



---

# GEOMETRIE

Jiří Doležal

---

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů  
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016

Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického  
základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem  
a státním rozpočtem České republiky

---

**ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY**

ISBN 978-80-248-1318-9

# Obsah

<b>Obsah</b>	<b>3</b>
<b>Předmluva projektu</b>	<b>7</b>
<b>Pokyny ke studiu</b>	<b>8</b>
<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Mongeovo promítání</b>	<b>10</b>
1. Obecný úvod . . . . .	11
2. Zobrazení základních útvarů v Mongeově promítání . . . . .	13
2.1. Zobrazení bodu – princip metody . . . . .	13
2.2. Zobrazení přímky . . . . .	16
2.3. Zobrazení roviny . . . . .	21
3. Polohové úlohy v Mongeově promítání . . . . .	29
3.1. Průsečnice dvou rovin . . . . .	29
3.2. Průsečík přímky s rovinou . . . . .	32
4. Metrické úlohy v Mongeově promítání . . . . .	38
4.1. Přímka kolmá k rovině . . . . .	38
4.2. Rovina kolmá k přímce . . . . .	40
4.3. Otáčení roviny . . . . .	45
5. Procvičení základních úloh v Mongeově promítání . . . . .	51
5.1. Konstrukce přímky . . . . .	51
5.2. Konstrukce stop roviny . . . . .	55
5.3. Průsečnice dvou rovin . . . . .	60
5.4. Vzdálenost bodu od roviny . . . . .	63
5.5. Vzdálenost bodu od přímky . . . . .	67
5.6. Tečná rovina kulové plochy . . . . .	76
5.7. Konstrukce pravidelného šestiúhelníka . . . . .	82

6.	Zobrazení kružnice v Mongeově promítání . . . . .	89
7.	Konstrukční úlohy v Mongeově promítání . . . . .	97
7.1.	Pravidelný osmistěn . . . . .	97
7.2.	Kulová plocha . . . . .	116
7.3.	Rotační kužel . . . . .	124
8.	Úlohy k samostatnému řešení . . . . .	132
<b>2</b>	<b>Pravoúhlá axonometrie</b>	<b>134</b>
1.	Zobrazení základních útvarů v pravoúhlé axonometrii . . . . .	134
1.1.	Základní pojmy . . . . .	134
1.2.	Zobrazení bodu . . . . .	136
1.3.	Zobrazení přímky . . . . .	142
1.4.	Zobrazení roviny . . . . .	146
2.	Polohové úlohy v pravoúhlé axonometrii . . . . .	148
2.1.	Průsečnice dvou rovin . . . . .	148
2.2.	Průsečík přímky s rovinou . . . . .	151
3.	Zobrazení kružnice (ležící v půdorysně) v pravoúhlé axonometrii . . . . .	154
4.	Zobrazení tělesa v pravoúhlé axonometrii . . . . .	158
4.1.	Pravidelný čtyřboký jehlan . . . . .	158
4.2.	Zářezová (Eckhartova) metoda . . . . .	166
<b>3</b>	<b>Křivky</b>	<b>173</b>
1.	Kuželosečky . . . . .	173
1.1.	Elipsa . . . . .	174
1.1.1.	Definice a ohniskové vlastnosti . . . . .	174
	Konstrukce a základní pojmy . . . . .	175
	Tečny k elipse daným bodem . . . . .	184
	Tečny k elipse daného směru . . . . .	189
1.2.	Afinní vztah kružnice a elipsy . . . . .	196
1.2.1.	Trojúhelníková a proužkové konstrukce elipsy . . . . .	196

1.2.2.	Užití proužkových konstrukcí . . . . .	198
1.2.3.	Sdružené průměry kružnice a elipsy . . . . .	200
1.2.4.	Rytzova konstrukce . . . . .	200
1.3.	Hyperbola . . . . .	204
1.3.1.	Definice a ohniskové vlastnosti . . . . .	204
	Konstrukce a základní pojmy . . . . .	205
	Tečny k hyperbole daným bodem . . . . .	214
	Tečny k hyperbole daného směru . . . . .	221
1.4.	Parabola . . . . .	228
1.4.1.	Definice a ohniskové vlastnosti . . . . .	228
	Konstrukce a základní pojmy . . . . .	229
	Tečny k parabole daným bodem . . . . .	237
	Tečny k parabole daného směru . . . . .	241
	Konstrukce paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku . . . . .	244
1.5.	Řešené úlohy na ohniskové vlastnosti kuželoseček . . . . .	249
1.5.1.	Konstrukce kuželosečky z daných podmínek . . . . .	249
1.5.2.	Konstrukce paraboly z daných podmínek . . . . .	254
2.	Šroubovice . . . . .	259
2.1.	Šroubovice v Mongeově promítání . . . . .	260
3.	Úlohy k samostatnému řešení . . . . .	270
<b>4</b>	<b>Plochy</b> . . . . .	<b>273</b>
1.	Šroubové plochy . . . . .	274
1.1.	Schodová plocha v Mongeově promítání . . . . .	275
1.2.	Vývrtková plocha v Mongeově promítání . . . . .	282
1.3.	Rozvinutelná šroubová plocha v Mongeově promítání . . . . .	289
2.	Rotační plochy . . . . .	297
2.1.	Anuloid v Mongeově promítání . . . . .	298
2.2.	Rotační kvadriky . . . . .	305
2.2.1.	Rotační paraboloid v kolmém promítání na nárysnu . . . . .	305

2.2.2.	Jednodílný (zborcený) rotační hyperboloid v MP . . . . .	313
3.	Průniky ploch a těles . . . . .	320
3.1.	Rovinné řezy ploch a těles . . . . .	320
3.1.1.	Řez kosého čtyřbokého hranolu v pravoúhlé axonometrii . . . . .	320
3.1.2.	Řez prav. čtyřbokého jehlanu v pravoúhlé axonometrii . . . . .	327
3.1.3.	Řez rotačního válce v pravoúhlé axonometrii . . . . .	333
3.1.4.	Řez rotačního zploštělého elipsoidu v Mongeově promítání . . . . .	340
3.2.	Průnik přímky s plochou či tělesem . . . . .	346
3.2.1.	Průnik přímky s kosým kruhovým kuželem v PA . . . . .	346
3.2.2.	Průnik přímky s kosým kruhovým válcem v PA . . . . .	351
3.3.	Průniky rotačních ploch . . . . .	356
3.3.1.	Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta rovnoběžných os – metoda rovnoběžných rovin) . . . . .	356
3.3.2.	Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta různoběžných os – metoda soustředných kulových ploch) . . . . .	363
4.	Úlohy k samostatnému řešení . . . . .	370

# STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA

je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s.r.o. v Mostě, Univerzita obrany v Brně a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5.1.2006 a bude ukončen 4.1.2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese <http://www.studopory.vsb.cz/>.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděční, pokud nás na ně upozorníte.

**ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY**



# POKYNY KE STUDIU

Pro zvýraznění jednotlivých částí textu jsou používány ikony a barevné odlišení, jejichž význam nyní objasníme.



## Výklad

označuje samotný výklad učiva dané části.



## Řešené úlohy

označují vzorové příklady, které jsou těžištěm práce.

**Příklad:** uvádí zadání příkladu.



## Literatura

obsahuje seznam knih, které byly použity při tvorbě příslušného textu a na které byly případně uvedeny odkazy k hlubšímu prostudování tématu.

## Úvod

- předkládaný studijní materiál je spíše sbírkou komfortně řešených úloh než souvislým učebním textem
- jednotlivé úlohy jsou přitom až na výjimky řešeny metodou krok po kroku, tj. od zadání až po řešení je vyrýsována série několika obrázků opatřených vysvětlujícím komentářem
- učební látka je rozdělena do čtyř částí: Mongeovo promítání, Pravoúhlá axonometrie, Křivky a Plochy; na začátku každé části je uveden její tematický obsah, jen ve stručnosti a heslovitě je připojena příslušná teorie
- na webových stránkách projektu (<http://www.studopory.vsb.cz/>) lze najít interaktivní verzi těchto materiálů včetně virtuálních 3D modelů ke stereometrickým úlohám a další aktuální informace
- v originále jsou všechny obrázky provedeny barevně, což výrazně přispívá k jejich přehlednosti; při černobílém tisku se tato vlastnost nemusí zachovat, zvláště u náhledů pořízených z virtuálních 3D modelů

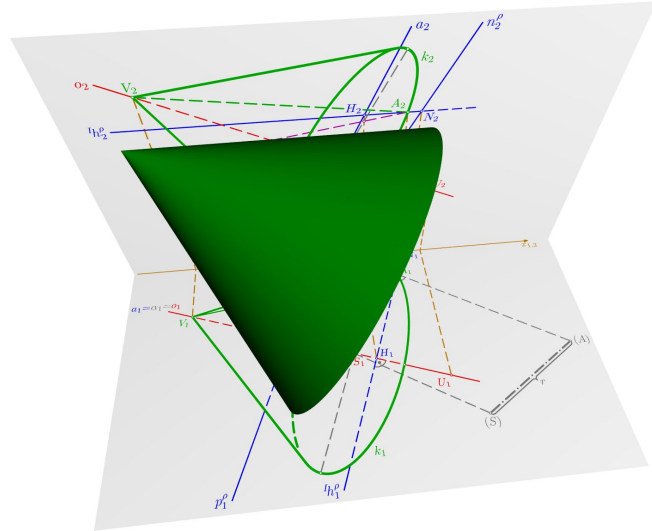
# Mongeovo promítání

## Tematický obsah

- Zobrazení základních útvarů
  - Zobrazení bodu, Zobrazení přímky, Zobrazení roviny
- Polohové úlohy
  - Průsečnice dvou rovin, Průsečík přímky s rovinou
- Metrické úlohy
  - Přímka kolmá k rovině, Rovina kolmá k přímce, Otáčení roviny
- Procvičení základních úloh
  - Konstrukce přímky, Stopy roviny, Průsečnice dvou rovin, Vzdálenost bodu od roviny, Vzdálenost bodu od přímky, Tečná rovina kulové plochy, Pravidelný šestiúhelník
- Zobrazení kružnice
- Řešené konstrukční úlohy
  - Pravidelný osmistěn, Kulová plocha, Rotační kužel
- Úlohy k samostatnému řešení

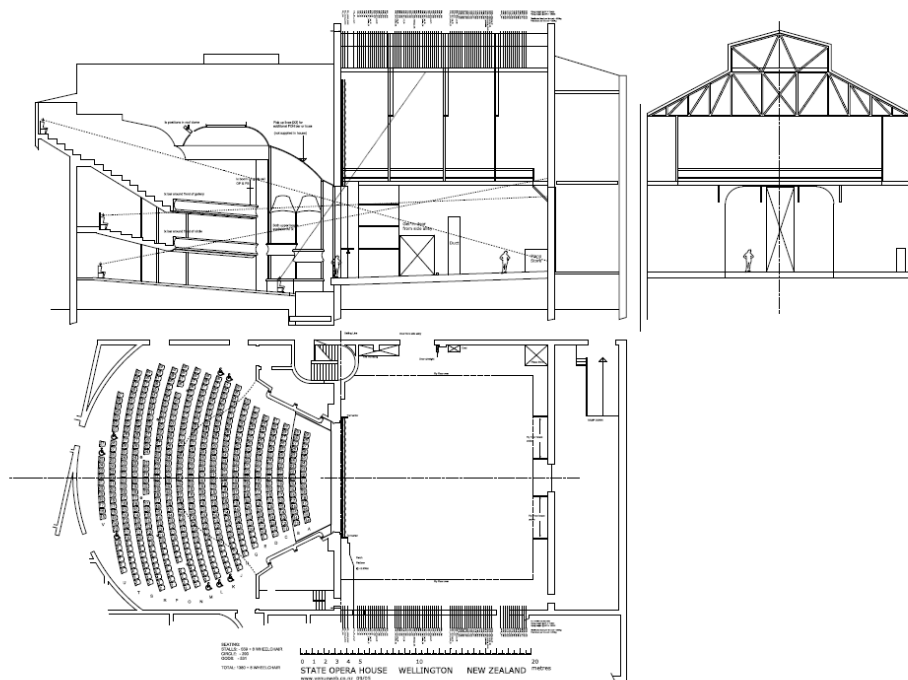
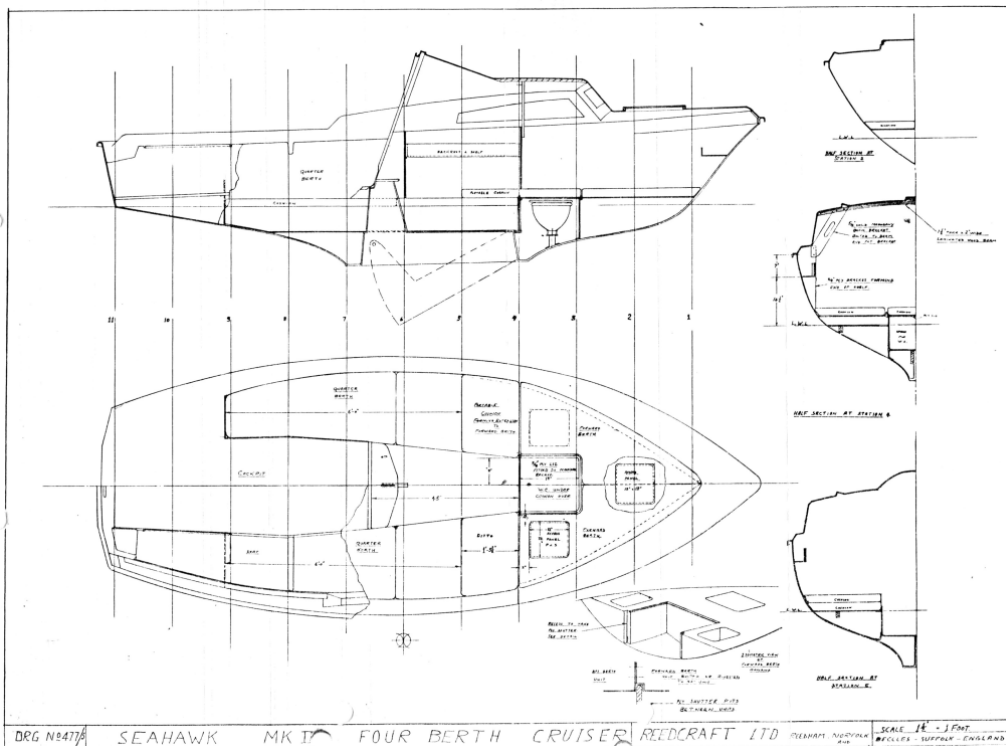
# 1. Obecný úvod

## Výklad



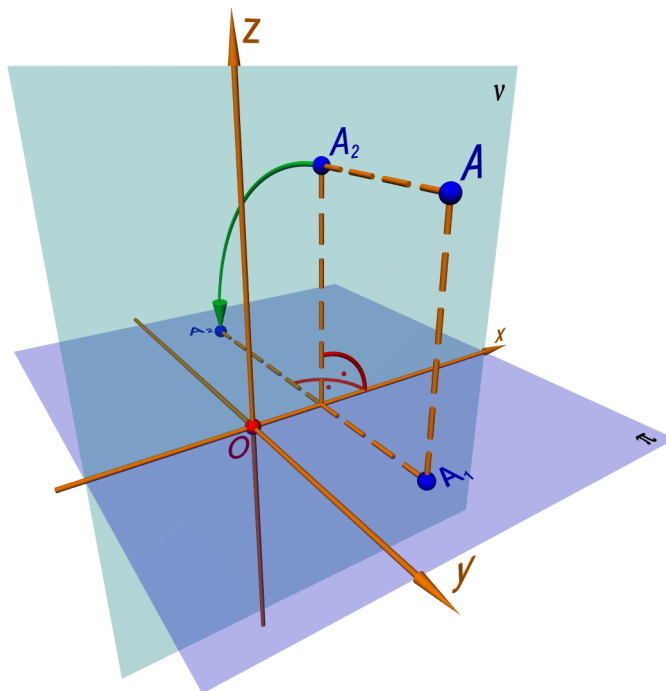
- francouzský geometr a inženýr **Gaspard Monge** (1746–1818), po němž je promítání pojmenováno, je považován za zakladatele novodobé **deskriptivní geometrie**
- Mongeovou metodou sdruženého půdorysu a nárýsu lze poměrně snadno řešit rozmanité typy konstrukčních úloh, zejména metrických
- tato relativní jednoduchost je ovšem často **na úkor názornosti**
- zobrazení pomocí Mongeova promítání nachází užití v různých modifikacích především v technických oborech, kde je potřeba z obrazů prostorových objektů jednoduše zjistit jejich rozměry a případně další vzájemné vztahy

Ukázky použití ve strojní a stavební praxi



## 2. Zobrazení základních útvarů v Mongeově promítání

### 2.1. Zobrazení bodu – princip metody



#### Výklad



- v **Mongeově promítání** je každý bod nejprve pravouhle promítnut do půdorysny  $\pi$  a nárýsny  $\nu$  – tj. je sestrojen jeho **půdorys** a **nárýs**
- následuje sklopení (otočení o  $90^\circ$ ) jedné průmětny do druhé kolem osy  $x$  – tzv. **sdružení průměten** (po otočení směřují kladné směry os  $y, z$  na opačné strany)
- tím je každému bodu v prostoru jednoznačně přiřazena dvojice bodů v rovině – tzv. **sdružené průměty**, jejichž spojnice je kolmá k ose  $x$  a říká se jí **ordinála**
- je-li dán bod  $A$  o souřadnicích  $[x_A; y_A; z_A]$ , pak příslušná ordinála protíná osu  $x$  v bodě  $x_A$  a půdorys  $A_1$  resp. nárýs  $A_2$  leží ve vzdálenosti (orientované)  $y_A$  resp.  $z_A$  od osy  $x$  (viz následující příklad)

**Řešené úlohy**

**Příklad:** Sestrojte sdružené průměty bodu  $A[1; 2; 3]$ .

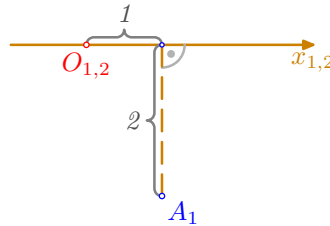
- vodorovně zvolme osu  $x$ , kladný směr ukazuje doprava, a na ní počátek  $O$ ; oba útvary leží současně v půdorysně i nárýsně, proto je značíme  $x_{1,2}, O_{1,2}$



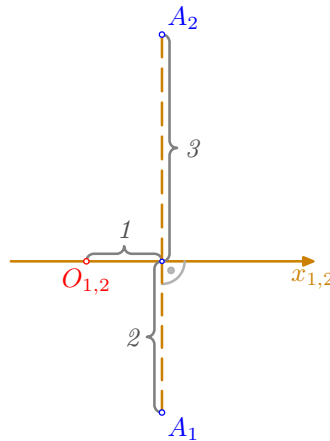
- na osu  $x$  nanesme ve zvoleném měřítku (obvykle 1 cm) a ve správném smyslu  $x$ -ovou souřadnici bodu  $A$



- kladný směr osy  $y$  ukazuje kolmo dolů a tudíž kladnou  $y$ -ovou souřadnici nanese tímto směrem a získáme tak půdorys  $A_1$  bodu  $A$

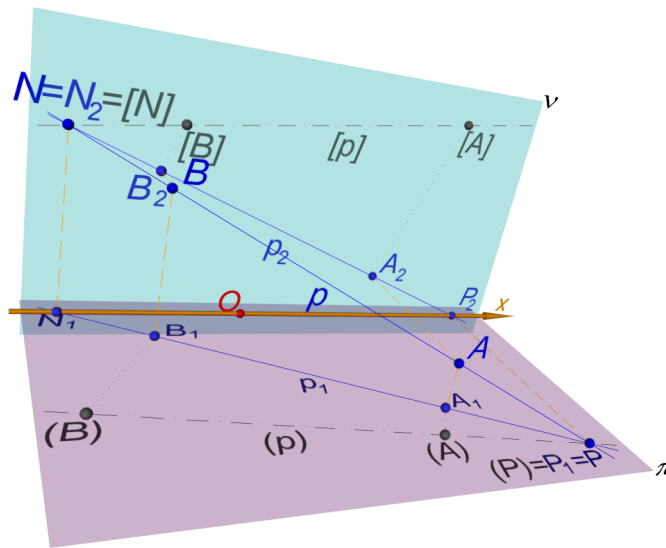


- podobně nanese kladnou  $z$ -ovou souřadnici v kladném směru osy  $z$ , tj. nahoru, a získáme nárys  $A_2$ ; oba sdružené průměty  $A_1, A_2$  bodu  $A$  tedy leží na ordinále, která je kolmá k ose  $x$ ; bod  $A$  můžeme nyní snadno vymodelovat: k tomu je vhodné přeložit papír podél osy  $x$  a vrátit nárysnu do její původní polohy kolmé k půdorysně; bod  $A$  pak leží nad svým půdorysem  $A_1$  a současně před svým nárysem  $A_2$



□

## 2.2. Zobrazení přímky



## Výklad

- sdruženými průměty přímky  $p$ , která má k oběma průmětnám obecnou polohu, je dvojice navzájem různých přímek – půdorys  $p_1$  a nárys  $p_2$
- pro lepší rekonstrukci přímky z průmětu do prostoru je užitečné najít její průsečíky s oběma průmětnami – tzv. **stopníky** přímky
- **půdorysný stopník**  $P$  je průsečíkem přímky  $p$  s půdorysnou  $\pi$ ; protože bod  $P$  leží v půdorysně, splývá se svým půdorysem  $P_1=P$  a jeho nárys  $P_2$  leží na ose  $x - z$  této podmínky lze také půdorysný stopník v průmětu nejlépe najít: průsečík přímky  $p_2$  s osou  $x$  je jeho nárys  $P_2$  a na ordinále a přímce  $p_1$  najdeme půdorys  $P_1$  bodu  $P$
- podobně je **nárysný stopník**  $N$  průsečíkem přímky  $p$  s nárysnou  $\nu$ ; splývá se svým nárysem  $N_2=N$  a jeho půdorys  $N_1$  leží na ose  $x - z$  jeho konstrukce v průmětu je tudíž obdobná: průsečík přímky  $p_1$  s osou  $x$  je půdorys  $N_1$  a na ordinále a přímce  $p_2$  najdeme nárys  $N_2$  bodu  $N$
- další často užívanou konstrukcí je tzv. **sklápění promítací roviny přímky do průmětny** - obecně jde o otočení roviny určené přímkou a jejím průmětem do průmětny

(tedy o  $90^\circ$ ); sklápět lze vždy na dvě různé strany - výběr záleží na konkrétním zadání a situaci v průmětně; sklopením lze zjistit **vzdálenost dvou bodů**, **nanést určitou vzdálenost** nebo určit **odchylku přímky od průmětny**

