VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní opory pro předmět

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

230-0241/09

BAKALÁŘSKÝ STUDIJNÍ PROGRAM
„CHYTRÉ A ZELENÉ BUDOVY V CIRKULÁRNÍM STAVITELSTVÍ“

Garant předmětu

Dagmar Dlouhá

Zpracovatel studijních opor

Dagmar Dlouhá, František Červenka

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO PRŮMYSLU A OBCHODU

Studijní opora pro Deskriptivní geometrii

Dagmar Dlouhá, František Červenka

Obsah

Kapitola 1

Planimetrie a stereometrie Doplňky ke středoškolské látce

1.1 Základní pojmy prostorové geometrie

1.1.1 Axiomy

Předmětem studia prostorové geometrie je prostor, jehož prvky jsou **body**. Další nejjednodušší útvary jsou **přímky** a **roviny**. Body označujeme písmeny velké latinské abecedy, přímky písmeny malé latinské abecedy a roviny písmeny malé řecké abecedy.
Pro základní útvary je třeba přijmout některé předpoklady vyslovené základními větami, které nedokazujeme, čili tak zvanými **axiomy**[1], které jsou základními kameny dalších tvrzení.

Axiom A 1 *Dva různé body A, B určují jedinou přímku p. $p(AB)$*

Axiom A 2 *Přímka p a bod A, který neleží na přímce, určují jedinou rovinu ρ. $\rho(p, A)$*

Axiom A 3 *Existují čtyři různé body, které neleží na přímce ani v rovině.*

Axiom A 4 *Když dvě různé roviny mají společný bod, pak existuje jediná přímka, která leží v obou rovinách, a daným bodem prochází.*

Axiom A 5 *Ke každé přímce p lze vést bodem A, který na ní neleží, jedinou přímku q, která s přímkou p leží v rovině a nemá s p společný bod.*

Poznámka 1.1.1 *Přímce q říkáme **rovnoběžka** s přímkou p vedená bodem A .*

1.1.2 Základní věty stereometrie

Ze základních axiomů můžeme odvodit další věty:

Věta 1.1.1 *Dvě různé přímky v rovině buď mají společný jediný bod, nebo nemají žádný společný bod.*

[1]Zde uvedené axiomy se nazývají Eukleidovské podle řeckého matematika Eukleida

Věta 1.1.2 *Tři různé body, které neleží na přímce, určují jedinou rovinu.* $\rho(A, B, C)$

Věta 1.1.3 *Dvě přímky, které se protínají v bodě (různoběžky), určují jedinou rovinu.* $\rho(p, q)$

Věta 1.1.4 *Dvě různé roviny se buď protínají v přímce, nebo nemají společný bod.* $m = \rho \cap \sigma$

Věta 1.1.5 *Přímka a rovina, která neprochází přímkou, buď mají jeden, nebo nemají žádný společný bod.* $P = \rho \cap p$

Věta 1.1.6 *Když přímka má s rovinou společné dva různé body, leží celá v rovině.*

Věta 1.1.7 *Tři různé roviny, které neprocházejí přímkou, buď mají jeden, nebo nemají žádný společný bod.* $M = \alpha \cap \beta \cap \gamma$

1.1.3 Rovnoběžnost

Vycházíme z platnosti axiomu A5 (Eukleidův axiom o rovnoběžkách).[2]

Definice 1.1.1 *Říkáme, že přímky p, q jsou rovnoběžné, když leží v rovině a buď nemají společný bod nebo obě splývají.*

Definice 1.1.2 *Přímka p a rovina α jsou rovnoběžné, když nemají společný bod nebo p leží v α.*

Definice 1.1.3 *Roviny α, β jsou rovnoběžné, když buď nemají společný bod nebo splývají.*

Věta 1.1.8 *Ke každé přímce lze vést daným bodem jedinou rovnoběžku.*

Věta 1.1.9 *Je-li přímka p rovnoběžná s přímkou q a přímka q je rovnoběžná s rovinou α, pak také přímka p je rovnoběžná s rovinou α.*

Věta 1.1.10 *Když $p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak také $p \parallel r$.*

Věta 1.1.11 *Když $p \parallel \alpha$ a $\alpha \parallel \beta$, pak také $p \parallel \beta$.*

Věta 1.1.12 *Když $\alpha \parallel \beta$ a $\beta \parallel \gamma$, pak také $\alpha \parallel \gamma$.*

Věta 1.1.13 *Ke každé rovině lze vést daným bodem jedinou rovinu rovnoběžnou.*

Věta 1.1.14 (Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny) *Když rovina obsahuje přímku rovnoběžnou s danou přímkou, je s touto přímkou rovnoběžná a naopak.*

Věta 1.1.15 (Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin) *Rovina α je rovnoběžná s rovinou β právě tehdy, když obsahuje alespoň dvě různoběžky rovnoběžné s rovinou β.*

Věta 1.1.16 *Rovnoběžné roviny α, β jsou proťaty rovinou γ, která není s nimi rovnoběžná, v přímkách rovnoběžných.*

[2] Axiomatické systémy, které tento axiom neobsahují, vytváří základ tzv. neeukleidovských geometrií, jejichž studiem se v tomto textu zabývat nebudeme.

1.1.4 Nevlastní útvary

Zavedení rovnoběžné přímky a rovnoběžné roviny způsobuje, že některé geometrické věty neplatí pro všechny případy stejně a že je třeba vždy připojovat výjimky např. není pravdivá věta, že se dvě různé přímky roviny vždy protínají. Abychom tyto nesrovnalosti odstranili, zavádíme tzv. **nevlastní body**, **nevlastní přímky** a **nevlastní rovinu**. Bodům, přímkám a rovinám, kterými jsme se dosud zabývali, budeme říkat **vlastní body**, **vlastní přímky** a **vlastní roviny**.
Přímky a, b, které jsou **rovnoběžné**, definují určitý směr. Směru (přímky) budeme říkat **nevlastní bod**. Podobně rovnoběžné roviny definují určitou dvojici nezávislých směrů (nevlastních bodů) dvojsměr, o kterých budeme říkat, že určují **nevlastní přímku**. Souhrn všech nevlastních bodů a přímek prostoru určuje **nevlastní rovinu**.
Nevlastní body a přímky označujeme stejným způsobem jako vlastní, jenom přidáváme index ∞ např. U_∞, p_∞.
Pro nevlastní body a přímky prostoru, které leží v nevlastní rovině ω_∞ prostoru, je třeba zavést také pojem incidence.

Věta 1.1.17 *Na každé vlastní přímce leží její bod nevlastní.*

Věta 1.1.18 *Na každé vlastní rovině leží její nevlastní přímka, ktará nese nevlastní body všech přímek roviny.*

Věta 1.1.19 *Nevlastní bod leží na nevlastní přímce, když existuje vlastní přímka obsahující nevlastní bod, která je rovnoběžná s vlastní rovinou procházející nevlastní přímkou.*

1.1.5 Přímky a roviny kolmé

Dvě přímky v rovině svírají čtyři úhly, které se řadí do dvou dvojic stejných vrcholových úhlů. Když jsou všechny tyto úhly stejné, říkáme, že přímky jsou k sobě **kolmé**.
Úhel dvou přímek v prostoru definujeme jako úhel, jehož vrchol je libovolný bod v prostoru a ramena jsou rovnoběžky s danými přímkami vedené daným bodem.

Definice 1.1.4 (Definice kolmosti přímky a roviny) *Přímka je kolmá k rovině právě tehdy, když je kolmá ke všem přímkám roviny.*

Věta 1.1.20 (Kritérium kolmosti přímky a roviny) *Když je přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, je kolmá k rovině.*

Přímka kolmá k rovině se obvykle nazývá **normála** roviny, její průsečík s rovinou se nazývá **pata normály** (**pata kolmice**).

Věta 1.1.21 *Všechny normály roviny jsou rovnoběžné.*

Ze všech úseček, které spojují bod A prostoru s body roviny α, která neprochází A, je nejkratší úsečka, která leží na normále spuštěné z bodu A na rovinu. Délka této nejkratší úsečky se nazývá **vzdálenost bodu A od roviny α**.

Věta 1.1.22 (Kritérium kolmosti dvou rovin) *Rovina α je kolmá k rovině β právě tehdy, když obsahuje normálu roviny β.*

Věta 1.1.23 *Přímkou lze proložit alespoň jednu rovinu kolmou k dané rovině.*

Věta 1.1.24 *Rovina kolmá ke dvěma rovinám je kolmá k jejich průsečnici.*

1.2 Elementární plochy a tělesa

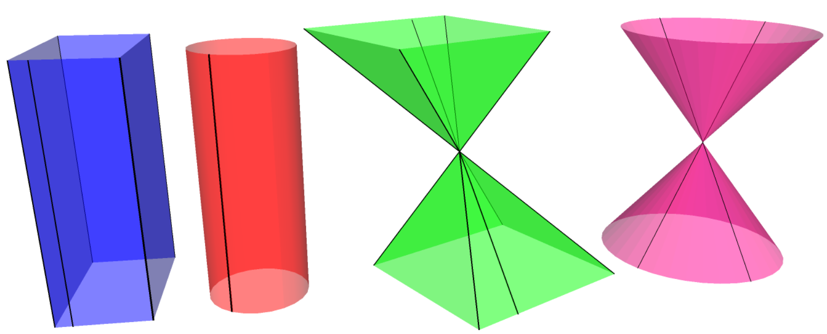
Každý z vás má jistě správnou představu o pojmu **těleso**. Méně jisté však už je, zda užíváte správně termín **plocha**. V běžné řeči – a bohužel někdy i v technické praxi – se nesprávně nazývá plochou také obsah rovinného obrazce, nebo jindy se zužuje význam tohoto pojmu pouze na rovinu, popř. její část. Ani definice plochy, jako povrchu tělesa, nevystihuje zdaleka v plné šíři všechny případy plochy.

Úplná, vědecky správná definice plochy není právě jednoduchou záležitostí a v matematické disciplíně, zvané **topologie**, zaujímá – podobně jako pojem **křivky** – důležité místo.

Proto se nemůžeme zabývat plochami obecně, ale zaměříme svou pozornost jenom na určitou skupinu základních ploch, které označujeme jako **plochy elementární**. K těmto plochám budeme počítat plochu **jehlanovou, hranolovou, kuželovou, válcovou a kulovou**. Všechny elementární plochy se vyskytují v hojné míře v technické praxi.

1.2.1 Definice a základní pojmy pro plochu jehlanovou, hranolovou, kuželovou a válcovou

Plochu tvoří vždy souhrn všech přímek, které protínají jistý řídící útvar a splňují ještě další podmínku: u plochy **jehlanové** a **kuželové** je touto podmínkou incidence s určitým bodem V, u plochy **hranolové** a **válcové** rovnoběžnost s určitým směrem $\vec{v}$.



Všechny tyto plochy obsahují nekonečně mnoho přímek, proto patří do širší skupiny **ploch přímkových**. Přímka je útvar neomezený, proto jsou neomezené i elementární plochy.

Definice 1.2.1 *Bod V nazýváme* ***vrcholem*** *jehlanové, popř. kuželové plochy, směr $\vec{v}$* ***řídícím směrem*** *hranolové, popř. válcové plochy. Řídícím útvarem jehlanové a hranolové plochy je tzv.* ***řídící mnohoúhelník****; u kuželové a válcové plochy zastává stejnou funkci tzv.* ***řídící kružnice****. Každou přímku m zmíněného souhrnu nazýváme* ***přímkou plochy****.*

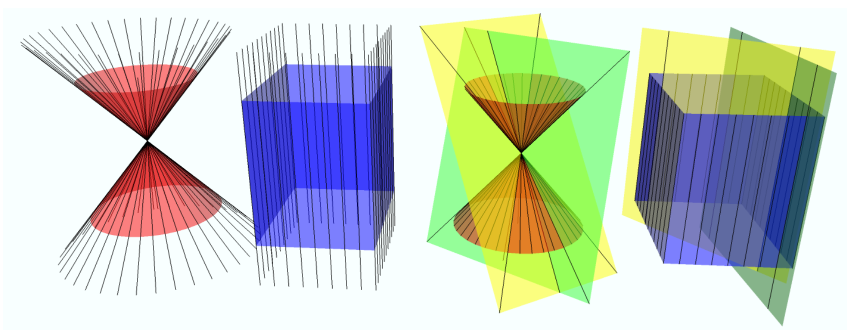
V uvedených definicích předpokládáme, že daný bod V neleží v rovině řídícího útvaru a podobně řídící směr $\vec{v}$ není s touto rovinou rovnoběžný. Řídící mnohoúhelník nutno brát jako uzavřenou lomenou čáru (nikoli jako část roviny). Budeme pracovat pouze s **konvexními mnohoúhelníky**.

Definice 1.2.2 *Každá přímka plochy, která prochází vrcholem řídícího mnohoúhelníka, se nazývá* ***hrana plochy****. Souhrn všech přímek plochy, které protínají stranu řídícího mnohoúhelníka, tvoří tzv.* ***stěnu plochy****.*

Podle počtu vrcholů řídícího mnohoúhelníka mluvíme o **trojboké, čtyřboké** ... jehlanové (hranolové) ploše.

Definice 1.2.3 *Jehlanová (kuželová, hranolová, válcová) plocha dělí prostor na dvě části, vnější a vnitřní. Vnitřní část nazýváme* ***jehlanovým (kuželovým, hranolovým, válcovým) prostorem.***

Definice 1.2.4 *Každá přímka, která prochází vrcholem jehlanové (kuželové) plochy, popř. je rovnoběžná s řídícím směrem hranolové (válcové) plochy, se nazývá* ***vrcholová přímka****. Analogicky, každá rovina těchto vlastností se nazývá* ***vrcholová rovina****.*



Definice 1.2.5 *Vrcholová přímka kuželové (válcové) plochy, která prochází středem řídící kružnice, je tzv.* ***středová přímka****.*

Definice 1.2.6 *Vrcholovou rovinu jehlanové (hranolové) plochy, která s ní má společnou pouze jednu hranu nebo pouze jednu stěnu, nazýváme* ***styčnou rovinou****. Vrcholová rovina kuželové nebo válcové plochy, která protíná rovinu řídící kružnice v tečně této kružnice, je tzv.* ***tečná rovina****. Přímku, kterou má tečná rovina společnou s kuželovou (válcovou) plochou, nazýváme* ***dotykovou přímkou****.*

Vrcholová rovina může mít vzhledem k jehlanové (hranolové, kuželové, válcové) ploše trojí polohu:

1. Neobsahuje žádnou přímku plochy.
2. Obsahuje právě jednu přímku plochy, popř. jednu stěnu (u jehlanové a hranolové plochy).
3. Obsahuje právě dvě různé přímky plochy.

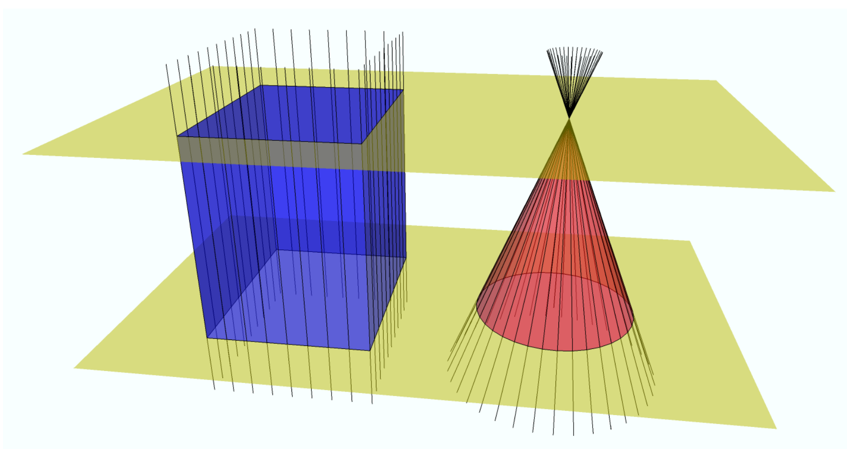
Rovina, která je rovnoběžná s rovinou řídicího útvaru (a není vrcholová), protíná

1. hranolovou a válcovou plochu ve shodném útvaru s útvarem řídicím,
2. jehlanovou plochu v mnohoúhelníku podobném řídicímu mnohoúhelníku,
3. kuželovou plochu v kružnici, která má střed na středové přímce a poloměr obvykle různý od poloměru řídicí kružnice.
   Kdy by měla stejný poloměr jako řídící kružnice?

1.2.2 Jehlan, hranol, kužel a válec

Z jehlanové, hranolové, kuželové a válcové plochy velmi snadno odvodíme **tělesa** jehlan, hranol, kužel a válec.

Definice 1.2.7 ***Jehlan (kužel)*** *je část jehlanového (kuželového) prostoru ohraničená vrcholem a rovinou řídícího útvaru.* ***Hranol (válec)*** *je část hranolového (válcového) prostoru, ohraničená dvěma rovinami, rovnoběžnými s rovinou řídicího* ***útvaru****.*



Mnohé pojmy přenášíme na tělesa z ploch. Jsou to **vrchol** jehlanu (kužele), **řídící směr** hranolu (válce), **hrany a stěny** jehlanu i hranolu a **středová přímka** kužele a válce. Kromě nich se objevují nové pojmy.

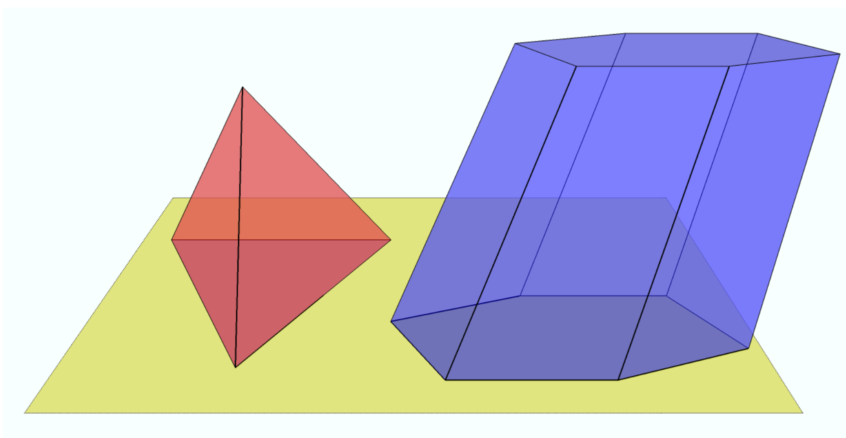
Definice 1.2.8 ***Podstava*** *jehlanu, hranolu, kužele nebo válce je řez příslušného jehlanového, hranolového, kuželového nebo válcového prostoru některou z rovin, o kterých se mluví v předchozí definici. Část jehlanové (hranolové, kuželové, válcové) plochy, která ohraničuje jehlan (hranol, kužel, válec) se nazývá* ***plášť****. Podstava (popř. obě podstavy hranolu a válce) a plášť tvoří dohromady* ***povrch*** *tělesa.*

Definice 1.2.9 *Strany mnohoúhelníků, popř. kružnice, které ohraničují podstavy, se nazývají* ***podstavné hrany****. Úsečky na vrcholových přímkách pláště kužele (válce) jsou tzv.* ***strany kužele (válce)****. Vzdálenost vrcholu od roviny podstavy u jehlanu a válce je* ***výškou*** *tělesa.*

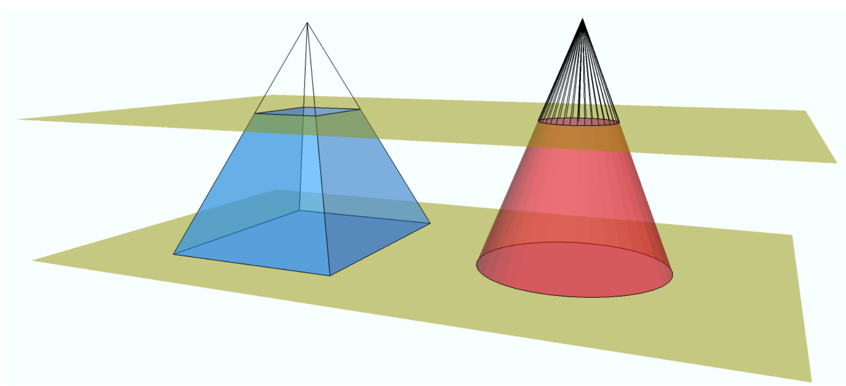
Výškou jehlanu, popř. kužele, se často rozumí nejen její velikost, ale také úsečku VP, kde bod P je patou výšky.

Jehlan a hranol jsou tělesa ohraničená jen mnohoúhelníky. Tělesa této vlastnosti se nazývají **mnohostěny**. Jehlan a hranol jsou ovšem jenom velmi speciální případy mnohostěnů.

Mezi jehlany a hranoly lze najít dva zajímavé mnohostěny. Jehlan, jehož podstavou je trojúhelník (tedy trojboký jehlan), je těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníky, se nazývá **čtyřstěn**. Druhým zajímavým mnohostěnem je hranol, jehož podstavou je rovnoběžník. Toto těleso je ohraničeno páry navzájem rovnoběžných rovnoběžníků, a proto se nazývá **rovnoběžnostěn**. U rovnoběžnostěnu nemluvíme o podstavách, protože úlohu podstav může hrát kterýkoli pár navzájem rovnoběžných stěn.



Protneme-li jehlan, popř. kužel, rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy, rozpadne se na dvě tělesa. Jedno z nich je opět jehlan, popř. kužel, avšak s podstavou, která je mnohoúhelníkem podobným s mnohoúhelníkem podstavy jehlanu, popř. kružnicí menšího poloměru, než je u kužele. Zbývající tělesa se nazývají **komolý jehlan** a **komolý kužel**.



1.2.3 Kulová plocha a koule

Definice 1.2.10 *Kulová plocha je množina bodů v prostoru, které mají od určitého pevného bodu S stále stejnou vzdálenost r. Bod S je střed plochy kulové, číslo $r > 0$ poloměr plochy kulové.*

Definice 1.2.11 ***Koule** je část prostoru, kterou uzavírá plocha kulová.*

Při vyšetřování vzájemné polohy kulové plochy a roviny je rozhodující vzdálenost roviny od středu kulové plochy.

Definice 1.2.12 *Kružnice na ploše kulové, jejíž rovina prochází středem plochy kulové, se nazývá **hlavní kružnice**. Každá jiná kružnice plochy kulové je **kružnice vedlejší**.*

Definice 1.2.13 *Rovina, která má s plochou kulovou společný pouze jeden bod, se nazývá **tečná rovina**. Společný bod je její **dotykový bod**.*

Rovina může mít vzhledem k ploše kulové trojí polohu:

1. Protíná plochu kulovou v kružnici (hlavní nebo vedlejší).
2. Dotýká se plochy kulové v jednom bodě (rovina tečná).
3. Nemá s plochou kulovou společný žádný bod.

Tečná rovina plochy kulové je kolmá na průměr procházející bodem dotyku.

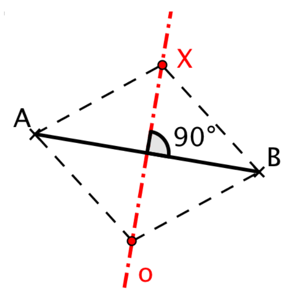
Definice 1.2.14 *Přímku, která prochází středem plochy kulové, nazýváme jejím **průměrem**. Stejným názvem označujeme i úsečku délky $2r$, kterou na této přímce vytíná kulová plocha.*

Definice 1.2.15 *Přímka, která má s plochou kulovou společný právě jeden bod, se nazývá její **tečnou**.*

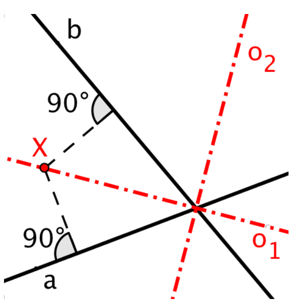
Kapitola 2

Množiny bodů dané vlastnosti

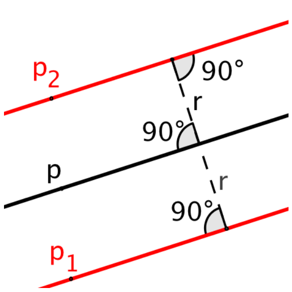
Velmi silným nástrojem v geometrii jsou množiny bodů dané vlastnosti, slouží zejména jako dílčí prvky řešení geometrických úloh, ale neobejde se bez nich i většina vět, zejména důkazů. V této kapitole najdete přehled těchto množin a u některých nastíníme i důkazy. Úvahy provedeme pro rovinu (E_2), ale většina množin se dá lehce zobecnit i pro prostor (E_3).



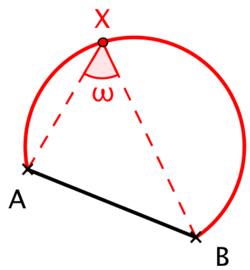
Věta 2.0.1 *Množina všech bodů, které mají od dvou různých bodů A, B stejně veliké vzdálenosti, je osa úsečky AB.*



Věta 2.0.2 *Množina všech bodů, které mají od daných různoběžných přímek a, b stejně veliké vzdálenosti, je osa úhlu přímek a a b.*

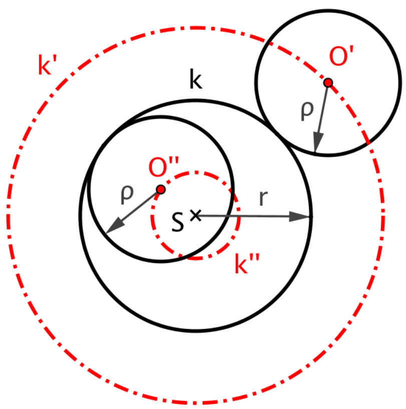


Věta 2.0.3 *Množina všech bodů, které mají od dané přímky p danou vzdálenost $r > 0$, jsou dvě různé přímky p_1, p_2 rovnoběžné s p, které mají od přímky p vzdálenost r.*



Věta 2.0.4 *Nechť je dána úsečka AB. Množina všech bodů X, které leží v jedné z polorovin určených přímkou AB a pro které platí $\sphericalangle AXB = \omega$, kde ω je daný úhel ($0 < \omega < \pi$), je kruhový oblouk AXB o poloměru $r = \frac{AB}{2\sin\omega}$ bez krajních bodů A, B.*

Poznámka 2.0.1 *Je-li $\omega = \frac{1}{2}\pi$, oblouk je tzv.* ***Thaletovou polokružnicí*** *opsanou nad úsečkou AB jako průměrem.*

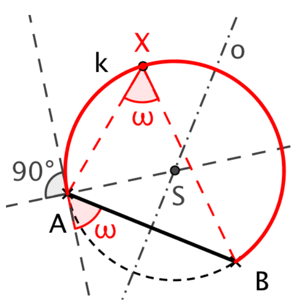


Věta 2.0.5 *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k(S;r)$ a mají daný poloměr $\rho > 0$, jsou za předpokladu $\rho \neq r$ dvě kružnice $k'(S;|r+\rho|)$, $k''(S;|r-\rho|)$ a za předpokladu $\rho = r$ jediná kružnice k'.*

2.1 Řešené příklady

Úloha 1

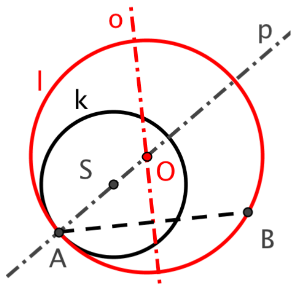
Sestrojte množinu všech bodů v rovině, ze kterých je vidět úsečka AB pod úhlem ω.



Máme sestrojit kruhový oblouk z Věty 2.0.4. - neboli hledáme část kružnice $k(S,r)$, která musí procházet body A, B. Střed S leží na o ose úsečky AB. Úsečku máme vidět pod úhlem ω - sestrojíme rameno úhlu dané velikosti v bodě A a v tomto bodě k němu povedeme kolmou přímku p. Přímka p protne osu o ve středu S, který leží v opačné polorovině než rameno úhlu ω, oblouk kružnice $k(S; r = |AS|)$ v této polorovině je hledaná množina bodů.

