 \times 6 - 2 \times 8 &= 0 \\ R_{az} &= 4kN(\uparrow)\end{aligned}$$



Kontrola ($\sum F_{i,z} = 0$):

$$R_{az} + R_{bz} - 4 \times 2 = 4 + 4 - 8 = 0kN$$



Výpočet N_a :

$$\begin{aligned}\sum M_{i,s1} &= 0 : \\ N_a \times 2 + 2 \times 2 - 4 \times 4 &= 0 \\ N_a &= 6 kN(tah)\end{aligned}$$

Výpočet N_b :

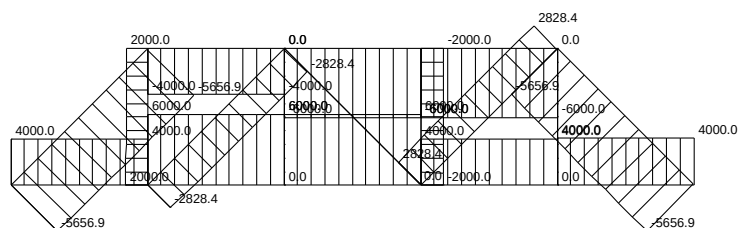
$$\begin{aligned}\sum M_{i,s2} &= 0 : \\ N_b \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 4 - 4 \times 6 &= 0 \\ N_b &= 6 kN(tlak)\end{aligned}$$

- Pruty příhradová konstrukce mají nenulové jen normálové síly (N).
- Pokud bychom chtěli určit ohybový moment (který by odpovídal účinkům těchto sil), můžeme tak učinit na základě sil a jejich ramen.

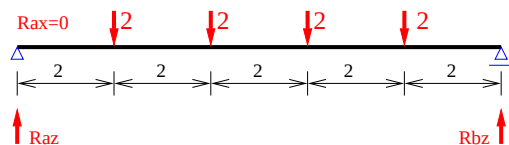
- Zde je síla v horním a dolním pásu stejně velká (opačného směru), tvoří tedy **dvojici sil**:

$$D = 2 \times N = 2 \times 6 = 12 \text{ kNm}$$

- Předpokládáme, že osa konstrukce prochází polovinu výšky (tj. prut, který jsme nepočítali, protíná tuto osu zrovna ve středu rozpětí, a proto se vy výpočtu neuplatní).

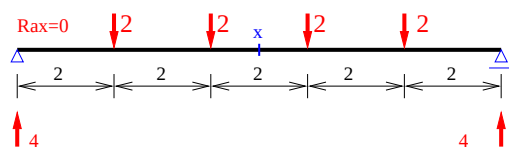


19.3 Výpočet rámu pro stejné rozpětí a zatížení



$$\begin{aligned}\sum M_{i,a} &= 0 : \\ R_{bz} \times 10 - 2 \times 2 - 2 \times 4 - 2 \times 6 - 2 \times 8 &= 0 \\ R_{bz} &= 4kN(\uparrow)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{i,b} &= 0 : \\ R_{az} \times 10 - 2 \times 2 - 2 \times 4 - 2 \times 6 - 2 \times 8 &= 0 \\ R_{az} &= 4kN(\uparrow)\end{aligned}$$



Kontrola ($\sum F_{i,z} = 0$):

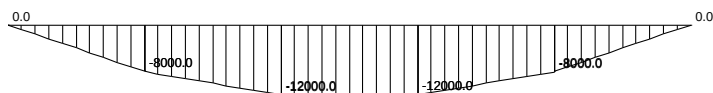
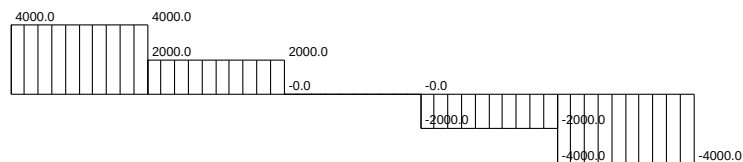
$$R_{az} + R_{bz} - 4 \times 2 = 4 + 4 - 8 = 0kN$$

P.S. Svislé reakce samozřejmě vyjdou úplně stejně (stejná půdorysná poloha sil).

$$\begin{aligned}N_x &= 0 \text{ kN} \\ V_x &= 4 - 2 - 2 = 0 \text{ kN} \\ M_x &= 4 \times 5 - 2 \times 3 - 2 \times 1 = 12 \text{ kNm}\end{aligned}$$

19.4 Porovnání

- Obě konstrukce měly stejné rozpětí, podpory a stejně **půdorysně** rozmístěné zatížení.
- Moment D vypočtený na příhradovině vyšel podobně (zde shodně) jako moment na prutu.



- Nejde o náhodu: pro **rychlý odhad** vnitřních sil v horním a dolním prutu příhradové konstrukce můžeme použít **náhradní nosník** (nebo rám).
- Čím méně budou horní a dolní prut rovnoběžné, tím méně bude tento odhad přesný (zkuste si to také se spojitým zatížením místo se silami...).
- Stejně to funguje i v jiných místech prutu (čtvrtina rozpětí apod.)

P.S. Jako rychlá kontrola vlastní (nebo cizí) práce se tato znalost často hodí...

19.4.1 Shrnutí

V závěrečné kapitole byly naznačeny možnosti využití symetrie ve výpočtech, a bylo ukázáno, jak podobně se chovají nosníky rozdílných typů při stejném rozpětí, podpoření a zatížení.