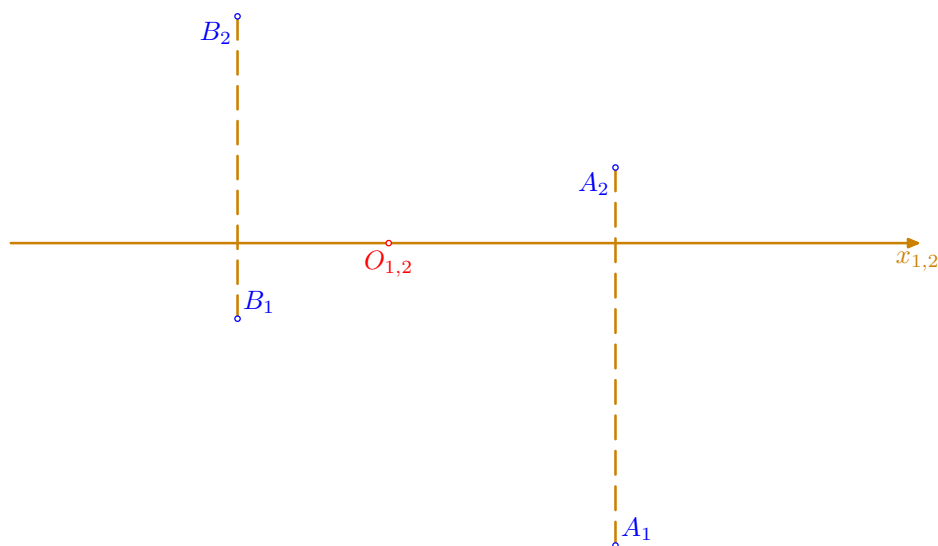
- v Mongeově promítání lze sklopit **půdorysně promítací rovinu přímky  $p$** , tj. rovinu určenou přímkami  $p, p_1$  do  $\pi$ ; v následujícím příkladě jsou tak sklopeny body  $A, B$  – jejich výška nad půdorysnou  $\pi$  je dána příslušnou  $z$ -ovou souřadnicí a objevuje se v narysu jako vzdálenost bodů  $A_2, B_2$  od osy  $x$ ; sklopené útvary se v průmětu obvykle vyznačují **čerchovaně** a značí se **v závorkách**
- podobně je možno sklopit **nárysně promítací rovinu přímky  $p$** , tedy rovinu určenou přímkami  $p, p_2$  do  $\nu$

### Řešené úlohy

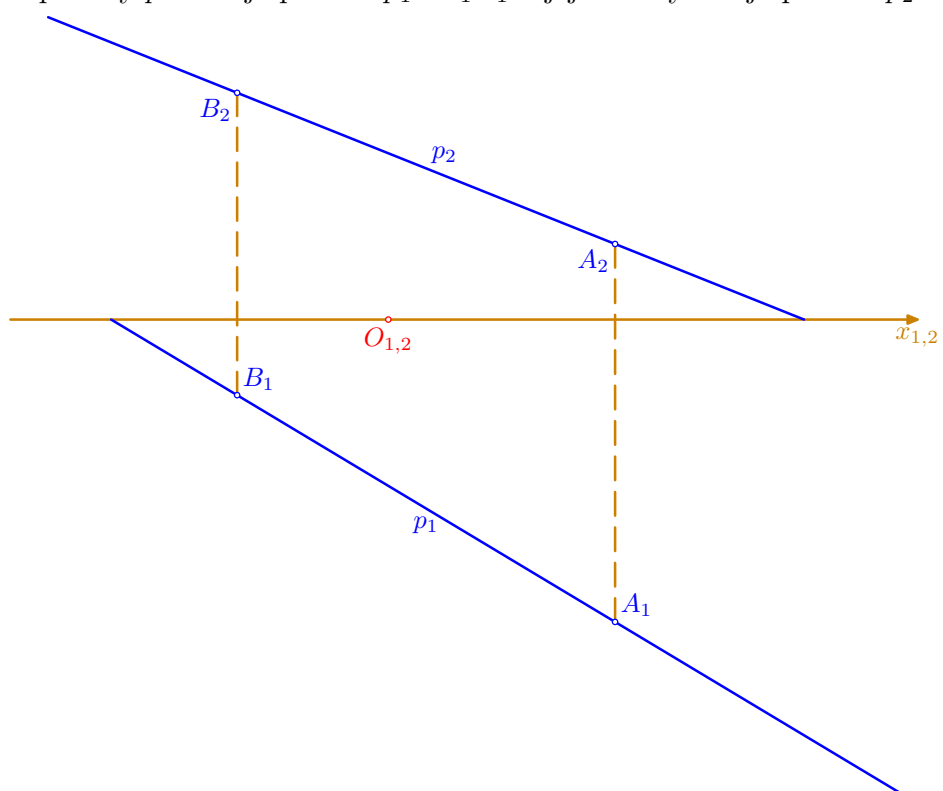
**Příklad:** Sestrojte sdružené průměty přímky  $p=AB$ ;  $A[3; 4; 1], B[-2; 1; 3]$ .



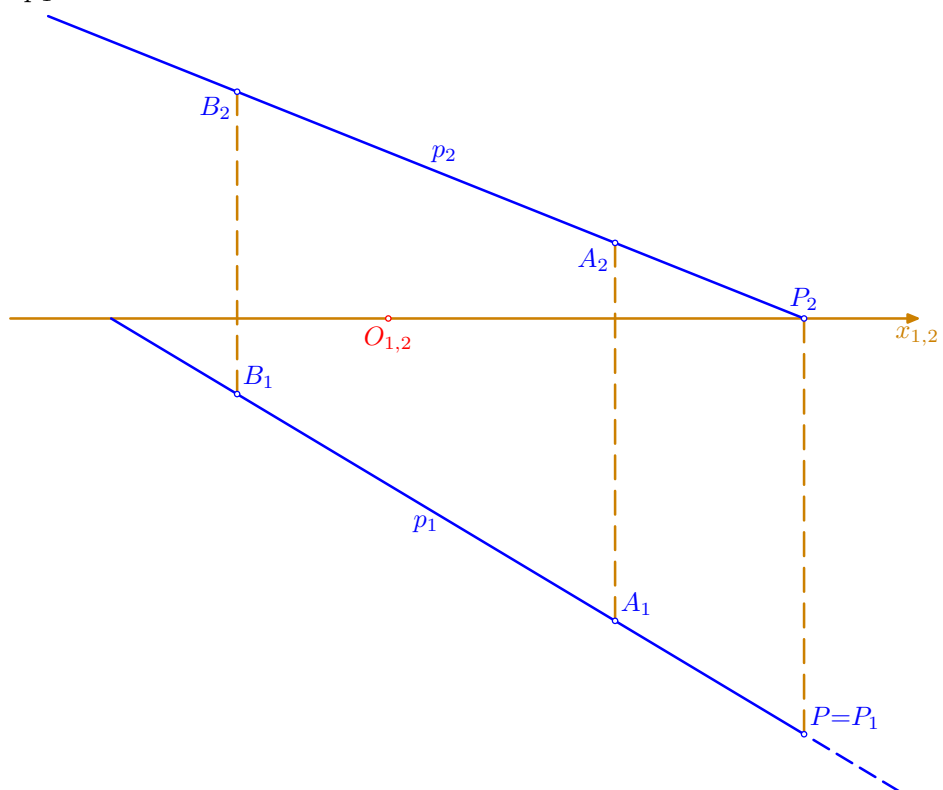
- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojíme sdružené průměty  $A_1, A_2, B_1, B_2$  bodů  $A, B$



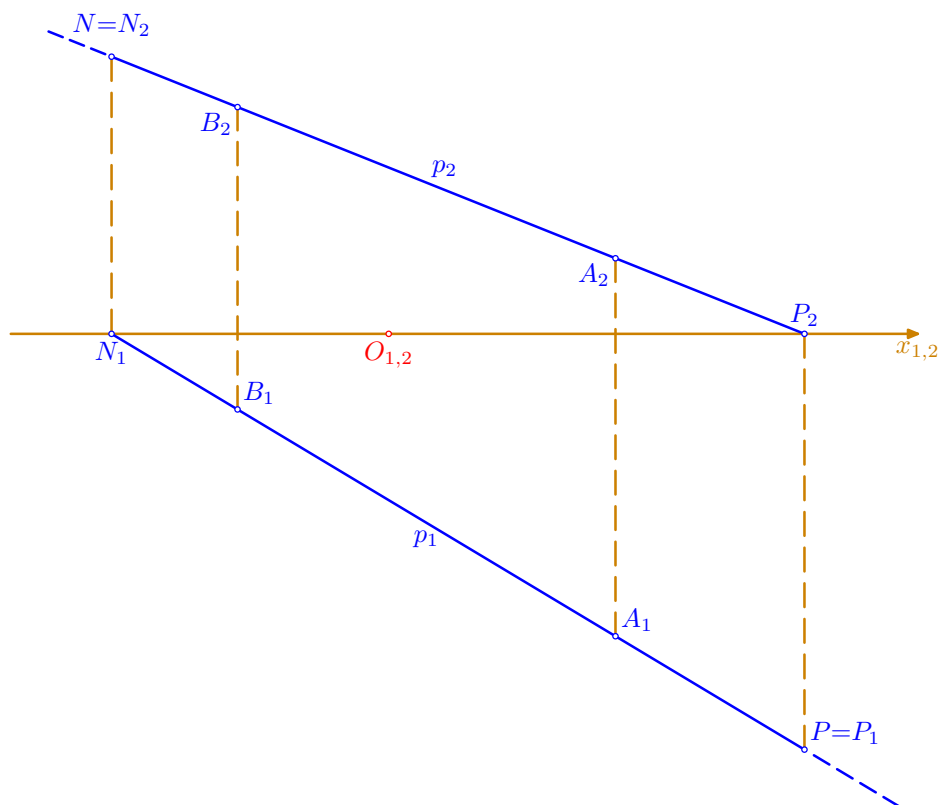
- půdorysem přímky  $p=AB$  je přímka  $p_1=A_1B_1$  a jejím nárysem je přímka  $p_2=A_2B_2$



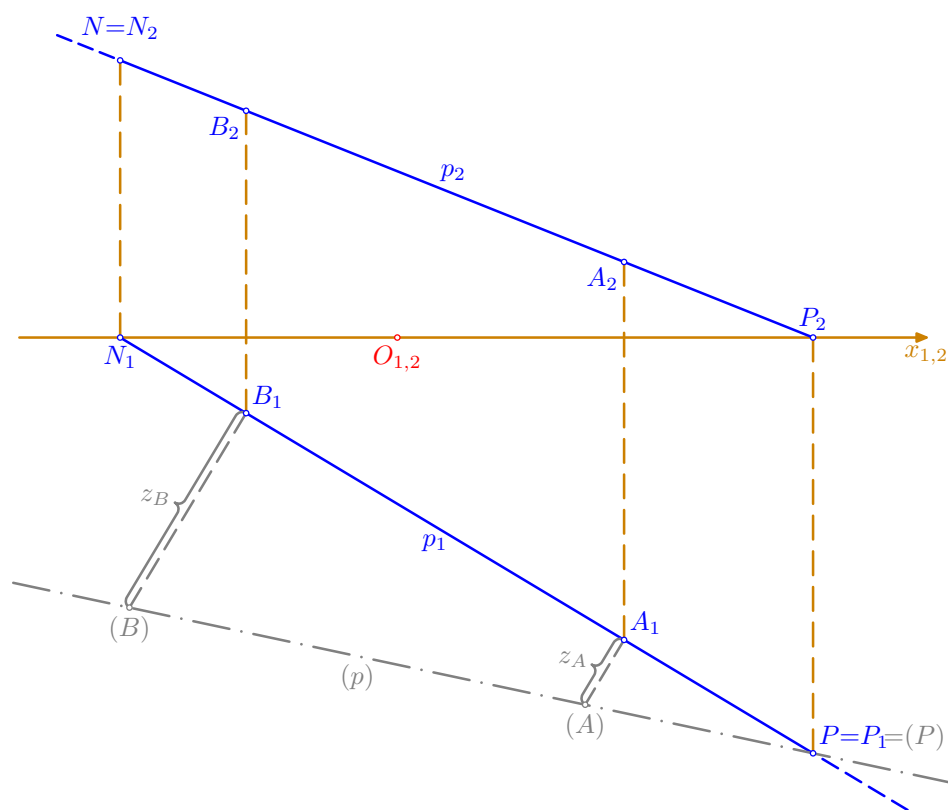
- pro nárys  $P_2$  půdorysného stopníku  $P=p \cap \pi$  platí  $P_2=p_2 \cap x_{1,2}$  a půdorys  $P_1$  najdeme na přímce  $p_1$  a na ordinále



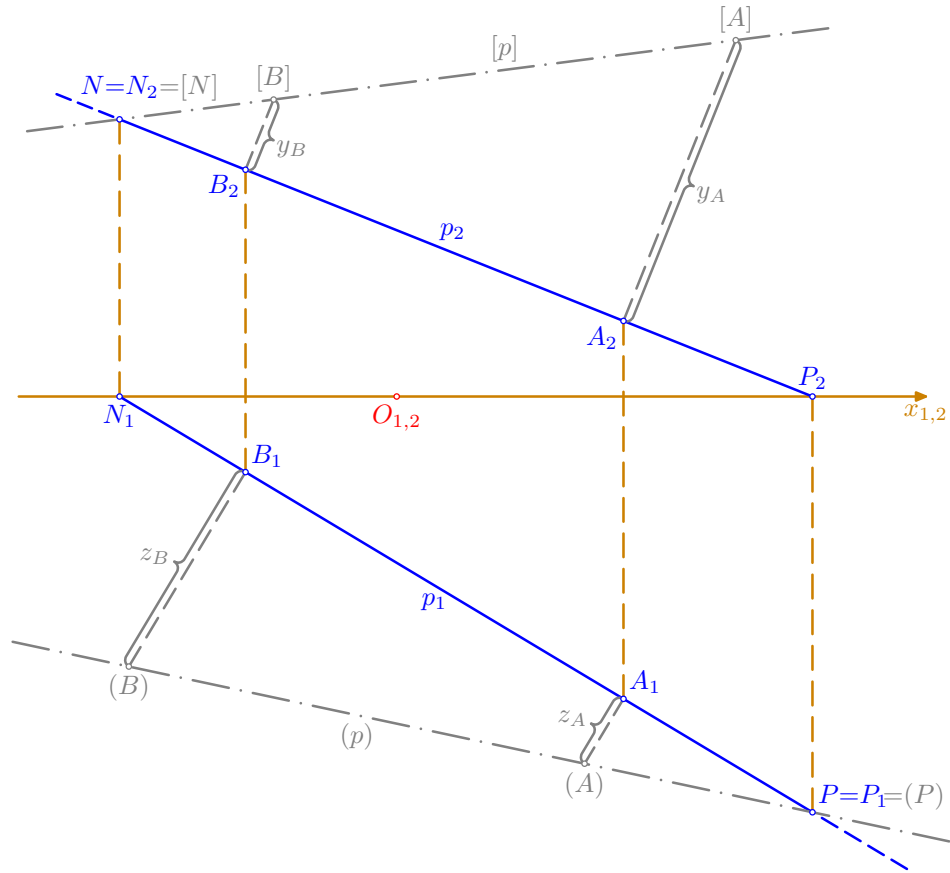
- podobně sestrojíme sdružené průměty nárysného stopníku  $N=p \cap \nu$ : platí  $N_1=p_1 \cap x_{1,2}$  a  $N_2$  leží na  $p_2$  a na ordinále



- skutečnou délku úsečky  $AB$  můžeme zjistit sklopením půdorysně promítací roviny přímkou  $p$  do  $\pi$ : sklopená poloha  $(A)$  bodu  $A$  leží na kolmici k přímce  $p_1$  vedené bodem  $A_1$  a platí  $|(A)A_1|=z_A=1$  (výška bodu  $A$  nad  $\pi$ ), podobně se sestrojí sklopená poloha  $(B)$  bodu  $B$  ( $|(B)B_1|=z_B=3$ ); tím získáme sklopenou polohu  $(p)=(A)(B)$  přímky  $p$ , skutečnou velikost úsečky  $AB$  ( $|AB|=|(A)(B)|$ ) a také odchylku přímky  $p$  od půdorysny jako velikost úhlu, který svírají přímky  $p_1, (p)$  (vrcholem tohoto úhlu je již sestrojený bod  $P=P_1=(P)$ , který při sklápění zřejmě zůstane na místě)

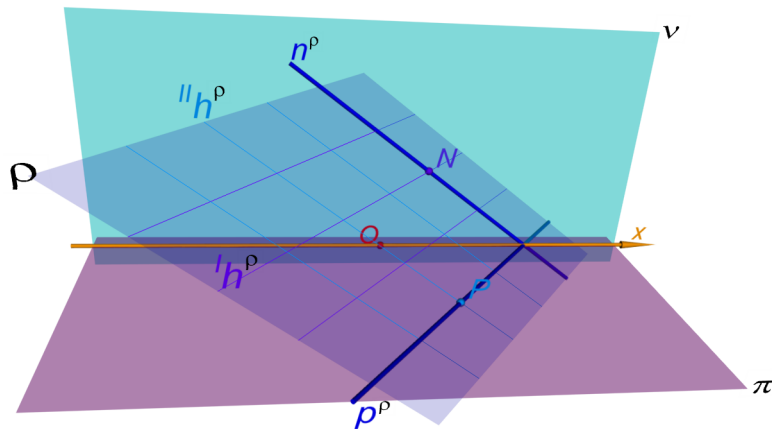


- analogicky lze sestavit sklopenou polohu  $[p]=[A][B]$  přímky  $p$  do náryсны  $\nu$ , tentokrát ovšem nanášíme  $y$ -ové souřadnice bodů  $A, B$  (tj. jejich vzdálenosti od náryсны)



□

### 2.3. Zobrazení roviny

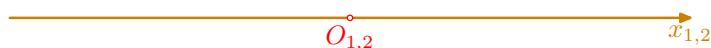




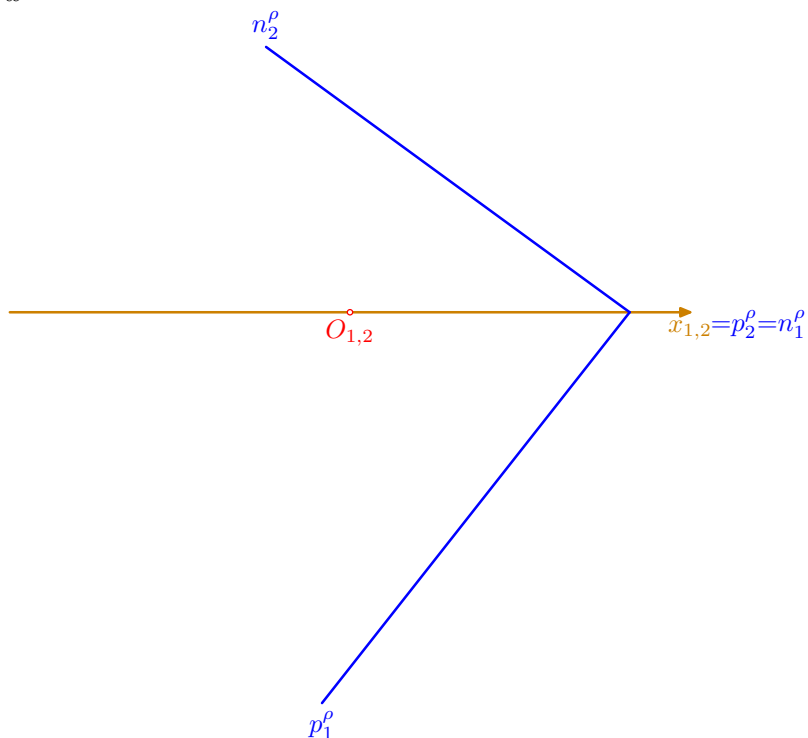
## Výklad

Stopy a hlavní přímky roviny

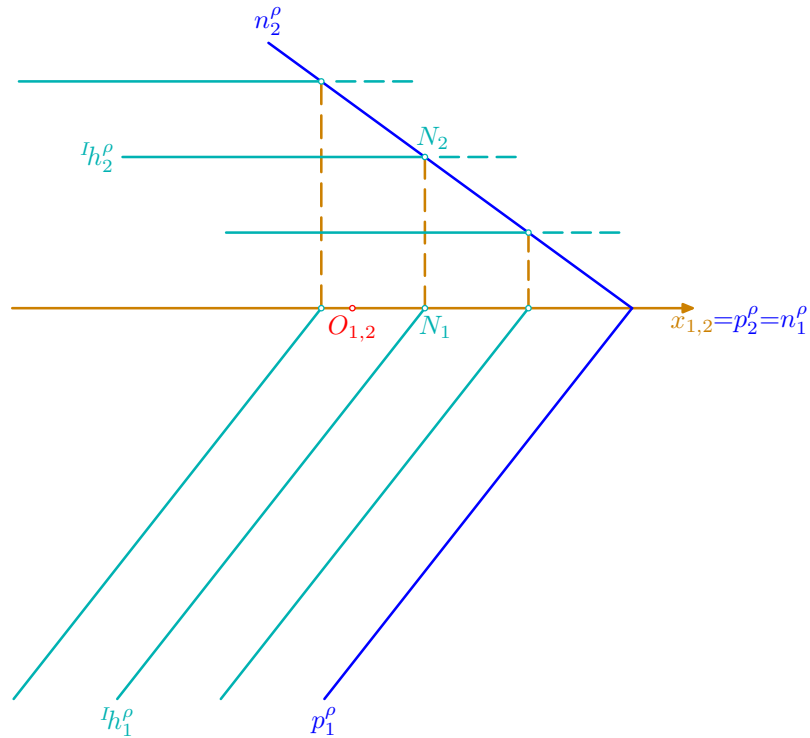
- půdorysem resp. nárysem obecně položené roviny  $\rho$  je celá půdorysna  $\pi$  resp. celá nárysna  $\nu$



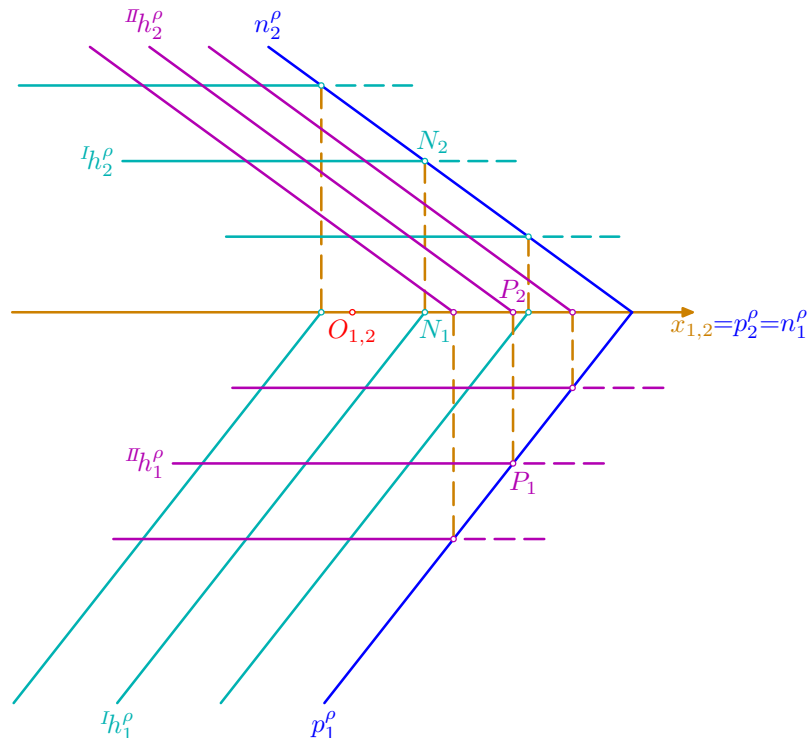
- průsečnice roviny  $\rho$  s půdorysnou (nárysnou) je tzv. **půdorysná (nárysná) stopa**  $p^\rho$  ( $n^\rho$ ) roviny  $\rho$  – splývá se svým půdorysem  $p_1^\rho$  (nárysem  $n_2^\rho$ ) a její nárys  $p_2^\rho$  (půdorys  $n_1^\rho$ ) padne na osu  $x$