Úloha 2

Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S; r)$ v daném bodě A a prochází daným bodem B, který neleží na tečně kružnice k v bodě A.



Kružnice prochází body A, B její střed bude ležet na o ose úsečky AB. Středy všech kružnic, které se dotýkají kružnice k v bodě A, leží na přímce $p(AS)$. Hledaná kružnice l má střed v průsečíku přímek o a p $O = o \cap p$ a poloměr $r = |OA|$.

2.2 Úlohy k procvičení

1. Najděte množinu všech středů kružnic, které se dotýkají dvou různoběžných přímek.
2. Najděte množinu všech středů kružnic o daném poloměru $r > 0$, které se dotýkají dané přímky.
3. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník, je-li dána jeho základna BC a leží-li hlavní vrchol A na dané přímce $p(BC)$.
4. Nad danou úsečkou AB sestrojte rovnoramenný trojúhelník, je-li dán úhel $0 < \gamma < \pi$ při hlavním vrcholu C.
5. Jsou dány rovnoběžné přímky p, q a uvnitř jejich pásu bod M. Sestrojte kružnici k, která se dotýká p, q a prochází bodem M.

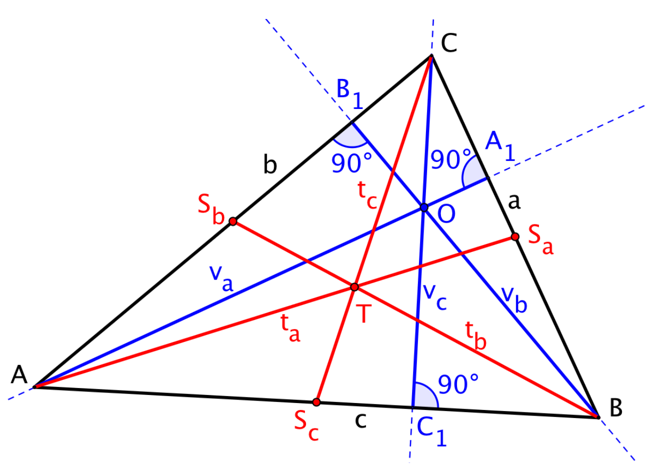
Kapitola 3

Trojúhelníky

Trojúhelník ABC, nebo také $\triangle ABC$, s vrcholy A, B, C lze definovat jako průnik tří polorovin $\mapsto ABC$, $\mapsto BCA$ a $\mapsto CAB$. Pokud tyto body leží v jedné přímce, potom takový trojúhelník neexistuje. Jedná se tedy o rovinný útvar ohraničený třemi úsečkami $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, které se nazývají strany trojúhelníku. Součtem velikostí úhlů vymezených vrcholy trojúhelníku $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle ACB$, nebo také vnitřních úhlů trojúhelníku, je úhel přímý (180^o).
Aby trojúhelník o stranách a, b, c existoval, musí platit trojúhelníková nerovnost, tj. součet každých dvou délek stran musí být větší než délka strany třetí.

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b$$

Těžnice jsou úsečky spojující vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany, protínají se v jednom bodě, těžišti T trojúhelníku. Bod T navíc dělí každou z těžnic na úsečky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 1.
Výšku v trojúhelníku chápeme jako úsečku spojující vrchol s patou kolmice na protější stranu. Tímto pojmem ale můžeme chápat i celou přímku, na níž dotyčná úsečka leží. Všechny tři výšky se protínají v jednom bodě O, tzv. ortocentru.



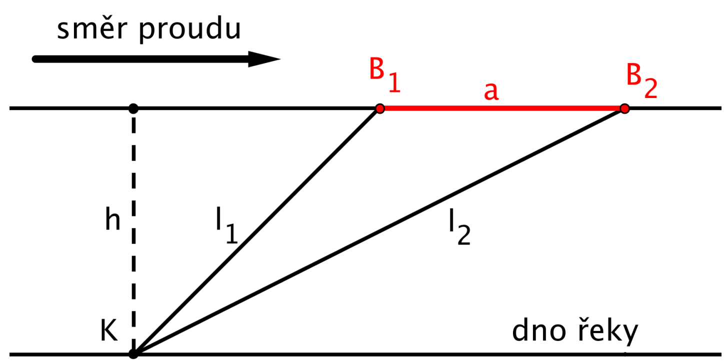
S_a, S_b, S_c- středy stran
t_a, t_b, t_c- těžnice
A_1, B_1, C_1- paty výšek
v_a, v_b, v_c- výšky trojúhelníka

3.1 Řešené příklady

Úloha 1

Měření hloubky řeky v jejích nedostupných úsecích

Antickému matematikovi Heronovi je připisován vzorec $P_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, který dovoluje ze stran a, b, c trojúhelníka vypočítat jeho obsah $P_\triangle$, přičemž $s = \frac{a+b+c}{2}$ značí poloviční obvod trojúhelníka.
Zdálo by se, že tento tolik století starý vzorec už asi v dnešní době mnoho nového nepřinese. A přece tomu tak není. Našli se dva lidé (Šurikov a Zdanovič), kteří se na celou záležitost dovedli podívat zcela novým pohledem. V roce 1966 získali autorský patent na to, jak dosti neobvyklým způsobem měřit hloubku řeky v těch jejích úsecích, které jsou nedostupné. Jejich metoda je skutečně originální. Do vody se hodí kotva, na níž jsou na dvou lankách nestejné délky (l_1 a l_2) přivázány dvě bóje. V okamžiku, kdy bóje vyplují na hladinu, se provede letecké snímkování. Změřením na obrázku se získá vzdálenost (a) obou bójí a z toho se už dá vypočítat hloubka (h) řeky v uvedeném místě.



V trojúhelníku $\triangle B_1B_2K$ známe délky všech stran (l_1, l_2, a). Jeho obsah $P_\triangle$ lze vypočítat podle vzorce „základna krát výška lomeno dvěma“, tj. $P_\triangle = \frac{a.h}{2}$.
Spolu s tím lze $P_\triangle$ vypočítat i podle Heronova vzorce:

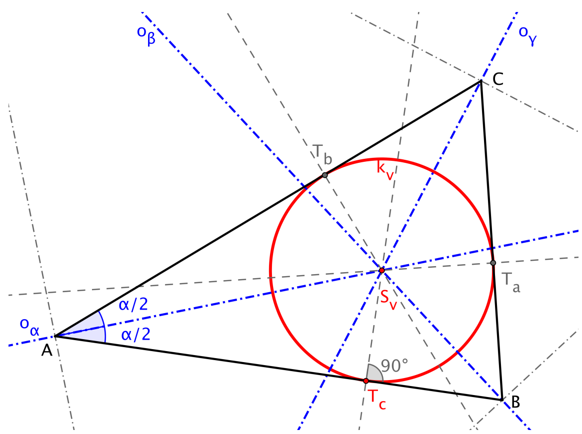
$$
\begin{aligned}
P_\triangle &= \sqrt{s(s-a)(s-l_1)(s-l_2)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a+l_1+l_2}{2} \\
\frac{a.h}{2} &= \sqrt{s(s-a)(s-l_1)(s-l_2)} \\
h &= \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-l_1)(s-l_2)}, \quad \text{po úpravě} \\
h &= \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2l_1^2 - (l_2^2 - l_1^2 - a^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Úloha 2

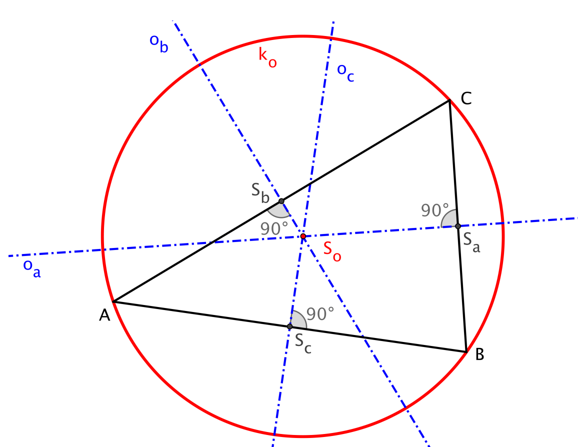
Kružnice trojúhelníku vepsaná a opsaná

Úlohy vyřešíme s využitím množin všech bodů daných vlastností.

a) Sestrojte kružnici k_v trojúhelníku $\triangle ABC$ vepsanou.
Hledáme kružnici, která leží uvnitř trojúhelníku $\triangle ABC$, tudíž se jeho stran a, b, c dotýká. Množinou všech středů kružnic, které se dotýkají dvou různoběžných přímek, je jejich osa. Střed kružnice vepsané k_v leží tedy v průsečíku S_v os úhlů $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle BCA$. Pata kolmice spuštěné ze středu S_v na stranu trojúhelníka je bodem dotyku kružnice k_v a příslušné strany.



b) Sestrojte kružnici k_o trojúhelníku $\triangle ABC$ opsanou.
Kružnice k_o prochází vrcholy trojúhelníku ABC. Množina všech středů kružnic procházejících dvěma různými body je osa úsečky těmito body určené. Střed kružnice opsané leží v průsečíku alespoň dvou os stran trojúhelníka.



3.2 Úlohy k procvičení

1. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, je-li dáno:

   a) $a = 5; \alpha = 93^o; \beta = 49^o$

   b) $a = 5; b = 4; t_a = 3,5$

   c) $a = 6; b = 8; v_c = 5$

   d) $c = 8; t_a = 7; t_b = 6$

   e) $b = 3,8; t_b = 4,2; \beta = 43^o$

   f) $b = 4,5; t_c = 3,8; \alpha = 54^o$

   g) $c = 5,5; t_a = 3,3; \alpha = 59^o$

   h) $c = 10; \alpha = 45^o; r_v = 2,5$

2. Z pozorovatelny vysoké $15m$ a vzdálené $30m$ od břehu řeky se jeví šířka řeky v zorném úhlu $\varphi = 15^o$. Vypočítejte šířku řeky.

3. Kosmická loď byla sledována radarovým zařízením ze Země. Při výškovém úhlu $\alpha = 20^o35'$ byla naměřena vzdálenost $d = 520km$. V jaké výšce je loď (poloměr Země je $6378km$)?

4. Z letiště odletěla současně dvě letadla. První s kurzem $\alpha_1 = 30^o$ a druhé s kurzem $\alpha_2 = 86^o$. Obě letěla rychlostí $320km/h$. Jak byla od sebe vzdálena za 45 minut letu?

5. Určete obsah trojúhelníku daného body $A(1,2,3), B(0,-1,2), C(2,1,3)$.

   a) početně

   b) s využitím geogebry

Kapitola 4

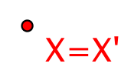
Geometrická zobrazení v rovině

Geometrické zobrazení přiřazuje každému geometrickému útvaru (množině bodů) roviny opět geometrický útvar téže roviny. Navzájem přiřazeným bodům a útvarům říkáme **odpovídající si (sdružené, korespondující)** body a útvary. Jestliže útvar splývá se svým odpovídajícím útvarem, nazývá se **samodružný**.

Základní geometrické příbuznosti v rovině jsou **identita, posunutí, osová souměrnost, středová souměrnost, otáčení, stejnolehlost a podobnost**.

4.1 Identita

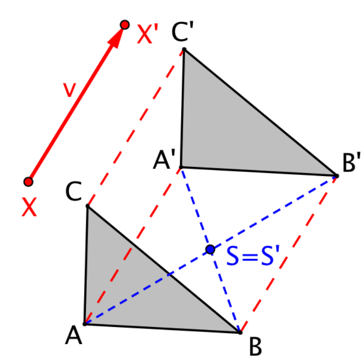
Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu X roviny přiřazuje týž bod X, se nazývá **identita**.



4.2 Posunutí

Geometrické zobrazení v rovině, které bodu X přiřazuje bod X' tak, že pro každou další dvojici odpovídajících si bodů Y, Y' platí, že střed úsečky XY' splývá se středem úsečky $X'Y$, se nazývá **rovnoběžné posunutí v rovině (translace)**, stručně **posunutí**.

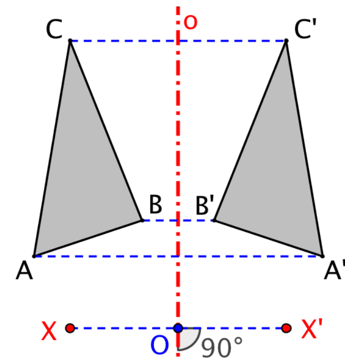
$\vec{v} = XX'$– **směr posunutí**
$|\vec{v}| = |XX'|$– **velikost posunutí**
$X \equiv X'$– identita



Věta 4.2.1 *Neidentické posunutí v rovině je určeno směrem, velikostí a smyslem nebo jednou uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů.*

1. Spojnice XX' odpovídajících si bodů X, X' jsou vzájemně rovnoběžné, všechny úsečky XX' jsou vzájemně shodné.
2. Přímce odpovídá přímka, odpovídající přímky jsou vzájemně rovnoběžné.
3. Nemá žádný samodružný bod.
4. Všechny samodružné přímky jsou právě přímky XX'.

4.3 Osová souměrnost



Geometrické zobrazení v rovině, které bodu X přiřazuje bod X' tak, že všechny úsečky XX' mají společnou osu o, se nazývá **osová souměrnost v rovině**.
$o-$ **osa souměrnosti**

Věta 4.3.1 *Osová souměrnost je určena osou nebo jednou nesamodružnou dvojicí odpovídajících si bodů.*

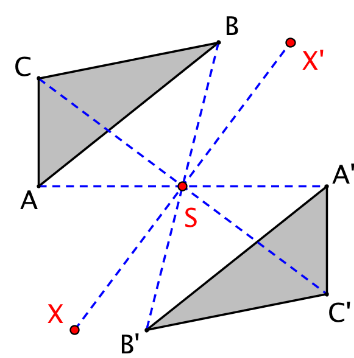
1. Odpovídající si body X, X' leží na kolmici k ose souměrnosti, přitom osa souměrnosti je osou úsečky XX'.

2. Přímce odpovídá přímka. Jestliže je přímka různoběžná s osou, má s odpovídající si přímkou společný bod na ose. Jestliže je rovnoběžná s osou, pak také odpovídající přímka je rovnoběžná s osou.

3. Každý bod osy je samodružný, jiné samodružné body zobrazení nemá.

4. Samodružné přímky jsou osa souměrnosti (**silně samodružná**) a přímky kolmé k ose souměrnosti (**slabě samodružná**).

4.4 Středová souměrnost



Geometrické zobrazení v rovině, které bodu X přiřazuje bod X' tak, že všechny úsečky XX' mají společný střed S, se nazývá **středová souměrnost v rovině**.

$S-$ **střed souměrnosti**

Věta 4.4.1 *Středová souměrnost je určena svým středem nebo jednou dvojicí odpovídajících si bodů.*

1. Odpovídající si body X, X' leží na přímce procházející středem souměrnosti, přitom střed souměrnosti je středem úsečky XX'.

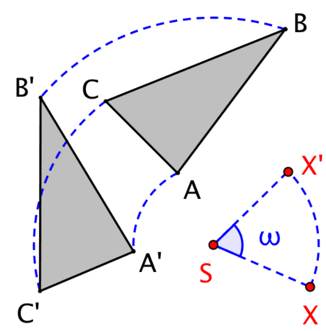
2. Přímce odpovídá přímka s ní rovnoběžná.

3. Má jediný samodružný bod, a to střed souměrnosti.

4. Každá přímka procházející středem souměrnosti je samodružná (**slabě**).

4.5 Otáčení

Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, pro který $XS = X'S$ a $\sphericalangle XSX' = \omega$, kde ω je daný orientovaný úhel, se nazývá **otáčení (rotace) kolem bodu** S o orientovaný úhel ω.



$S-$ **střed otáčení**
$\omega-$ **úhel otáčení**
$\omega = (2k+1)\pi$ – středová souměrnost
$\omega = 2k\pi$ – identita

Pro $\omega > 0$ otáčíme proti směru hodinových ručiček, v opačném případě po směru.

Věta 4.5.1 *Otáčení v rovině je určeno středem otáčení S a úhlem otáčení ω.*

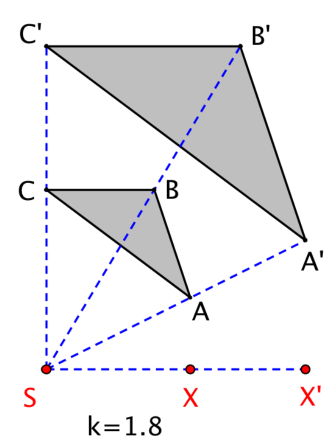
1. Odpovídající si body $X \neq S$, X' leží na kružnici o středu S a poloměru SX, přitom orientovaný úhel $\sphericalangle XSX' = \omega$ je konstatní.
2. Přímce odpovídá přímka, obě jsou stejně vzdálené od středu otáčení.
3. Neidentické otáčení ($\omega \neq 2k\pi$) má jediný samodružný bod, a to střed otáčení.
4. Jenom otáčení o úhel $\omega = k\pi$ má samodružné přímky. Je-li k sudé, pak všechny přímky jsou samodružné, je-li k liché, pak právě přímky procházející středem otáčení jsou samodružné (slabě).

Věta 4.5.2 *Skládáním dvou shodných zobrazení vznikne opět shodnost, ale záleží na pořadí skládání.*

Věta 4.5.3 *Má-li útvar dvě osy souměrnosti, které jsou k sobě kolmé, pak je středově souměrný podle jejich průsečíku.*

4.6 Stejnolehlost

Nechť je dán pevný bod S a reálné číslo $k \neq 0$. Geometrické zobrazení v rovině, které bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \neq S$ bod X', jehož vzdálenost od S je $|SX'| = |k|.|SX|$, přičemž pro $k > 0$ bod X' leží na polopřímce SX a pro $k < 0$ na opačné polopřímce, se nazývá stejnolehlost v rovině.



$S-$ **střed stejnolehlosti**
$k-$ **koeficient stejnolehlosti**
$k = 1-$ identita
$k = -1-$ středová souměrnost

Věta 4.6.1 *Stejnolehlost je určena středem S a koeficientem stejnolehlosti k nebo středem S a uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů $X \neq S$, $X' \neq S$, které leží na přímce procházející bodem S.*

1. Odpovídající si body X, X' leží na přímce procházející středem S stejnolehlosti. Pro jejich vzdálenosti od středu S stejnolehlosti platí $|SX'| = |k|.|SX|$. Je-li $k > 0$, body X, X' leží na téže polopřímce SX, je-li $k < 0$, leží na opačných polopřímkách určených bodem S.

2. Přímce odpovídá přímka s ní rovnoběžná.

3. Stejnolehlost různá od identity má jediný samodružný bod.

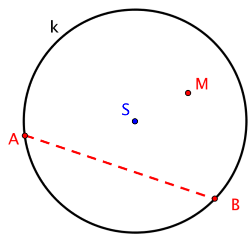
4. Samodružné přímky stejnolehlosti různé od identity jsou právě všechny přímky procházející středem stejnolehlosti.

5. Úsečce odpovídá úsečka, jejíž délka je rovna délce dané úsečky násobené číslem $|k|$.

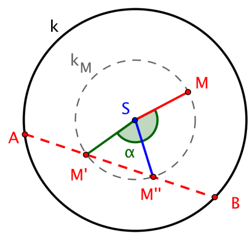
4.7 Řešené příklady

Úloha 1

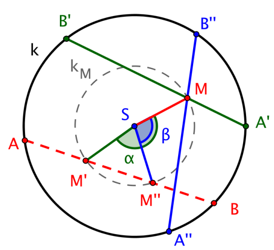
Je dána kružnice $k(S;r)$ a bod M tak, že $|MS| < r$. Sestrojte tětivu kružnice k, která prochází bodem M a má délku d.



Na kružnici k si zvolíme libovolný pomocný bod A a sestrojíme tětivu AB kružnice k o délce d.



Pomocnou tětivu AB otočíme tak, aby procházela bodem M. Na AB najdeme body M', M'', které mají stejnou vzdálenost od středu kružnice S jako M, neboli jsou to otočené obrazy bodu M o úhly $\alpha = \sphericalangle M'SM$ a $\beta = \sphericalangle M''SM$

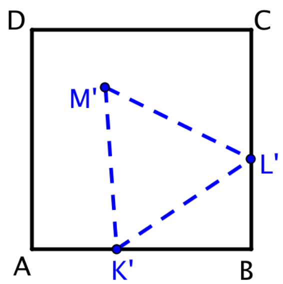


Tětivu AB otočíme o úhly α a β kolem středu kružnice k a najdeme tětivy $A'B'$ a $A''B''$, obě prochází bodem M a mají velikost d.

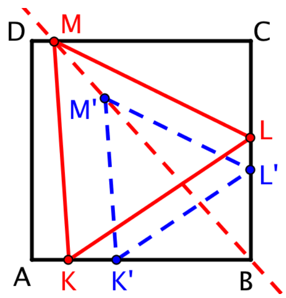
V jakém geometrickém zobrazení je tětiva $A''B''$ obrazem $A'B'$?

Úloha 2

Danému čtverci $ABCD$ vepište rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby vrchol K ležel na straně AB, L na BC a M na CD nebo AC.



Všechny rovnostranné trojúhelníky, které mají rovnoběžné strany, jsou podobné. Nejprve sestrojíme pomocný rovnostranný trojúhelník $K'L'M'$ libovolné velikosti tak, aby vrchol K' ležel na straně AB a L' na BC, třetí vrchol M' leží uvnitř čtverce $ABCD$.



Hledáme stejnolehlost, která zobrazí trojúhelník $K'L'M'$ na trojúhelník KLM splňující podmínky zadání. Víme, že vrcholy K a K' leží na straně AB,
L a L' na straně BC. Středem stejnolehlosti je společný bod obou stran - vrchol B. Promítneme z B vrchol M' na příslušnou stranu čtverce (buď na CD nebo AD) a získáme vrchol M hledaného trojúhelníku. Zbývající vrcholy najdeme pomocí rovnoběžnosti $MK \parallel M'K'$, $ML \parallel M'L'$.

4.8 Úlohy k procvičení

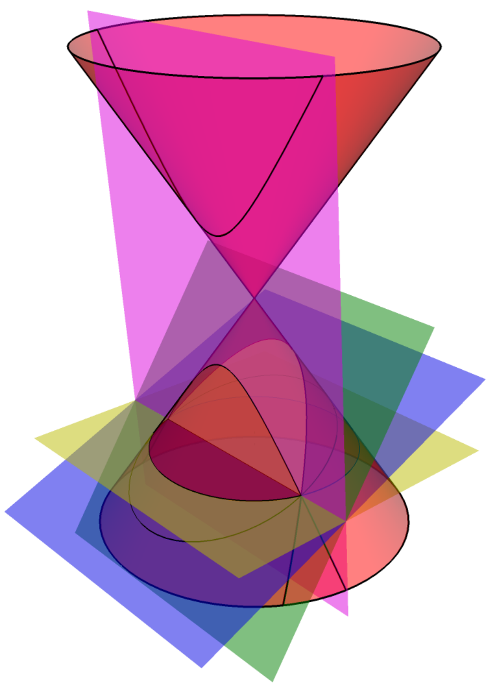
1. Jsou dány tři různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod $A \in a$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby měl vrcholy postupně na rovnoběžkách a, b, c.
2. Jsou dány různoběžné přímky b, d a uvnitř jejich ostrého úhlu bod A. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $B \in b$, $D \in d$.
3. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány jeho těžnice t_a, t_b, t_c.
4. Danému trojúhelníku ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby na jedné straně trojúhelníka ležely dva sousední vrcholy čtverce a aby na každé zbývající straně trojúhelníka ležel právě jeden vrchol čtverce.
5. Sestrojte společné tečny dvou nesoustředných kružnic s různými poloměry.

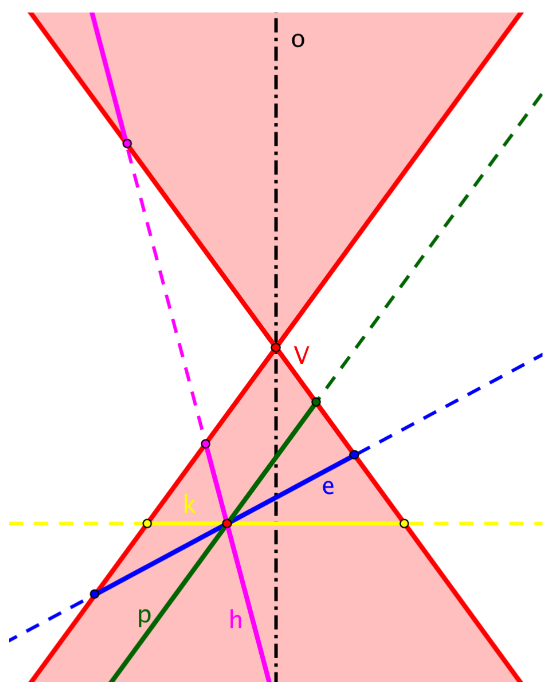
Kapitola 5

Kuželosečky

Seznámíme se ze základními vlastnostmi **elipsy, hyperboly a paraboly**, které společně s **kružnicí** jsou známy pod společným názvem **kuželosečky**. Říká se jim tak proto, že každou z nich je možné sestrojit jako průsečnou křivku rotační kuželové plochy vhodně zvolenou rovinou. Kuželosečky jsou tedy rovinné křivky.

Řezy kuželové plochy





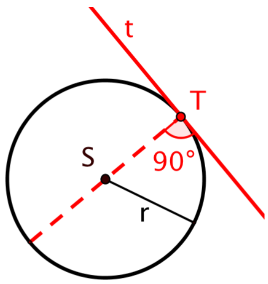
$k-$ kružnice
$e-$ elipsa
$p-$ parabola
$h-$ hyperbola

5.1 Kružnice

Kružnice je křivka, která vznikne řezem rotační kuželové plochy rovinou, jestliže rovina řezu svírá s osou kuželové plochy pravý úhel.

Definice 5.1.1 *Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S konstantní vzdálenost r.*

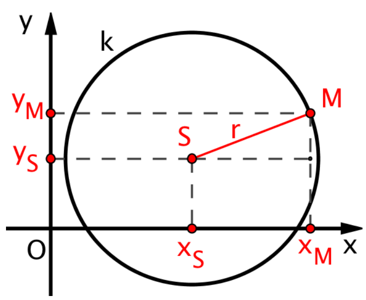
Tečna kružnice



Definice 5.1.2 *Tečna je přímka, která se dotýká kružnice právě v jednom bodě.*

Věta 5.1.1 *Tečna v bodě kružnice je kolmá na průměr procházející bodem dotyku.*

Analytická rovnice kružice



$S[x_S; y_S]-$ střed kružnice
$r-$ poloměr kružnice, $r > 0$
$M \in k, M[x_M; y_M], |SM| = r$

Parametrizace kružnice:

$$\begin{aligned} x &= x_S + r\cos\varphi \\ y &= y_S + r\sin\varphi, \text{ kde } \varphi \in \langle 0; 2\pi) \end{aligned}$$

Obecná rovnice kružnice:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Ax + By + C &= 0 \\ \text{kde } A^2 + B^2 - 4C &> 0 \end{aligned}$$

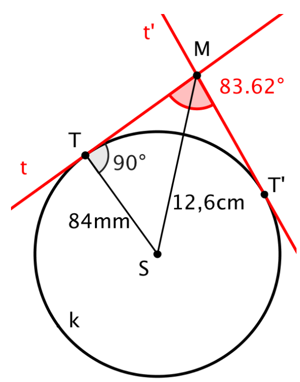
Středová rovnice kružnice:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \text{ pro } S[0; 0] \\ (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 &= r^2 \text{ pro } S[x_S; y_S] \end{aligned}$$

5.1.1 Řešený příklad

Určete úhel, který svírají tečny t_1 a t_2 vedené z bodu M ke kružnici $k = (S; 84\,mm)$, je-li $|MS| = 12,6\,cm$.