- **hlavní přímky I. osnovy** roviny  $\rho$  jsou pak přímky v  $\rho$  rovnoběžné s půdorysnou stopou – jejich půdorys je rovnoběžný s  $p^\rho$  a nárys je rovnoběžka s osou  $x$



- **hlavní přímky II. osnovy** jsou přímky v  $\rho$  rovnoběžné s nárysnou stopou - jejich nárys je rovnoběžný s  $n^\rho$  a půdorys je rovnoběžka s osou  $x$

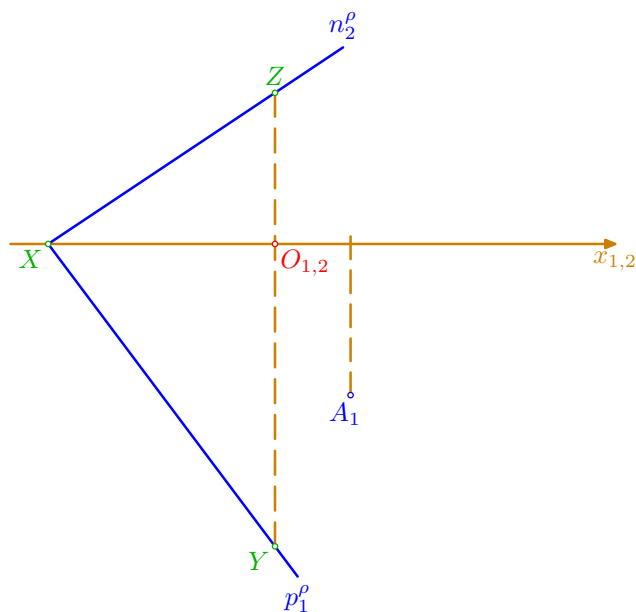




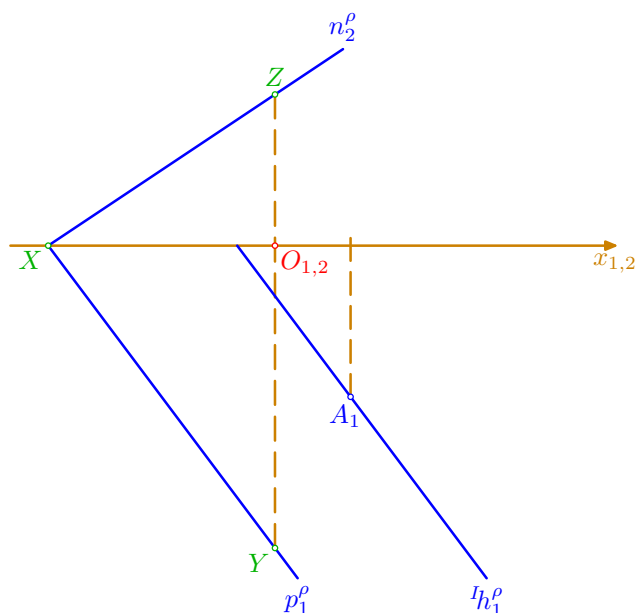
### Řešené úlohy

**Příklad:** Najděte nárys bodu  $A$  ležícího v rovině  $\rho$ ;  $\rho(-3; 4; 2)$ ,  $A[1; 2; ?]$ .

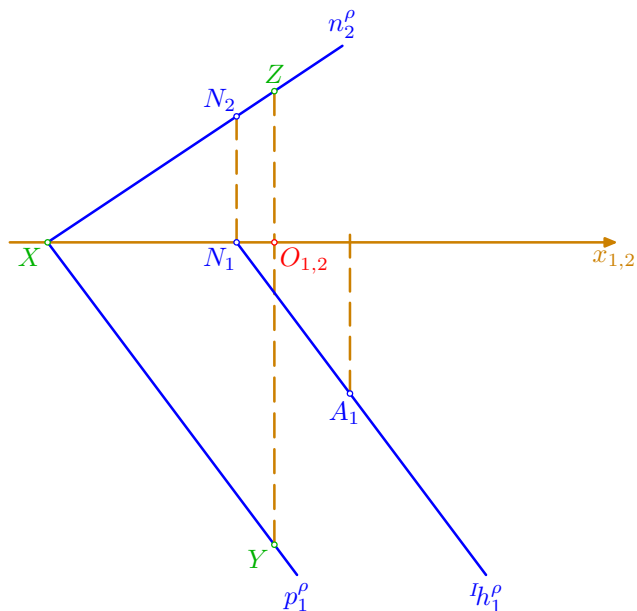
- zadání: stopy roviny  $\rho$  jsou určeny pomocí bodů  $X, Y, Z$ , kde  $p_1^\rho = XY$ ,  $n_2^\rho = XZ$ , přičemž pro souřadnice bodů  $X, Y, Z$  platí  $X[-3; 0; 0]$ ,  $Y[0; 4; 0]$ ,  $Z[0; 0; 2]$



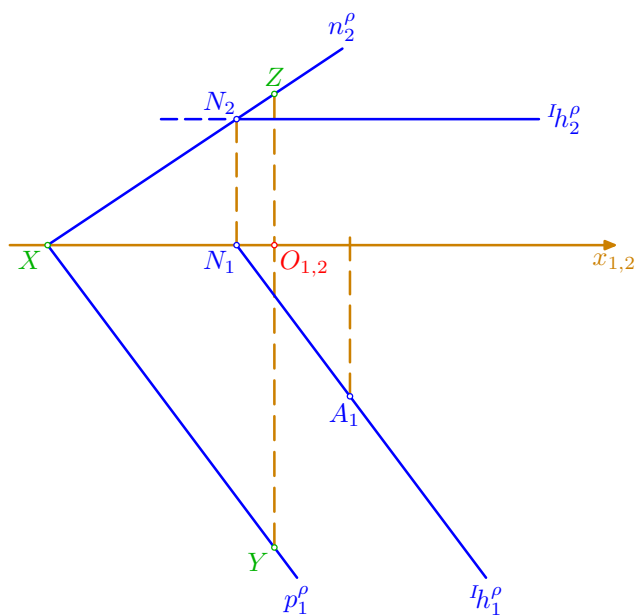
- 1. způsob řešení pomocí hlavní přímky I. osnovy roviny  $\rho$ :  $A_1 \in I h_1^\rho$ ,  $I h_1^\rho \parallel p_1^\rho$



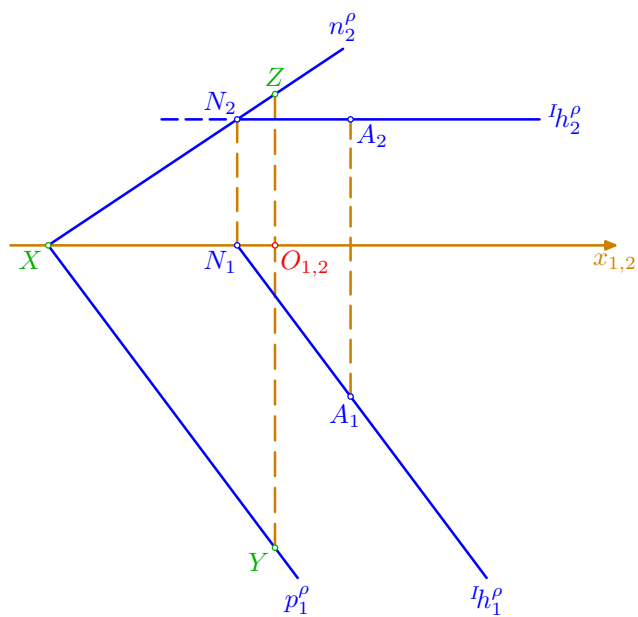
- najdeme její nárysny stopník  $N$ :  $N_1 = I h_1^p \cap x$  a  $N_2$  leží na ordinále a na stopě  $n_2^p$



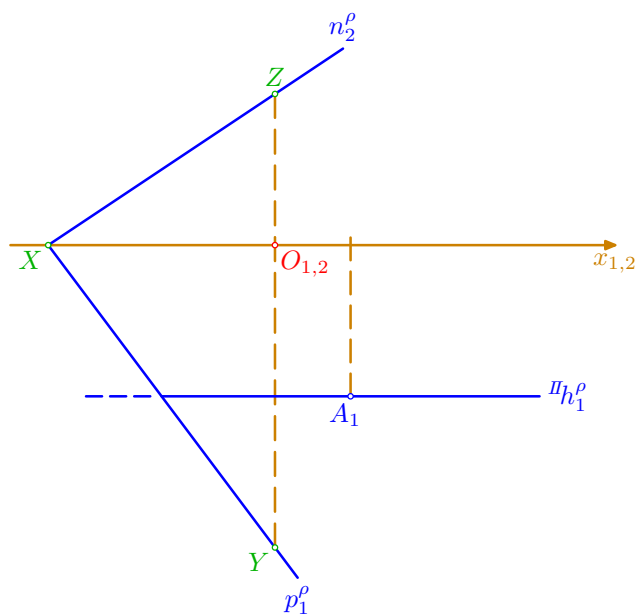
- bodem  $N_2$  pak prochází nárys  $I h_2^p \parallel x$



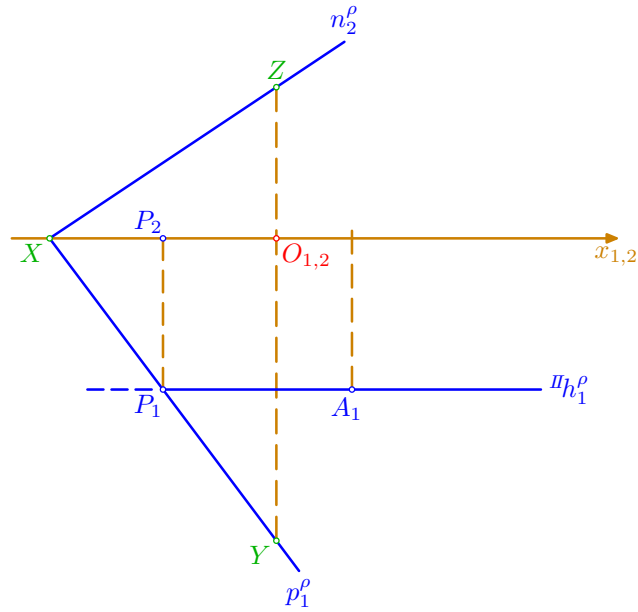
- a nárys  $A_2$  bodu  $A$  najdeme na ordinále a na  $l_{h_2}^{\rho}$



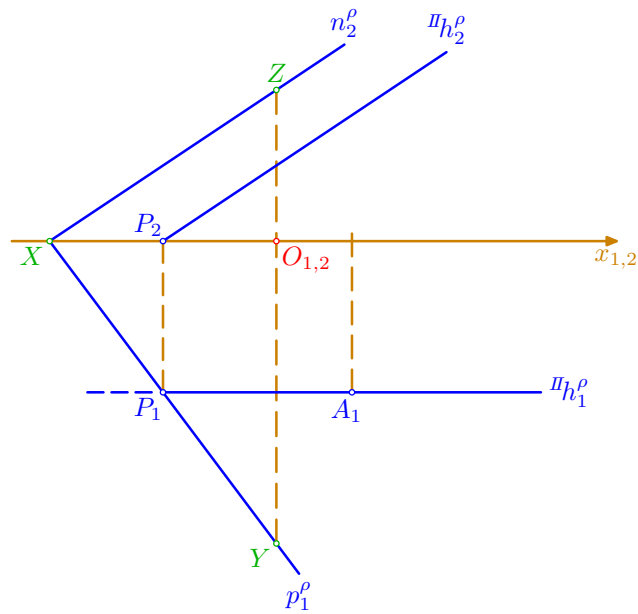
- 2. způsob řešení pomocí hlavní přímky II. osnovy:  $A_1 \in l_{h_1}^{\rho}, l_{h_1}^{\rho} \parallel x$



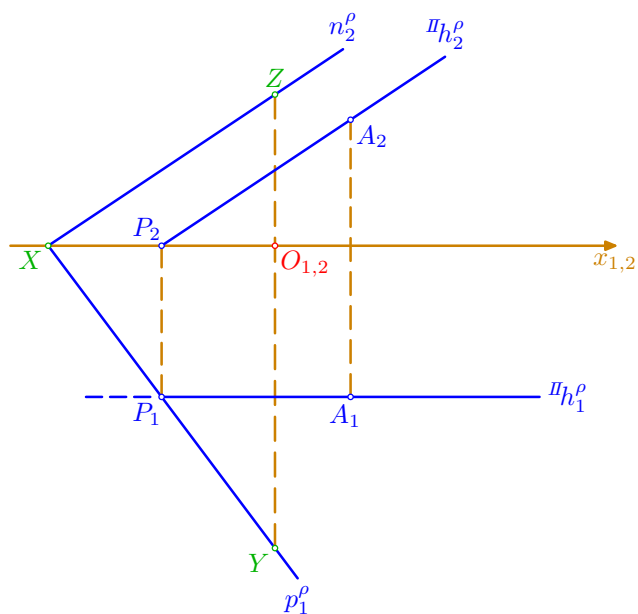
- najdeme její půdorysný stopník  $P$ :  $P_1 = \Pi_{h_1}^\rho \cap p_1^\rho$  a  $P_2$  leží na ordinále a na ose  $x$



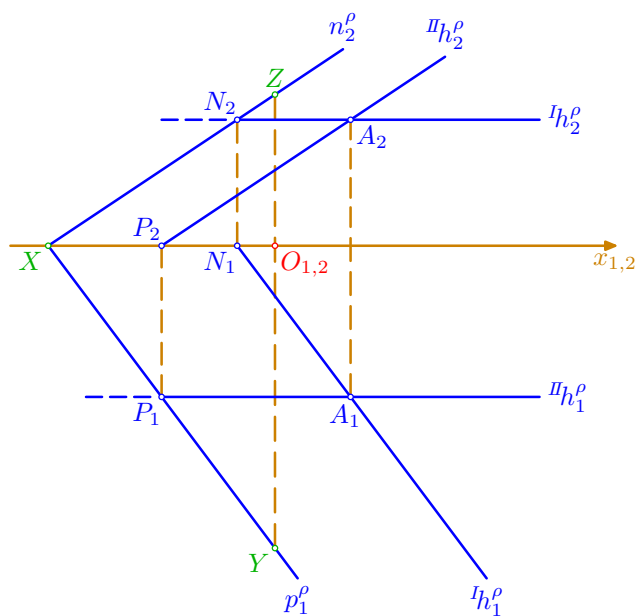
- bodem  $P_2$  pak prochází nárys  $\Pi_{h_2}^\rho \parallel n_2^\rho$



- a tím dojdeme k témuž výsledku



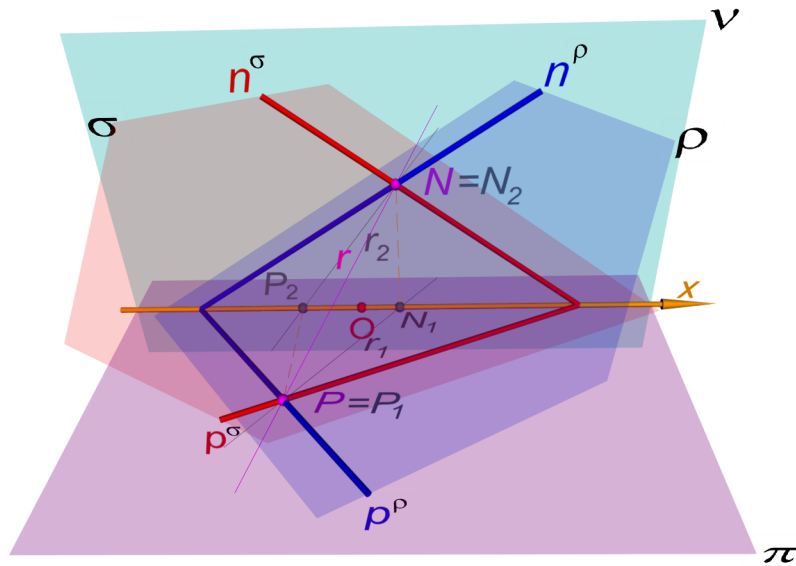
- na závěr jsou vyrýsovány oba způsoby řešení



□

### 3. Polohové úlohy v Mongeově promítání

#### 3.1. Průsečnice dvou rovin



#### Výklad



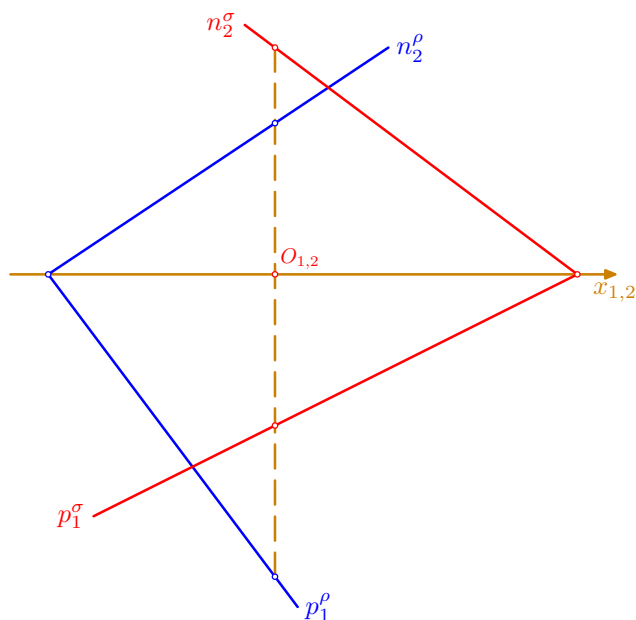
- dvě různoběžné roviny se protínají v přímce – k jejímu sestrojení tedy stačí znát dva společné body obou rovin
- v Mongeově promítání se nejčastěji užívají průsečíky půdorysných a nárysných stop, případně průsečíky hlavních přímek obou rovin ležících v některé rovině rovnoběžné s  $\pi$  nebo s  $\nu$



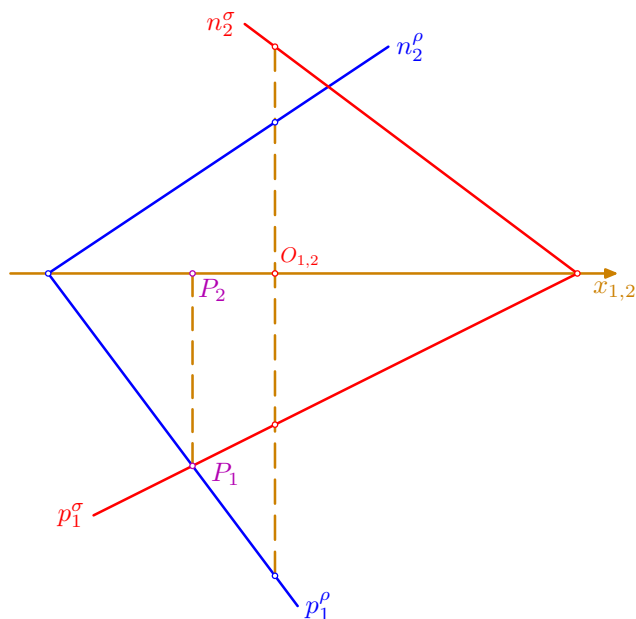
### Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte průsečnici  $r$  rovin  $\rho, \sigma$ ;  $\rho(-3; 4; 2), \sigma(4; 2; 3)$ .

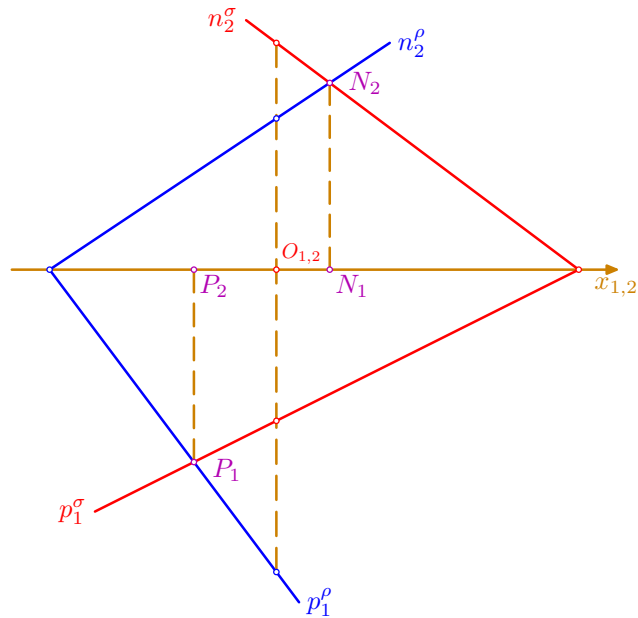
- podle zadání sestrojíme stopy  $p_1^{\rho}, n_2^{\rho}$  a  $p_1^{\sigma}, n_2^{\sigma}$  obou rovin



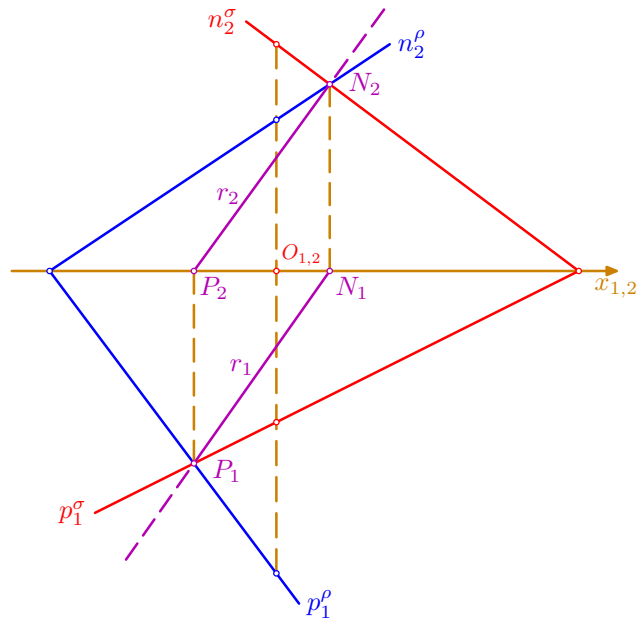
- půdorysný stopník  $P$  přímky  $r = \rho \cap \sigma$  je průsečíkem půdorysných stop – tedy  $P_1 = p_1^{\rho} \cap p_1^{\sigma}$  a nárys  $P_2$  najdeme na ordinále a na ose  $x$



- podobně pro nárysný stopník  $N$  hledané přímky  $r$  je  $N_2 = n_2^\rho \cap n_2^\sigma$  a půdorys  $N_1$  leží na ordinále a na ose  $x$