Tečna t kružnice k se jí dotýká v jediném bodě T a je kolmá na poloměr. Jestliže je tečna t vedena z bodu M, pak získáme pravoúhlý trojúhelník MTS.
K výpočtu velikosti úhlu $\frac{\alpha}{2} = \sphericalangle TMS$ využijeme goniometrickou funkci sinus.



$$\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2} &= \frac{84}{126} = \frac{2}{3} = 0,6\overline{6} \\ \frac{\alpha}{2} &= 41,81^o \Rightarrow \alpha = 83,62^o \end{aligned}$$

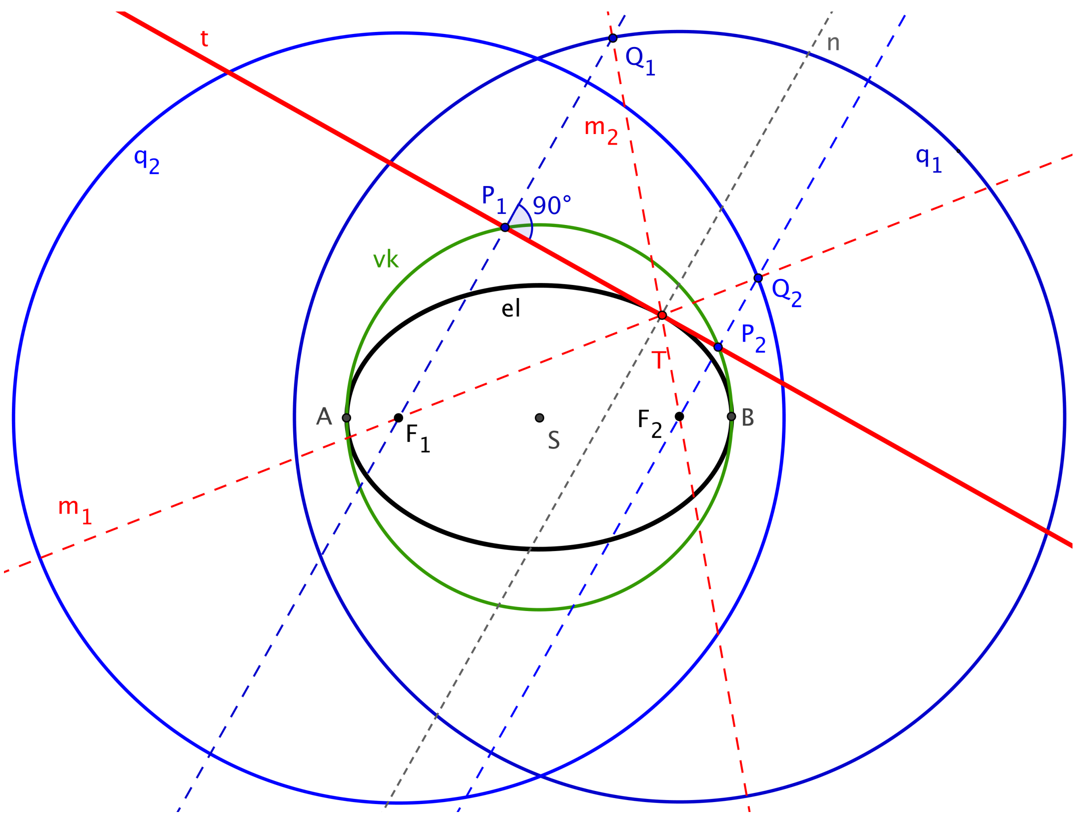
5.2 Elipsa

Elipsa[1] je křivka, která vznikne řezem rotační kuželové plochy rovinou, jestliže odchylka roviny řezu od osy kuželové plochy je větší než odchylka povrchových přímek plochy a rovina řezu neprochází vrcholem kuželové plochy.

Definice 5.2.1 *Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných různých bodů F_1, F_2 ležících v téže rovině stálý součet vzdáleností $2a$ větší než vzdálenost pevných bodů F_1, F_2.*

Oba pevné body F_1, F_2 se nazývají **ohniska**. Vzdálenost bodu elipsy od ohniska se nazývá **průvodič**, značíme m_1, m_2. Součet průvodičů $m_1 + m_2 = 2a$, kde a je velikost **hlavní poloosy** elipsy.

Tečna elipsy



Definice 5.2.2 *Tečna elipsy je přímka, která má s elipsou jediný společný bod, v němž se elipsy dotýká.*

Věta 5.2.1 *V bodě T elipsy existuje právě jedna tečna t, která půlí vnější úhel průvodičů m_1, m_2 bodu dotyku.*

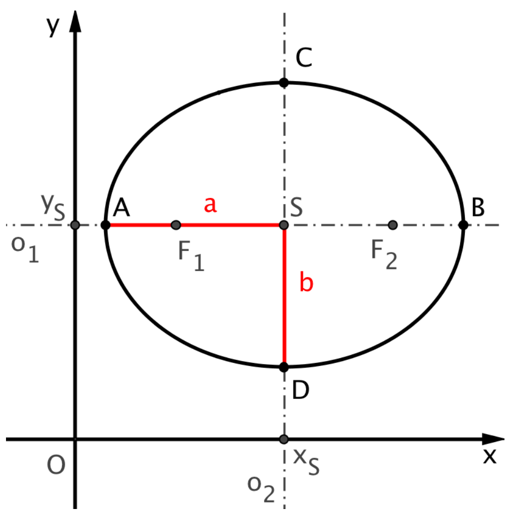
[1]**Zahradnická konstrukce elipsy**
Zahradníci nestudují kuželosečky, ale přesto umí vytvořit eliptický záhon. Potřebují 2 kůly a k nim přivázaný provaz. Kůly zapíchnou do země tak, aby byl provaz delší, než je vzdálenost kůlů. Napnou-li provaz rydlem a pohybují-li s ním tak, aby provaz byl stále napjatý, bude hrot rydla v hlíně opisovat elipsu s hlavní poloosou o velikosti poloviny délky provazu.

Věta 5.2.2 *Body Q, souměrně sdružené s jedním ohniskem podle všech tečen elipsy, leží na kružnici q opsané z druhého ohniska poloměrem o velikosti hlavní osy $2a = |AB|$. Jelikož má elipsa dvě různá ohniska, takové kružnice existují právě dvě a nazýváme je* ***řídící kružnice*** *elipsy q_1, q_2.*

Věta 5.2.3 *Paty kolmic P, spuštěných z ohnisek na tečny elipsy, leží na kružnici v_k opsané ze středu elipsy poloměrem o velikosti hlavní poloosy $a = |AS|$. Kružnice v_k prochází hlavními vrcholy A, B elipsy a nazývá se* ***vrcholová kružnice****.*

Analytická rovnice elipsy

Hlavní osa elipsy o_1 je rovnoběžná se souřadnou osou x:



Parametrizace elipsy:

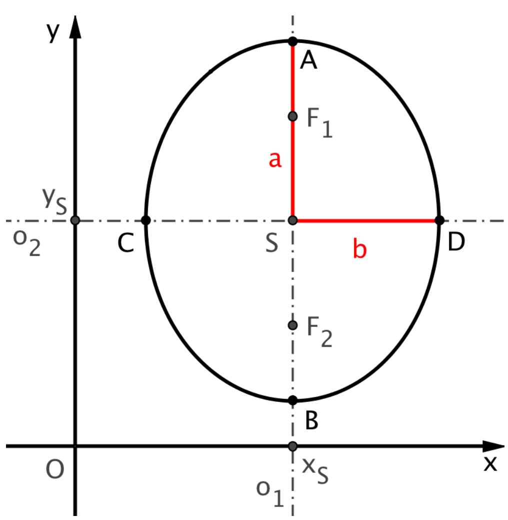
$$
\begin{aligned}
x &= x_S + a\cos\varphi \\
y &= y_S + b\sin\varphi
\end{aligned}
$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

Středová rovnice:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \text{ pro } S[0;0] \\
\frac{(x-x_S)^2}{a^2} + \frac{(y-y_S)^2}{b^2} &= 1 \text{ pro } S[x_S;y_S]
\end{aligned}
$$

Hlavní osa elipsy o_1 je rovnoběžná se souřadnou osou y:



Parametrizace elipsy:

$$
\begin{aligned}
x &= x_S + b\cos\varphi \\
y &= y_S + a\sin\varphi
\end{aligned}
$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

Středová rovnice:

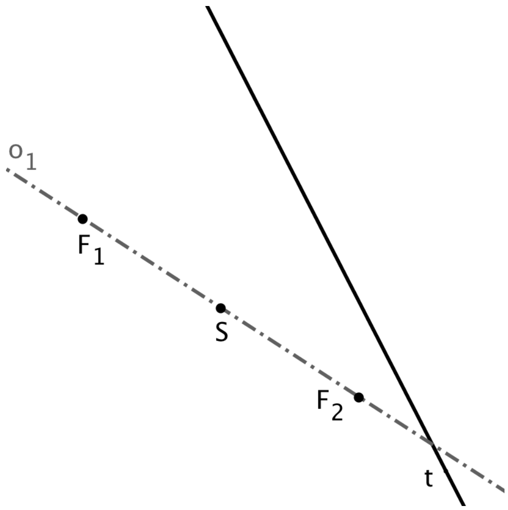
$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1 \text{ pro } S[0;0] \\
\frac{(x-x_S)^2}{b^2} + \frac{(y-y_S)^2}{a^2} &= 1 \text{ pro } S[x_S;y_S]
\end{aligned}
$$

Obecná rovnice elipsy:

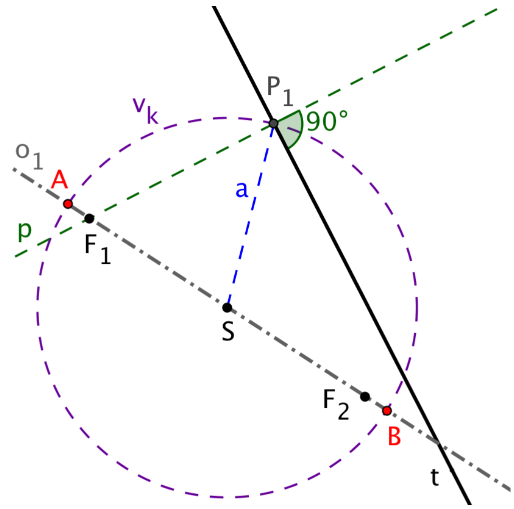
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = O, A > 0, B > 0, A \neq B$$

5.2.1 Řešený příklad

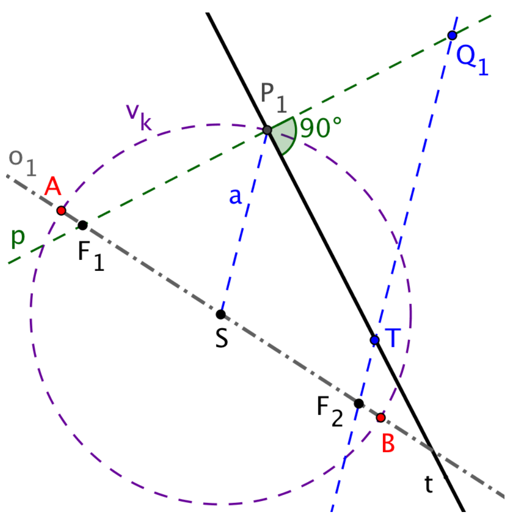
Sestrojte elipsu, jestliže znáte její střed S, ohnisko F_1 a tečnu t.



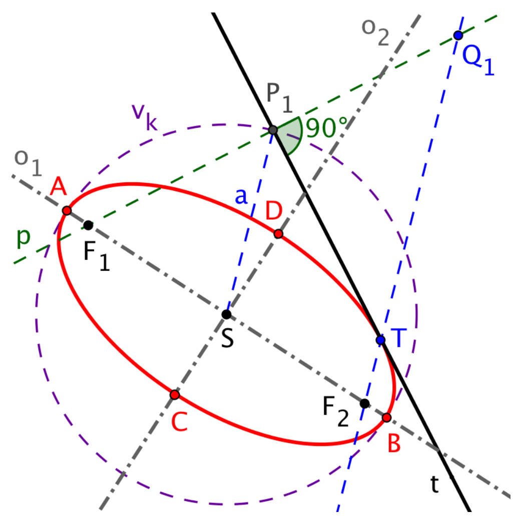
Ve středové souměrnosti určené středem S se ohnisko F_1 zobrazí na ohnisko F_2. Body S, F_1, F_2 leží na hlavní ose o_1 elipsy.



Z ohniska F_1 vedeme kolmici p na tečnu t, patu označíme jako bod P_1. Podle Věty 5.2.3 leží takové body na vrcholové kružnici $v_k(S; a = |P_1S|)$, která protíná hlavní osu o_1 v hlavních vrcholech elipsy A, B.



V osové souměrnosti určené tečnou t se ohnisko F_1 zobrazí na bod Q_1. Přímka Q_1F_2 je rovnoběžná s P_1S a protíná tečnu t v bodě dotyku T.
Jaká je velikost úsečky Q_1F_2?



Sestrojíme elipsu, najdeme vedlejší osu o_2 procházející středem S kolmo na o_1 a najdeme vedlejší vrcholy C,D.

5.2.2 Úlohy k procvičení

1. Určete rovnici kružnice, která má střed na přímce $3x - 4y - 3 = 0$ a prochází body $A(5; 3)$, $B(6; 2)$.

2. Určete délku tětivy, kterou vytíná křivka $x^2 + y^2 = 25$ na přímce $3x + 4y + 15 = 0$.

3. Určete, pod jakým zorným úhlem bychom z bodu $A(4; -1)$ viděli křivku $x^2 + 2y^2 = 6$.

4. Určete vzájemnou polohu křivky $9x^2 + 25y^2 = 225$ a přímek
   $p : 4x + 5y - 26 = 0$,
   $q : 4x + 5y - 25 = 0$,
   $r : 4x + 5y - 24 = 0$,
   pokud existují průsečíky, určete jejich souřadnice.

5. Sestrojte elipsu ze zadaných prvků.

   a) ohniska F_1,F_2 a bod M'

   b) střed S, hlavní vrchol A a tečna t

   c) střed S, bod M a hlavní vrchol A

   d) střed S, bod M a vedlejší vrchol C

   e) střed S, velikost hlavní poloosy a a tečny t, t'

   f) střed S, velikost hlavní poloosy a a tečna t s bodem dotyku T

   g) ohnisko F, osa o_1 a tečna t s bodem dotyku T

   h) ohnisko F, velikost hlavní poloosy a a tečna t s bodem dotyku T

   i) ohnisko F, tečna t a tečna t' s bodem dotyku T'

   j) ohnisko F, velikost hlavní poloosy a a tečny t, t'

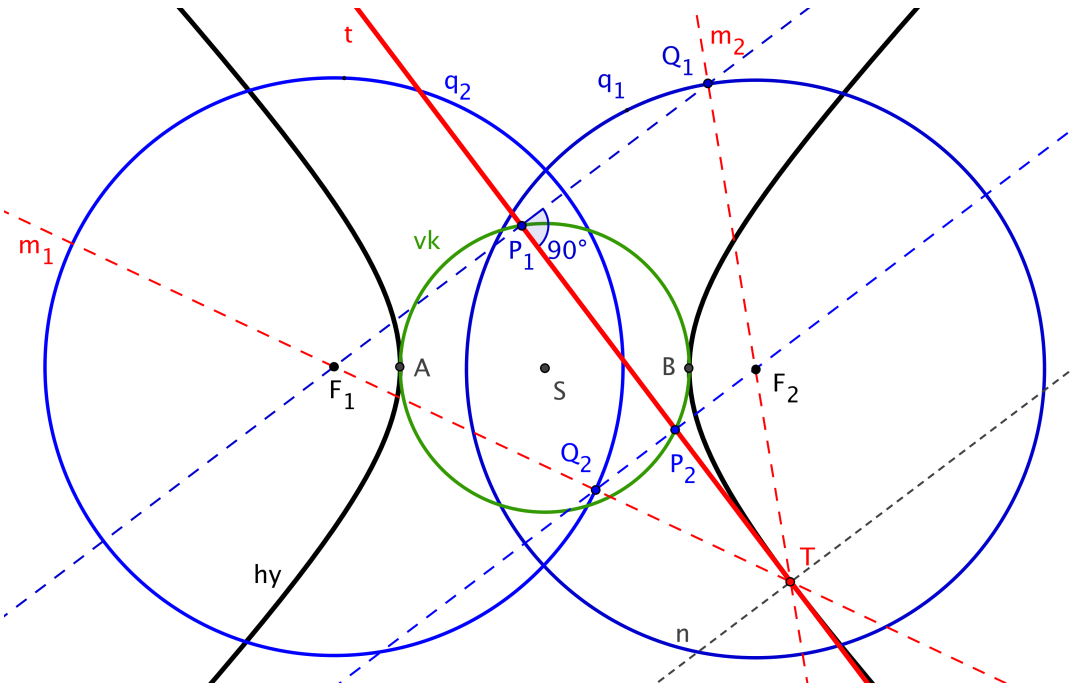
5.3 Hyperbola

Hyperbola je křivka, která vznikne řezem rotační kuželové plochy rovinou, jestliže odchylka roviny řezu od osy kuželové plochy je menší než odchylka povrchových přímek plochy a rovina řezu neprochází vrcholem kuželové plochy.

Definice 5.3.1 *Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných různých bodů F_1, F_2 ležících v téže rovině stálý rozdíl vzdáleností $|2a|$ menší než vzdálenost pevných bodů F_1, F_2.*

Oba pevné body F_1, F_2 se nazývají **ohniska**. Vzdálenost bodu hyperboly od ohniska se nazývá **průvodič**, značíme m_1, m_2. Rozdíl průvodičů $|m_1 - m_2| = 2a$, kde a je velikost **hlavní poloosy** hyperboly.

Tečna hyperboly



Definice 5.3.2 *Tečna hyperboly je přímka, která má s hyperbolou jediný společný bod, v němž se hyperboly dotýká.*

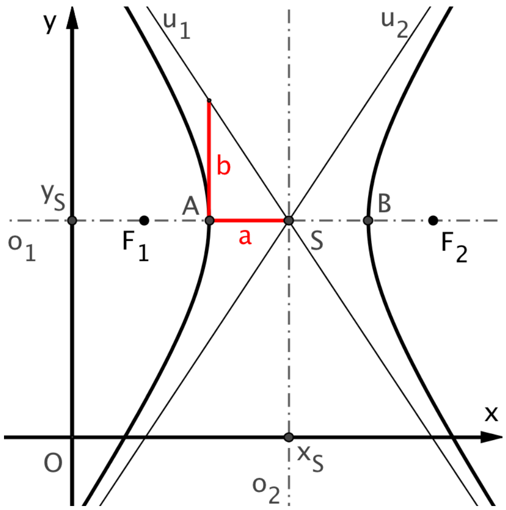
Věta 5.3.1 *V bodě T hyperboly existuje právě jedna tečna t, která půlí vnější úhel průvodičů m_1, m_2 bodu dotyku.*

Věta 5.3.2 *Body Q, souměrně sdružené s jedním ohniskem podle všech tečen hyperboly, leží na kružnici q opsané z druhého ohniska poloměrem o velikosti hlavní osy $2a = |AB|$. Jelikož má hyperbola dvě různá ohniska, takové kružnice existují právě dvě a nazýváme je **řídící kružnice** hyperboly q_1, q_2.*

Věta 5.3.3 *Paty kolmic P, spuštěných z ohnisek na tečny hyperboly, leží na kružnici v_k opsané ze středu elipsy poloměrem o velikosti hlavní poloosy $a = |AS|$. Kružnice v_k prochází hlavními vrcholy A, B hyperboly a nazývá se **vrcholová kružnice**.*

Analytická rovnice hyperboly

Hlavní osa elipsy o_1 je rovnoběžná se souřadnou osou x:



Parametrizace hyperboly:

$$\begin{aligned} x &= x_S + a\cosh\varphi \\ y &= y_S + b\sinh\varphi \end{aligned}$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

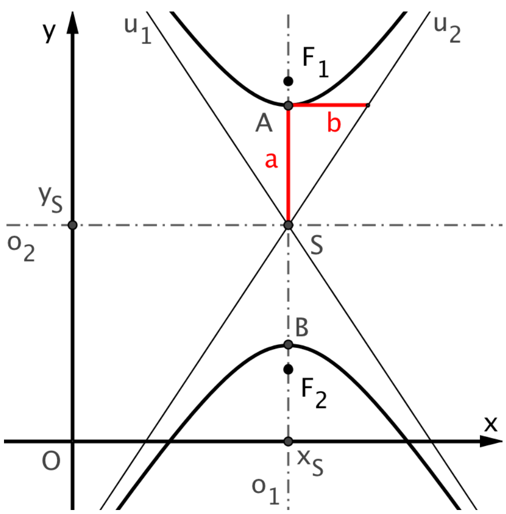
Středová rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \text{ pro } S[0;0] \\ \frac{(x-x_S)^2}{a^2} - \frac{(y-y_S)^2}{b^2} &= 1 \text{ pro } S[x_S;y_S] \end{aligned}$$

Rovnice asymptot:

$$u_{1,2} : y - y_S = \pm\frac{b}{a}(x - x_S)$$

Hlavní osa elipsy o_1 je rovnoběžná se souřadnou osou y:



Parametrizace hyperboly:

$$\begin{aligned} x &= x_S + b\cosh\varphi \\ y &= y_S + a\sinh\varphi \end{aligned}$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

Středová rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} &= 1 \text{ pro } S[0;0] \\ \frac{(y-y_S)^2}{a^2} - \frac{(x-x_S)^2}{b^2} &= 1 \text{ pro } S[x_S;y_S] \end{aligned}$$

Rovnice asymptot:

$$u_{1,2} : y - y_S = \pm\frac{b}{a}(x - x_S)$$

Obecná rovnice hyperboly:

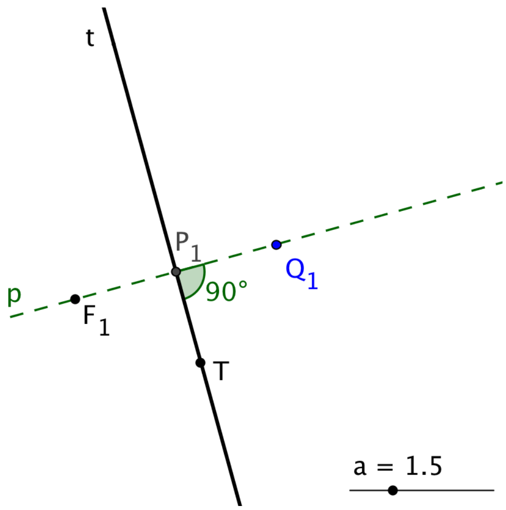
$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = O, A > 0, B > 0, A \neq B$$

Je-li $a = b$, hyperbola se nazývá **rovnoosá** např. graf nepřímé úměrnosti.

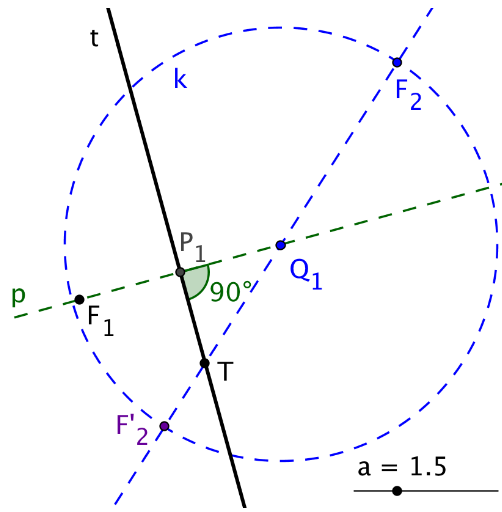
5.3.1 Řešené příklady

Úloha 1

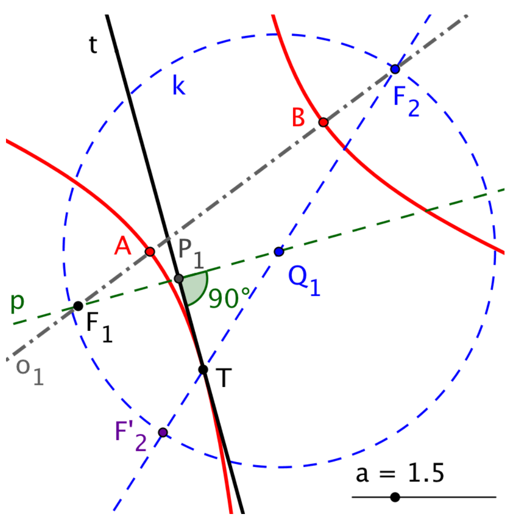
Sestrojte hyperbolu, jestliže znáte její ohnisko F_1, velikost hlavní poloosy a a tečnu t s bodem dotyku T.



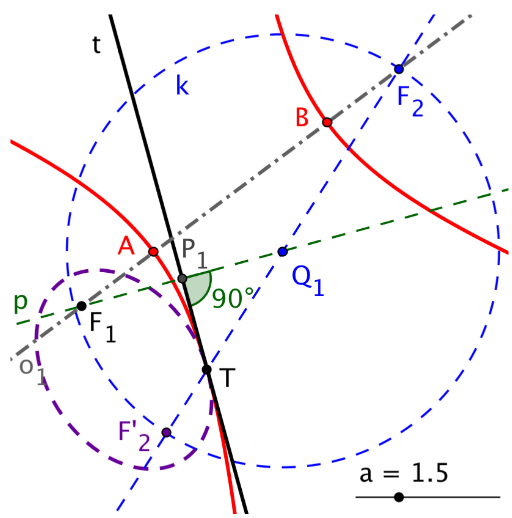
Z ohniska F_1 vedeme kolmici p na tečnu t, patu označíme jako bod P_1. V osové souměrnosti určené tečnou t se ohnisko F_1 zobrazí na bod Q_1.



Sestrojíme kružnici $k(Q_1; 2a)$, která protíná přímku Q_1T ve dvou bodech F_2, F_2'.



Bod F_2 ležící v opačné polorovině určené tečnou t než F_1 je druhým ohniskem hledané hyperboly. Ohniska F_1, F_2 leží na hlavní ose o_1, která protíná hyperbolu v hlavních vrcholech A,B.

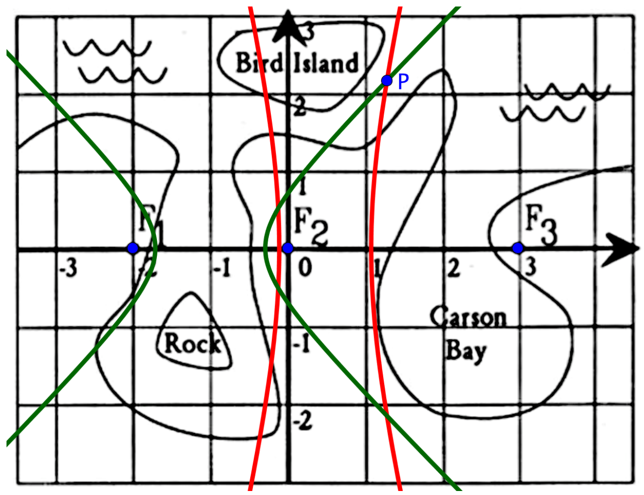


Bod F_2' ležící ve stejné polorovině určené tečnou t jako F_1 je druhým ohniskem elipsy.

Úloha 2

LORAN

Patří mezi hyperbolické navigační systémy a byl vyvinut za 2. světové války v USA. Pro určení polohových souřadnic využívá časový rozdíl přijímaných impulsů z jednotlivých vysílačů systému, vysílače vysílají na dlouhých vlnách (90-110 kHz) s výkonem 250-400 kW. Jejich anténní stožáry jsou vysoké kolem 200 metrů. Systém se dnes uplatňuje jako navigační systém pro podporu či zálohování široce užívaného systému GPS.



5.3.2 Úlohy k procvičení

1. Napište rovnici hyperboly, jsou-li dány vrcholy $A(2;3)$, $B(2;-5)$ a ohnisko $F(2;4)$.

2. Určete střed, směr hlavní osy, délky poloos, excentricitu, souřadnice vrcholů a ohnisek a směrnice asymptot hyperboly dané rovnicí
$5x^2 - 4y^2 - 20x - 16y - 16 = 0$.

3. Určete vzájemnou polohu křivky $4x^2 - y^2 = 64$ a přímek $p: 10x - 3y - 32 = 0$, $q: 2x + 3y - 8 = 0$, $r: 2x - y + 4 = 0$, $s: 3x - y + 2 = 0$, $u: 2x - y = 0$ pokud existují průsečíky, určete jejich souřadnice.

4. Sestrojte graf funkce $y = \frac{3x+1}{x+1}$.

5. Sestrojte hyperbolu ze zadaných prvků.
   a) střed S, ohnisko F a asymptota q
   b) střed S, vrchol A a asymptota q
   c) asymptoty p, q a velikost hlavní poloosy a
   d) střed S, ohnisko F a bod H
   e) střed S, ohnisko F a tečna t
   f) střed S, vrchol A a tečna t
   g) ohnisko F a tři tečny
   h) ohnisko F, osa o_1 a tečna t s bodem dotyku T
   i) ohnisko F, velikost hlavní poloosy a a tečny t, t'
   j) ohnisko F, osa o_1 a tečny t, t'

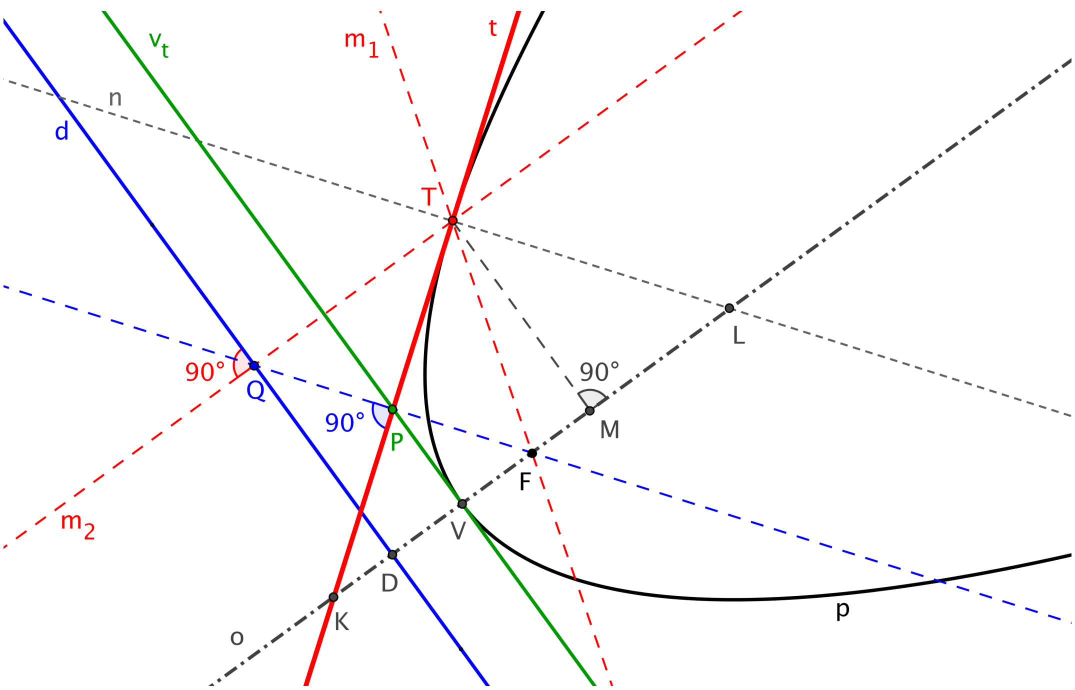
5.4 Parabola

Parabola je křivka, která vznikne řezem rotační kuželové plochy rovinou, jestliže odchylka roviny řezu od osy kuželové plochy je stejná jako odchylka povrchových přímek plochy a rovina řezu neprochází vrcholem kuželové plochy.

Definice 5.4.1 *Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dané přímky d a od daného pevného bodu F, který na přímce d neleží.*

Pevný bod F se nazývá **ohnisko**. Přímka d se nazývá **řídící přímka**. Vzdálenost bodu paraboly od ohniska a od řídící přímky se nazývá **průvodič**, značíme m_1, m_2. Vzdálenost ohniska od řídící přímky je **konstantní** a nazývá se **parametr** paraboly p.

Tečna paraboly



Definice 5.4.2 *Tečna paraboly je přímka, která má s parabolou jediný společný bod, v němž se paraboly dotýká.*

Věta 5.4.1 *V bodě T paraboly existuje právě jedna tečna t, která půlí vnější úhel průvodičů m_1, m_2 bodu dotyku.*

Věta 5.4.2 *Body Q, souměrně sdružené s ohniskem F podle všech tečen t paraboly, leží na řídící přímce paraboly d.*

Věta 5.4.3 *Paty kolmic P, spuštěných z ohniska F na tečny paraboly, leží na vrcholové tečně paraboly v_t.*

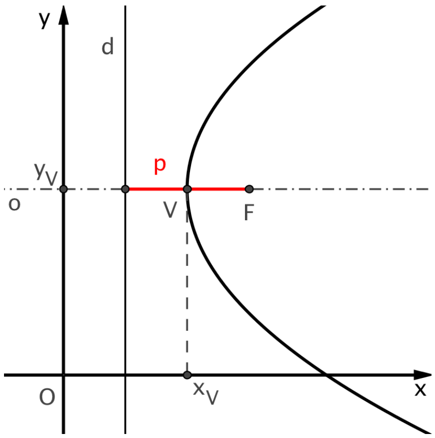
Věta 5.4.4 *Subtangenta KM je půlena vrcholem V.*

Věta 5.4.5 *Délka subnormály ML je konstantní a rovná se parametru DF.*

Věta 5.4.6 *Součet subtangenty KM a subnormály ML je půlen ohniskem F.*

Analytická rovnice paraboly

Osa paraboly o je rovnoběžná se souřadnou osou x a parabola otevřená ve směru kladné části osy x



Parametrizace paraboly:

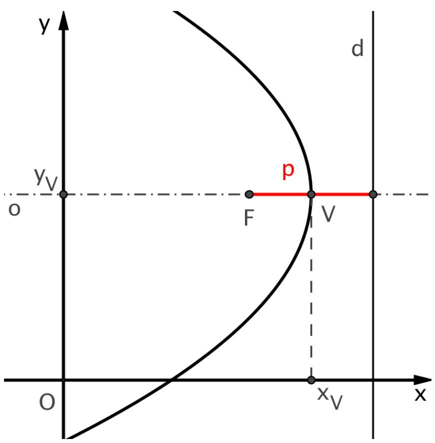
$$\begin{aligned} x &= x_V + \frac{p}{2}\varphi^2 \\ y &= y_V + p\varphi \end{aligned}$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

Vrcholová rovnice:

$$\begin{aligned} y^2 &= 2px \text{ pro } V[0;0] \\ (y-y_V)^2 &= 2p(x-x_V) \text{ pro } V[x_V;y_V], p>0 \end{aligned}$$

Osa paraboly o je rovnoběžná se souřadnou osou x a parabola otevřená ve směru záporné části osy x



Parametrizace paraboly:

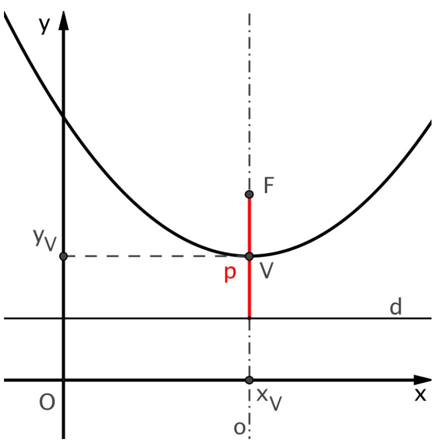
$$\begin{aligned} x &= x_V - \frac{p}{2}\varphi^2 \\ y &= y_V - p\varphi \end{aligned}$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

Vrcholová rovnice:

$$\begin{aligned} y^2 &= -2px \text{ pro } V[0;0] \\ (y-y_V)^2 &= -2p(x-x_V) \text{ pro } V[x_V;y_V], p>0 \end{aligned}$$

Osa paraboly o je rovnoběžná se souřadnou osou y a parabola otevřená ve směru kladné části osy y



Parametrizace paraboly:

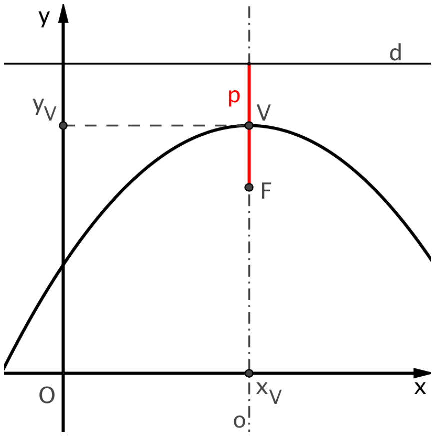
$$\begin{aligned} x &= x_V + p\varphi \\ y &= y_V + \frac{p}{2}\varphi^2 \end{aligned}$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

Vrcholová rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2py \text{ pro } V[0;0] \\ (x-x_V)^2 &= 2p(y-y_V) \text{ pro } V[x_V;y_V], p>0 \end{aligned}$$

Osa paraboly o je rovnoběžná se souřadnou osou y a parabola otevřená ve směru záporné části osy y



Parametrizace paraboly:

$$\begin{aligned} x &= x_V - p\varphi \\ y &= y_V - \frac{p}{2}\varphi^2 \end{aligned}$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

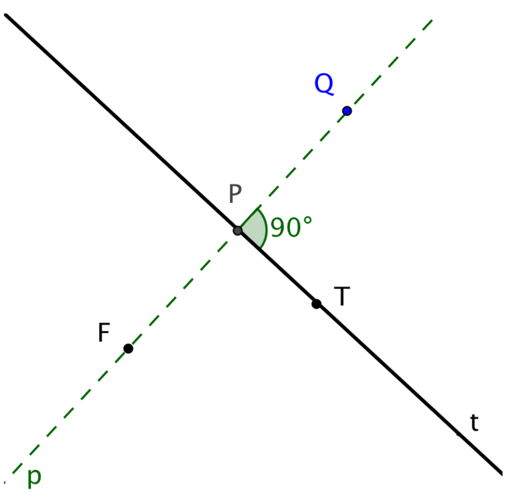
Vrcholová rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 &= -2py \text{ pro } V[0;0] \\ (x-x_V)^2 &= -2p(y-y_V) \text{ pro } V[x_V;y_V], p>0 \end{aligned}$$

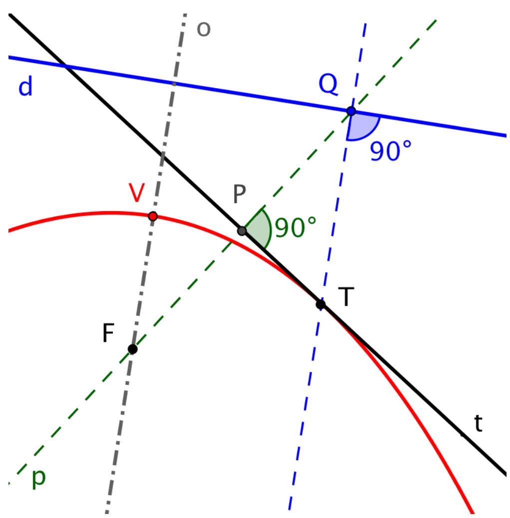
5.4.1 Řešené příklady

Úloha 1

Sestrojte parabolu, jestliže znáte její ohnisko F a tečnu t s bodem dotyku T.



Z ohniska F vedeme kolmici p na tečnu t, patu označíme jako bod P.
V osové souměrnosti určené tečnou t se ohnisko F zobrazí na bod Q.



Z definice paraboly vyplývá, že řídící přímka d je kolmá na přímku TQ a prochází bodem Q. Doplníme osu $F \in o \perp d$ a vrchol V, jako průsečík osy a paraboly.

Úloha 2

a) Dokážeme, že trajektorie šikmého vrhu je parabolická křivka.

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha$$
$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Parametrické vyjádření trajektorie šikmého vrhu převedeme na explicitní vyjádření vyloučením parametru t.

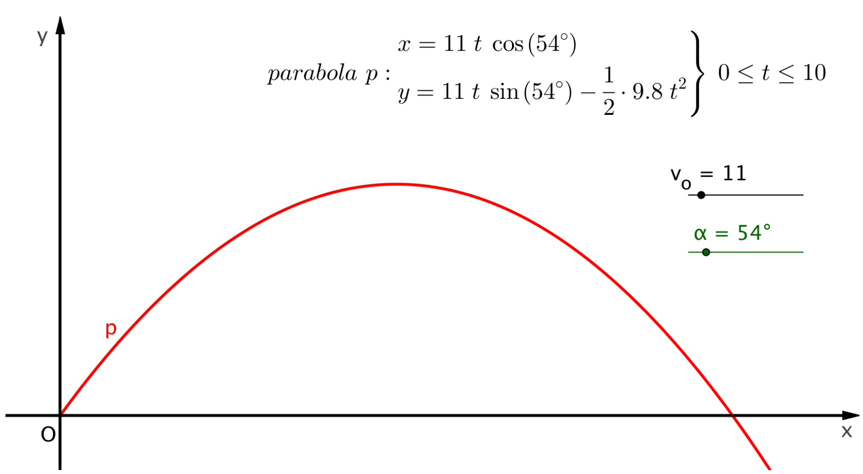
$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = x \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \tag{5.1}$$

Okamžitě vidíme, že explicitní vyjádření (závislost y na x, $y = y(x)$) trajektorie šikmého vrhu je kvadratická funkce, grafem kvadratické funkce je vždy parabola a tedy trajektorie šikmého vrhu je parabolickou křivkou. Navíc můžeme převedením kvadratické funkce na úplný čtverec získat tzv. vrcholovou rovnici paraboly včetně souřadnic vrcholu. Tedy

$$y = Kx - Lx^2, \quad K = \tan\alpha,\ L = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$
$$y = -(Lx^2 - Kx) = -L\left[x^2 - \frac{K}{L}x\right] = -L\left[\left(x - \frac{K}{2L}\right)^2 - \frac{K^2}{4L^2}\right],$$

vrchol V má souřadnice

$$V = \left[\frac{K}{2L}, \frac{K^2}{4L}\right] = \left[\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right] = [x_{\max}, y_{\max}].$$



b) Nalezneme bod, ve kterém projektil dosáhne největší výšky.

Řešíme následující extremální úlohu: Nalezněte bod na grafu funkce (5.1), ve kterém sestrojená tečna je rovnoběžná s osou x. Definiční obor funkce (5.1) je tvořen množinou $\mathbb{R}$, ve skutečnosti bude ovšem volba x omezena na jistou podmnožinu množiny kladných reálných čísel. Hledejme extrém této funkce:

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \tan\alpha - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x.$$

Derivaci funkce (5.1) položíme rovnu nule. Dostaneme rovnici pro stacionární body (body podezřelé z extrému),

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \tan\alpha - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g} = x_{\max}.$$

Určíme hodnotu funkce (5.1) v bodě $x_{\max}$,

$$y_{\max} = y(x_{\max}) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

5.4.2 Úlohy k procvičení

1. Napište rovnici paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadné procházející bodem $A(2;-4)$, jejíž osa
   a) splývá se souřadnou osou x,
   b) splývá se souřadnou osou y.
2. Určete osu, vrchol, parametr a ohnisko paraboly určené rovnicí:
   a) $x^2 + 2x - 2y + 3 = 0$
   b) $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$
   c) $x^2 + 2y - 3 = 0$
3. Určete vzájemnou polohu křivky $y^2 = 4x$ a přímek $p : x - 2y + 3 = 0$, $q : x - 2y + 4 = 0$, $r : x - y + 3 = 0$, $s : y - 2 = 0$ pokud existují průsečíky, určete jejich souřadnice.

   V následujících příkladech využijte vzorce z Úlohy 2.
4. Určete maximální dostřel (dolet) projektilu.
5. Při dané počáteční rychlosti v_o a zadaném bodu $A(x;y)$ určete elevační úhel α tak, aby projektil tento bod zasáhl.

Kapitola 6

Kinematická geometrie

Kinematická geometrie v rovině se zabývá geometrickými vlastnostmi útvarů vznikajících při pohybu neproměnné rovinné soustavy. **Neproměnná rovinná soustava** je množina všech geometrických útvarů roviny, která je jako neproměnný celek podrobena pohybu.

Definice 6.0.3 *Pohybuje-li se soustava $\sum$ po pevné rovině π, její body opisují v π křivky, které nazýváme* ***trajektorie pohybu****.*

Je-li v pevné rovině π dána libovolná poloha $\sum^1$ pohybující se soustavy $\sum$, pak její další poloha $\sum^2$ je jednoznačně určena, známe-li přemístěnou polohu A_2B_2 libovolné úsečky A_1B_1 soustavy $\sum_1$ ($A_2B_2 = A_1B_1$).

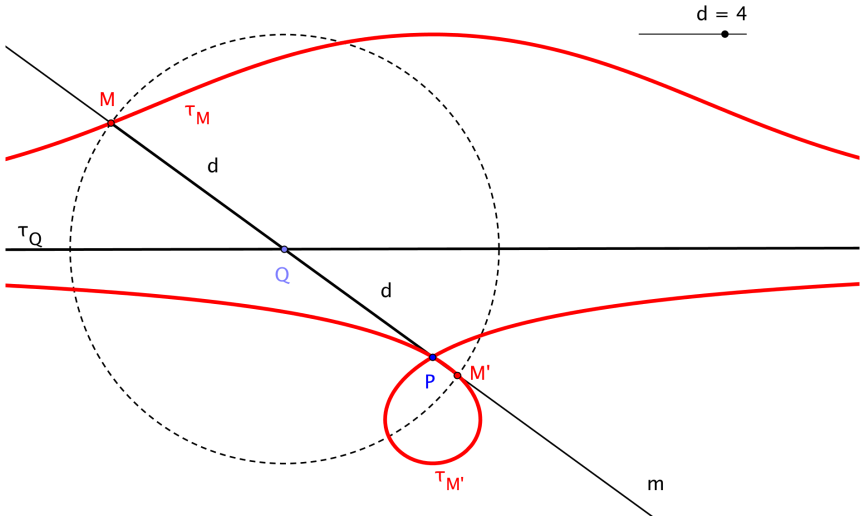
Věta 6.0.7 *Pohyb neproměnné rovinné soustavy $\sum$ je určen, jsou-li dány trajektorie τ_A, τ_B krajních bodů její úsečky AB.*

Věta 6.0.8 *Jsou-li $\sum_1$, $\sum_2$ dvě různé polohy pohybující se neproměnné rovinné soustavy $\sum$, existuje vždy* ***otáčení*** *nebo* ***posunutí****, které přemísťuje $\sum_1$ v $\sum_2$.*

6.1 Nicomedova konchoida (Přímá konchoida přímky)

Říkáme, že je dán konchoidální pohyb, jestliže přímka m neproměnné rovinné soustavy $\sum$ prochází pevným bodem P a jestliže bod $Q \in m$ opisuje trajektorii τ_Q. Křivka τ_Q se nazývá řídící křivka.
Vzdálenost bodu P od řídící přímky $q = \tau_Q$ označíme v ($v > 0$). Trajektorie τ_M bodu $M \in m$ ($M \neq Q$) je větev Nicomedovy konchoidy. Úplnou konchoidu dostaneme, když na obě polopřímky určené bodem Q pohybující se přímky m nanášíme od Q úsečku délky d ($d > 0$).

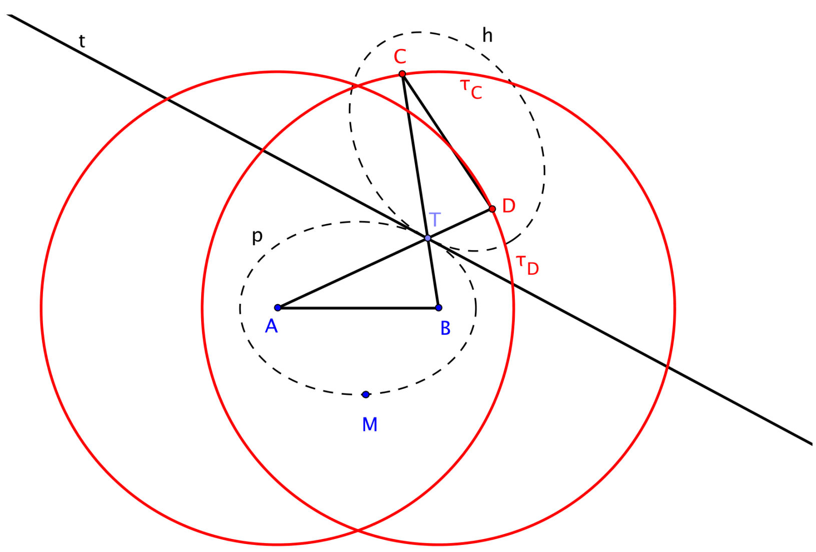
Poznámka 6.1.1 (Konstrukce v GeoGebře) *Bod Q ležící na přímce τ_Q rozpohybujeme příkazem "Animace spuštěna"v jeho vlastnostech, body M, M' vykreslí konchoidu příkazem "Stopa zapnuta". Křivku můžeme vykreslit i příkazem "Množina bodů".*



6.2 Kloubový antiparalelogram

Kloubový čtyřúhelník $ABCD$ vystupuje při pohybu neproměnné rovinné soustavy $\sum$ pevně spojené s úsečkou CD, jejíž krajní body C, D se pohybují po kružnicích τ_C, τ_D se středy v bodech B, A ($A \neq B$). Strana AB se nazývá **rám**, strany AD, BC **kliky** (opisují-li C, D jen oblouky kružnic τ_C, τ_D) a strana CD **ojnice**. Kloubový antiparalelogram je zkřížený kloubový čtyřúhelník, pro který $AB = CD$, $AD = BC$. Platí tedy věta:

Věta 6.2.1 *Pohyb kloubového antiparalelogramu lze převést buď na valení elipsy po shodné elipse, nebo na valení hyperboly po shodné hyperbole.*

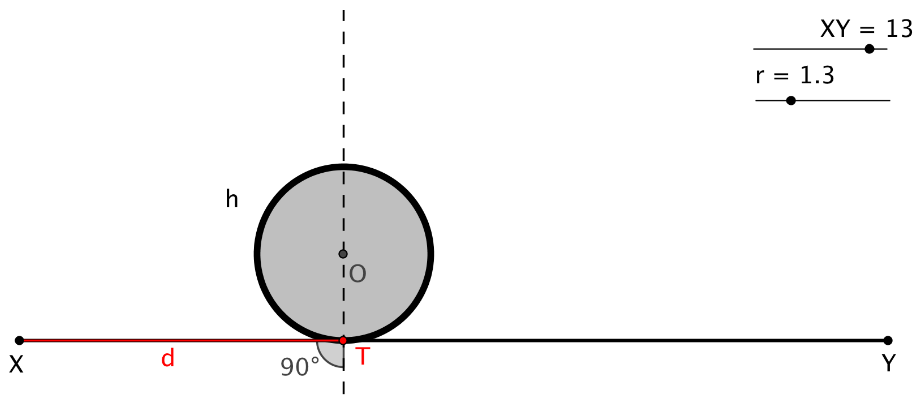


Poznámka 6.2.1 (Konstrukce v GeoGebře) *Sestrojíme elipsu p (pevná) určenou ohnisky A,B a obecným bodem M. Na elipsu p umístíme bod T a v tomto bodě sestrojíme tečnu t elipsy p (pro bod T povolíme animaci). V osové souměrnosti určené tečnou t zobrazíme body A, B na C, D, které jsou ohnisky elipsy h (hybné), jejím obecným bodem je opět T (proč?). Zapneme stopu bodů C,D a spustíme animaci. Jak se nazývaly kružnice, po kterých se pohybují body C a D, v kapitole Elipsa?*

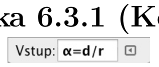
6.3 Řešené příklady

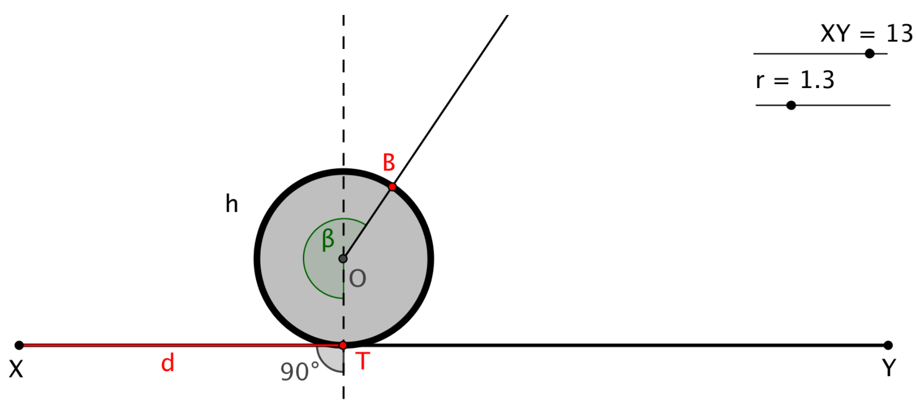
Úloha 1

Definice 6.3.1 ***Cykloidální pohyb*** *vzniká valením kružnice* ***h*** *po přímce* ***p****, trajektoriím říkáme* ***cykloidy****. Trajektorie τ_O středu hybné kružnice je přímka, trajektorie τ_A vnitřního bodu $A \neq O$ hybné kružnice se nazývá* ***zkrácená cykloida****, trajektorie τ_B bodu B hybné kružnice se nazývá* ***prostá cykloida****, trajektorie τ_C vnějšího bodu C hybné kružnice se nazývá* ***prodloužená cykloida****.*

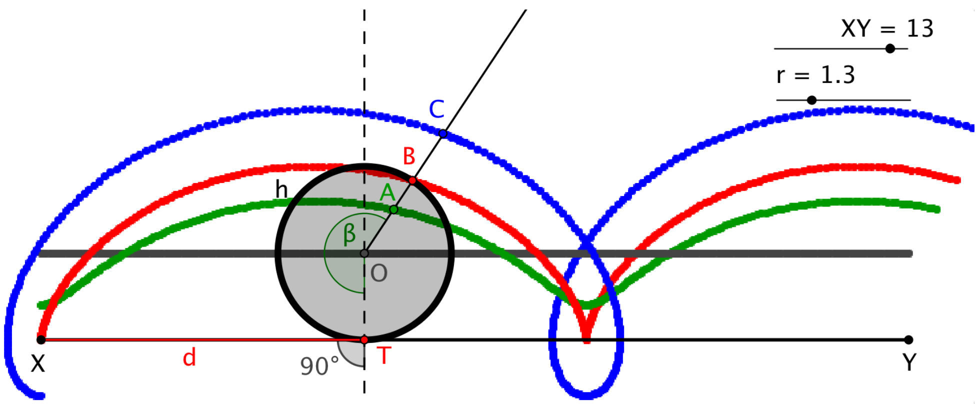


Přímku p nahradíme úsečkou XY, po které necháme pohybovat bod T. Sestrojíme kružnici h (hybnou) o poloměru r dotýkající se XY v bodě T. Když bod T urazí dráhu $d = |XT|$, pak se kružnice h musí otočit o úhel velikosti $\alpha = d/r$.