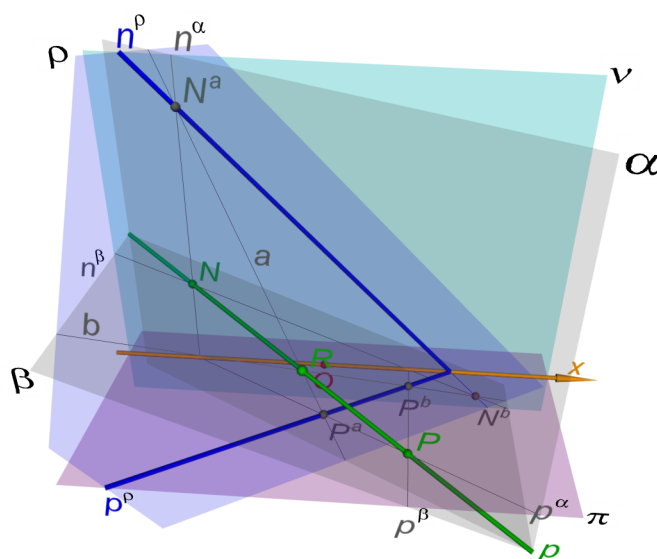


- na závěr stačí doplnit oba průměty  $r_1 = P_1 N_1$  a  $r_2 = P_2 N_2$  průsečnice  $r = PN$  rovin  $\rho$  a  $\sigma$



□

## 3.2. Průsečík přímky s rovinou



## Výklad

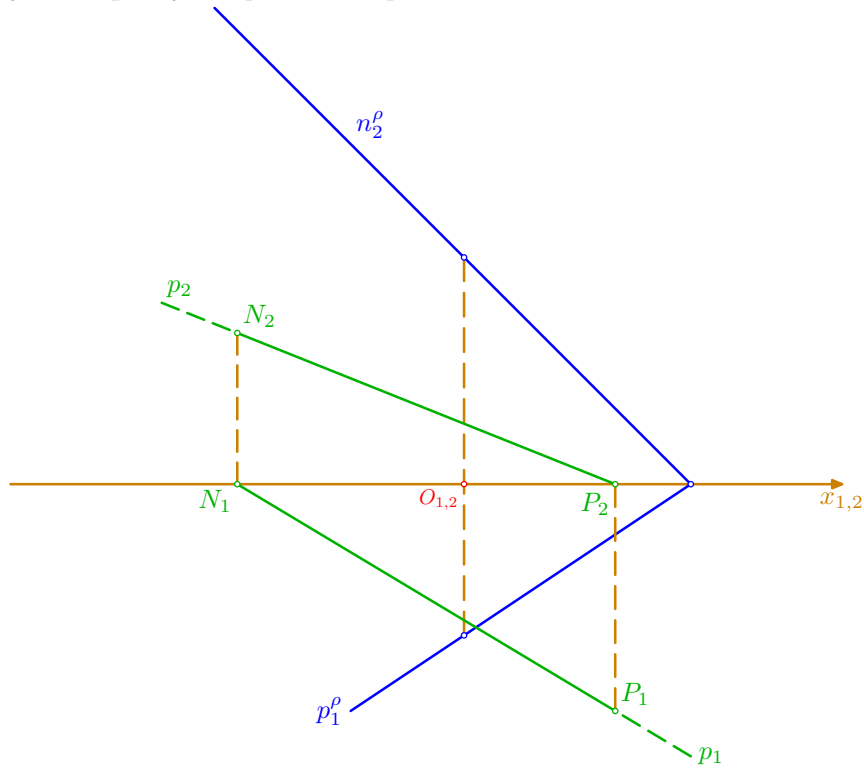
- k sestavení průmětu průsečíku dané přímky a roviny je třeba proložit zadanou přímkou **pomocnou rovinu**; obecně lze tuto rovinu volit libovolně vhodně – v Mongeově promítání se nejčastěji prokládá rovina kolmá k půdorysně  $\pi$  nebo k nárysně  $\nu$  (užívá se tím tzv. **krycí přímka**)
- je-li tedy dána přímka  $p$  a rovina  $\rho$ , proložme přímkou  $p$  rovinu  $\alpha$  ( $\beta$ ) kolmou k  $\pi$  ( $\nu$ ); průsečnice  $a$  ( $b$ ) rovin  $\rho$  a  $\alpha$  ( $\beta$ ) pak protíná přímkou  $p$  v hledaném průsečíku  $R$  přímky  $p$  s rovinou  $\rho$



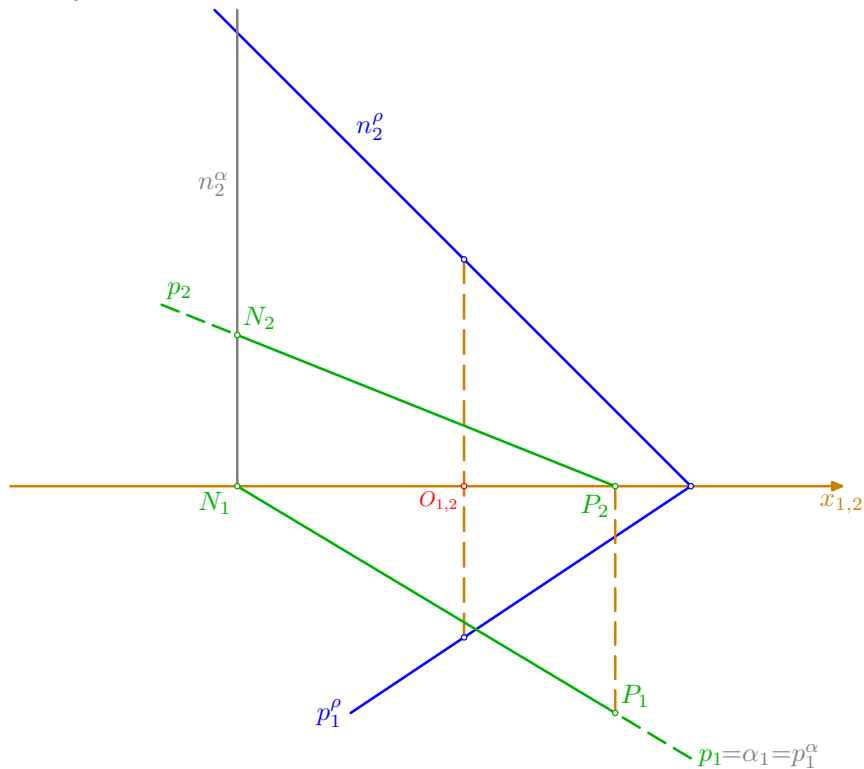
## Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte průsečík  $R$  přímky  $p=PN$  s rovinou  $\rho$ ;  $P[2; 3; 0]$ ,  $N[-3; 0; 2]$ ,  $\rho(3; 2; 3)$ .

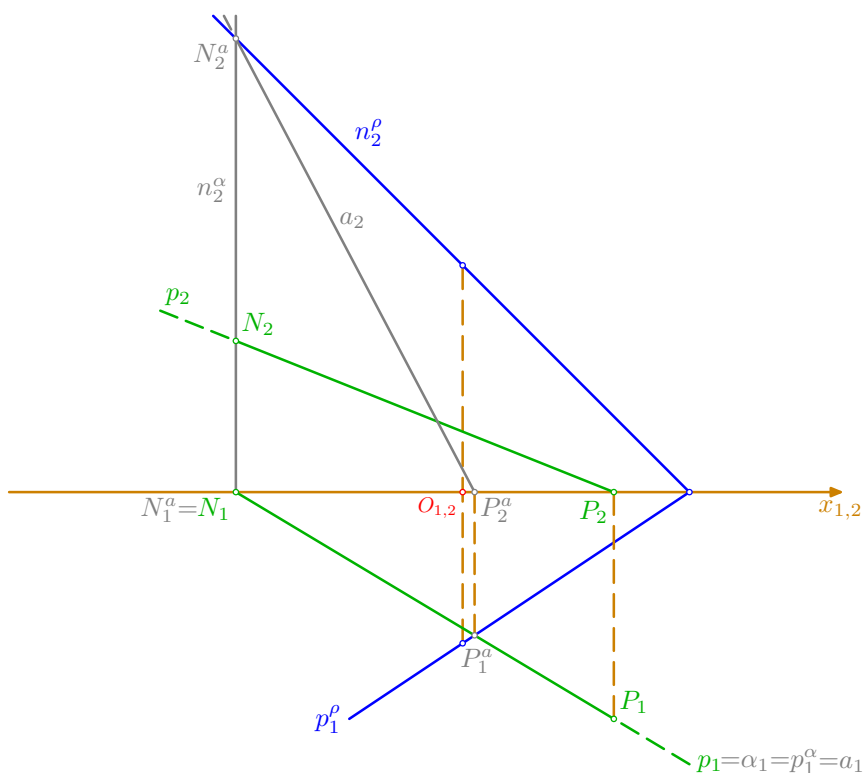
- podle zadání sestrojme stopy  $p_1^{\rho}, n_2^{\rho}$  roviny  $\rho$  a sdružené průměty  $p_1, p_2$  přímky  $p$ , která je určena svými stopníky  $P=p \cap \pi, N=p \cap \nu$



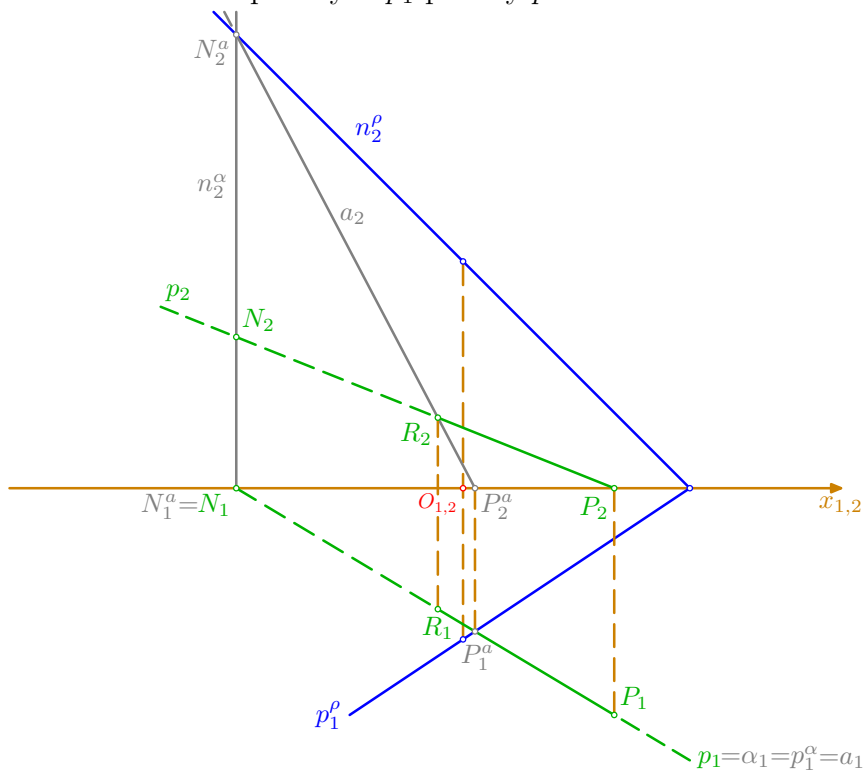
- 1. způsob řešení: přímkou  $p$  proložme rovinu  $\alpha \perp \pi$  – je tedy  $p_1 = \alpha_1 = p_1^{\alpha}, n_2^{\alpha} \perp x$  a stopy  $p_1^{\alpha}, n_2^{\alpha}$  se protínají na ose  $x$



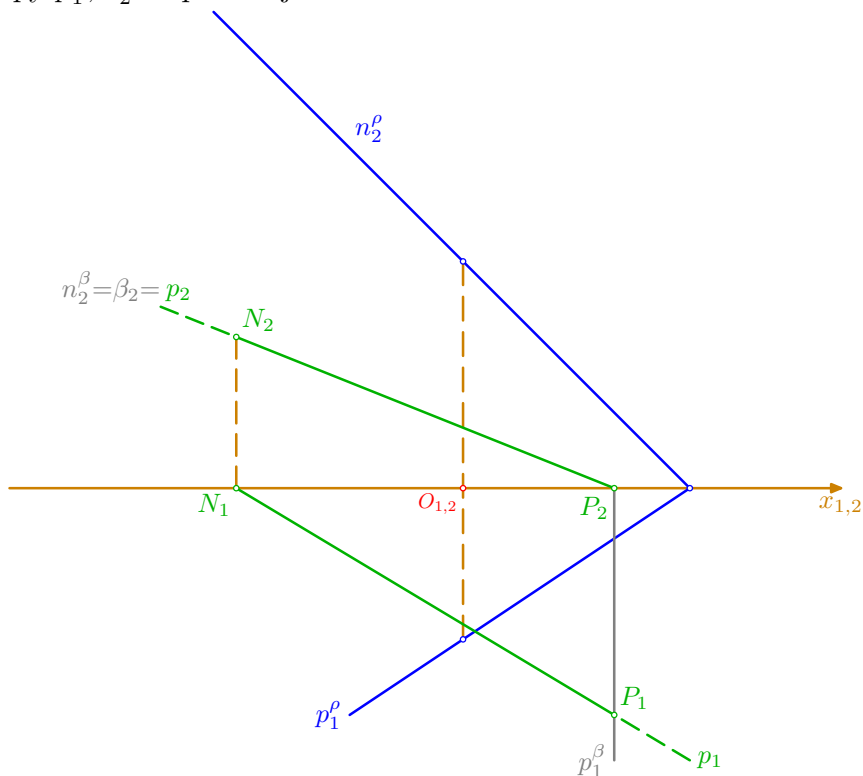
- sestrojme průsečnici  $a = P^a N^a$  rovin  $\alpha$  a  $\rho$ , kde  $P_1^a = p_1^\rho \cap p_1^\alpha$ ,  $N_2^a = n_2^\rho \cap n_2^\alpha$  a zbývající průměty  $P_2^a$  a  $N_1^a$  najdeme na ose  $x$  a příslušných ordinálách; v půdorysu se tudíž kryjí průměty přímek  $a$  a  $p$  ( $a_1 = p_1$ ) a odtud pochází název **krycí přímka**, v náryse je  $a_2 = P_2^a N_2^a$



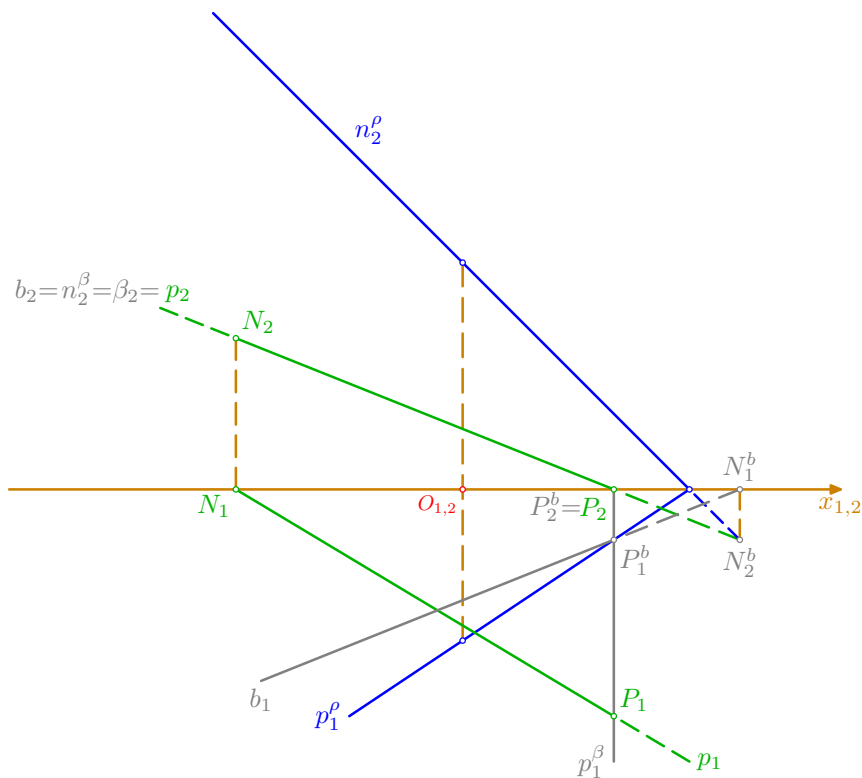
- přímky  $a, p$  se protínají v hledaném bodě  $R = p \cap \rho$ , jehož nárys je  $R_2 = a_2 \cap p_2$  a půdorys  $R_1$  najdeme na ordinále a na půdorysu  $p_1$  přímky  $p$



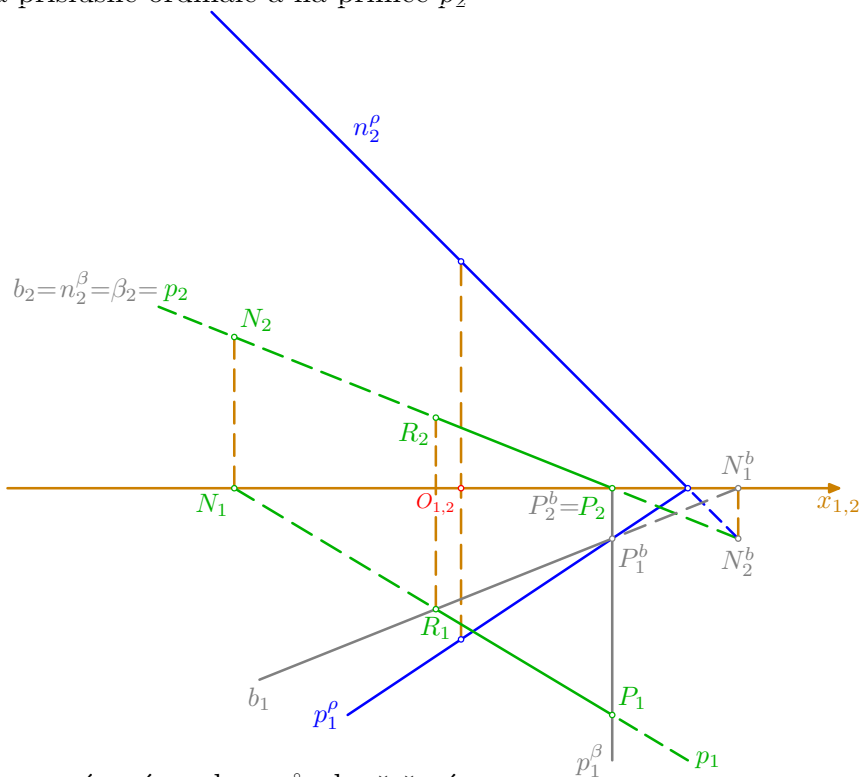
- 2. způsob řešení: analogicky proložme přímkou  $p$  rovinu  $\beta \perp \nu$  – je tedy  $n_2^\beta = \beta_2 = p_2$ ,  $p_1^\beta \perp x$  a stopy  $p_1^\beta, n_2^\beta$  se protínají na ose  $x$



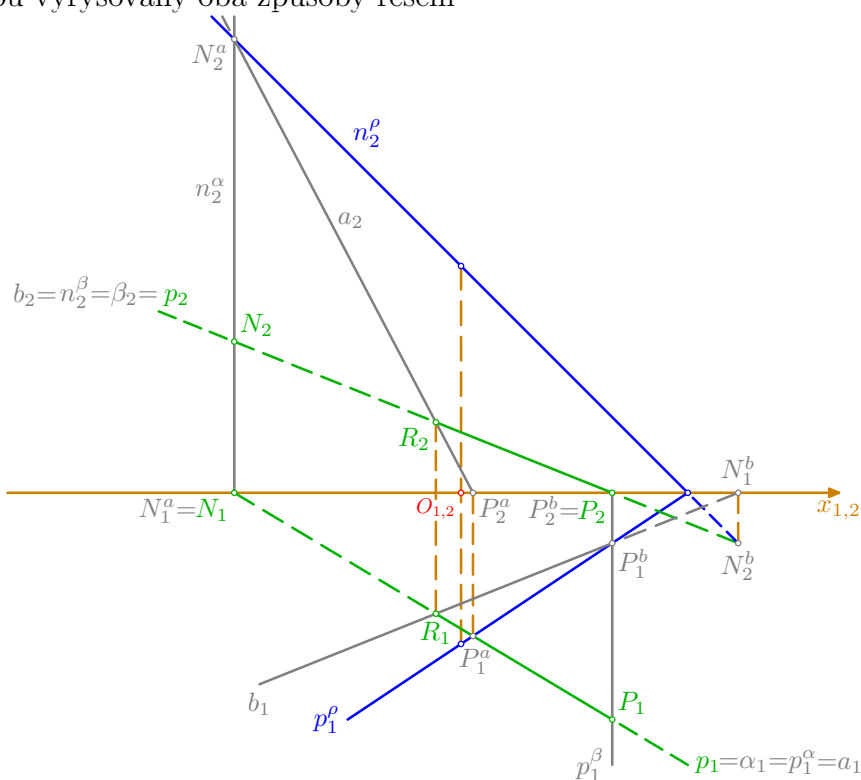
- podobně sestrojíme průsečnici  $b = P^b N^b$  rovin  $\beta$  a  $\rho$ , kde  $P_1^b = p_1^\rho \cap p_1^\beta$ ,  $N_2^b = n_2^\rho \cap n_2^\beta$  a zbývající průměty  $P_2^b$  a  $N_1^b$  najdeme na ose  $x$  a příslušných ordinálách; v nárysu se tudíž kryjí průměty přímek  $b$  a  $p$  ( $b_2 = p_2$ ), v půdoryse je  $b_1 = P_1^b N_1^b$



- tentokrát najdeme nejdřív půdorys  $R_1 = b_1 \cap p_1$  průsečíku  $R = p \cap \rho$  a pak doplníme jeho nárys  $R_2$  na příslušné ordinále a na přímce  $p_2$



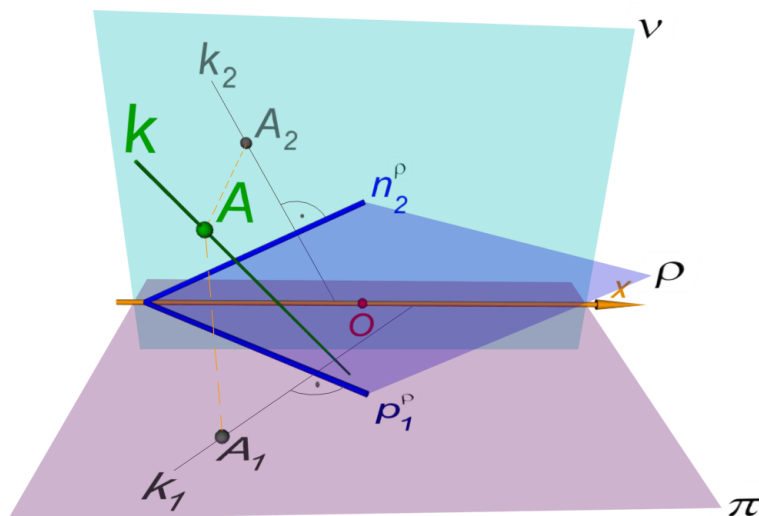
- na závěr jsou vyrýsovány oba způsoby řešení



□

## 4. Metrické úlohy v Mongeově promítání

### 4.1. Přímka kolmá k rovině



#### Výklad

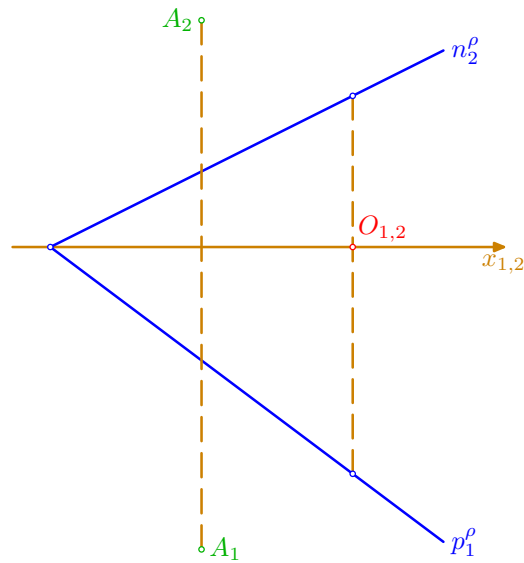
- přímka  $k$  kolmá k rovině  $\rho$  je kolmá ke všem přímkám této roviny, a tedy i k jejím stopám
- půdorysná (nárysná) stopa  $p^\rho$  ( $n^\rho$ ) roviny  $\rho$  leží v půdorysně  $\pi$  (nárysně  $\nu$ ) a podle *Věty o pravouhlém průmětu pravého úhlu* musí být půdorys  $k_1$  (nárys  $k_2$ ) přímky  $k$  kolmý ke stopě  $p^\rho$  ( $n^\rho$ ), tj.  $k \perp \rho \Rightarrow k_1 \perp p_1^\rho$  a  $k_2 \perp n_2^\rho$



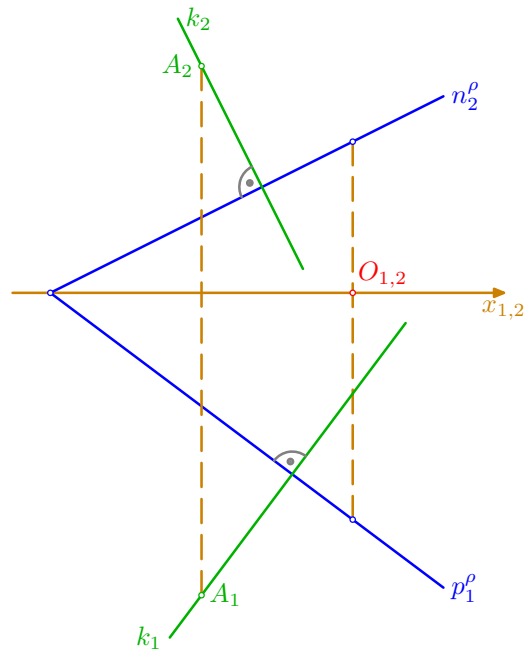
#### Řešené úlohy

**Příklad:** Bodem  $A$  veďte přímku  $k$  kolmou k rovině  $\rho$ ;  $A[-2; 4; 3]$ ,  $\rho(-4; 3; 2)$ .

- podle zadání jsou sestrojeny sdružené průměty  $A_1, A_2$  bodu  $A$  a stopy  $p_1^\rho, n_2^\rho$  roviny  $\rho$

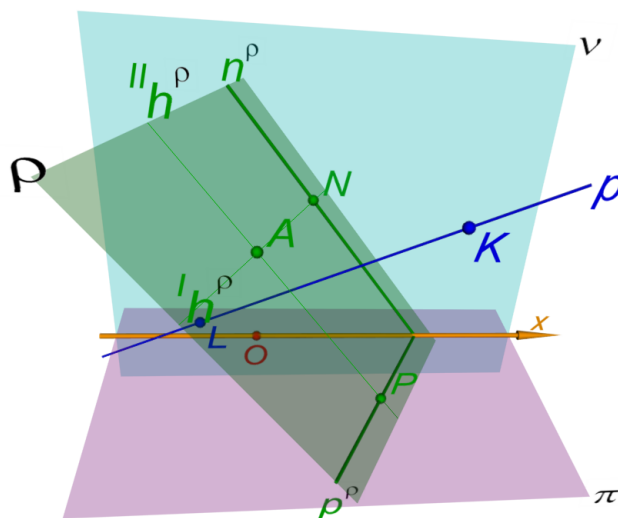


- podle výše uvedeného jsou tedy přímky  $k_1 \perp p_1^\rho, A_1 \in k_1$ , a  $k_2 \perp n_2^\rho, A_2 \in k_2$ , sdružené průměty přímky  $k \perp \rho, A \in k$



□

## 4.2. Rovina kolmá k přímce



## Výklad

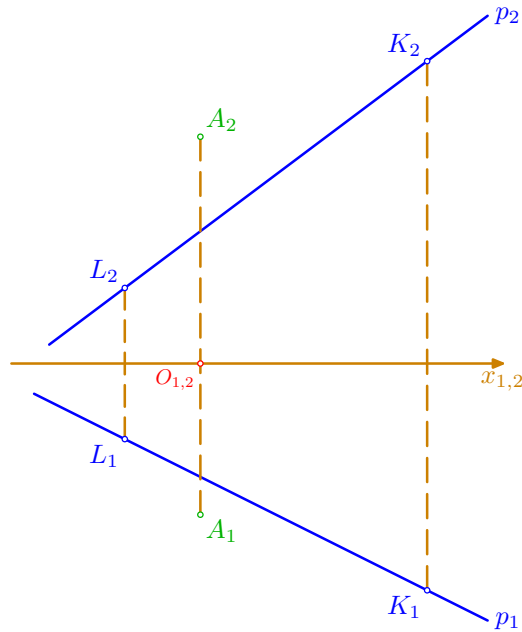
- jde o obrácenou úlohu k předchozí úloze *Přímka kolmá k rovině*, a proto lze použít analogické vztahy
- stopy hledané roviny kolmé k dané přímce ovšem nelze sestavit přímo a je třeba jít na ně oklikou přes hlavní přímku některé osnovy a její stopník
- v následujícím příkladě je úloha řešena nejprve pomocí hlavní přímky první osnovy a poté přes hlavní přímku osnovy druhé



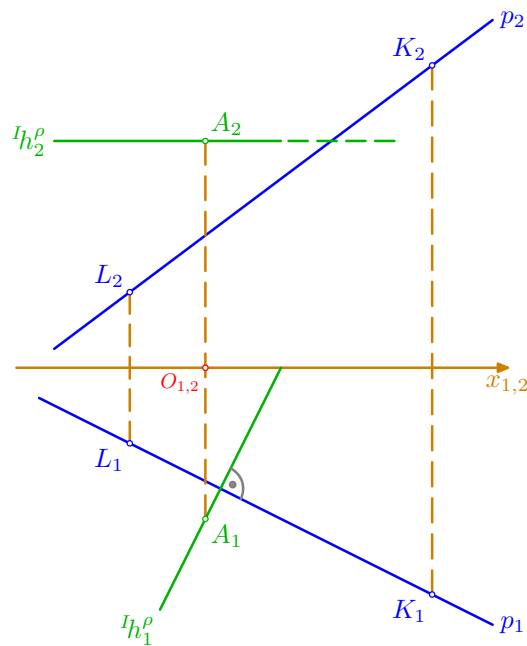
## Řešené úlohy

**Příklad:** Bodem  $A$  veďte rovinu  $\rho$  kolmo k přímce  $p=KL$ ;  $A[0; 2; 3]$ ,  $K[3; 3; 4]$ ,  $L[-1; 1; 1]$ .

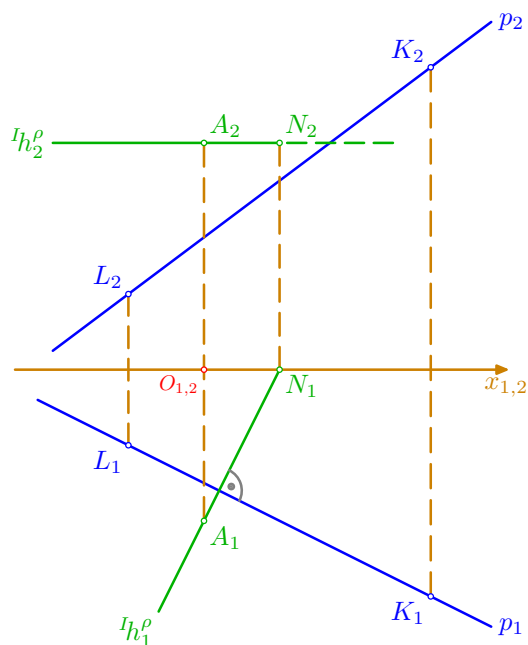
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2, p_1=K_1L_1, p_2=K_2L_2$  bodu  $A$  a přímky  $p=KL$



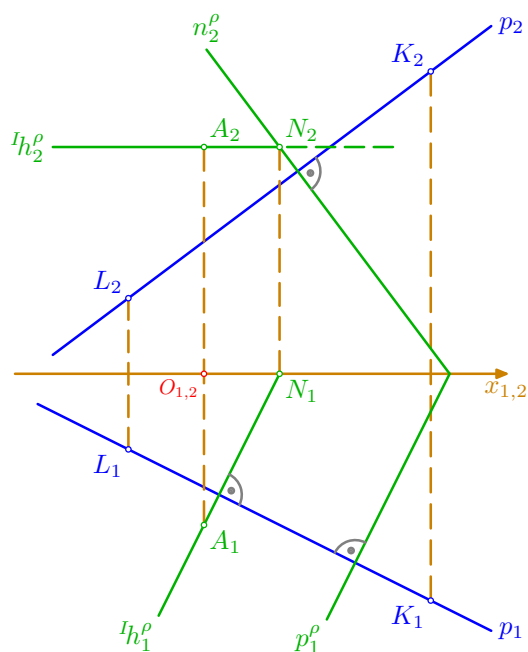
- 1. způsob řešení: bodem  $A$  vedeme hlavní přímku  $h^\rho$  I. osnovy roviny  $\rho \perp p$  – v průmětech je tedy  $h_1^\rho \perp p_1, A_1 \in h_1^\rho$  a  $h_2^\rho \parallel x, A_2 \in h_2^\rho$



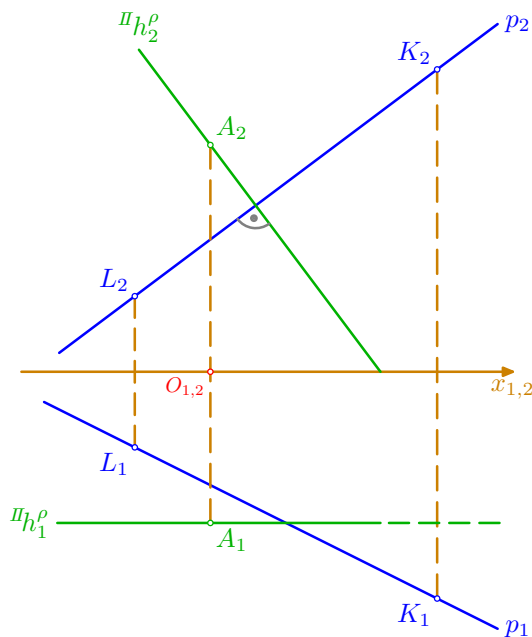
- najděme nárysný stopník  $N = I_h^\rho \cap \nu$ ; pro jeho půdorys platí  $N_1 = I_{h_1}^\rho \cap x$  a nárys  $N_2$  leží na přímce  $I_{h_2}^\rho$  a na ordinále



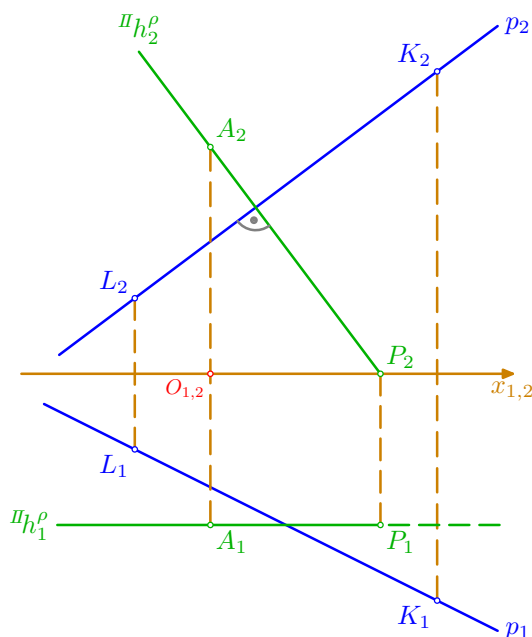
- nyní již lze sestrojít stopy  $p^\rho, n^\rho$  hledané roviny  $\rho$ : nejprve nárysnou  $n_2^\rho \perp p_2, N_2 \in n_2^\rho$  a poté půdorysnou  $p_1^\rho \perp p_1$ , která se s nárysnou stopou  $n_2^\rho$  protíná na ose  $x$



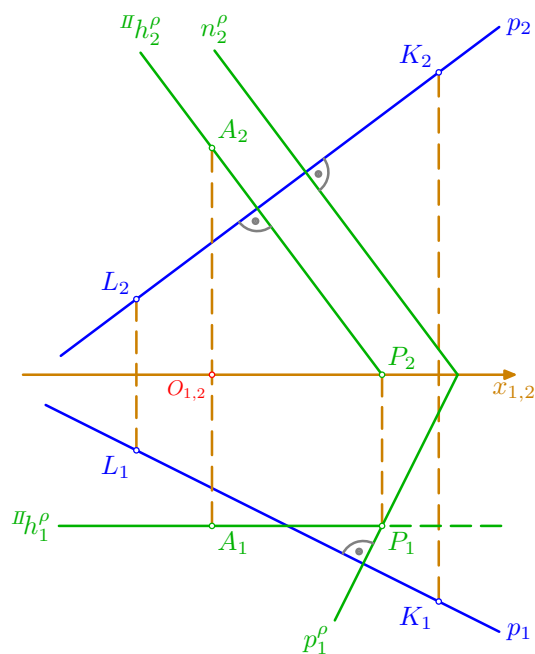
- 2. způsob řešení: analogicky ved' me bodem  $A$  hlavní přímkou  ${}^{\text{II}}h^{\rho}$  II. osnovy roviny  $\rho \perp p$   
 – v průmětech je tedy  ${}^{\text{II}}h_1^{\rho} \parallel x, A_1 \in {}^{\text{II}}h_1^{\rho}$  a  ${}^{\text{II}}h_2^{\rho} \perp p_2, A_2 \in {}^{\text{II}}h_2^{\rho}$



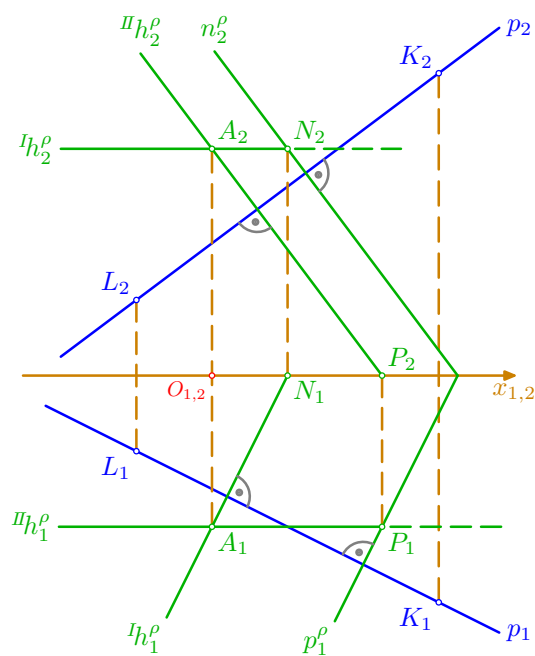
- tentokrát najdeme půdorysný stopník  $P = {}^{\text{II}}h^{\rho} \cap \pi$ ; pro jeho nárys platí  $P_2 = {}^{\text{II}}h_2^{\rho} \cap p_2$  a půdorys  $P_1$  leží na přímce  ${}^{\text{II}}h_1^{\rho}$  a na ordinále



- stopy  $p^\rho, n^\rho$  sestrojíme nyní v opačném pořadí: nejprve půdorysnou  $p_1^\rho \perp p_1, P_1 \in p_1^\rho$  a poté nárysnou  $n_2^\rho \perp p_2$

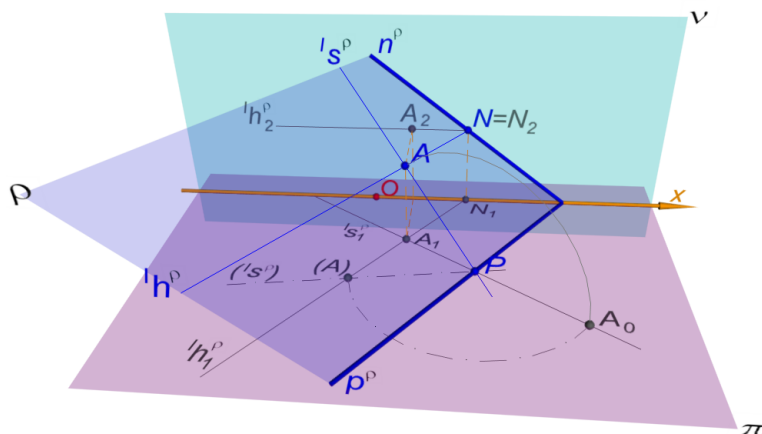


- na závěr jsou vyrýsovány oba způsoby řešení



□

## 4.3. Otáčení roviny



## Výklad



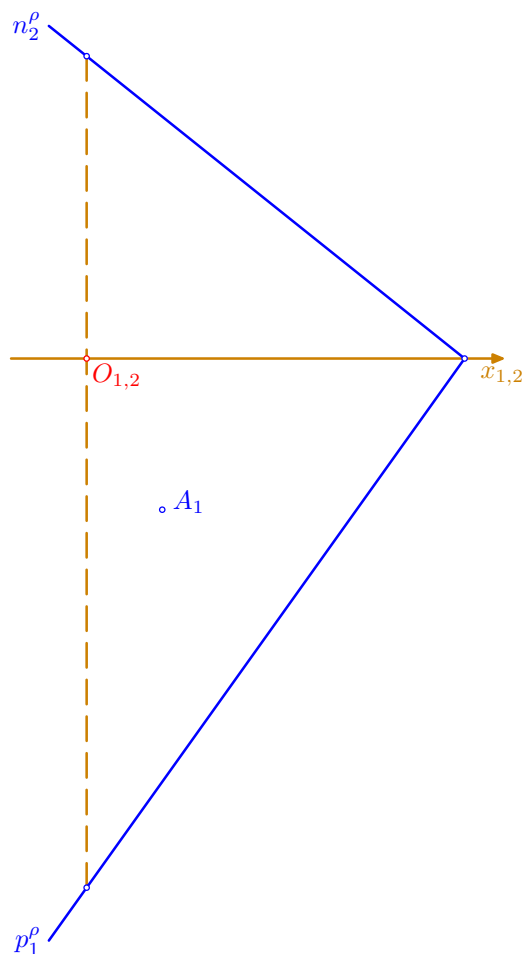
- při otáčení obecné roviny  $\rho$  do půdorysny  $\pi$  kolem stopy  $p^\rho$  se bod  $A \in \rho$  pohybuje po kružnici, jejíž střed  $P$  je stopníkem tzv. spádové přímky  $I_s^\rho$  I. osnovy (ta je kolmá k hlavním přímkám I. osnovy) a poloměr otáčení se najde sklopením promítací roviny přímkou  $I_s^\rho$
- rovinu lze kolem stopy otáčet na dvě strany – o větší nebo menší úhel (v následujícím příkladě je provedeno pouze otočení o větší úhel); podobně jako kolem stopy  $p^\rho$  do půdorysny  $\pi$  je možno rovinu  $\rho$  otočit také kolem stopy  $n^\rho$  do nárýsny  $\nu$
- otáčení roviny do průmětny kolem stopy vždy indukuje **osovou afinitu mezi oběma rovinami** a její kolmý průmět je pak pravouhloú **afinitou mezi průměty** (vzor  $A_1$ ) **a otočenými polohami** (obraz  $A_0$ ) – tuto afinitu lze s výhodou využít při otáčení složitějších útvarů
- konstrukce otáčení roviny se tedy užívá, je-li třeba sestrojít nějaký **pravidelný útvar** (např. pravidelný šestiúhelník nebo čtverec) ležící v obecné rovině (viz např. úlohu *Pravidelný osmistěn* na straně 97)



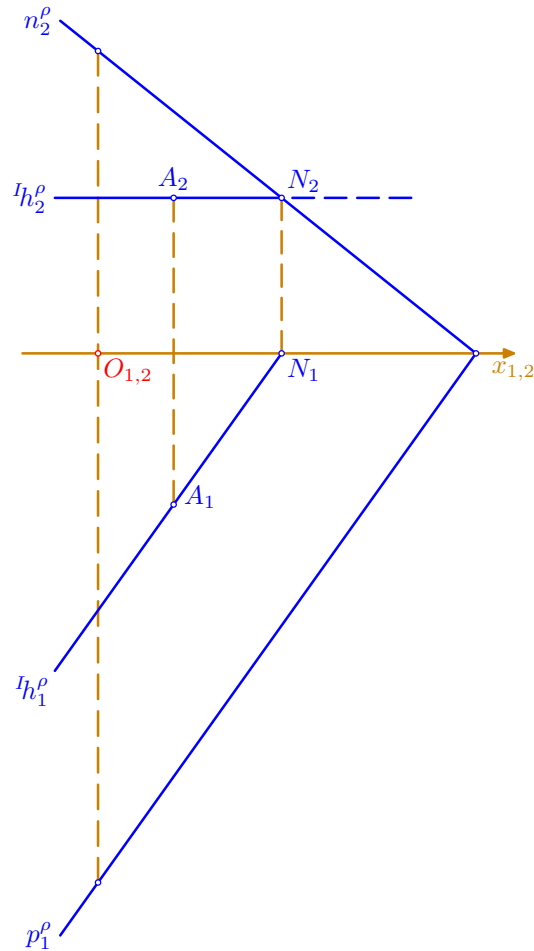
## Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte otočenou polohu bodu  $A$  ležícího v rovině  $\rho$ ;  $\rho(5; 7; 4)$ ,  $A[1; 2; ?]$ .