Poznámka 6.3.1 (Konstrukce v GeoGebře) *Tento výraz vložíme do příkazového řádku.* 



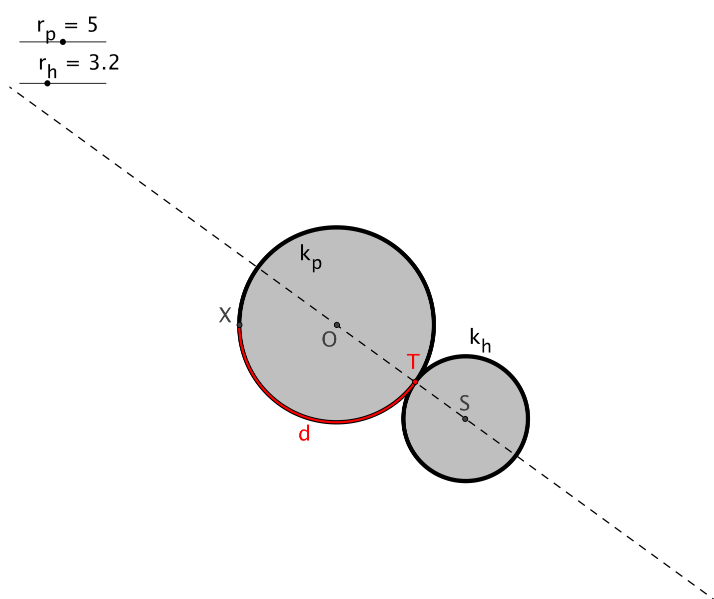
Bod B kružnice je obrazem bodu T v otočení o úhel β jehož velikost je rovna α.



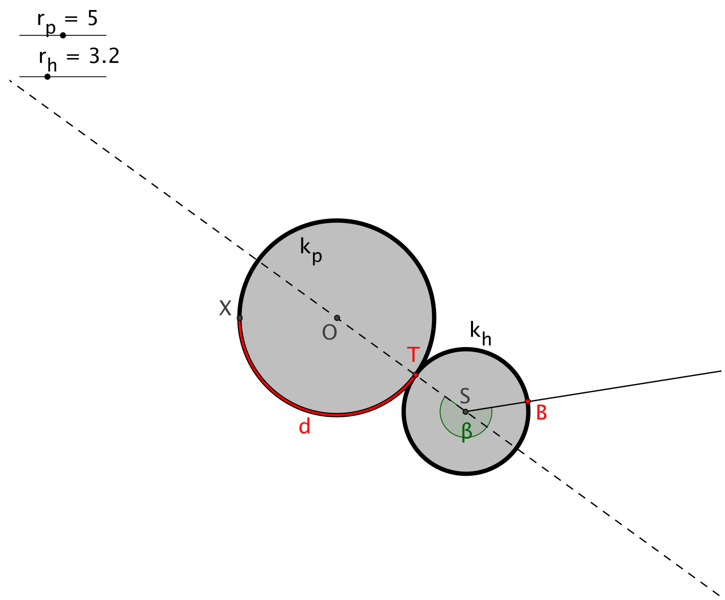
Doplníme body A a C, které leží na polopřímce určené body OB a vytváří zkrácenou a prodlouženou cykloidu.

Úloha 2

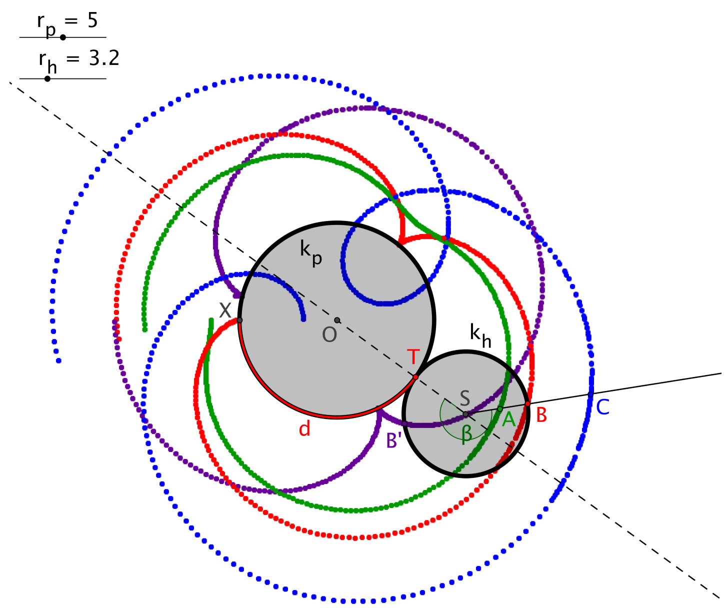
Definice 6.3.2 ***Epicykloida*** *je křivka, která vznikne jako trajektorie bodu při odvalování se kruhu či kružnice bez smýkání zvenku po jiné pevné kružnici. Trajektorii bodu ležícího na obvodu kruhu pak nazýváme (prostou)* ***epicykloidou****. Leží-li tvořící bod uvnitř, resp. vně valícího se kruhu, se kterým je pevně spojen, hovoříme o* ***zkrácené****, resp.* ***prodloužené epicykloidě****.*



Sestojíme pevnou kružnici $k_p(O; r_p)$, na které si zvolíme dvojici různých bodů. Bod T, který se po k_p bude pohybovat a pomocný pevný X, od kterého budeme měřit délku d kruhového oblouku XT. Střed S hybné kružnice $k_h(S; r_h)$ leží na přímce OS ve vzdálenosti r_h od T (mimo kruh k_p).



Když bod T urazí dráhu $d = |XT|$, pak se kružnice k_h musí otočit o úhel velikosti $\alpha = d/r_h$. Bod B kružnice k_h je obrazem bodu T v otočení o úhel β jehož velikost je rovna α.



Doplníme body A a C, které leží na polopřímce určené body OB a vytváří zkrácenou a prodlouženou epicykloidu.

Proč na sebe oblouky epicykloid plynule nenavazují?

6.4 Úlohy k procvičení

1. Přímá konchoida - vyjděte z konstrukce Nicomedovy konchoidy a řídící přímku nahraďte zadanou křivkou:
   a) kružnice
   b) elipsa
   c) sinusoida
2. Antiparalelogram hyperbolický
3. Analogie antiparalelogramu pro parabolu
4. Eliptický pohyb vznikne valením kružnice h po vnitřním obvodu kružnice p, jejíž poloměr se rovná dvojnásobku poloměru kružnice h.
5. Kardiodický pohyb vznikne valením vnitřního obvodu kružnice h po kružnici p, jejíž poloměr se rovná polovině poloměru kružnice h.

Kapitola 7

Řezy těles

Řez tělesa je průnik tělesa a roviny.

Řez tělesa sestrojíme tak, že určujeme buď průsečnice roviny řezu s rovinami stěn tělesa nebo průsečíky jednotlivých hran nebo tvořících přímek tělesa s rovinou řezu. Při konstrukci řezu využíváme vztahy, které platí pro vzájemnou polohu přímek a rovin v prostoru.

7.1 Řez tělesa – jak známe ze střední školy

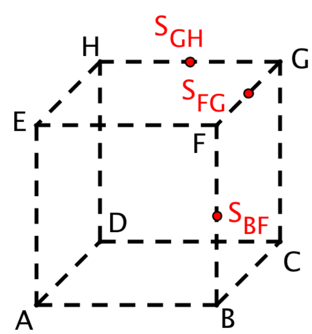
Věta 7.1.1 (Pravidlo spojování bodů) *Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině. Proto pokud známe v libovolné stěně tělesa dva různé body roviny řezu, sestrojíme jejich spojnici. Průnik této spojnice a stěny je jednou stranou řezu.*

Věta 7.1.2 (Pravidlo konstrukce rovnoběžek) *Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách. Proto jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.*

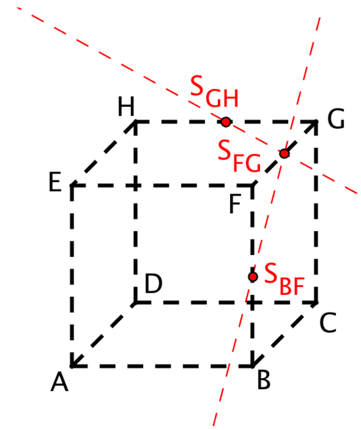
Věta 7.1.3 (Pravidlo protahování hran) *Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice. Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.*

7.1.1 Řešený příklad

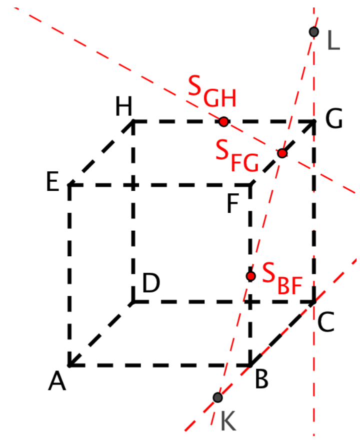
Sestojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou $\rho(S_{BF}S_{FG}S_{GH})$.



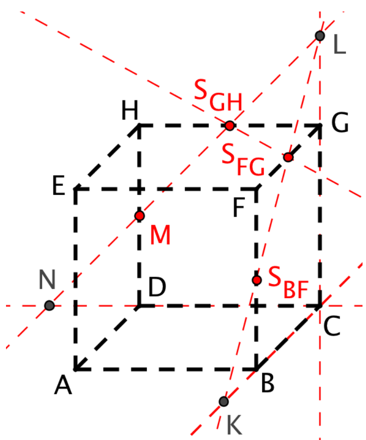
Zadání



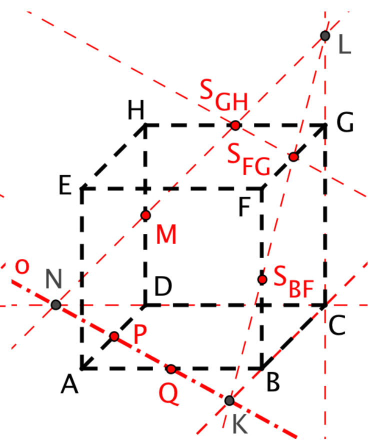
Věta 7.1.1



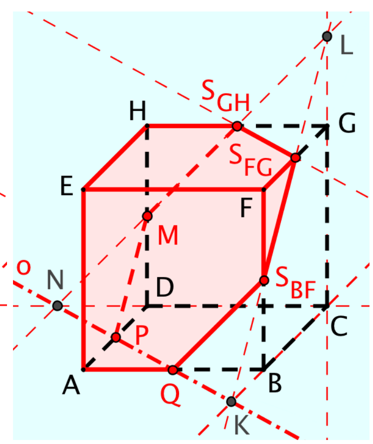
Věta 7.1.3
$K = S_{BF}S_{FG} \cap BC$
$L = S_{BF}S_{FG} \cap CG$



Věta 7.1.3
$M = S_{GH}L \cap HG$
$N = S_{GH}L \cap CD$



Věta 7.1.2
$P = KN \cap AD$
$N = KN \cap AB$
$o = KN \parallel S_{FG}S_{GH}$



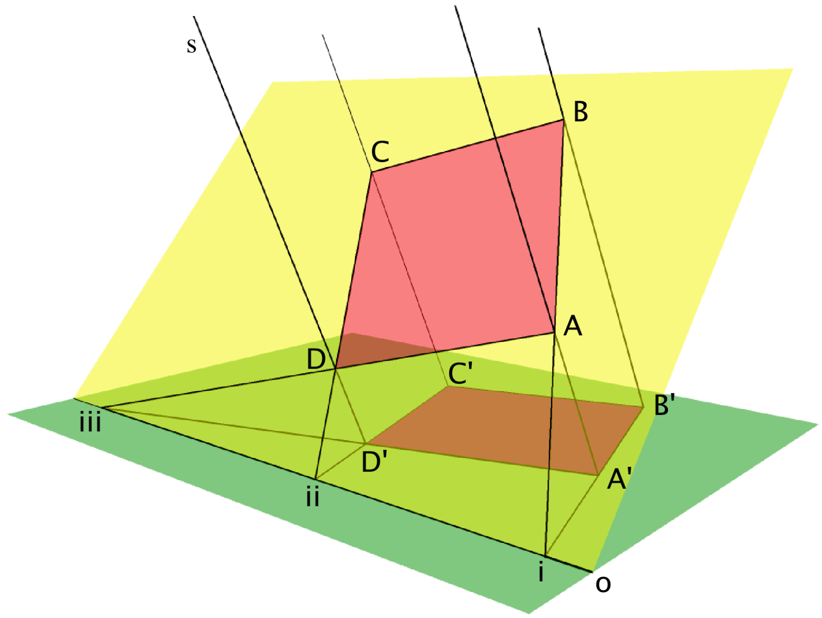
Viditelnost

Při této konstrukci můžeme vypozorovat jisté vztahy mezi postavou tělesa a sestrojeným řezem – jde o prostorovou **osovou afinitu mezi dvěma rovinami**.

7.2 Osová afinita mezi dvěma rovinami

Definice 7.2.1 *Nechť jsou dány roviny ρ_1, ρ_2 a směr $\vec{s}$. Příbuznost mezi oběma rovinami, v níž bodu jedné roviny odpovídá jeho průmět ve směru $\vec{s}$ do druhé roviny, se nazývá* ***osová afinita*** *mezi rovinami ρ_1, ρ_2.*

Průsečnici rovin $o = \rho_1 \cap \rho_2$ budeme nazývat **osa afinity**.



Vlastnosti:

1. Odpovídající si body leží na rovnoběžkách se **směrem afinity** $\vec{s}$.
2. Odpovídající si přímky se protínají na **ose afinity** o v tzv. **samodružných bodech**.
3. Zachovává se incidence, rovnoběžnost a střed úsečky (je to speciální případ rovnoběžného promítání).

Věta 7.2.1 *Afinním obrazem kružnice je elipsa.*

Osovou afinitu využíváme při konstrukci řezu nevrcholové plochy nebo tělesa. Osou afinity je průsečnice roviny podstavy s rovinou řezu a směrem afinity je směr povrchových přímek plochy nebo tělesa.

U vrcholových ploch nebo těles využíváme **středovou kolineaci** mezi dvěma rovinami.

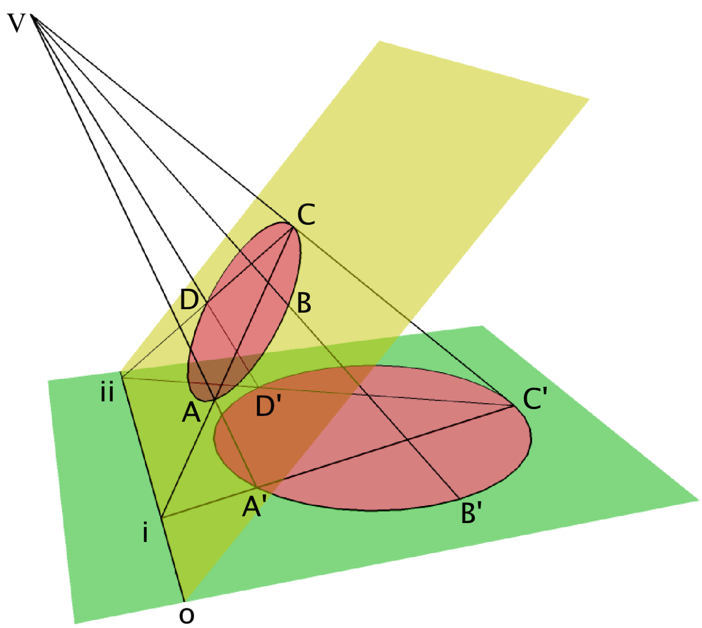
7.3 Středová kolineace mezi dvěma rovinami

Definice 7.3.1 *Nechť jsou dány roviny* ρ_1, ρ_2 *a bod* V, *který s nimi není incidentní. Příbuznost mezi oběma rovinami, v níž bodu jedné roviny odpovídá jeho průmět ze středu* S *do druhé roviny, se nazývá* ***osová středová kolineace*** *mezi dvěma rovinami* ρ_1, ρ_2.

Průsečnici rovin $o = \rho_1 \cap \rho_2$ budeme nazývat **osa kolineace**.

Vlastnosti:

1. Spojnice navzájem odpovídajících si bodů prochází středem kolineace V.
2. Odpovídající si přímky se protínají na ose o v tzv. **samodružných bodech**.
3. Zachovává se incidence (je to speciální případ středového promítání).

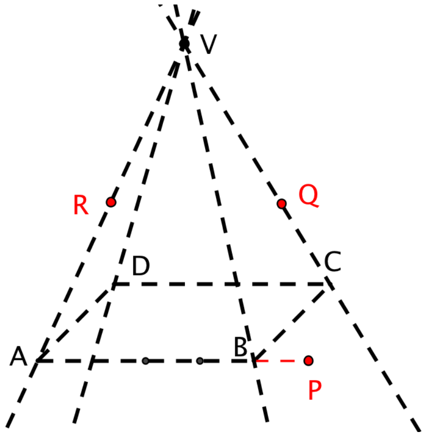


Věta 7.3.1 *Kolineárním obrazem kružnice je kuželosečka.*

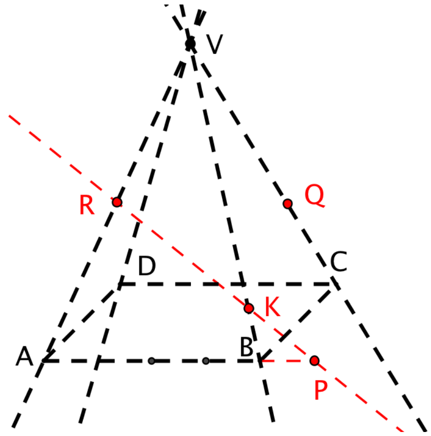
Při konstrukci řezu vrcholové plochy nebo tělesa je osou kolineace průsečnice roviny podstavy s rovinou řezu a středem kolineace je vrchol plochy nebo tělesa.

7.3.1 Řešený příklad

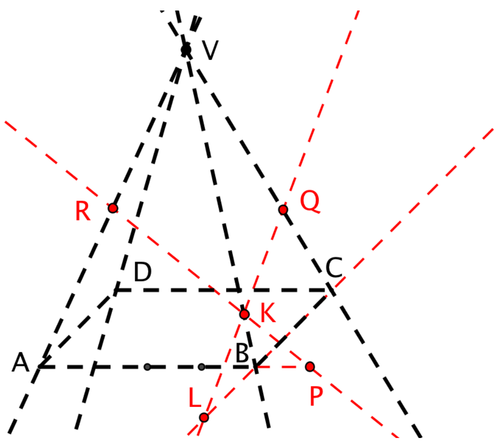
Pravidelná čtyřboká jehlanová plocha je dána řídícím čtvercem ABCD v π a vrchol tělesa V. Sestrojte řez plochy rovinou $\rho = PQR$. Bod P leží na prodloužení hrany AB za bodem B tak, že $|BP| : |AB| = 1 : 4$. Bod Q leží na hraně CV a platí $|CQ| : |QV| = 1 : 2$. Bod R je střed hrany AV.



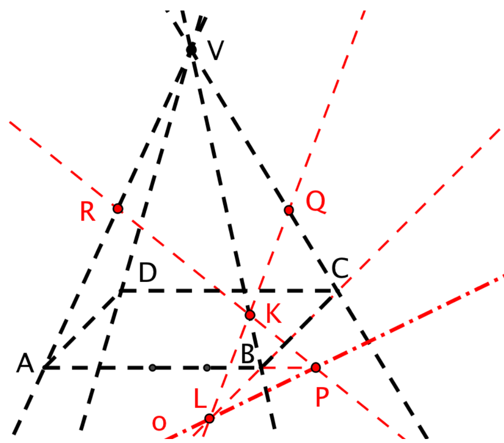
Zadání



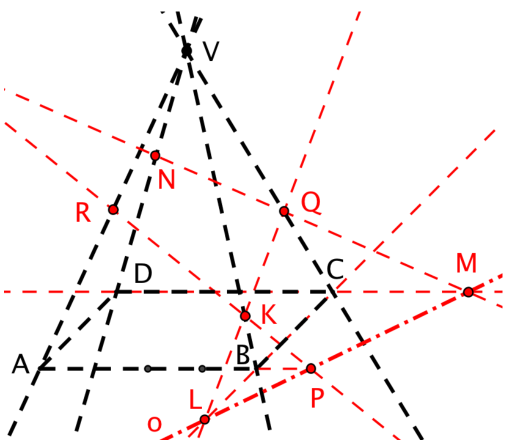
$K = RP \cap BV$



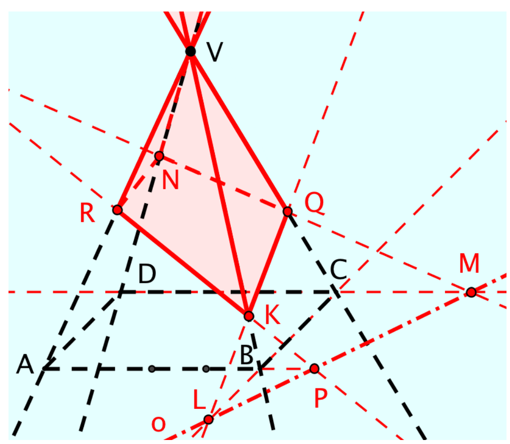
$L = KQ \cap BC$



$o = PL$



$o \cap CD = M$
$MQ \cap DV = N$



Viditelnost

7.4 Úlohy k procvičení

1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou $\rho = PQR$. Bod P leží na prodloužení hrany FE za bodem E tak, že $|PE| : |EF| = 1 : 3$. Bod Q je střed hrany DH. Bod R leží na hraně BF a platí $|BR| : |RF| = 1 : 2$.

2. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou $\rho = PQR$. Bod P je střed hrany AB. Bod Q leží na hraně BC a platí $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Bod R leží na přímce $S_{DV}C$ a platí $|S_{DV}R| : |RC| = 3 : 1$.

3. Sestrojte řez pravidelné čtyřboké jehlanové plochy, která je dána řídícím čtvercem $ABCD$ a vrcholem tělesa V, rovinou $\rho = PQR$. Bod P je střed strany AB. Bod Q leží na straně BC a platí $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Bod R leží na přímce $S_{DV}C$ a platí $|S_{DV}R| : |RC| = 3 : 1$.

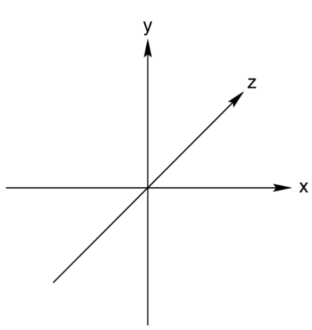
4. Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEFGHIJKL$ rovinou $\rho = PQR$. Bod P je střed hrany AB. Bod Q je střed hrany DJ. Bod R leží na prodloužení hrany EK za bodem K tak, že $|EK| : |KR| = 2 : 1$.

5. Sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$, jehož podstavou je čtverec, rovinou $\rho = PQR$. Bod P leží na hraně AB a platí $|AP| : |PB| = 2 : 1$. Bod Q leží na hraně CG a platí $|CQ| : |QG| = 2 : 3$. Bod R je střed hrany EH.

Kapitola 8

3D geometrie v PovRAY

PovRAY je program, který vytváří fotorealistické obrazy třírozměrných scén metodou sledování paprsku (raytracing). Z kamery vyšle paprsek a sleduje jeho průchod scénou, neboli počítá kolize s objekty. Paprsek je buď povrchem pohlcen nebo se odráží a pokračuje dál. Fotorealističnost je podmíněna širokou škálou nastavení vlastností povrchů objektů a fyzikálních vlastností prostředí, výsledný obrázek se pak více blíží realitě než matematickému modelu.



PovRAY používá levotočivou soustavu souřadnou neboli kladná část osy x směřuje od pozorovatele doprava, osy y nahoru, osy z dopředu. Tento systém vychází z pohledu programátora počítačových scén, který má před sebou monitor - počátek soustavy souřadné leží v levém dolním rohu monitoru, dolní hrana monitoru je osa x, levá hrana osa y a osa z jde dovnitř, neboli je to hloubka scény.

8.1 Základní geometrické objekty, prvky scény

8.1.1 Základní prvky scény

Kamera

Jednoduchá perspektivní kamera se zorným úhlem 67^o. Ve scéně je možné použít více kamer, ale scéna bude vykreslena podle parametrů první - ostatní budou ignorovány.

```
camera {
location < x, y, z > //pozice kamery
look_at < x, y, z > //bod, do ktereho kamera miri
}
```

Světlo

Bodový světelný zdroj, ve scéně je možné použít "neomezený"počet světel, ale výpočetní náročnost scény (tedy i čas potřebný pro její vykreslení) roste exponenciálně, ve většině případů stačí použít 3 zdroje různé intenzity.

```
light_source {
< x, y, z > //pozice svetla
color rgb 1 //barva (da se pouzit i pro zmenu intenzity od 1-bile 0-zadne)
}
```

Parametr shadowless zajistí, že světlo nevrhá stín, používá se pro pomocné přisvětlovací zdroje světla, kdy více stínů znepřehledňuje scénu.

```
light_source {
< x, y, z > //pozice svetla
color rgb 1
shadowless
}
```

Pozadí scény

```
background {color rgb< x, y, z >}
```

Rovina

Je určena normálovým vektorem (vektor k rovině kolmý) a vzdáleností od počátku soustavy souřadné.

```
plane{
< x, y, z >, //souradnice normaloveho vektoru,
v //vzdalenost roviny od pocatku
[OBJECT_MODIFIERS]
}
```

Include files

Nacházejí se v domovském adresáři uživatele ve složce POV-Ray. Slouží jako knihovny předdefinovaných funkcí a objektů. Volají se direktivou: **#include "neco.inc"** kdekoliv ve zdrojovém souboru. Instalace POV-Ray v3.7 standartně obsahuje tyto:

arrays.inc - funkce pro práci s poli
colors.inc - základní barvy
consts.inc - matematické a fyzikální konstanty
debug.inc - nástroje pro ladění aplikace
finish.inc - povrchy
functions.inc - matematické funkce
glass.inc - sklo - barvy, povrchy, textury
glass_old.inc - sklo - barvy, povrchy, textury
golds.inc - zlaté barvy a textury
chars.inc - písmena
logo.inc - PovRAY logo
math.inc - matematické funkce
metals.inc - kovy - barvy, povrchy, textury
rad_def.inc - možnosti nastevení radiosity (metoda globálního osvětlení scény)
rand.inc - generátory náhodných čísel
screen.inc - automatické vkládání prvků scény (např. logo)
shapes.inc - tělesa, tvary
shapes2.inc - tělesa, tvary
shapes_old.inc - tělesa, tvary
shapesq.inc - kvadriky
skies.inc - obloha
stage1.inc - přednastavení základní scény
stars.inc - noční obloha
stdcam.inc - standardní kamera
stdinc.inc - načtení standardních inludes files
stoneold.inc - kameny - barvy, povrchy, textury
stones.inc - kameny - barvy, povrchy, textury
stones1.inc - kameny - barvy, povrchy, textury
stones2.inc - kameny - barvy, povrchy, textury
strings.inc - makra pro práci s řetězci
sunpos.inc - výpočet polohy Slunce v konktrétní dobu
textures.inc - základní textury
transforms.inc - pokročilé transformace objektů
woodmaps.inc - dřevo - barvy, povrchy, textury
woods.inc - dřevo - barvy, povrchy, textury

8.1.2 Vzhled objektů

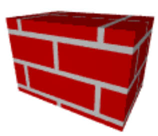
Pigment

Barvy se zadávájí jako vektor rgb$< x, y, z >$, kde jednotlivé proměné x, y, z nabývájí obvykle hodnoty 0-1 (což chápeme jako procentuální zastoupení dané barevné složky 0-100%). Horní hranice může být i víc než 1, ale 99% monitorů a tiskáren tyto hodnoty není schopno zobrazit. Můžeme využít připravené a pojmenované barvy ze souboru colors.inc.