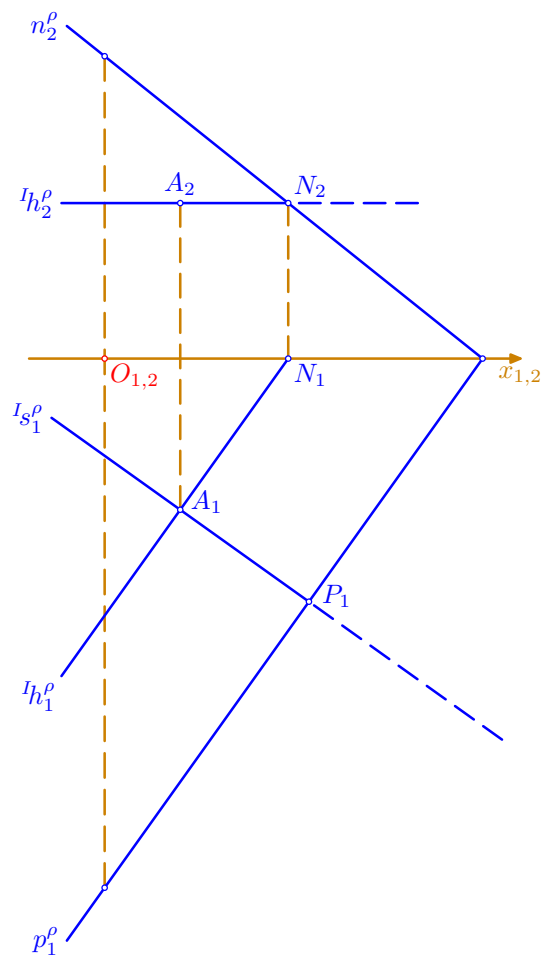
- podle zadání sestrojíme stopy  $p_1^{\rho}$ ,  $n_2^{\rho}$  roviny  $\rho$  a půdorys  $A_1$  bodu  $A \in \rho$



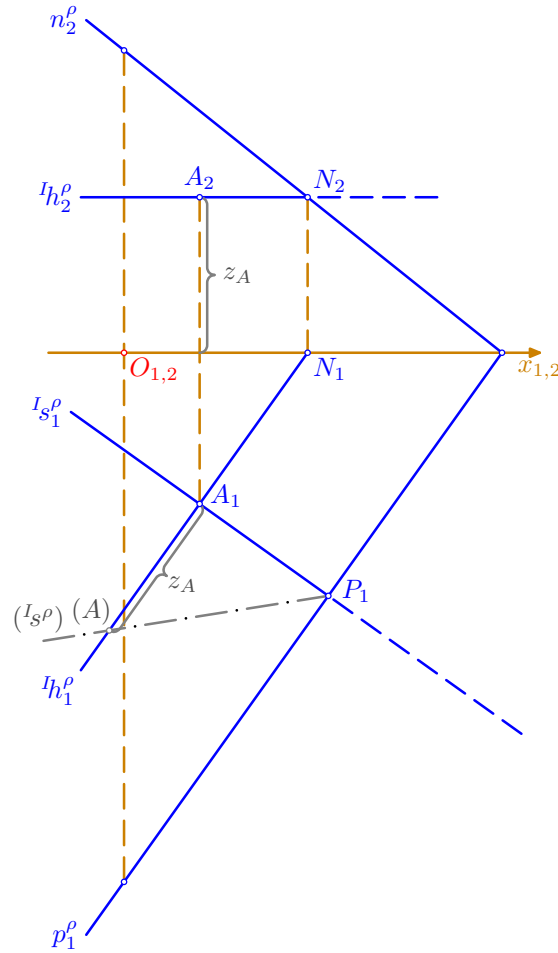
- pomocí hlavní přímky  ${}^I h^\rho$  I. osnovy a jejího nárysného stopníku  $N = {}^I h^\rho \cap \nu$  doplníme nárys  $A_2$  bodu  $A \in \rho$ :  ${}^I h_1^\rho \parallel p_1^\rho, A_1 \in {}^I h_1^\rho$ , potom je  $N_1 = {}^I h_1^\rho \cap x$  a nárys  $N_2$  leží na ordinále a na stopě  $n_2^\rho$ ; dále je  ${}^I h_2^\rho \parallel x, N_2 \in {}^I h_2^\rho$  a nárys  $A_2$  najdeme po ordinále na přímce  ${}^I h_2^\rho$



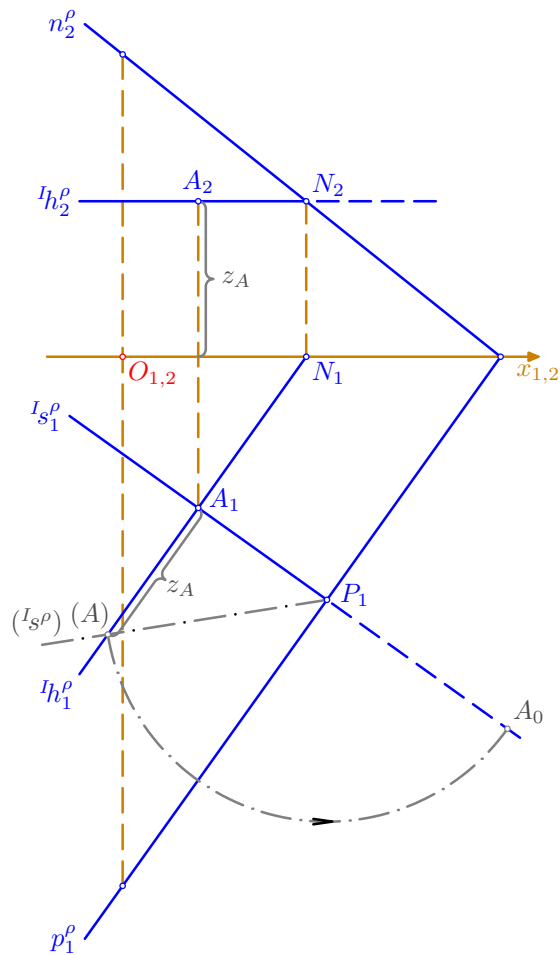
- bodem  $A$  vedeme spádovou přímku  $l_{s^\rho} \perp p^\rho$  l. osnovy roviny  $\rho$  – v průmětu je sestrojen pouze její půdorys  $l_{s_1^\rho}$  a podle *Věty o pravouhlém průmětu pravého úhlu* platí  $l_{s_1^\rho} \perp p_1^\rho$ ,  $A_1 \in l_{s_1^\rho}$ ; půdorysný stopník přímky  $l_{s^\rho}$  označme  $P$ , v průmětu je  $P_1 = l_{s_1^\rho} \cap p_1^\rho$



- poloměr  $|PA|$  otáčení bodu  $A$  zjistíme sklopením promítací roviny spádové přímky  $I_{s^\rho}$ , tj.  $|PA|=|P_1(A)|$ , kde bod  $(A)$  je sklopenou polohou bodu  $A$  a platí pro něj  $|(A)A_1| = z_A = |A_2x|$ ; bod  $P = P_1$  zůstává při sklápění na místě



- otočení bodu  $A$  (kolem bodu  $P$ ) pak můžeme provést tzv. ve sklopení – pro otočenou polohu  $A_0$  platí  $A_0 \in I_{s_1}^\rho$  a  $|A_0P_1| = |AP| = |(A)P_1|$  (zde je vidět možnost výběru otáčení o větší či menší úhel, obvykle volíme podle konkrétní situace v náčrtě)

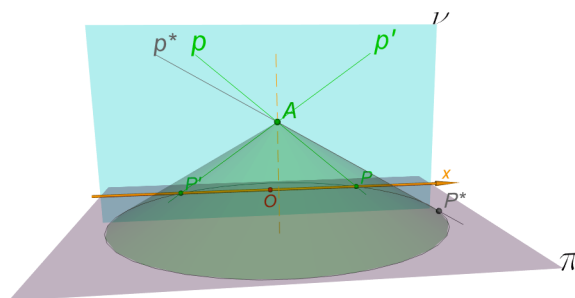


□

## 5. Procvičení základních úloh v Mongeově promítání

- v předchozích příkladech byly probrány tzv. **základní úlohy** Mongeova promítání, které tvoří jakousi malou násobilku této zobrazovací metody a jejich zvládnutí je nezbytně nutné pro řešení komplexnějších úloh; ty budou postupně následovat

### 5.1. Konstrukce přímky

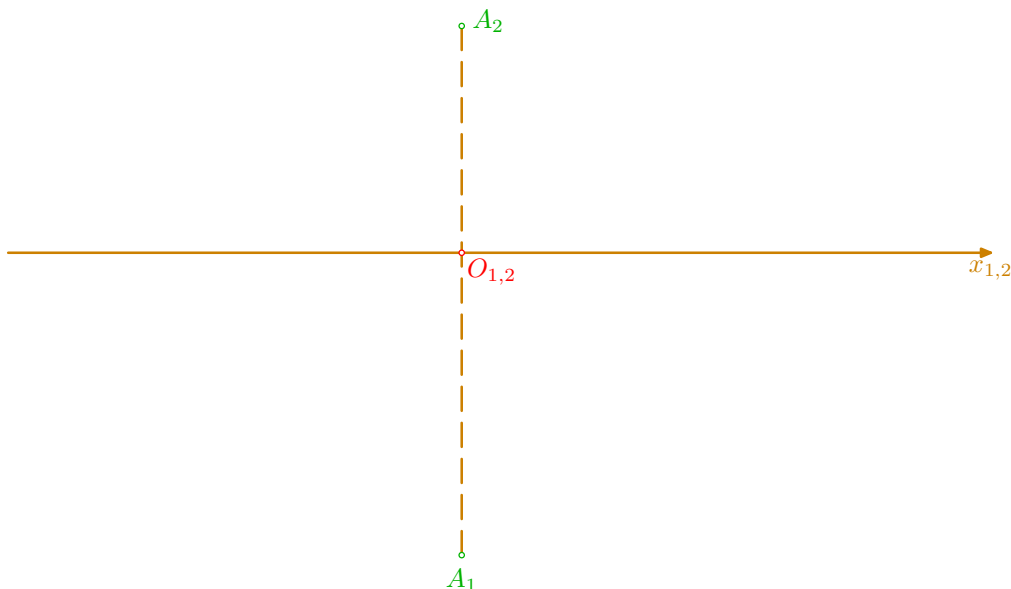


#### Řešené úlohy

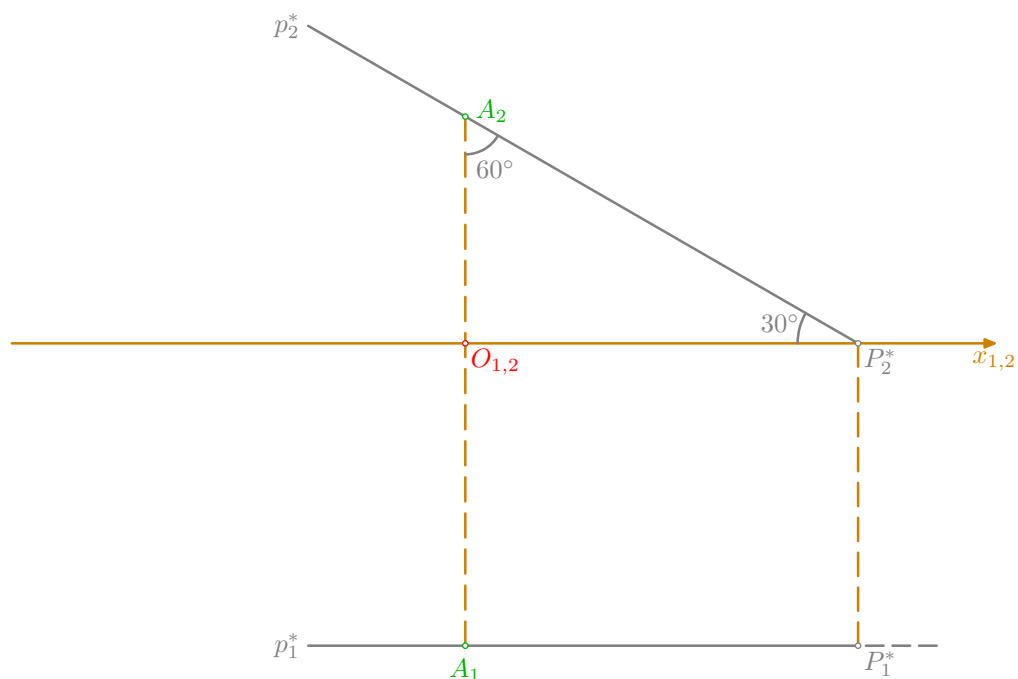
**Příklad:** Sestrojte přímku  $p$ , která prochází bodem  $A$ , od půdorysny má odchylku  $30^\circ$  a je různoběžná s osou  $x$ ;  $A[0; 4; 3]$ .



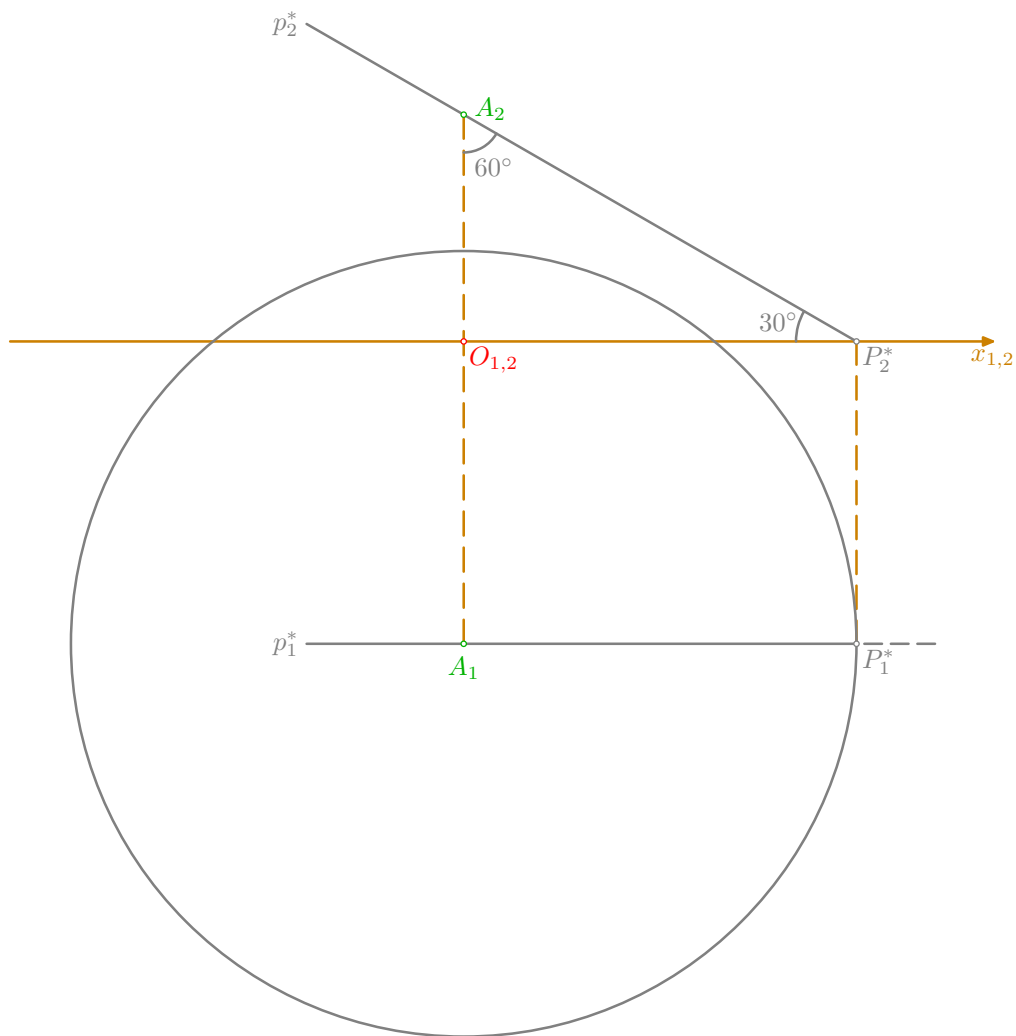
- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojíme sdružené průměty  $A_1, A_2$  bodu  $A$



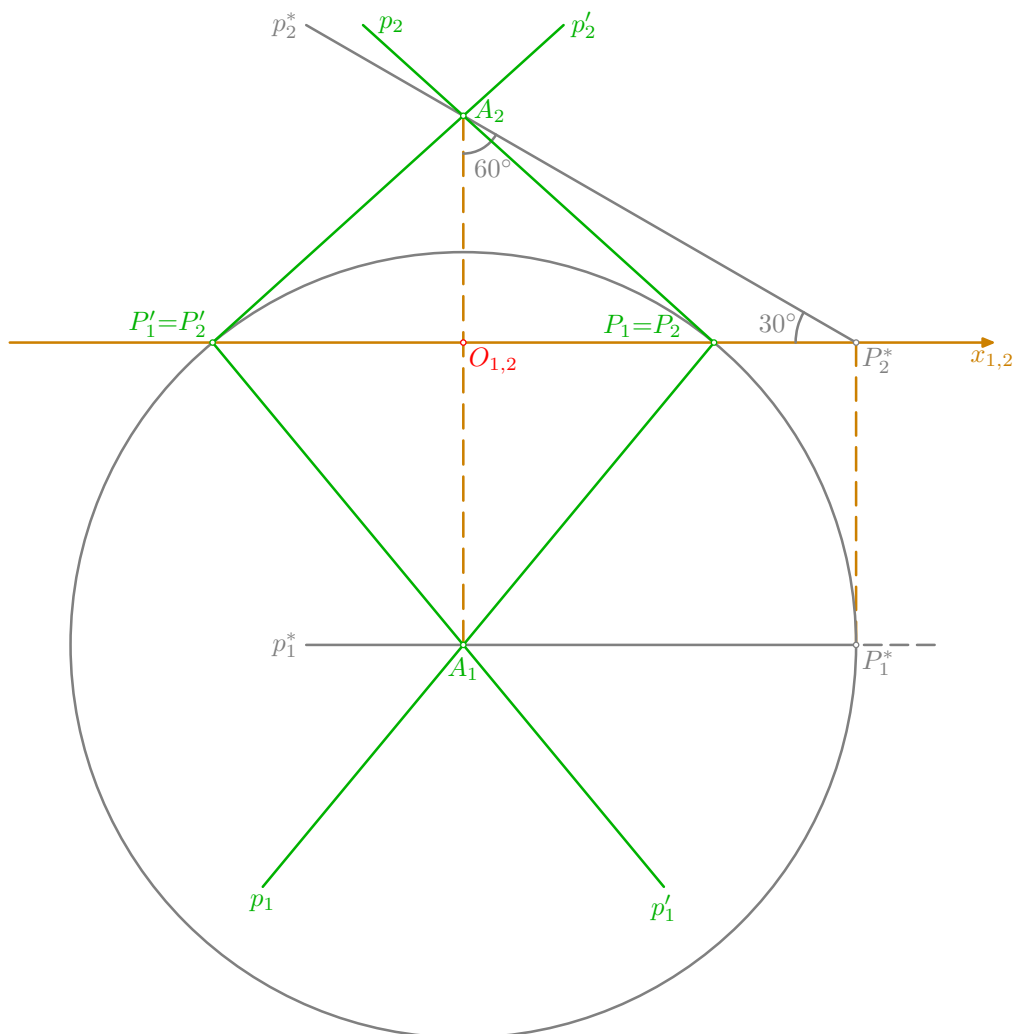
- bodem  $A$  vedeme přímku  $p^* \parallel \nu$ , která má od půdorysny odchylku  $30^\circ$  (zvolme jednu ze dvou možností), a sestrojme její půdorysný stopník  $P^* = p^* \cap \pi$ : pro půdorys  $p_1^*$  platí  $p_1^* \parallel x$ ,  $A_1 \in p_1^*$ , nárys  $p_2^*$  prochází bodem  $A_2$  a svírá s osou  $x$  úhel dané velikosti  $30^\circ$ , tj. s ordinálou bodu  $A$  svírá úhel velikosti  $60^\circ$ ; dále je  $P_2^* = p_2^* \cap x$  a půdorys  $P_1^*$  leží na  $p_1^*$  a na ordinále



- rotací přímky  $p^*$  kolem osy  $AA_1$  vznikne rotační kuželová plocha s vrcholem v bodě  $A$ ; na ní leží všechny přímky, které procházejí bodem  $A$  a mají od půdorysny odchylku  $30^\circ$ ; tato kuželová plocha protíná půdorysnu  $\pi$  v kružnici, která má střed v bodě  $A_1$  a prochází bodem  $P_1^*$

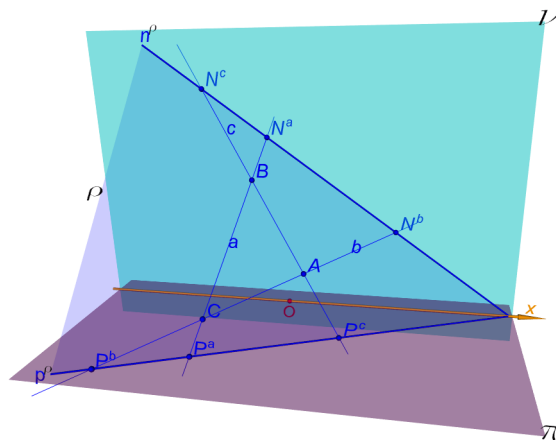


- sestřená kružnice protíná osu  $x$  v bodech  $P = P_1 = P_2$ ,  $P' = P'_1 = P'_2$  a přímky  $p = AP$ ,  $p' = AP'$  ( $p_1 = A_1P_1, p_2 = A_2P_2$  a  $p'_1 = A_1P'_1, p'_2 = A_2P'_2$ ) pak splňují všechny zadané podmínky, tj. prochází bodem  $A$ , mají danou odchylku  $30^\circ$  od  $\pi$  a jsou různoběžné s osou  $x$



□

### 5.2. Konstrukce stop roviny

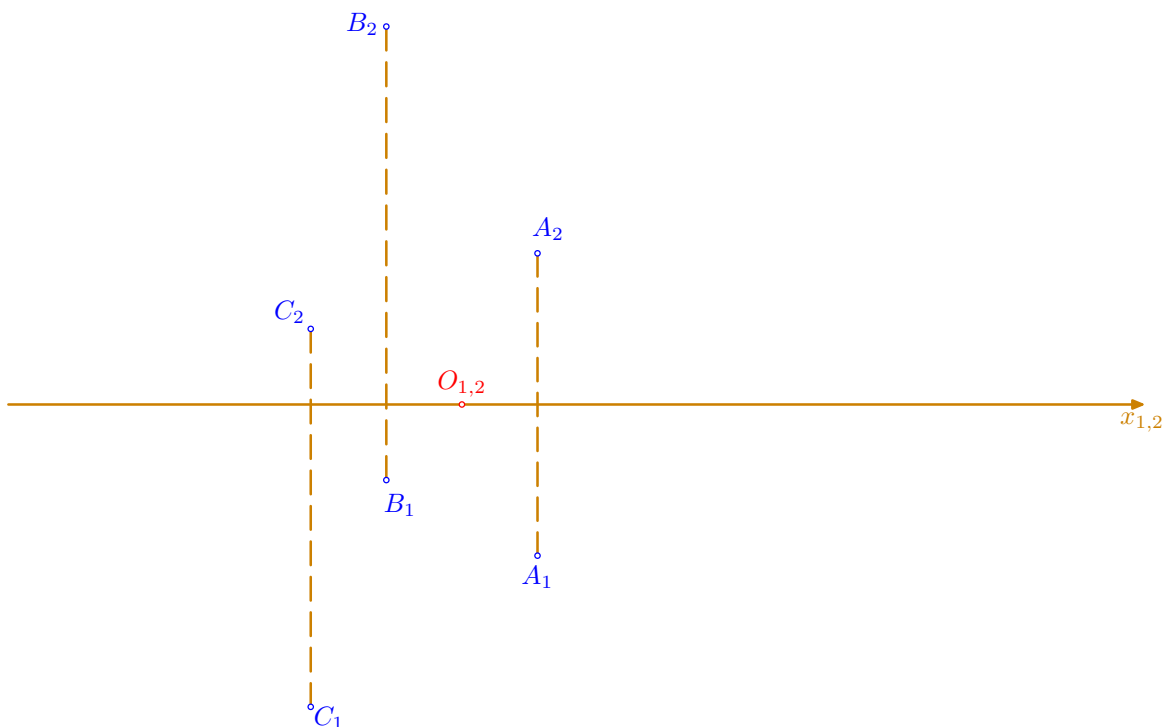


#### Řešené úlohy

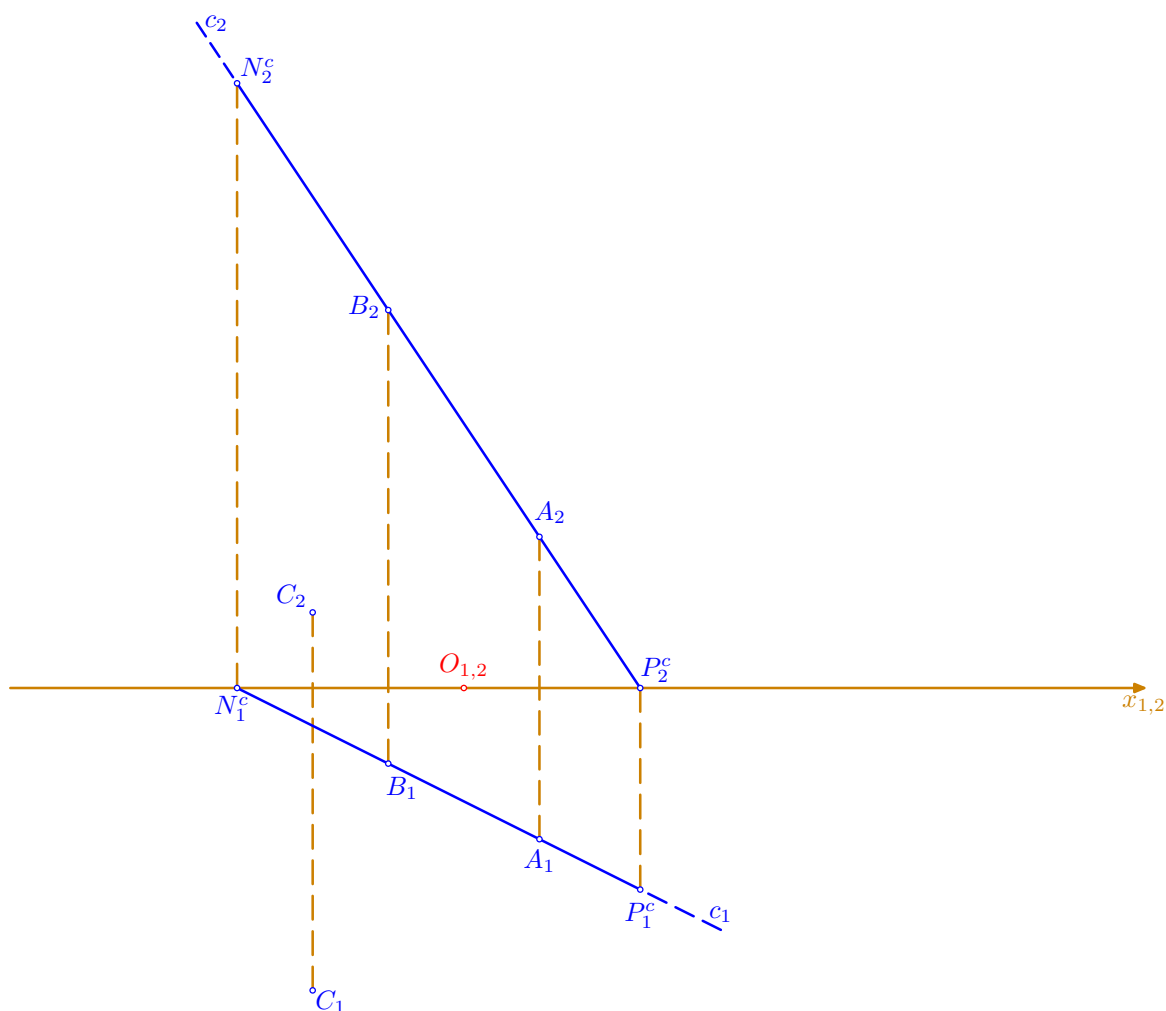


**Příklad:** Sestrojte stopy roviny  $\rho = ABC$ ;  $A[1; 2; 2]$ ,  $B[-1; 1; 5]$ ,  $C[-2; 4; 1]$ .

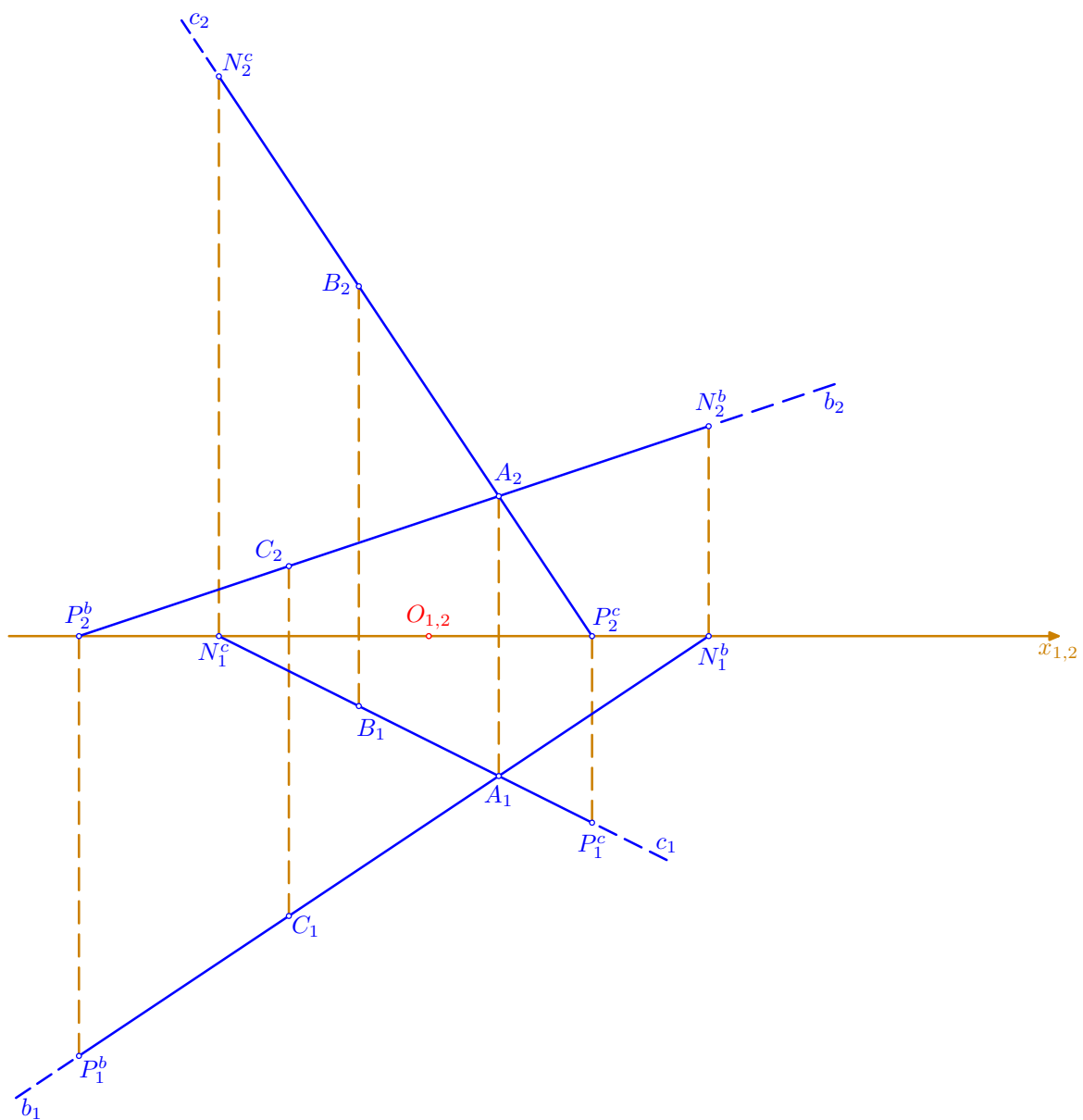
- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojíme sdružené průměty  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  bodů  $A, B, C$



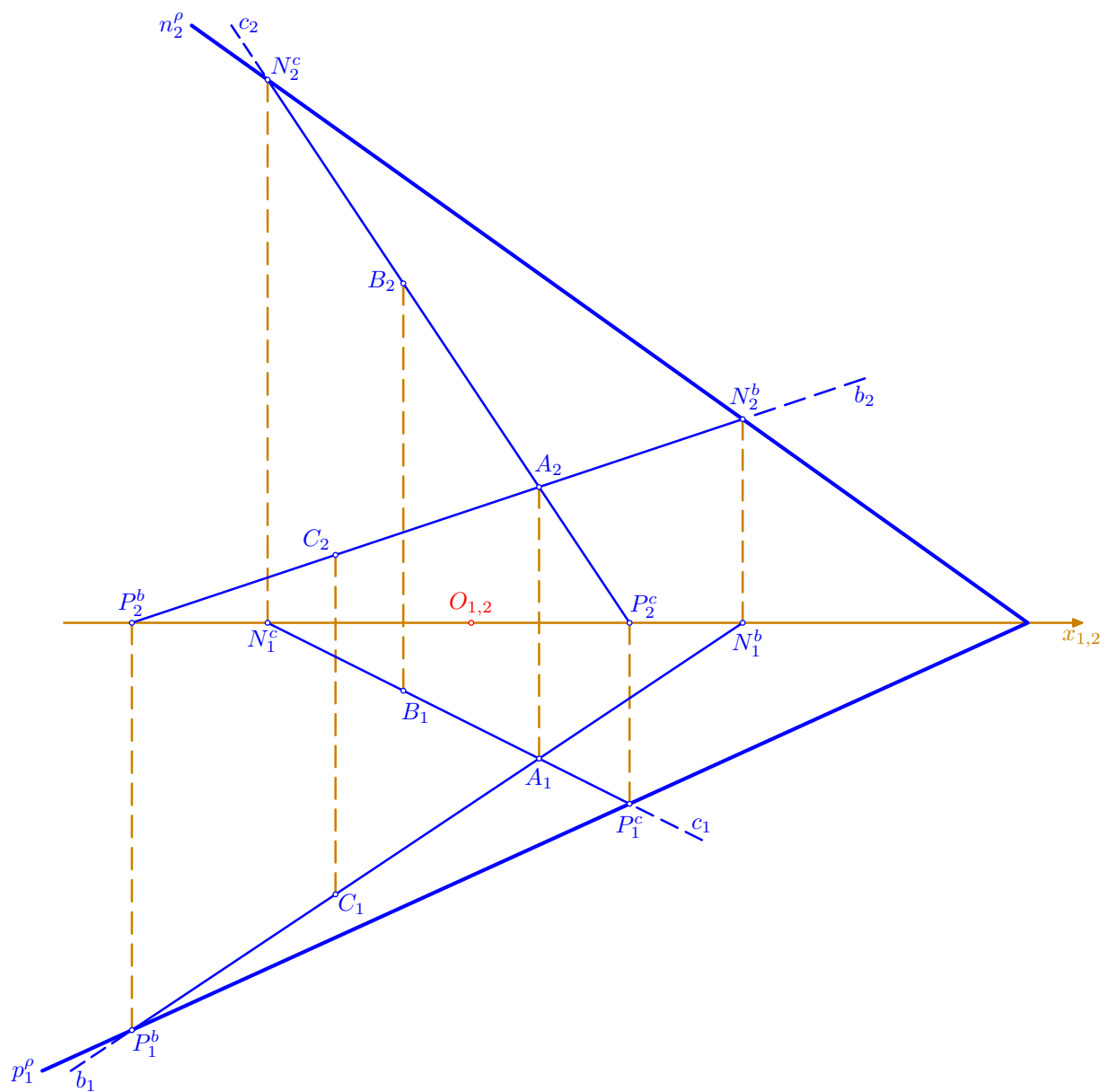
- sestrojme přímku  $c = AB$  a najděme její stopníky  $P^c = c \cap \pi$ ,  $N^c = c \cap \nu$ : v půdoryse je  $c_1 = A_1B_1$  a v náryse  $c_2 = A_2B_2$ ; pro nárys  $P_2^c$  půdorysného stopníku  $P^c$  platí  $P_2^c = c_2 \cap x$  a půdorys  $P_1^c$  leží na  $c_1$  a na ordinále; analogicky je bod  $N_1^c = c_1 \cap x$  půdorysem nárysného stopníku  $N^c$  a jeho nárys  $N_2^c$  leží na přímkce  $c_2$  a na příslušné ordinále



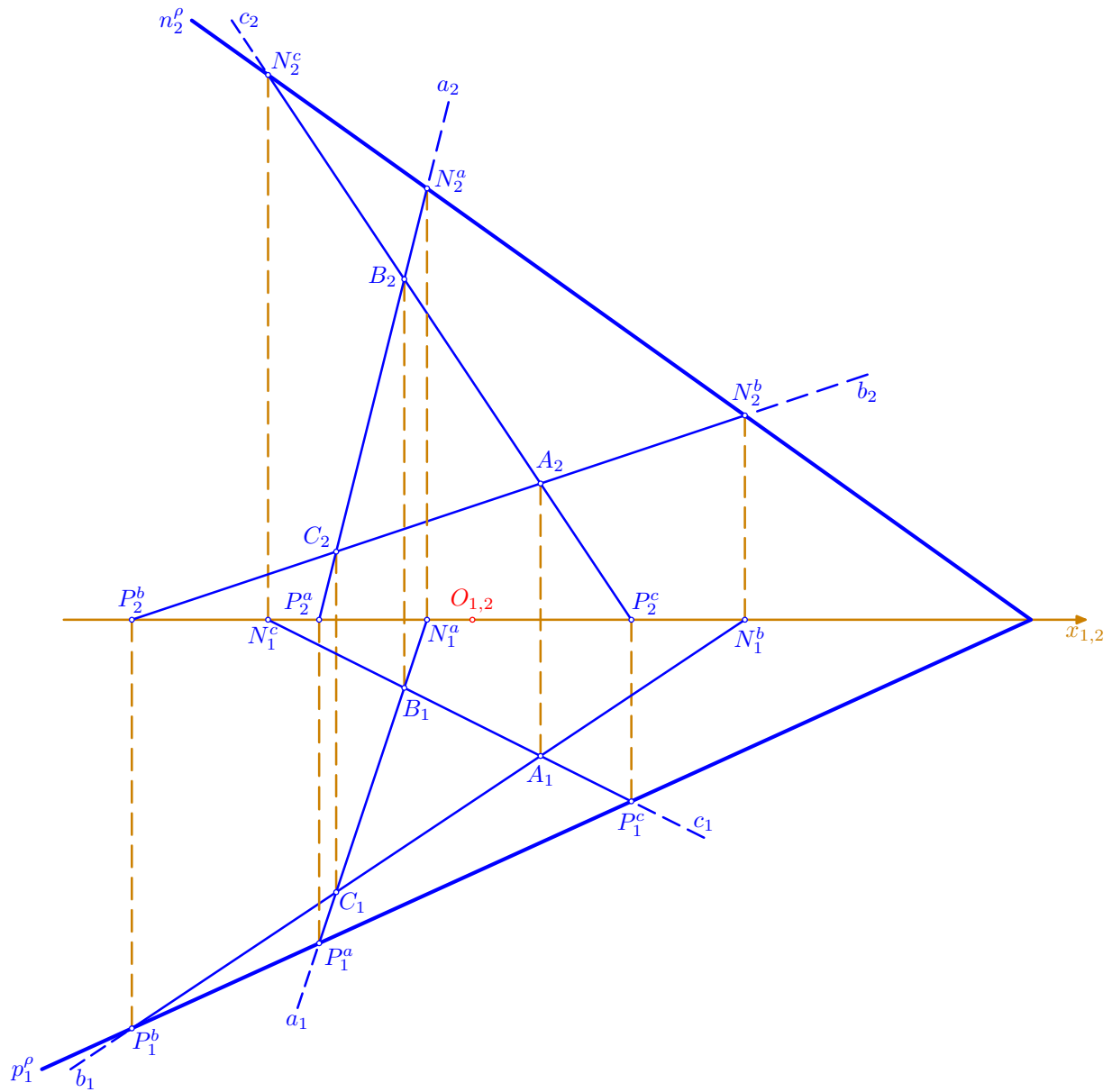
- stejným způsobem jako v předchozím kroku sestrojme sdružené průměty  $b_1 = A_1C_1$ ,  $b_2 = A_2C_2$  přímky  $b = AC$  a určíme její stopníky  $P^b = b \cap \pi$ ,  $N^b = b \cap \nu$ :  $P_2^b = b_2 \cap x$  a půdorys  $P_1^b$  leží na  $b_1$  a na ordinále, podobně  $N_1^b = b_1 \cap x$  a nárys  $N_2^b$  leží na  $b_2$  a na ordinále



- nyní již snadno sestojíme stopy roviny  $\rho$ , které se protínají na ose  $x$ :  $p_1^\rho = P_1^c P_1^b$  a  $n_2^\rho = N_2^c N_2^b$

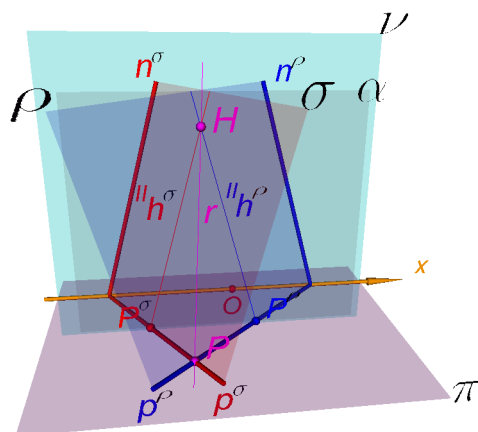


- na závěr můžeme ještě doplnit i sdružené průměty přímky  $a = BC$  a jejích stopníků  
 $P^a = a \cap \pi$ ,  $N^a = a \cap \nu$



□

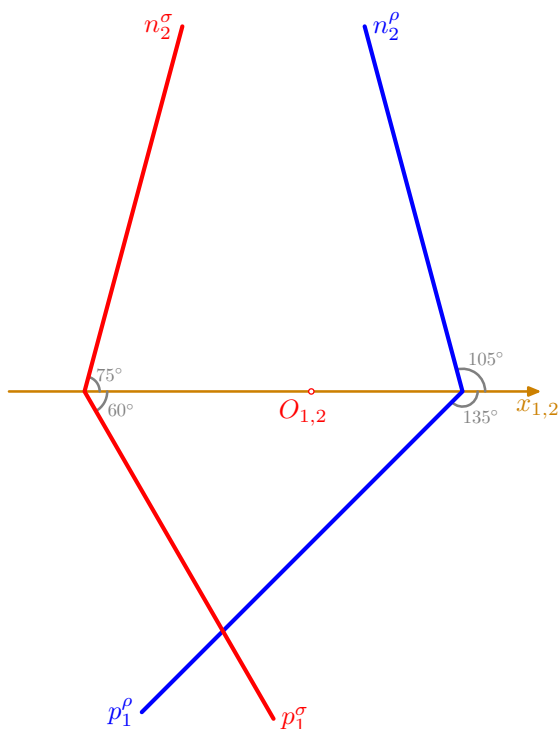
## 5.3. Průsečnice dvou rovin



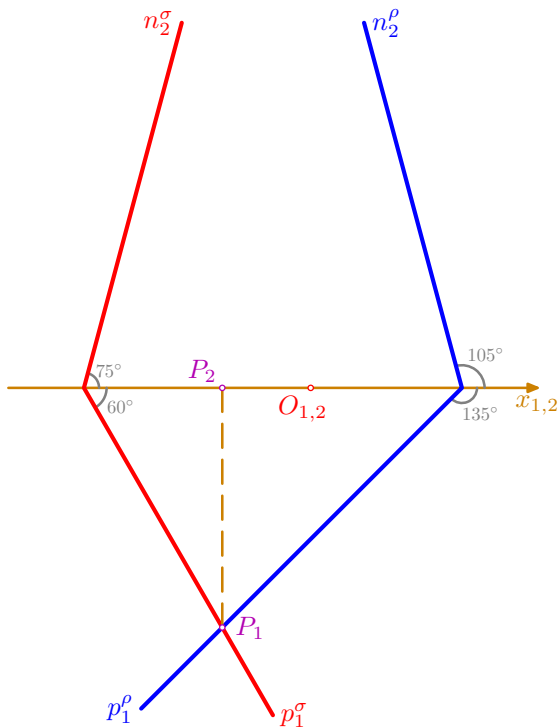
## Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte průsečnici  $r$  rovin  $\rho, \sigma$ ;  $\rho(2; 135^\circ; 105^\circ), \sigma(-3; 60^\circ; 75^\circ)$ .