Poznámka 8.1.1 *nastavení prostředí pro následující příklady:*
#include "colors.inc"
camera{location $< 4, 3, -5 >$ *look_at* $< .5, 0, 1 >$*}*
light_source{$< 0, 0, -10 >$ *color rgb 1 }*
light_source{$< 0, 10, 0 >$ *color rgb .6 shadowless}*
light_source{$< 10, 0, 0 >$ *color rgb .6 shadowless}*
background{color rgb 1}

Poznámka 8.1.2 *V následujících ukázkách jsou použity objekty a transformace, které budou vysvětleny v následujících kapitolách (box, translate, rotate, scale).*

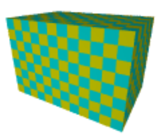
Předdefinované barevné vzory



Brick - cihlový vzor

pigment{brick barva1, barva2}

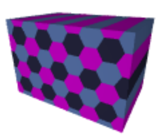
box{$< -3, -2, 0 >, < 3, 2, 4 >$ **pigment {brick White Red scale**$< .5, .5, .5 >$**}}**



Checker - kostky

pigment{checker barva1, barva2}

box{$< -3, -2, 0 >, < 3, 2, 4 >$ **pigment{checker Yellow Cyan scale**$< .5, .5, .5 >$**}}**



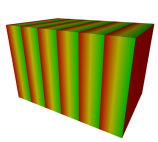
Hexagon - šestiúhelníky

pigment{hexagon barva1, barva2, barva3}

box{$< -3, -2, 0 >, < 3, 2, 4 >$ **pigment{hexagon MidnightBlue DarkTurquoise Magenta scale**$< .5, .5, .5 >$ **rotate**$< 90, 0, 0 >$**}}**

Barevné mapy

Vytváření barevných přechodů (s funkcemi náhodného výběru se využívá pro vytváření textur) vzorková funkce nabývá hodnot 0-1, s tím že každé dílčí hodnotě z tohoto intervalu lze přiřadit právě jednu barvu (maximálně 256)



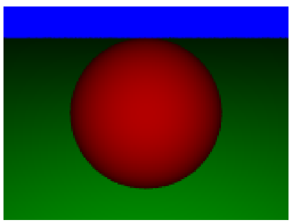
box{$< -3, -2, 0 >, < 3, 2, 4 >$
pigment{gradient x //smer vektoru barevneho prechodu
color_map{ [0.0 **color Red**] [0.5 **color Yellow**] [1.0 **color Green**]
}}}

8.1.3 Tělesa

Poznámka 8.1.3 *nastavení prostředí pro následující příklady:*
camera{*location* $< 2, 2, -2 >$ *look_at* $< 0, 1, 0 >$}
light_source{$< 3, 2, -4 >$ *color rgb 1*}
background{*color rgb* $< 0, 0, 1 >$}
plane{$< 0, 1, 0 >, -1$ *pigment*{*color rgb* $< 0, 1, 0 >$}}

Koule

určena středem a poloměrem

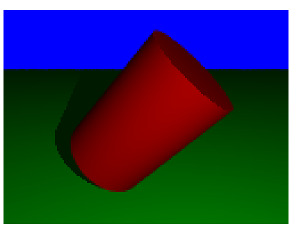


sphere{
$< x, y, z >$**, // souradnice stredu**
r //polomer
[*OBJECT_MODIFIERS*]
}

Př. koule se středem $S(0, 1, 0)$ a poloměrem $r = 1$
sphere{$< 0, 1, 0 >$**, 1 pigment{color rgb** $< 1, 0, 0 >$**}}**

Válec

určen středy podstav a poloměrem



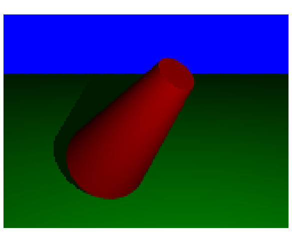
cylinder{
$< x, y, z >$**, //souradnice stredu 1. podstavy**
$< x, y, z >$**, //souradnice stredu 2. podstavy**
r //polomer
[*OBJECT_MODIFIERS*]
}

Př. válec se středy podstav $S(-1, 0, 0)$, $S'(1, 2, 0)$ a poloměrem $r = 1$
cylinder{$< -1, 0, 0 >, < 1, 2, 0 >, 1$ **pigment{color rgb** $< 1, 0, 0 >$**}}**

Př. otevřený válec se středy podstav $S(0, 1, 1)$, $S'(1, 2, -1)$ a poloměrem $r = 1$
cylinder{$< -1, 0, 0 >, < 1, 2, 0 >, 1$ **open pigment{color rgb** $< 1, 0, 0 >$**}}**

Kužel

určena středy podstav a poloměry podstav



cone{
$< x, y, z >$**,** r_1 **//souradnice stredu a polomer 1. podstavy**
$< x, y, z >$**,** r_2 **//souradnice stredu a polomer 2. podstavy**
[*OBJECT_MODIFIERS*]
}

Př. komolý kužel s 1. podstavou určenou středem $S(-1, 0, 0)$ a poloměrem $r_1 = 1$ a s 2. podstavou o $S'(1, 2, -1)$ a $r_2 = 0.3$

cone{$< -1, 0, 0 >, 1, < 1, 2, -1 >, .3$ **pigment{ color rgb**$< 1, 0, 0 >$**}}**

Př. kužel s 1. podstavou určenou středem $S(-1, 0, 0)$ a poloměrem $r_1 = 1$ a s 2. podstavou o $S'(1, 2, -1)$ a $r_2 = 0$

cone{$< -1, 0, 0 >, 1, < 1, 2, -1 >, 0$ **pigment{ color rgb**$< 1, 0, 0 >$**}}**

Př. dvojitý kužel s 1. podstavou určenou středem $S(-1, 0, 0)$ a poloměrem $r_1 = 1$ a s 2. podstavou o $S'(1, 2, -1)$ a $r_2 = 1$

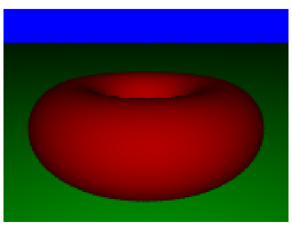
cone{$< -1, 0, 0 >, 1, < 1, 2, -1 >, -1$ **pigment{ color rgb**$< 1, 0, 0 >$**}}**

Př. otevřený kužel s 1. podstavou určenou středem $S(-1, 0, 0)$ a poloměrem $r_1 = 0$ a s 2. podstavou o $S'(1, 2, -1)$ a $r_2 = 1$

cone{$< -1, 0, 0 >, 0, < 1, 2, -1 >, 1$ **open pigment{ color rgb**$< 1, 0, 0 >$**}}**

Prstenec (torus, anuloid)

Těleso určené poloměrem řídící kružnice ležící v rovině xz se středem v počátku soustavy souřadné a poloměrem kružnice tvořící (její střed leží na řídící kružnici a tvořící kružnice leží v rovině kolmé k řídící kružnici).



torus{

r_1**, //polomer tvorici kruznice**

r_2 **//polomer ridici kruznice**

[*OBJECT_MODIFIERS*]

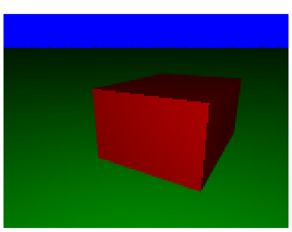
}

Př. prstenec s poloměrem řídící kružnice $r_1 = 2$ a poloměrem tvořící kužnice $r_2 = 1$

torus{$2, 1$ **pigment{ color rgb**$< 1, 0, 0 >$**}}**

Kvádr

určen dvěmi protilehlými vrcholy, stěny jsou rovnoběžné se souřadnicovými rovinami (xy, xz, yz)



box{

$< x, y, z >$**, //souradnice 1.vrcholu**

$< x, y, z >$**, //souradnice 2.vrcholu**

[*OBJECT_MODIFIERS*]

}

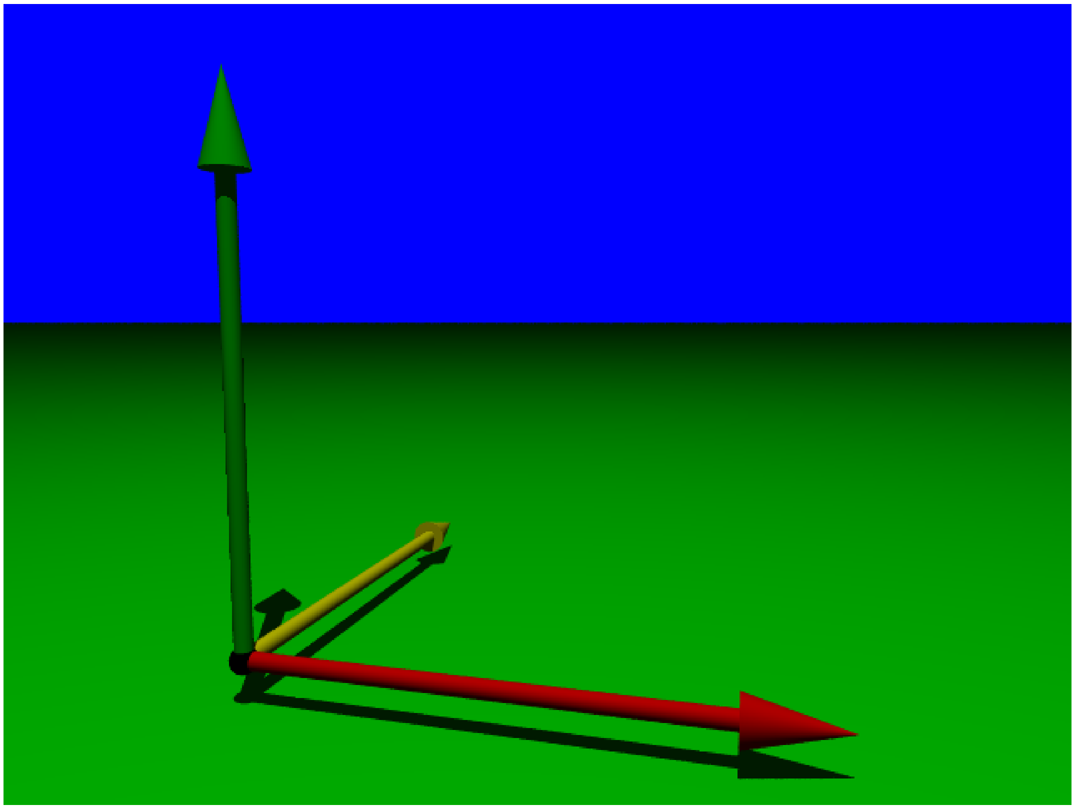
Př. kvádr s vrcholy o souřadnicích $< 0, 0, 0 >$, $< 1.5, 1, 2 >$

box{$< 0, 0, 0 >, < 1.5, 1, 2 >, 1$ **pigment{color rgb** $< 1, 0, 0 >$**}}**

8.1.4 Řešené příklady

Osy

Souřadný osový trojhran s vyznačenými kladnými částmi os umístěný do počátku soustavy souřadné.



kladná část osy x - červená
kladná část osy y - zelená
kladná část osy z - žlutá

```
camera{location < 10, 7, -14 > look_at < 5, 5, 5 >}
light_source{< 0, 2, -25 > color rgb< 1, 1, 1 >}
light_source{< 10, 50, -20 > color rgb< 1, 1, 1 > shadowless}
background{color rgb< 0, 0, 1 >}
plane{< 0, 1, 0 >, -1 pigment{color rgb< 0, 1, 0 >}}

/* ———— telesa sceny ———— */

/* ———— pocatek soustavy souradne ———— */
sphere{< 0, 0, 0 >, 0.3 pigment{color rgb< 0, 0, 0 >}}

/* ———— osa x - kladna cast ———— */
cylinder{< 0, 0, 0 >, < 10, 0, 0 >, 0.2 pigment{ color rgb< 1, 0, 0 >}}
cone{< 10, 0, 0 >, 0.5, < 12, 0, 0 >, 0 pigment{color rgb< 1, 0, 0 >}}
/* text{ttf "timrom.ttf""X+"0.1, 0 pigment{color rgb< 1, 0, 0 >} translate< 12, 0, 0 >} // popis osy x */
```

/* ———— osa y - kladna cast ———— */

cylinder{$< 0, 0, 0 >, < 0, 10, 0 >, 0.2$ pigment{color rgb$< 0, 1, 0 >$}}

cone{$< 0, 10, 0 >, 0.5, < 0, 12, 0 >, 0$ pigment{color rgb$< 0, 1, 0 >$}}

/* text{ttf "timrom.ttf""Y+"0.1, 0 pigment{color rgb$< 0, 1, 0 >$} translate$< 0, 12, 0 >$} // popis osy y */

/* ———— osa z - kladna cast ———— */

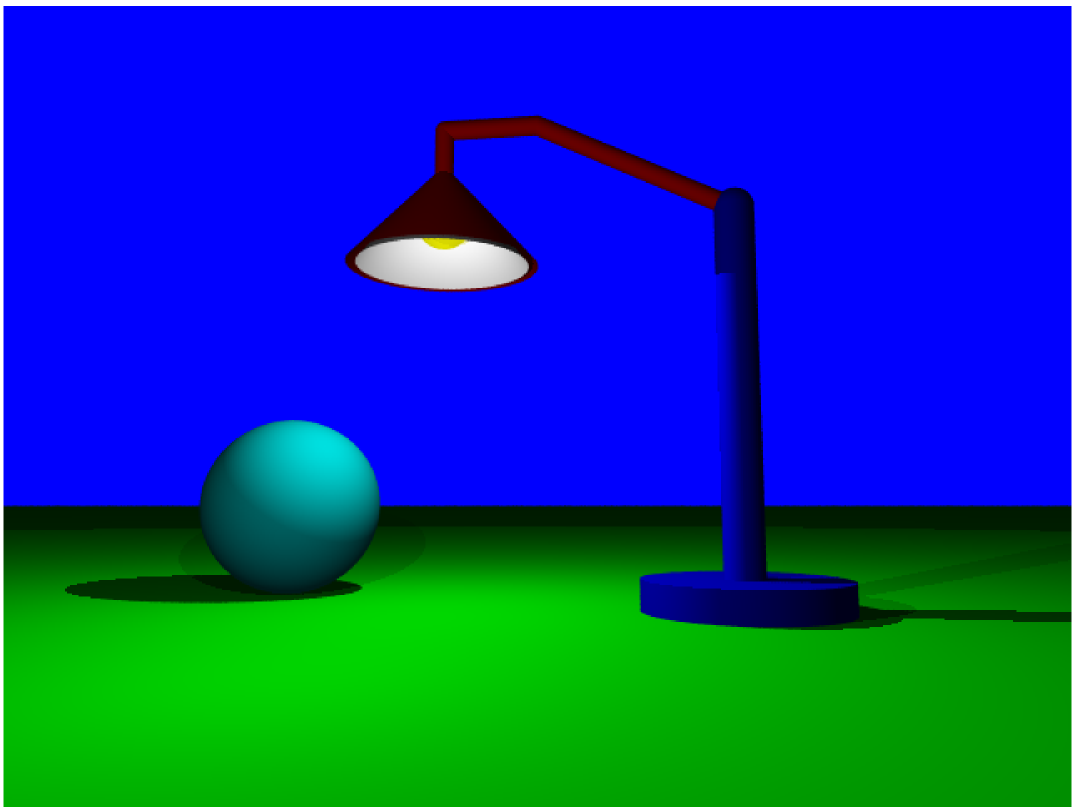
cylinder{$< 0, 0, 0 >, < 0, 0, 10 >, 0.2$ pigment{color rgb$< 1, 1, 0 >$}}

cone{$< 0, 0, 10 >, 0.5, < 0, 0, 12 >, 0$ pigment{color rgb$< 1, 1, 0 >$}}

/* text{ttf "timrom.ttf""Z+"0.1, 0 pigment{color rgb$< 1, 1, 0 >$} translate$< 0, 0, 12 >$} // popis osy z */

Lampa

Scéna je tvořena pouze jednoduchými tělesy (koule, válec, otevřený kuzel), hlavní světelný zdroj je umístěn ve stínítku lampy (pod koulí znázorňující žárovku)



camera{location $< -1, 1, -8 >$ look_at $< -2, 2, 0 >$}

light_source{$< -3, 2, -4 >$ color rgb .5}

background{color rgb$< 0, 0, 1 >$}

plane{$< 0, 1, 0 >, 0$ pigment{color rgb$< 0, 1, 0 >$}}

/* ———— noha ———— */

cylinder{$< 0, 0, 0 >, < 0, .3, 0 >, 1$ pigment{color rgb$< 0, 0, 1 >$}}

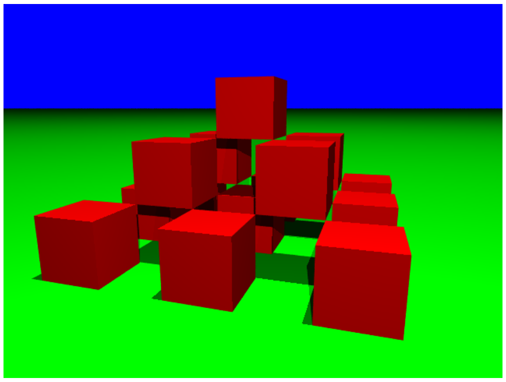
cylinder{$< 0, .3, 0 >, < 0, 4, 0 >, .2$ pigment{color rgb$< 0, 0, 1 >$}}

sphere{$< 0, 4, 0 >, .2$ pigment{color rgb$< 0, 0, 1 >$}}

```
/* ———— rameno ———— */
cylinder{< 0, 4, 0 >, < −2, 5, 0 >, .1 pigment{color rgb< 1, 0, 0 >}}
sphere{< −2, 5, 0 >, .1 pigment{color rgb< 1, 0, 0 >}}
cylinder{< −2, 5, 0 >, < −3, 5, 0 >, .1 open pigment{color rgb< 1, 0, 0 >}}
sphere{< −3, 5, 0 >, .1 pigment{color rgb< 1, 0, 0 >}}
cylinder{< −3, 5, 0 >, < −3, 4.5, 0 >, .1 pigment{color rgb< 1, 0, 0 >}}

/* ———— stinidlo ———— */
cone{< −3, 4.5, 0 >, .1, < −3, 3.5, 0 >, 1 open pigment{color rgb< 1, 0, 0 >}}
cone{< −3, 4.5, 0 >, .09, < −3, 3.5, 0 >, .9 open pigment{color rgb< 1, 1, 1 >}}
sphere{< −3, 4, 0 >, .3 pigment{color rgb< 1, 1, 0, 0.9 >}}

/* ———— svetlo zarovky ———— */
light_source{< −3, 3.6, 0 > color rgb 1}

/* ———— pomocna telesa ———— */
sphere{< −5, 1, 1 >, 1 pigment{color rgb< 0, 1, 1, .0 >}}
```

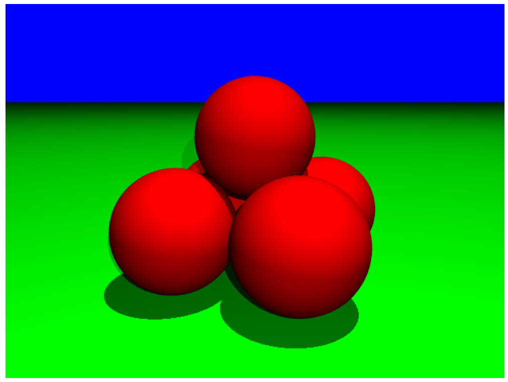
8.1.5 Úlohy k procvičení

1. Pyramida



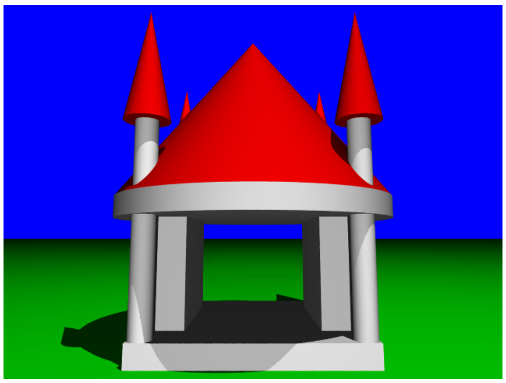
pyramida z krychlí o délce hrany 1

2. Pyramida z koulí



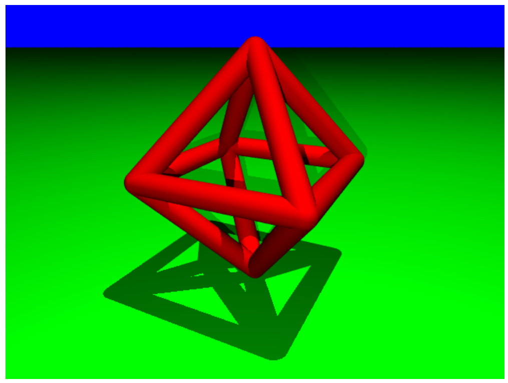
pyramida z koulí o poloměru 1

3. Brána



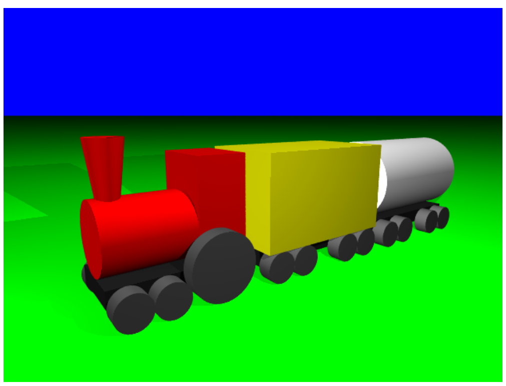
brána z "kostek"

4. Osmistěn



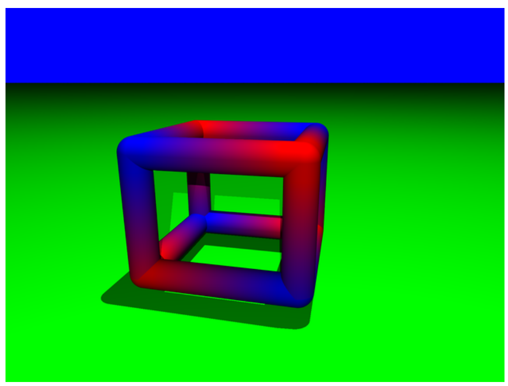
pravidelný osmistěn

5. Vlak



lokomotiva a dva vagony vytvořené ze základních těles

6. Kostka



kostka z válců se zaoblenými rohy, barevné přechody mezi červenou a modrou navazující v příslušných rozích

8.2 Transformace, množinové operace

8.2.1 Transformace

Posunutí, otočení a změna rozměrů umožňují efektivní práci s objekty. Je jednodušší umístit objekt v požadovaných rozměrech do počátku soustavy souřadné a až poté jej pomocí transformací umístit do požadované polohy. Změna rozměrů se obvykle používá pro celé skupiny objektů nebo i textury.
Na jeden objekt můžeme použít kombinaci několika transformací (i stejného druhu), záleží ale na jejich pořadí! Posunutím a následným otočením umístíme objekt jinam než otočením a posunutím.

Rotate

Otočení objektu kolem jednotlivých souřadných os ve stupních.
teleso{souradnice **rotate**$< x, y, z >$}

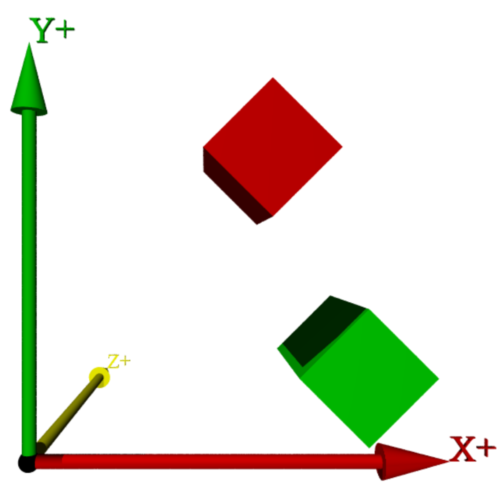
Scale

Změna rozměrů objektu ve směru jednotlivých souřadných os.
teleso{souradnice **scale**$< x, y, z >$}

Translate

Posunutí objektu ve směru vektoru $< x, y, z >$.
teleso{souradnice **translate**$< x, y, z >$}

Př. Kvádr - rozdíl v pořadí transformací.




```
#include "colors.inc"
#include "osy.inc"// nacteni souradnych os z prvniho cviceni
camera{ location < 5, 6, -15 > look_at < 5, 6, 0 >}
light_source{ < 0, 20, 0 > color rgb .7 }
light_source{ < 0, 0, -50 > color rgb 1 shadowless}
background{ color White}

box{< 0, 0, 1 >, < 3, 3, 6 >
        translate< 10, 0, 0 > rotate< 0, 0, 45 >
                pigment{color Red}}
box{< 0, 0, 1 >, < 3, 3, 6 >
        rotate< 0, 0, 45 > translate< 10, 0, 0 >
                pigment{color Green}}
```

8.2.2 Množinové operace CSG

Odpovídají množinovým operacím definovaným v matematice — sjednocení, průnik, rozdíl. Umožňují ze základních jednoduchých těles vytvářet složité objekty, které je možné dále modifikovat jako jeden celek (barva, povrch, textury, optické vlastnosti, posunutí, otočení, změna měřítka).

Poznámka 8.2.1 *nastavení prostředí pro následující příklady:*
camera{*location* $< 0, 1, -4 >$ *look_at* $< .3, 1.3, 0 >$}
light_source{$< 0, 3, -5 >$ *color rgb 1 shadowless*}
background{*color rgb 1*}

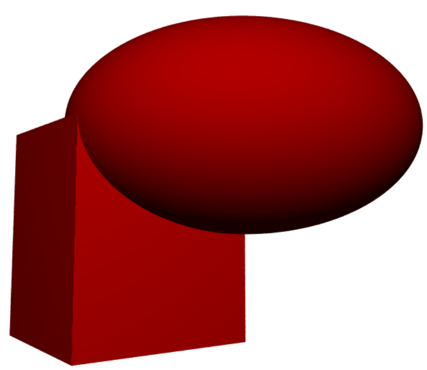
Union

Definice 8.2.1 *Prvek patří do sjednocení dvou nebo více množin právě tehdy, když patří do alespoň jedné ze sjednocovaných množin.*

Poznámka 8.2.2 (PovRAY) *Z jednotlivých těles vytvoříme jeden celek, se kterým dále pracujeme.*

union{teleso1 teleso2 teleso3 [*OBJECT_MODIFIERS...*] **}**

Př. sjednocení kvádru s vrcholy $V_1(0, 0, 0)$, $V_2(1, 2, 1)$ a koule o středu $S(1, 2, 1)$ a poloměru $r = 1$, výsledek je pootočen, rozměrově deformován a posunut



```
union{
    box{< 0,0,0 >,< 1,2,1 >}
    sphere{< 1,2,1 >,1}
        pigment{color rgb< 1,0,0 >}
        rotate< 0,60,0 >
        scale< 1.5,.9,1 >
        translate< -1.5,0,0 >
}
```

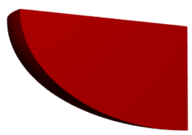
Intersection

Definice 8.2.2 *Prvek patří do průniku dvou nebo více množin právě tehdy, když patří do každé z množin průniku.*

Poznámka 8.2.3 (PovRAY) *Zobrazí společnou (překrývající se) část všech daných těles.*

intersection{teleso1 teleso2 teleso3 [*OBJECT_MODIFIERS...*] **}**

Př. průnik kvádru s vrcholy $V_1(0,0,0)$, $V_2(1,2,1)$ a koule o středu $S(1,2,1)$ a poloměru $r = 1$, výsledek je pootočen, rozměrově deformován a posunut



intersection{
  box{$< 0,0,0 >, < 1,2,1 >$**}**
  sphere{$< 1,2,1 >, 1$**}**
    pigment{color rgb$< 1,0,0 >$**}**
    rotate$< 0,60,0 >$
    scale$< 1.5, .9, 1 >$
    translate$< -1.5,0,0 >$
}

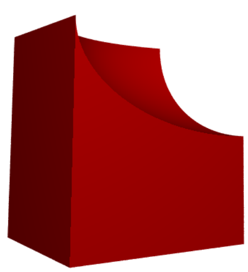
Difference

Definice 8.2.3 *Prvek patří do rozdílu dvou nebo více množin právě tehdy, když patří jenom do první množiny ale ne do dalších množin rozdílu.*

Poznámka 8.2.4 (PovRAY) *Od prvního tělesa odečítá (odebírá) všechny další ze seznamu.*

difference{teleso1 teleso2 teleso3 [*OBJECT_MODIFIERS*...] **}**

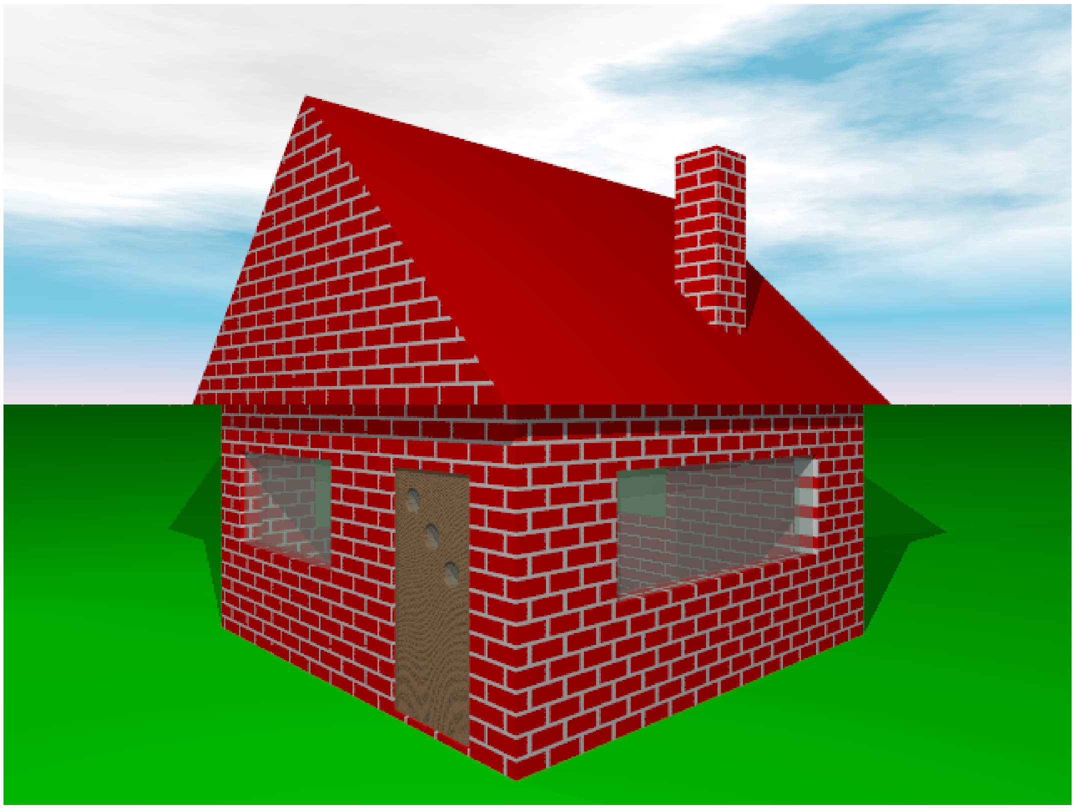
Př. rozdíl kvádru s vrcholy $V_1(0,0,0)$, $V_2(1,2,1)$ a koule o středu $S(1,2,1)$ a poloměru $r = 1$, výsledek je pootočen, rozměrově deformován a posunut



difference{
  box{$< 0,0,0 >, < 1,2,1 >$**}**
  sphere{$< 1,2,1 >, 1$**}**
    pigment{color rgb$< 1,0,0 >$**}**
    rotate$< 0,60,0 >$
    scale$< 1.5, .9, 1 >$
    translate$< -1.5,0,0 >$
}

8.2.3 Řešené příklady

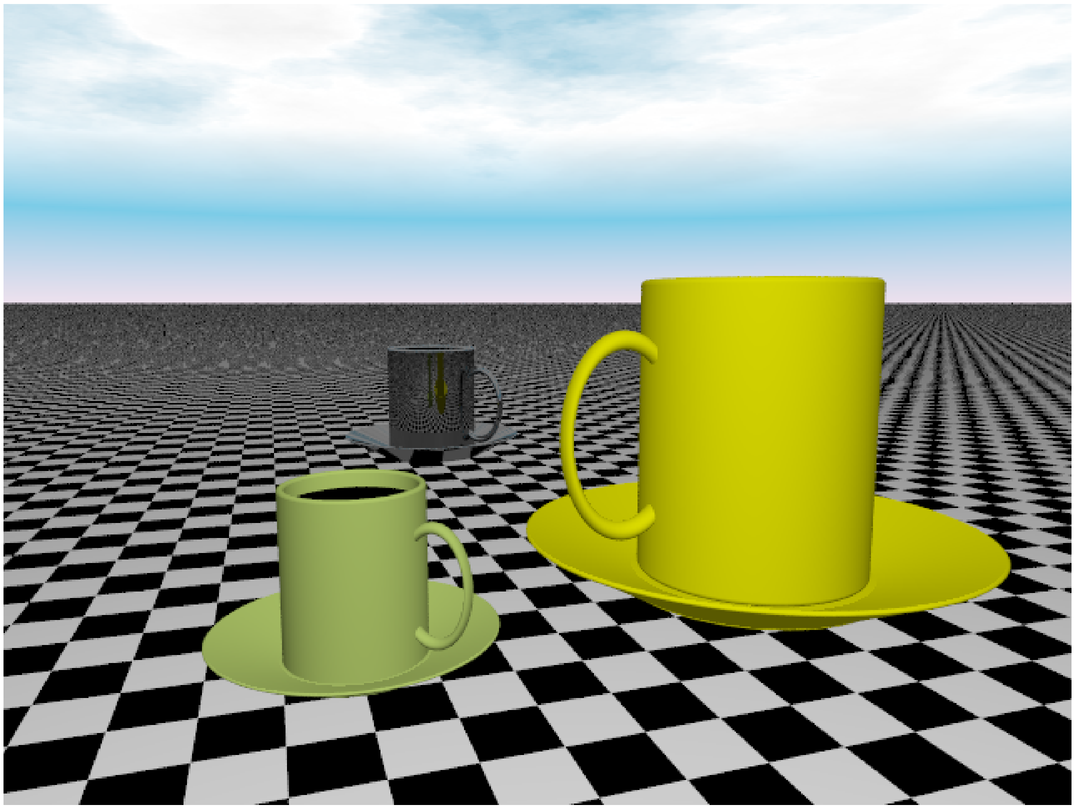
Domeček



```
#include ”colors.inc”//barvy
#include ”glass.inc”// sklo
#include ”woods.inc”// drevo
#include ”skies.inc”// obloha
sky_sphere{S_Cloud2} // obloha jako vnitrni povrch kulove plochy
camera{location < 13, 5, −12 > look_at < 0, 5, 0 >}
light_source{< 10, 10, −10 > color rgb 0.7} //hlavni svetelny zdroj
light_source{< −10, 5, −10 > color rgb 0.2} //pomocny svetelny zdroj
background{color rgb< 0, 0, 1 >}
plane{< 0, 1, 0 >, 0 pigment{ color rgb< 0, 1, 0 >}}

/* ———— strecha ———— */
difference{ //rozdil tri kvadru
box{< −5.5, 0, 5.5 >, < 5.5, 6, −5.5 > //prvni kvadr - lezi na rovine xz
pigment{brick White Red scale< .1, .1, .1 >}}
box{< −6, 0, 6 >, < 6, 6, −6 > //druhy kvadr - kvuli odectu zvetseny rozmery, otocen kolem osy z a posunut
rotate< 0, 0, 45 > translate< −2.7, 2.7, 0 >}
box{< −6, 0, 6 >, < 6, 6, −6 > //treti kvadr - kvuli odectu zvetseny rozmery, otocen kolem osy z a posunut
rotate< 0, 0, −45 > translate< 2.7, 2.7, 0 > }
pigment{ color rgb< 1, 0, 0 > }
translate < 0, 5, 0 > //cela strecha posunuta do pozadovane vysky
}
```

```
/* ———— zdi ———— */
difference{
box{ <-5,0,-5>,<5,5,5> }
box{ <-4.5,0.1,-4.5>,<4.5,5,4.5> }
box{ <2,0.1,-6>,<4,4,-4> }
box{ <-4,2,-6>,<0,4,6> }
box{ <6,2,-3>,<-6,4,3> }
pigment{ brick rgb<1,1,1> rgb<1,0,0> scale<.1,.1,.15> }
}

/* ———— okna ———— */
difference{
box{ <-4.9,0,-4.9>,<4.9,5,4.9> }
box{ <-4.6,0.1,-4.6>,<4.6,5,4.6> }
pigment{Col_Glass_Old}
}

/* ———— dvere ———— */
difference{
box{<2,0.1,-4.95>,<4,4,-4.55>}
cylinder{<2.5,3.5,-5>,<2.5,3.5,-4.5> .2}
cylinder{<3,3,-5>,<3,3,-4.5> .2}
cylinder{<3.5,2.5,-5>,<3.5,2.5,-4.5> .2}
texture{T_Wood8}
}

/* ———— komin ———— */
box{
<4,5,2>,<3,10,1>
pigment{ brick rgb<1,1,1> rgb<1,0,0> scale<.1,.1,.1> }
}
```

Hrnky

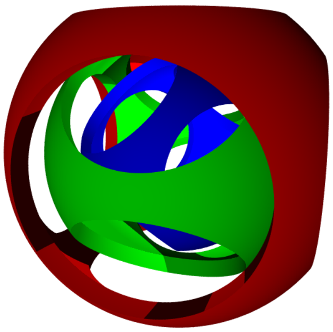


```
#include "colors.inc"
#include "skies.inc"

camera{location< -7,5,-11 > look_at < -2,3,4 >}
light_source{ < -6,10,-10 > color rgb 1 shadowless}
plane{ < 0,1,0 >, 0 pigment{checker Black White}}
sky_sphere{S_Cloud2}

/* ——————— hrnek ——————— */
#declare hrnek = union{
//telo
difference{
cylinder{< 0,0.1,0 >,< 0,5,0 >,2}
cylinder{< 0,0.3,0 >,< 0,6,0 >,1.8}
} torus{1.9, 0.1 translate< 0,0.1,0 >}
torus{1.9, 0.1 translate< 0,5,0 >}

//ucho
difference{
torus{2, .2 rotate< 90,0,0 > translate< -3,2.5,0 >}
cylinder{< 0,0.1,0 >,< 0,5,0 >,2}
scale< .5,0.8,0 > translate< -1,0.5,0 >
}
```

```
}

/* ———— podsalek ———— */
#declare podsalek = union{
difference{
cone{< 0, 0.1, 0 >,2.3,< 0, 1, 0 >,4}
cone{< 0, 0.3, 0 >,2.1,< 0, 1.1, 0 >,4.1}
}
difference{
torus{3.9, 0.1 scale< 0, 0.5, 0 > translate< 0, 1, 0 >}
cone{< 0, 0.3, 0 >,2.1,< 0, 1.1, 0 >,4.1}
}
torus{2.2, 0.1 scale< 0, 0.5, 0 > translate< 0, 0.1, 0 >}
}

/* ———— kava ———— */
#declare kava = cylinder{< 0, 0, 0 >,< 0, 1, 0 >,1.8 pigment{color Black}}

/* ———— 1. hrnek ———— */
object{hrnek pigment{color Yellow} translate< 1, 0.3, 1 >}
object{podsalek pigment{color Yellow} translate< 1, 0, 1 >}

/* ———— 2. hrnek ———— */
object{hrnek pigment{color YellowGreen} rotate< 0, 220, 0 > scale< .5, .5, .5 > translate < −6, 0, 0 > }
object{podsalek pigment{color YellowGreen} scale< .5, .5, .5 > translate < −6, 0, 0 >}
object{kava scale< .5, .5, .5 > translate < −6, 1.8, 0 >}

/* ———— 3. hrnek ———— */
object{hrnek pigment{color Black} rotate< 0, 220, 0 > scale< .7, .7, .7 > translate < −2, 0, 15 > finish {reflection .2
ambient 0.2 diffuse 0.9}}
object{podsalek pigment{color Black} scale< .7, .7, .7 > translate < −2, 0, 15 > finish {reflection .2 ambient 0.2
diffuse 0.9}}
object{kava scale< .7, .7, .7 > translate < −2, 2.5, 15 >}
```

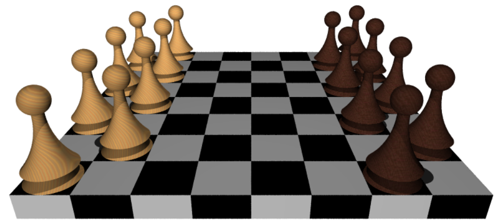
8.2.4 Úlohy k procvičení

1. Koule



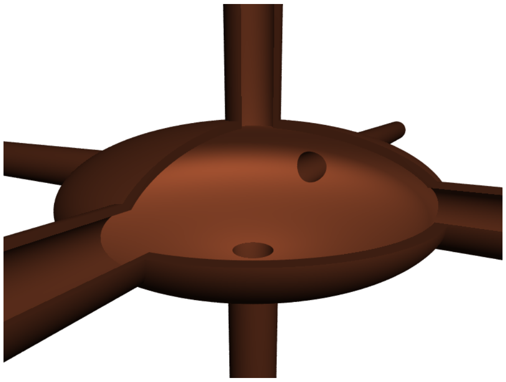
tři proděravěné vzájemně zanořené koule

2. Dáma



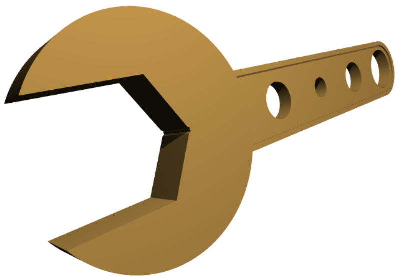
základní postavení figur

3. Zásobník



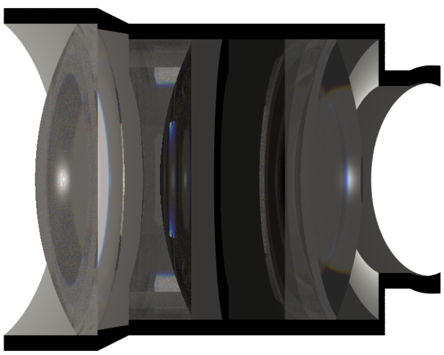
zásobník ve tvaru zploštělého disku s přívodními potrubími ve směru souřadných os

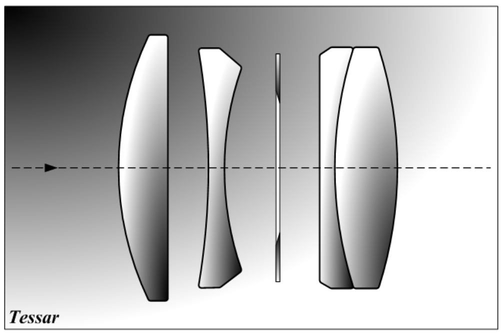
4. Klíč



klíč pro šestihranné šrouby s odvrtanou rukojetí

5. Tessar





objektiv typu Tessar v řezu

8.3 Programování v PovRAY (proměnné, cykly)

Jak bylo už ukázáno v předchozí kapitole PovRAY k popisu scény využívá vlastní scriptovací jazyk. Nejedná se plnohodnotný programovací jazyk, ale přesto umožňuje s pomocí proměnných, cyklu while a podmínky if-else zjednodušit a zpřehlednit zápis scény nebo jednoduše vytvářet dynamicky generované scény.

8.3.1 Proměnné

Definují se pomocí direktivy **#declare název_proměnné = přiřazená_hodnota;** PovRAY nerozlišuje typy proměnných, takže jedné proměnné můžete přiřadit číslo (přirozené, reálné), ale i textový řetězec nebo dokonce celý objekt.

#declare a = 1;

#declare vektor = $< 2, 1, 5 >$**;**

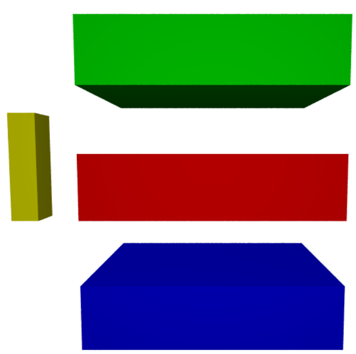
#declare valec = cylinder{$< -10, 0, 0 >, < 10, 0, 0 >, 2$ **pigment{color rgb**$< 0, 1, 0 >$**}}**

pro použití objektu "valec" musíme použít příkaz **object{nazev}**, kdekoliv **po** zápisu definice valce:

object{valec}

jeden takto definovaný útvar můžeme zavolat několikanásobně a dále jej modifikovat (translate, rotate, scale, color, texture . . .)

Př. použití proměnných a zkrácených forem zápisu



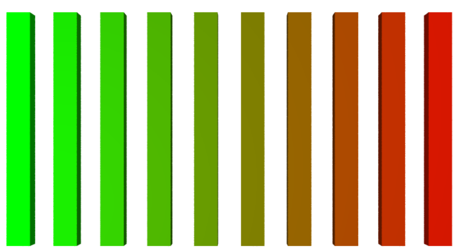
```
#include "colors.inc"
background{color White}
#declare a=5;
box{< 0,0,0 >,< 2*a,a/2,1.5*a > pigment{color Red}}
#declare vektor = < 2*a,a/2,1.5*a >;
box{0,vektor pigment{color Green} translate a*y}
#declare kvadr = box{0,1}
object{kvadr pigment{color Blue} scale vektor translate -a*y}
#declare zluta = Yellow;
object{kvadr pigment{color zluta} scale 2*a/vektor translate -(a/2)*x}
camera{location< a,a/2,-3*a > look_at< a,a/4,0 >}
light_source{< a,a/2,-3*a > color rgb 1}
light_source{< 0,5*a,5*a > color rgb 0.7 shadowless}
```

8.3.2 Cyklus while

Nejdříve se vyhodnotí podmínka (pokud není splněna, cyklus se ani jednou neprovede), poté se provedou příkazy uvnitř cyklu, obecně jich může být neomezený počet, na závěr se navýší (sníží) hodnota řídící proměnné. Cykly je možné neomezeně vnořovat, výrazně ale přitom stoupá výpočetní náročnost scény a hrozí nebezpečí zacyklení výpočtů, také klesá přehlednost kódu.

```
#declare ridici_promena;
#declare pocet_prubehu;
#while (podminka)
        prikaz
        prikaz
        ...
        #declare ridici_promena ± hodnota_zmeny;
#end
```

Př. Ukázka využití cyklu while pro vygenerování daného počtu objektů a pro vytvoření barevného přechodu.



```
#include "colors.inc"
camera{ location < 5, 2, -8 > look_at < 5, 2, 0 >}
light_source{ < 0, 0, -10 > color rgb 1}
light_source{ < 25, 25, -25 > color rgb 1 shadowless}
background{ color White}

#declare krok = 0;
#declare pocet = 10;
#while (krok < pocet)
        box{0,< .5, 5, .2 >
            translate krok*x
            pigment{color rgb<krok/pocet,1-krok/pocet,0>}}
        #declare krok = krok + 1;
#end
```

8.3.3 Podmínka if-else

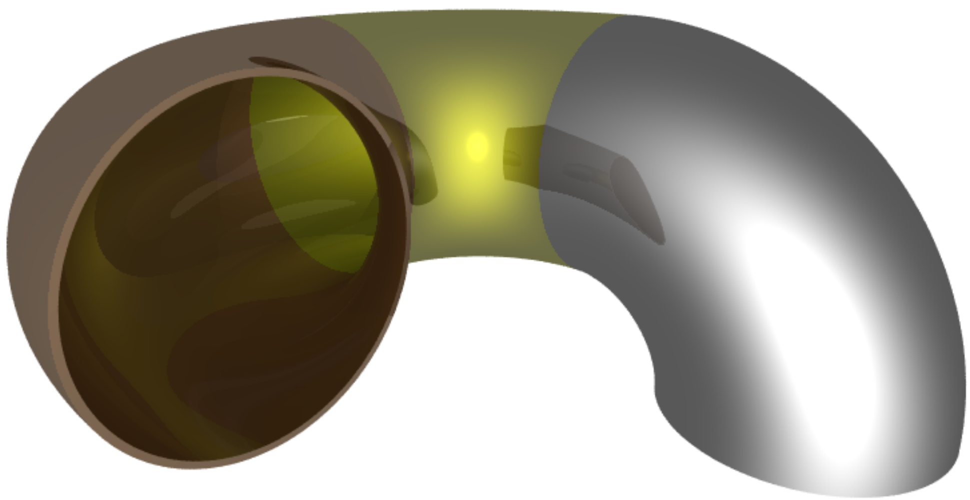
Na základě vyhodnocení podmínky se rozhodne, zde se provede jedna nebo druhá varianta příkazů. Často se využívá pro řízení animací.

```
#if (podminka)
        prikazy, ktere se provedou, jestli je podminka splnena
#else
        prikazy, ktere se provedou, jestli je podminka nesplnena
#end
```

8.3.4 Řešené příklady

Koleno

Vytvořte obecný objekt "koleno"pro pravoúhlé propojení potrubí o daném průměru a síle stěny. Vytvořte externí soubor koleno.inc, které budete moct načítat do dalších scén. Pomocí podmínky zajistěte, že vnitřní průměr bude vždy menší než vnější.

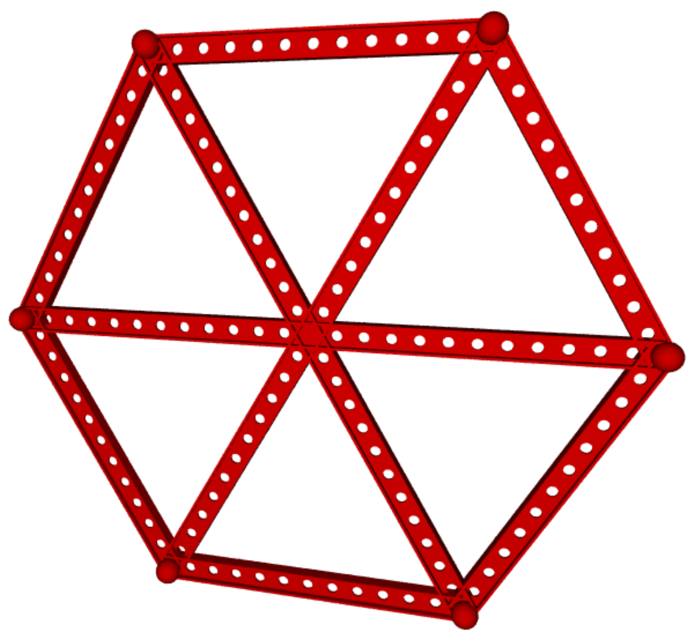


```
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"
camera{ location < 16, 8, -18 > look_at < 0, 0, 0 > }
light_source{ < 100, 10, -100 > color rgb 0.7 }
light_source{ < 16, 8, -18 > color rgb 0.2 shadowless }
background{color White}

/* ———— deklarace promenych pouzitych pro definici kolena ———— */
#declare polomer_ridici = 8;
#declare polomer_tvorici = 4.8;
#declare polomer_vnitrni = 5;
//kdyz bude zadan vnejsi prumer mensi nez vnitrni dojde k zamene hodnot (pokud je podminka splnena nestane
se nic)
#if (polomer_tvorici > polomer_vnitrni)
#else
        #declare p = polomer_vnitrni;
        #declare polomer_vnitrni = polomer_tvorici;
        #declare polomer_tvorici = p;
#end
```

```
/* ————— koleno.inc - volani ————— */
//soubor koleno.inc muze byt zavolan az po nastaveni promennych !
//#include"koleno.inc"
/* ————— koleno.inc - obsah ————— */
//koleno.inc - start
#declare koleno = intersection{
difference{
torus{ polomer_ridici,polomer_tvorici }
torus{ polomer_ridici,polomer_vnitrni }
}
box{ <-(polomer_ridici + polomer_tvorici +1),-(polomer_tvorici + 1),0>,<0,(polomer_tvorici + 1),-(polomer_ridici
+ polomer_tvorici +1)> }
}
//koleno.inc - konec

object{ koleno texture{ Copper_Metal } }
object{ koleno texture{ Gold_Metal } rotate < 180, 0, 0 > }
object{ koleno texture{ Chrome_Metal }
rotate < 270, 180, 90 > translate <0,-polomer_ridici,polomer_ridici> }
```

Nosníky

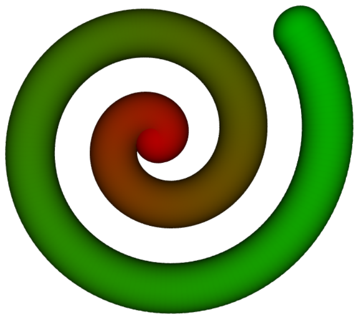
Vytvořte obecný objekt ”nosník”- I-profil s odvrtanými odlehčovacími otvory, jejichž počet se mění s délkou nosníku (na 1 délkovou jednotku připadá 1 otvor o poloměru 1/2 jednotky). Pomocí cyklů vytvořte z těchto nosníků konstrukce např. pravidelný šestiúhelník.



```
#include ”colors.inc”
background{color White}

#declare delka_nosniku = 12;

#declare nosnik = difference{
        box{-.5*y,<delka_nosniku,.5,.5>}
        box{< −1, −.4, −.5 >,<delka_nosniku+1,.4,.2>}
        box{< −1, −.4, 1 >,<delka_nosniku+1,.4,.3>}
        // odlehcovaci otvory
        #declare krok = 1;
        #while (krok < delka_nosniku)
                cylinder{-1*z,1*z,.2 translate (krok)*x}
                #declare krok = krok + 1;
        #end
        pigment{color Red}
}

#declare krok = 0;
#declare pocet = 6;
#while (krok < pocet)
        object{nosnik rotate 60*krok*z}
        object{nosnik rotate -120*z translate (delka_nosniku-.2)*x rotate 60*krok*z }
        sphere{delka_nosniku*x,.5 rotate 60*krok*z pigment{color Red}}
        #declare krok = krok + 1;
#end

/* ———— kamera, svetla ———— */
// pozice kamery a svetel zavisi na delce nosniku a umisteni konstrukce ve scene
camera{location<.5*delka_nosniku,.5*delka_nosniku,-2*delka_nosniku> look_at (1/10)*delka_nosniku*y}
light_source{<.5*delka_nosniku,.5*delka_nosniku,-2*delka_nosniku> color rgb .7}
light_source{-100*z color rgb .5 shadowless}
```

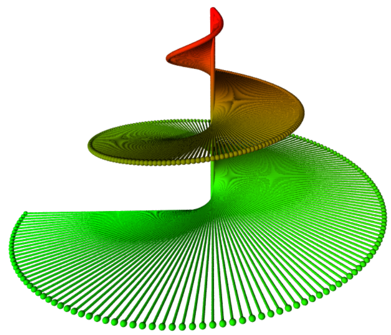
8.3.5 Úlohy k procvičení

1. Spirála

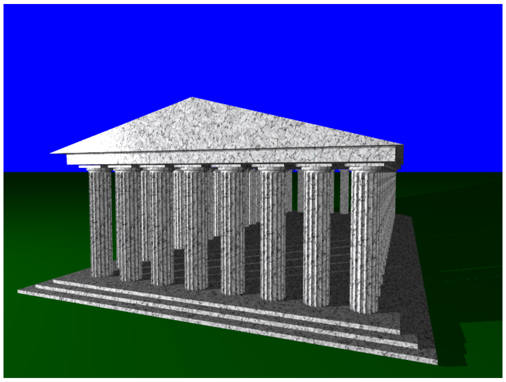


spirála z kuliček

2. Prostorová spirála

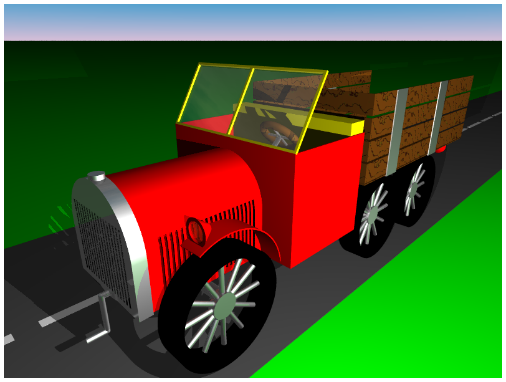


3. Parthenon

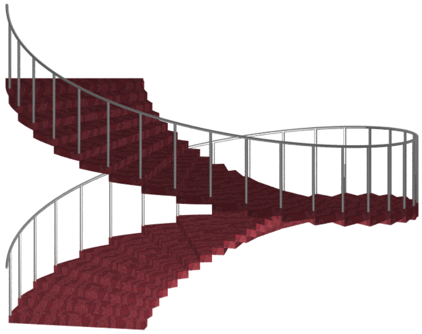


řecký chrám o šířce 8 a délce 18 sloupů, každý sloup má 16 drážek s kulovým zakončením

4. Auto



5. Točité schodiště



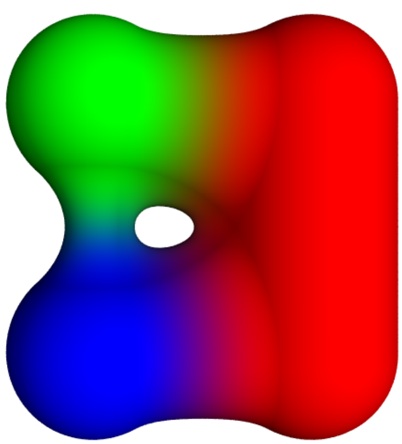
8.4 Implicitní plochy, výšková pole, matematické funkce

8.4.1 Implicitní plochy

Jsou definovány hustotou částic v dané oblasti, plocha se vytvoří, pokud hustota překročí zadanou hodnotu (práh - threshold). V PovRAY umožňuje práci s implicitními plochami objekt **blob**. Vytváříme jej z komponent - koule a válce, jimž kromě obvyklých parametrů (střed, poloměr) přidáváme další parametr - strength (intenzita, síla) obvykle 1, povoleny jsou i záporné hodnoty - síla jedné komponenty odebírá částice druhé. Jsou doplněním množinových operací, které sice neumožňuje vytvoření numericky naprosto přesných ploch, zato vizuálně obvykle velmi zdařilých.

```
blob {
    threshold hodnota
        komponenta
        komponenta
        ...
    }
```

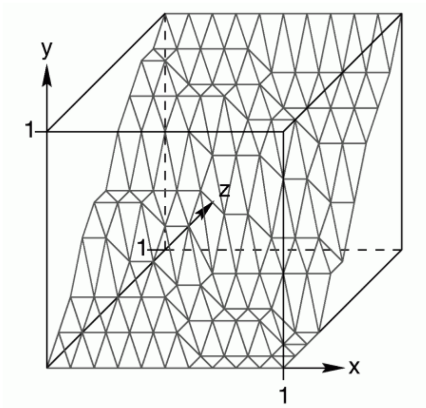
Př. Implicitní plocha tvořená válcovou a dvojicí kulových komponent.



```
#include "colors.inc"
camera{location -3*z look_at 0}
light_source{-10*z color rgb 1}
light_source{< 100, 0, −100 > color rgb .7 shadowless}
background{color White}

blob {
    threshold 0.6
     cylinder{< .75, −.65, 0 >, < .75, .65, 0 >, 1, 1
                                   pigment{color Red}}
     sphere{< −.37, .65, 0 >, 1, 1 pigment{color Green}}
     sphere{< −.37, −.65, 0 >, 1, 1 pigment{color Blue}}
     }
```

8.4.2 Výškové pole

Síť trojúhelníků, jejichž výšky (y kóty) vrcholů se vypočítají na základě informací načtených z externího souboru tvoří v PovRAY objekt **hight_field**. Jako zdrojový soubor můžeme použít libovolný černobílý (barevný bude konvertován na černobílý) obrázek formátu gif, tga (u jiných formátů může dojít ke komplikacím způsobených komprimací). Rozměry obrázku nejsou podstatné, neboť PovRAY na jeho základě vytvoří výškové pole vepsané do jednotkové krychle, které do potřebných rozměrů upravíme pomocí scale. Jak už název napovídá, výšková pole se používají k modelování terénu. Jako zdrojové obrázky mohou sloužit mapy povrchu, u kterých vrstevnice nahradíme oblastmi s různou intenzitou šedé (bílá = 1, černá = 0).



height_field{

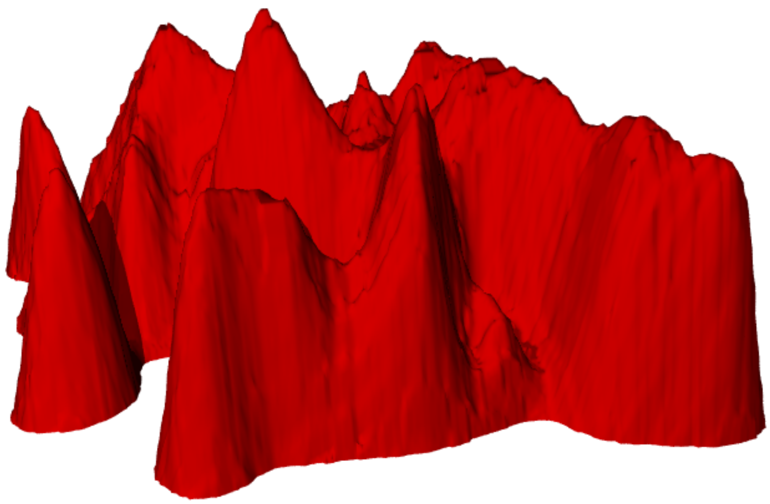
format_obrazku "nazev_obrazku"

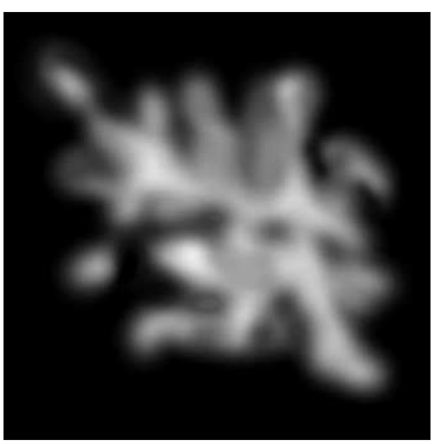
water_level hodnota //odrezani spodni casti

smooth //vyhlazeni povrchu

[*OBJECT_MODIFIERS*]

}





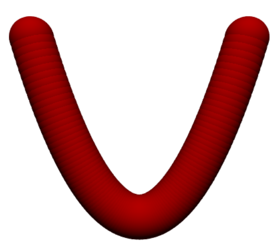
```
#include "colors.inc"
camera {location < 30, 50, -40 > look_at < 70, 0, 80 >}
light_source{< 0, 100, -100 > color rgb .8}
light_source{< 0, 50, 0 > color rgb .5 shadowless}
background{White}

height_field{
    gif "hf-vzor.gif"
    water_level 0.1
    smooth
    pigment{color Red}
    scale< 100, 50, 100 > }
```

Poznámka 8.4.1 *Bez vložení souboru hf-vzor.gif do složky, ve které se nachází zdrojový kód scény, příklad nefunguje.*

Matematické funce

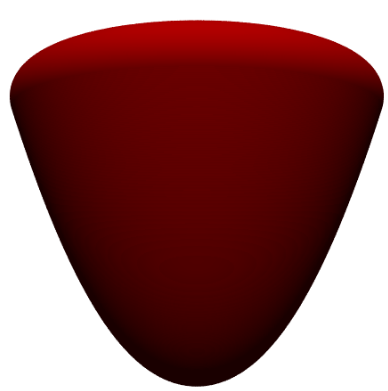
Ve spojení s cyklem while nám umožňují vytvářet další rozmanité plochy a tělesa. PovRAY dokáže pracovat s prakticky libovolnou matematickou funkcí, ať je zadaná parametricky nebo implicitně. Uvedeme zde jenom několik málo ukázek.

Kvadratická funkce



```
#include ”colors.inc”
camera{location< 0, 5, −15 > look_at< 0, 5, 0 >}
light_source{< 0, 25, −25 > color rgb 1}
background{color White}

#declare krok = -5;
#while (krok < 5)
        sphere{<krok,krok*krok/3,0>,1 pigment{color Red}}
        #declare krok= krok+0.1;
#end
```

Paraboloid



```
#include ”colors.inc”
camera{location< 0, 5, −15 > look_at< 0, 5, 0 >}
light_source{< 0, 25, −25 > color rgb 1}
background{color White}

#declare kvadrat = union{
        #declare krok = 0;
        #while (krok < 5)
        sphere{<krok,krok*krok/3,0>,1}
        #declare krok= krok+0.1;
#end }

#declare krok = 0;
#while (krok < 24)
        object{kvadrat rotate 15*krok*y pigment{color Red}}
        #declare krok= krok+.1;
#end
```

Poznámka 8.4.2 *Hladkost objektu na obrázku byla docílena nastavením přírustku na 0.001. Výpočet ale trval více než 10 minut na počítači s procesorem Intel Q9500 při 100% zatížení všech 4 výpočetních jader.*

Elipsa

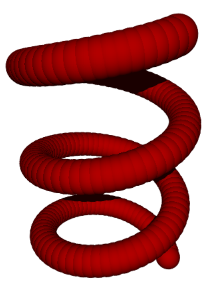
Využijeme parametrizaci elipsy.

```
#include "colors.inc"
camera{location< 0, 10, −8 > look_at0}
light_source{< 0, 10, −15 > color rgb 1}
background{color White}

#declare krok = 0;
#while (krok < 72)
        sphere{<7*cos(krok),0,3*sin(krok)>, 1 pigment{color Red}}
        #declare krok= krok+1;
#end
```

Poznámka 8.4.3 *Využitím goniometrických funkcí můžeme vytvořit analogii rotace, kdy se nepohybujeme po kružnici ale elipse.*

Šroubovice

Šroubový pohyb vzniká složením rovnoměrného posuvného a rotačního pohybu.

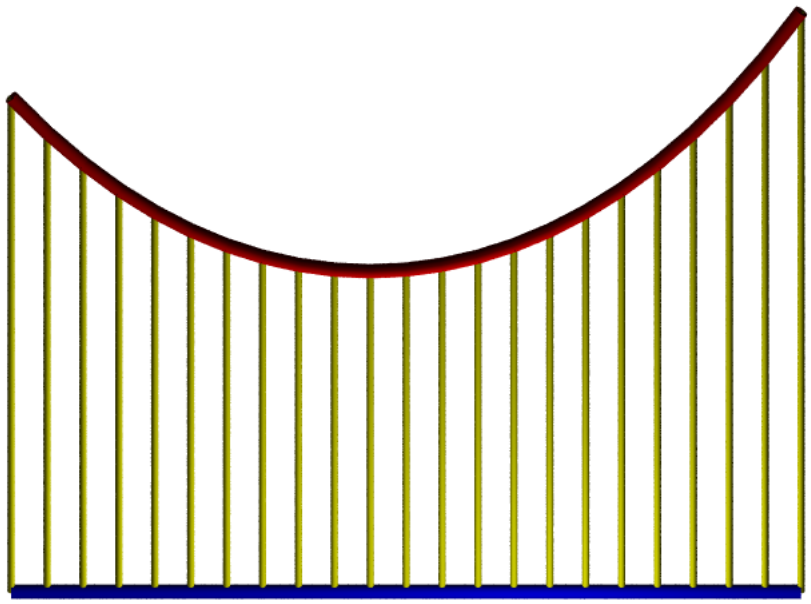


```
#include "colors.inc"
camera{location< 0, 20, −20 > look_at< 0, 10, 0 >}
light_source{< 0, 25, −25 > color rgb 1}
background{color White}

#declare krok = 0;
#while (krok < 18)
        sphere{<5*cos(krok),krok,5*sin(krok)>, 1 pigment{color Red}}
        #declare krok= krok+1;
#end
```

8.4.3 Řešené příklady

Řetězovka

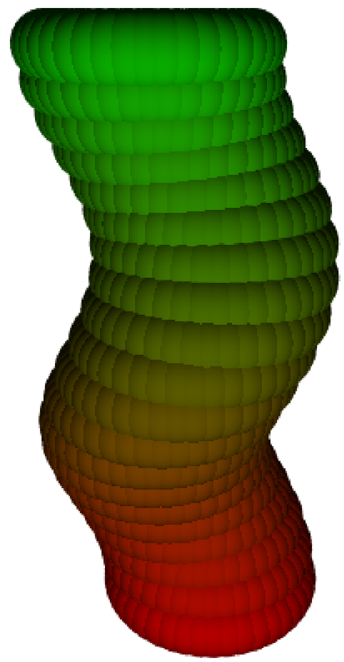
Jedná se o křivku, kterou vytvoří řetěz zavěšený na svých koncích nebo např. elektrické dráty, zadanou rovnicí $y = a\cosh(\frac{x}{a})$. Vytvoříme model zavěšení visutého mostu.



```
#include "colors.inc"
background{color White}

#declare a=50;
#declare r=1;
#declare d=5;

#declare krok = -a;
#while (krok <= a+d)
        // nosne lano (roura)
        cylinder{<krok,a*cosh(krok/a),0>,<krok+d,a*cosh((krok+d)/a),0>,r pigment{color rgb Red}}
        // mostovka
        cylinder{krok*x,(krok+d)*x,r pigment{color rgb Blue}}
        // svisla nosna lana
        cylinder{<krok,a*cosh(krok/a),0>,krok*x,r/2 pigment{color rgb Yellow}}

#declare krok = krok + d;
#end

// posledni svisle lano
cylinder{<krok,a*cosh(krok/a),0>,(krok)*x,r/2 pigment{color rgb Yellow}}
camera{orthographic location<0,2*a,-2*a> look_at <0,a,0>}
light_source{<a/2,0,-a/2> color rgb .7}
light_source{-100*z color rgb .5 shadowless}
background{color White}
```

Vinutý sloupek

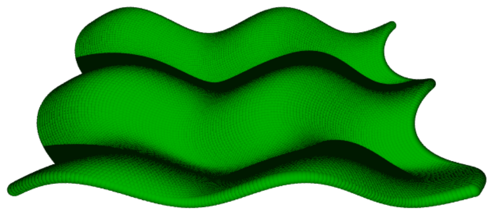
Je to plocha, kterou vytvoří kružnice při šroubovém pohybu.



```
camera{location< 0, 20, −25 > look_at< 0, 10, 0 >}
light_source{< 0, 10, −25 > color rgb 1}
background{color rgb< 1, 1, 1 >}

// vytvorime kruznici z kulicek, mohli bychom pouzit i elipsu
#declare kruh = union{
        #declare krok = 0;
        #while (krok < 48)
                sphere{< 3 ∗ cos(krok), 0, 3 ∗ sin(krok) >, 1 }
                #declare krok= krok+1;
        #end
        }

// kruznice nechame sroubovat kolem osy y, nastavime i barevny posun
#declare krok = 0;
#while (krok < 20)
        object{kruh translate< cos(krok/2), krok, sin(krok/2)¿ pigment{color rgb< 1 − krok/20, krok/20, 0 >}}
        #declare krok= krok+1;
#end
```

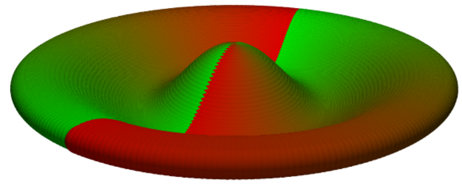
8.4.4 Úlohy k procvičení

1. Zvlněná plocha



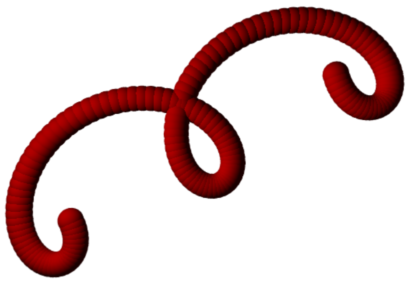
plocha vytvořená z kuliček pomocí funkcí sinus, cosinus a posunutí

2. Miska



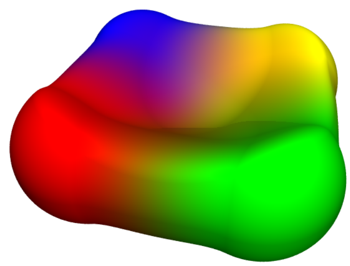
plocha vytvořená z kuliček pomocí funkce cosinus a rotace

3. Cykloida



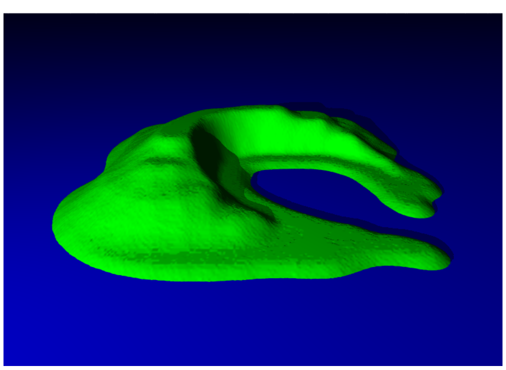
křivka s parametrizací
$c = [rt + d cos(t), r - d sin(t)]$

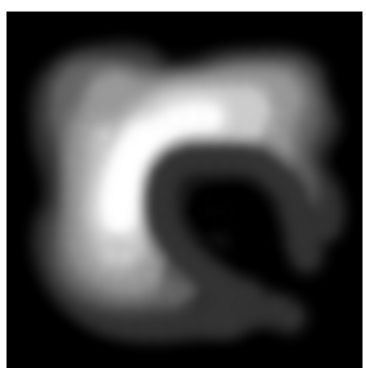
4. Blob



implicitní plocha vytvořená z pěti koulí (8.1.5 2. Pyramida z koulí)

5. Ostrov





ostrov vytvořený pomocí výškového pole z obrázku vlevo (případně si vytvořte vlastní podklad)

8.5 Animace

PovRAY nemá nástroje na vytvoření ucelené animace, umí pouze pomocí proměnné **clock** vytvořit sekvenci po sobě jdoucích snímků, které je nutné do výsledné animace spojit v dalším programu (MS Gif Animator, GifWcx plugin pro Total Commander, atd.)
Pro řízení animace využijeme externí .ini soubor, kterým nahradíme obvyklý quikers.ini, který je volán automaticky.

Ukázkový anim.ini

```
[800x600, AAF,anim]   //hlavicka - obsahuje libovolné indentifikacni udaje, nepovina
Width=800             //sirka generovaných snimku v pixelech
Height=600            //vyska generovanych snimků v pixelech
Antialias=On          //vyhlazovani hran - on x off - zapnute zlepsuje vzhled objektu, ale zvysuje narocnost
Initial_Frame=1       //cislo prvniho snimku
Final_Frame=20        //cislo posledniho snimku
Initial_Clock=0       //pocatecni hodnota promene clok
Final_Clock=1         //koncova hodnota promene clok
```

8.5.1 Animace jedním směrem

Synchronizace dvou pohybů - posuvného ve směru osy x a totačního kolem osy z.

scena.pov

```
#include "colors.inc"
camera{location <5, 5, -10> look_at <5.0, 1.0, 0.0>}
light_source{<-30, 15, -30> color rgb 1}
light_source{<50, 15, -30> color rgb .7 shadowless}
background{color Blue}
plane{y, -1 pigment{color rgb Green}}

cylinder{<0, 0, 0>, <0, 0, -1>, 1
    pigment{checker White Black}
    rotate -clock*360*z
    translate 2*pi*clock*x
   }
```

anim.ini

```
[160x120, AAF,anim]
Width=160
Height=120
Antialias=On
Initial_Frame=1
Final_Frame=10
Initial_Clock=0
Final_Clock=1
```

8.5.2 Animace s návratem - #if-#else

Synchronizace dvou pohybů - posuvného ve směru osy x a totačního kolem osy z. Rozdělíme animaci na dvě části podmínkou #if-#else, při tomto způsobu členění animace na víc částí dochází k nepřehlednému zanořování podmínek.

scena.pov

```
#include "colors.inc"
camera{location <5,5,-10> look_at <5.0,1.0,0.0>}
light_source{<-30,15,-30> color rgb 1}
light_source{<50,15,-30> color rgb .7 shadowless}
background{color Blue}
plane{y, -1 pigment{color rgb Green}}

#if ( clock <= 1 )
    cylinder{<0,0,0>,<0,0,-1>,1
        pigment{checker White Black}
        rotate -clock*360*z
        translate 2*pi*clock*x
        }

#else
    #declare Elseclock = clock-1;
    cylinder{<0,0,0>,<0,0,-1>,1
        pigment{checker White Black}
        rotate Elseclock*360*z
        translate 2*pi*x
        translate -2*pi*Elseclock*x
        }
#end
```

anim.ini

```
[160x120, AAF,anim]
Width=160
Height=120
Antialias=On
Initial_Frame=1
Final_Frame=20
Initial_Clock=0
Final_Clock=2
```

8.5.3 Animace s návratem - framenumber

Synchronizace dvou pohybů - posuvného ve směru osy x a totačního kolem osy z. Rozdělíme animaci na dvě části pomocí proměné **framenumber**, při tomto způsobu členění animace na víc částí je potřeba na začátku přesně určit počet snímků nutných pro každou fázi, další úpravy mohou být velmi nepřehledné.

scena.pov

```
#include "colors.inc"
camera{location < 5, 5, −10 > look_at < 5.0, 1.0, 0.0 >}
light_source{< −30, 15, −30 > color rgb 1}
light_source{< 50, 15, −30 > color rgb .7 shadowless}
background{color Blue}
plane{y, -1 pigment{color rgb Green}}

#switch (frame_number)
#local from_frame=1;
#local to_frame=10;
#local from_frame2=11;
#local to_frame2=20;

#range (from_frame,to_frame)
        cylinder{< 0, 0, 0 >, < 0, 0, −1 >, 1
                pigment{checker White Black}
                rotate -clock*360*z
                translate 2*pi*clock*x
               }

#break

#range (from_frame2,to_frame2)
        #declare Elseclock = clock-1;
        cylinder{< 0, 0, 0 >, < 0, 0, −1 >, 1
                pigment{checker White Black}
                rotate Elseclock*360*z
                translate 2*pi*x
                translate -2*pi*Elseclock*x
               }
#end
```

anim.ini

```
[160x120, AAF,anim]
Width=160
Height=120
Antialias=On
Initial_Frame=1
Final_Frame=20
Initial_Clock=0
Final_Clock=2
```

8.5.4 Animace pohybu řízeného křivkou

Pohyb objektu je řízen dvourozměrnou spline křivkou (definovaná ve standartním externím souboru "transforms.inc").

scena.pov

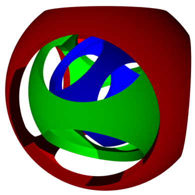
```
#include "transforms.inc"
#include "colors.inc"
camera{location <5,5,-25> look_at <10.0,1.0,0.0>}
light_source{<-30,15,-30> color rgb 1}
light_source{<50,15,-30> color rgb .7 shadowless}
background{color Blue}
plane{y, -1 pigment{color rgb Green}}

#declare valec = cylinder{<0,0,0>,<0,0,-1>,1
                  pigment{checker White Black}
                  rotate -clock*360*z
                  translate 2*pi*clock*x
                 }

#declare valec_draha= spline{
0       <0,0,0>
0.1     <1,10,0>
0.2     <2,0,0>
0.3     <3,8,0>
0.4     <4,4,0>
0.5     <5,0,0>
0.6     <6,7,0>
0.7     <7,3,0>
0.8     <8,0,0>
0.9     <9,9,0>
1       <10,4,0>
1.5     <10,4,0>
1.6     <11,0,0>
1.7     <13,4,0>
1.8     <15,9,0>
1.9     <17,4,0>
2       <18,0,0>
}

object{valec Spline_Trans( valec_draha, clock x,0,0)}
```

anim.ini

```
[160x120, AAF,anim]
Width=160
Height=120
Antialias=On
Initial_Frame=1
Final_Frame=20
Initial_Clock=0
Final_Clock=2
```

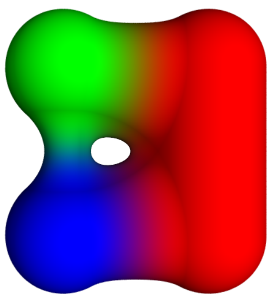
8.5.5 Úlohy k procvičení

1. Koule



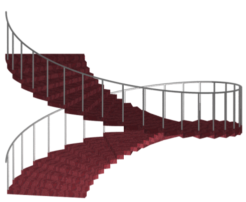
Vytvořte animaci, ve které se budou jednotlivé koule otáčet ve směru souřadných os.

2. Blob



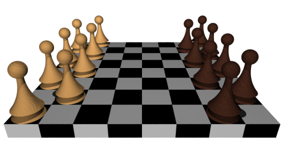
Vytvořte animaci, ve které se budou plynule měnit síly jednotlivých komponent implicitní plochy.

3. Schodiště



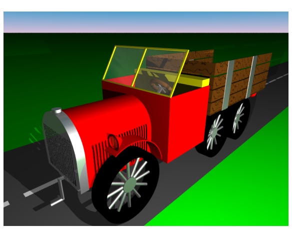
Vytvořte animaci, ve které budou postupně přibývat stupně točitého schodiště.

4. Dáma



Vytvořte animaci alespoň části partie dámy, kde pohnete s několika figurami a jednu "vyhodíte".

5. Auto



Vytvořte animaci reálného pohybu auta, kde několikrát zatočíte, zastavíte na přechodu atd. Zkuste nasvítit scénu reflektory auta.

Literatura

[1] Alois Urban. *Deskriptivní geometrie I, II*. SNTL, n. p. Praha, 1965

[2] Josef Kounovský, František Vyčichlo. *Deskriptivní geometrie pro samouky*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1953

[3] Karel Drábek, František Harant, Ota Setzer. *Deskriptivní geometrie I, II*. SNTL/ALFA, Praha, 1982

[4] Josef Kubát, Dag Hrubý, Josef Pilgr. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy*. Prometheus, s r. o., 2003

[5] Jiří Žára, Bedřich Beneš, Jiří Sochor, Petr Felkel. *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, Brno, 2004

[6] George A. Jennings. *Modern Geometry with Application*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1994

[7] Vladimír Jalůvka. *Deskriptivní geometrie pro střední školy pro pracující II.díl*. SPN, Praha, 1962

[8] Ladislav Beran, Ivana Ondráčková. *Prověřte si své matematické nadání*. SNTL, Praha, 1988

[9] Josef Šimek, Josef Schejbal, František Procházka. *Geometrie 9*. SPN, Praha, 1963

[10] Dagmar Dlouhá, František Červenka. *Solving Problems of Engineering Practice Using GeoGebra*. International GeoGebra Institute Conference 2012, Warsaw, 21-23 September 2012

[11] Dagmar Dlouhá. *První krůčky s GeoGebrou*. Sborník z 21. semináře 3mí, Ostrava, 2012

[12] Dagmar Dlouhá, Jana Volná, Petr Volný. *Simulace šikmého vrhu*. Sborník UPVM, České Budějovice, 2011

[13] Miroslav Lávička. *Kuželosečky* [online]. Dostupné z: <http://mat.fsv.cvut.cz/BAKALARI/kog/kzs/files/KuzeloseckyLavicka.pdf>

[14] Pavel Poláček. *Cyklické křivky vyšších řádů* [online]. dipl. práce ZČU Plzeň, 2011. Dostupné z: <http://theses.cz/id/507bxe/>

[15] Jiří Doležal. *Geometrie* [online]. Dostupné z: <http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Obsah.html>

[16] Jiří Doležal. *Geometrie na počítači*. Dostupné z: <http://mdg.vsb.cz/jdolezal/GnP/Pgrafika.html>

[17] Martin Vinkler. *Aplety v programu GeoGebra* [online]. Dostupné z: <http://www.gvp.cz/ vinkle/mafynet/GeoGebra/index.html>

[18] Miroslava Jarešová, Ivo Volf. *Matematika křivek* [online]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>

[19] *POV-Ray 3.6.1 Documentation* [online]. Dostupné z: <http://www.povray.org/documentation/>

GeoGebra - uživatelské příručky

[20] Judith Hohenwarter, Markus Hohenwarter. *Introduction to GeoGebra* [online]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/book/intro-en.pdf>

[21] Kristýna Stodolová. *GeoGebra* [online]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/kristyna_stodolova.sem/geogebra.html>

[22] *GeoGebra – stručný průvodce kurzem* [online]. Dostupné z: <http://www.gymkrom.cz/web/ict/materialy/GGB_strucny_pruvodce.pdf>