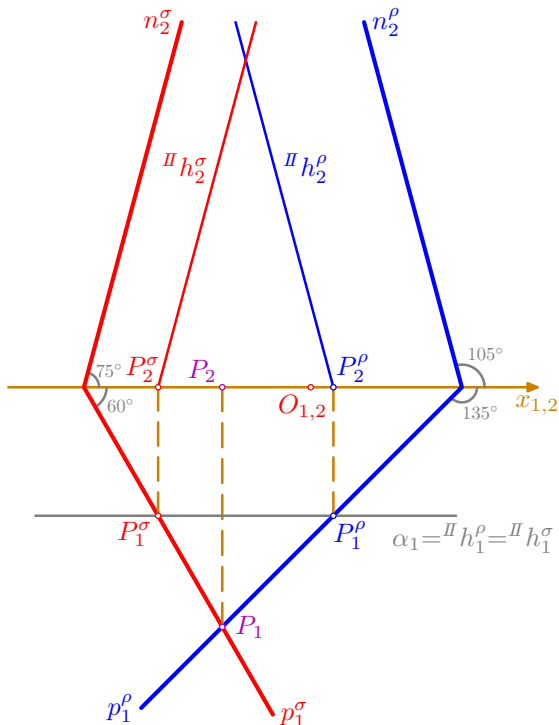
- podle zadání sestrojíme stopy  $p_1^\rho, n_2^\rho, p_1^\sigma, n_2^\sigma$  rovin  $\rho, \sigma$  – konstrukce je patrná z obrázku; toto ojedinělé zadání je zvoleno záměrně proto, aby byl průsečík nárysnych stop špatně dostupný



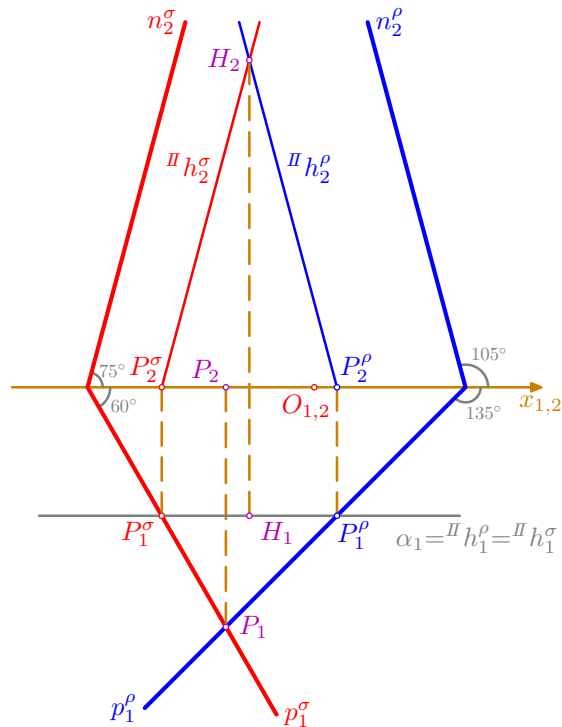
- sestrojme průsečík  $P$  půdorysných stop: v půdoryse je  $P_1 = p_1^\rho \cap p_2^\sigma$  a nárys  $P_2$  leží na ordinále a na ose  $x$



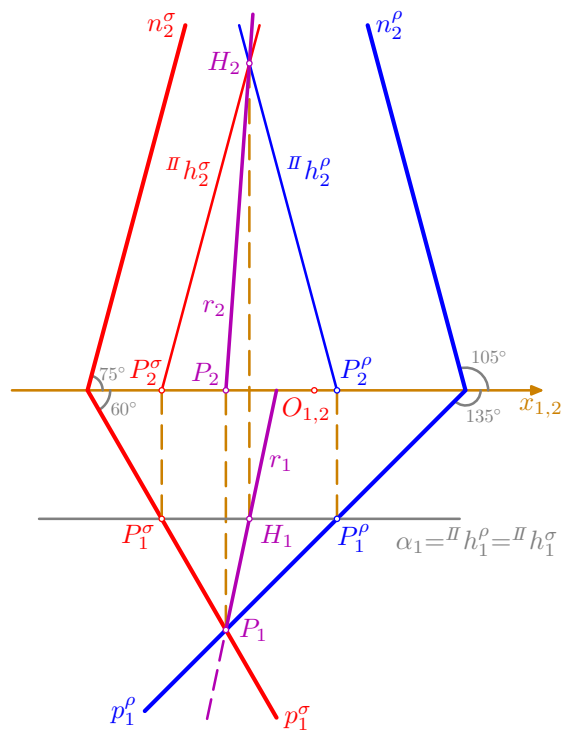
- dále ved' me libovolně vhodně rovinu  $\alpha \parallel \nu$ , která protne roviny  $\rho, \sigma$  v hlavních přímkách  ${}^{\parallel}h^\rho, {}^{\parallel}h^\sigma$  III. osnovy, jejichž půdorysné stopníky  $P^\rho, P^\sigma$  leží na příslušných půdorysných stopách:  $\alpha_1 = {}^{\parallel}h_1^\rho = {}^{\parallel}h_1^\sigma, P_1^\rho = \alpha_1 \cap p_1^\rho, P_1^\sigma = \alpha_1 \cap p_1^\sigma, {}^{\parallel}h_2^\rho \parallel n_2^\rho, P_2^\rho \in {}^{\parallel}h_2^\rho, {}^{\parallel}h_2^\sigma \parallel n_2^\sigma, P_2^\sigma \in {}^{\parallel}h_2^\sigma$



- sestrojené hlavní přímky se protínají v bodě  $H$ : v náryse je  $H_2 = \text{II}h_2^\rho \cap \text{II}h_2^\sigma$  a půdorys  $H_1$  leží na ordinále a na přímce  $\alpha_1$

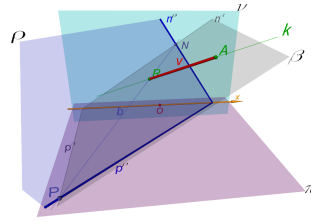


- přímka  $r = PH$  je hledanou průsečnicí daných rovin  $\rho, \sigma$ :  $r_1 = P_1H_1$ ,  $r_2 = P_2H_2$



□

### 5.4. Vzdálenost bodu od roviny

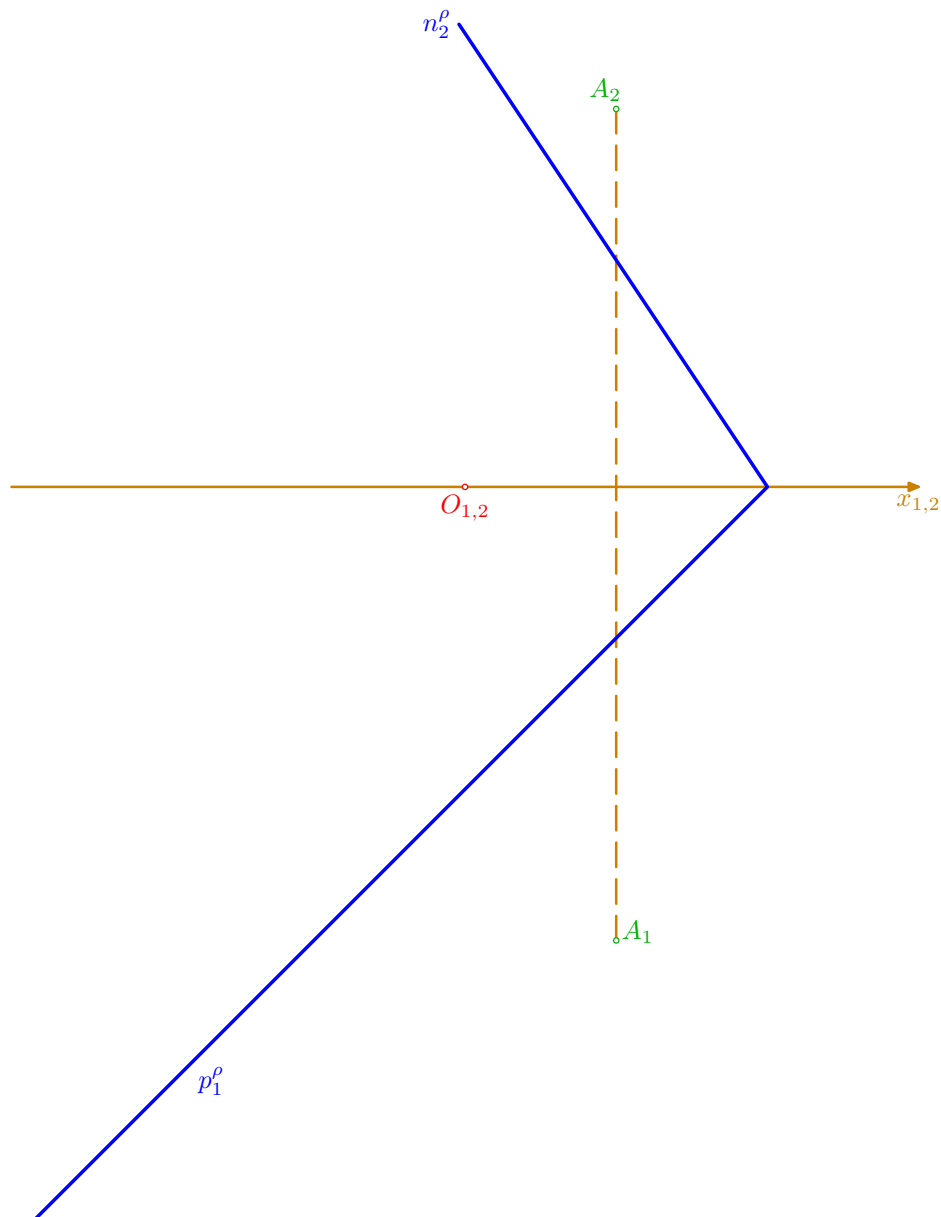


#### Řešené úlohy

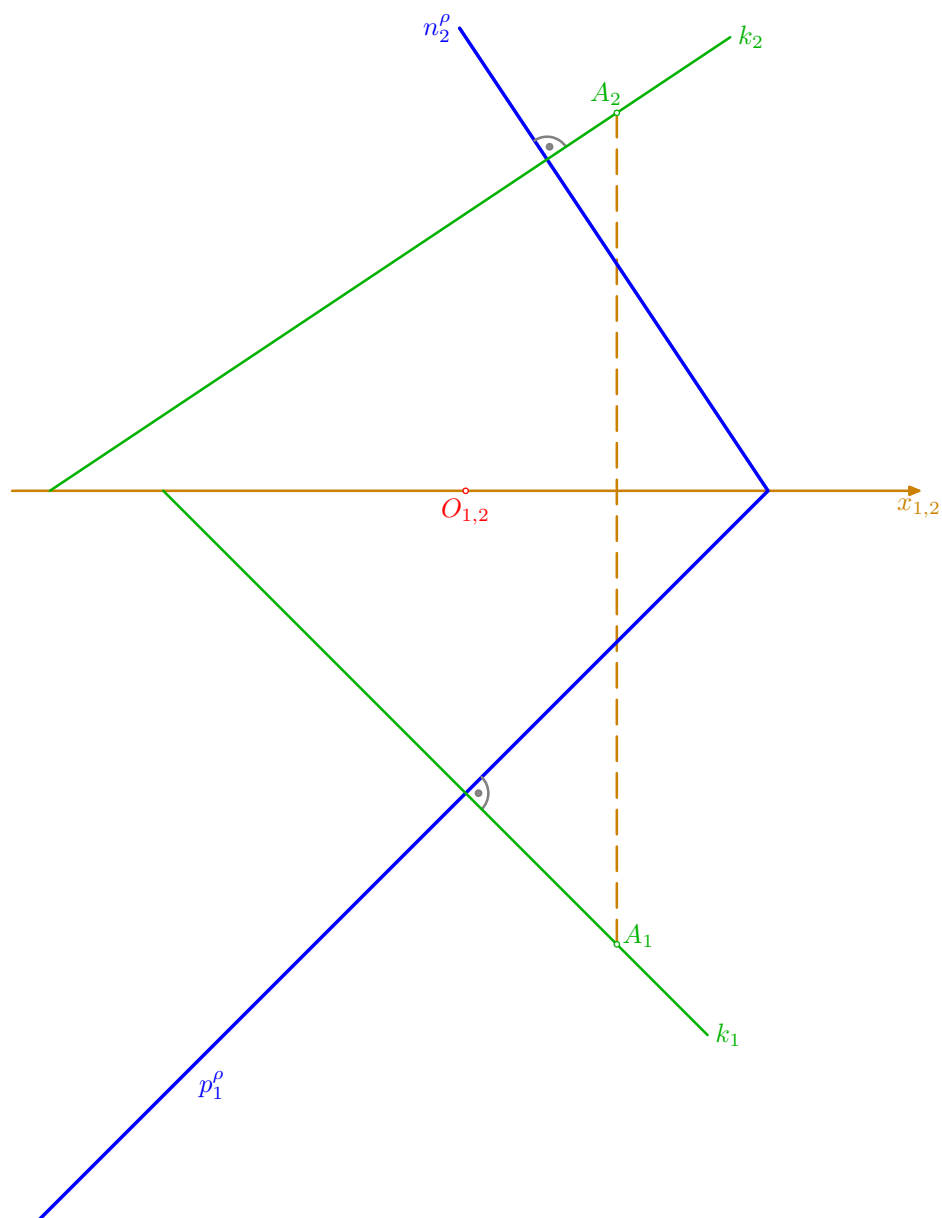


**Příklad:** Určete vzdálenost  $v = |A\rho|$  bodu  $A$  od roviny  $\rho$ ;  $A[2; 6; 5], \rho(4; 4; 6)$ .

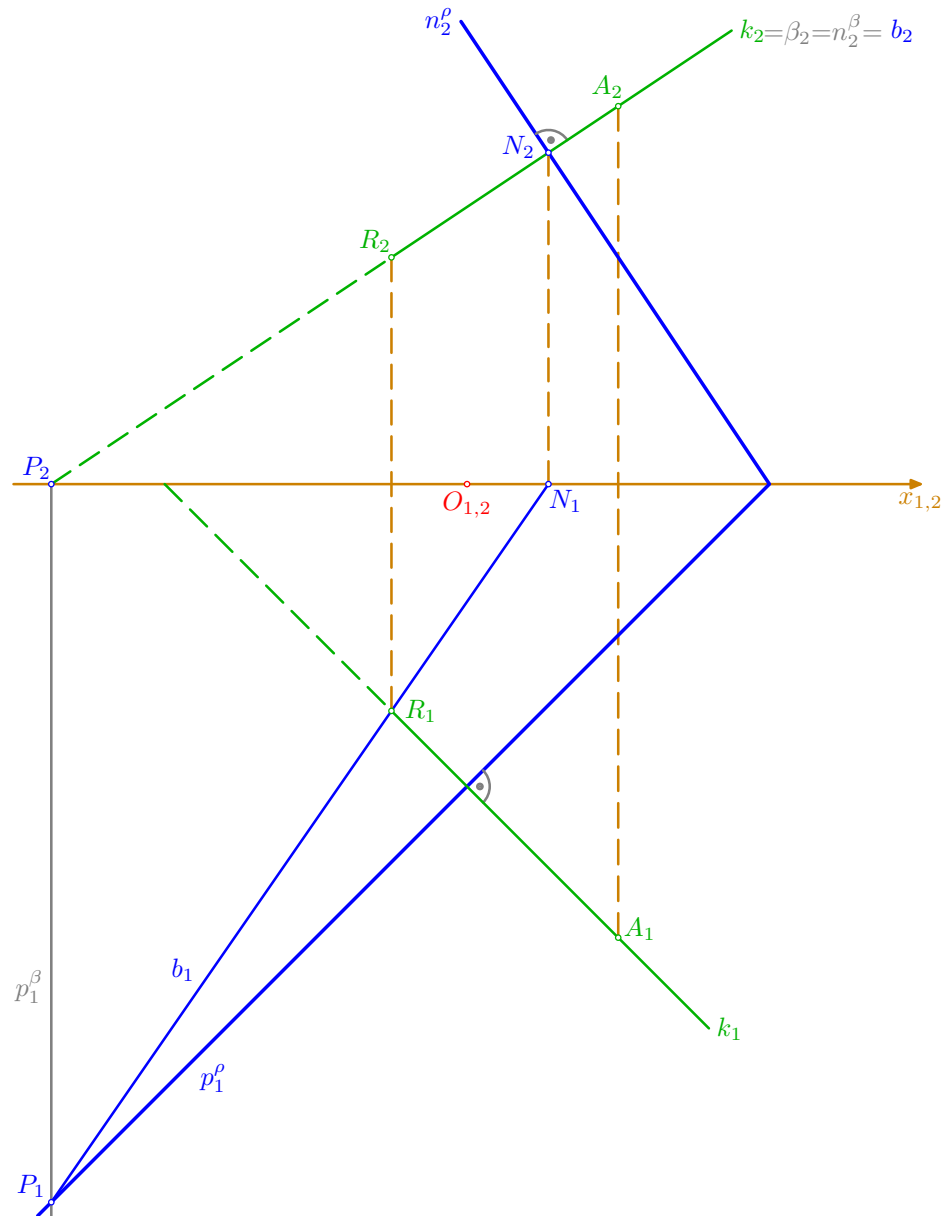
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2$  bodu  $A$  a stopy  $p_1^\rho, n_2^\rho$  roviny  $\rho$



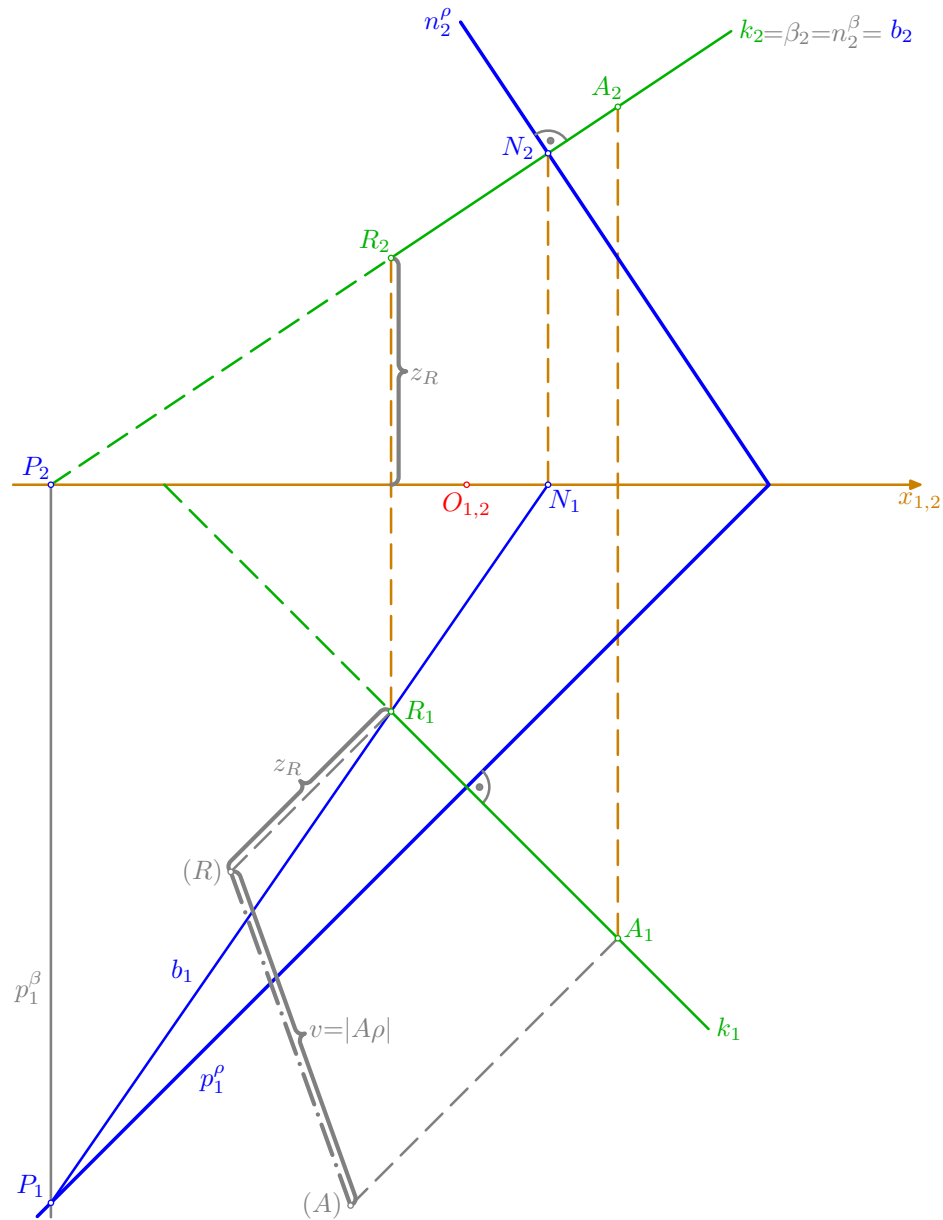
- vzdálenost bodu  $A$  od roviny  $\rho$  změříme na kolmici  $k \perp \rho$ ,  $A \in \rho$ : pro její půdorys  $k_1$  platí  $k_1 \perp p_1^\rho$ ,  $A_1 \in k_1$ , podobně je v náryse  $k_2 \perp n_2^\rho$ ,  $A_2 \in k_2$



- přímka  $k$  protíná rovinu  $\rho$  v bodě  $R = k \cap \rho$ , který sestrojíme proložením pomocné roviny  $\beta \perp \nu, k \subseteq \beta$ ; rovina  $\beta$ , kde  $\beta_2 = n_2^\beta = k_2$  a  $p_1^\beta \perp x$ , protíná danou rovinu  $\rho$  v krycí přímce  $b = PN$  ( $b_2 = k_2$  a  $b_1 = P_1N_1$ , konstrukce je zřejmá z obrázku); pro půdorys bodu  $R = k \cap \rho$  je pak  $R_1 = b_1 \cap k_1$  a nárys  $R_2$  najdeme na ordinále a na přímce  $b_2 = k_2$



- na závěr stačí určit skutečnou délku úsečky  $AR$ ; provedme to sklopením půdorysně promítací roviny přímkou  $k$ : pro sklopené polohy  $(A), (R)$  bodů  $A, R$  platí  $|(A)A_1| = z_A = 5$ ,  $|(R)R_1| = z_R = |xR_2|$ ; řešením úlohy je délka  $v = |A\rho| = |AR| = |(A)(R)|$



□

## 5.5. Vzdálenost bodu od přímky

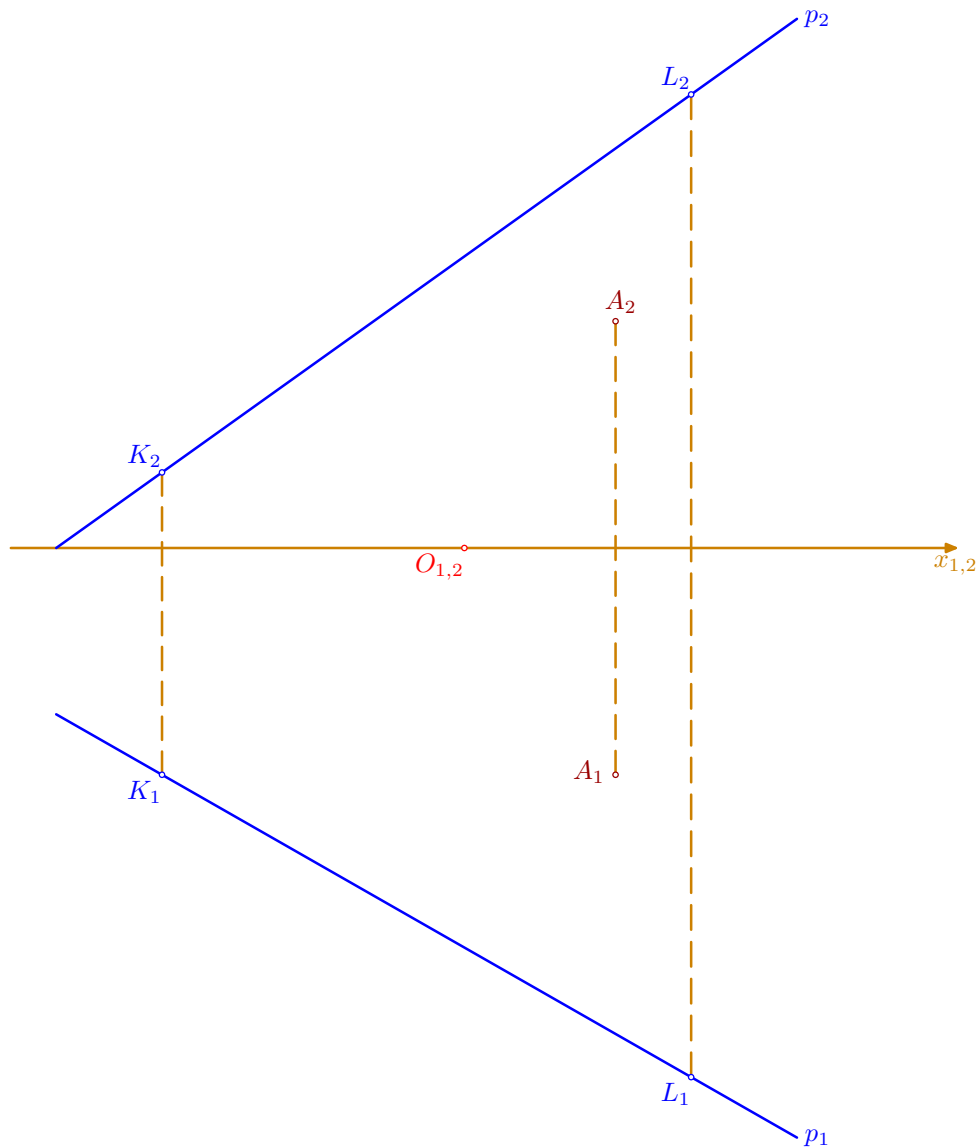
## Řešené úlohy



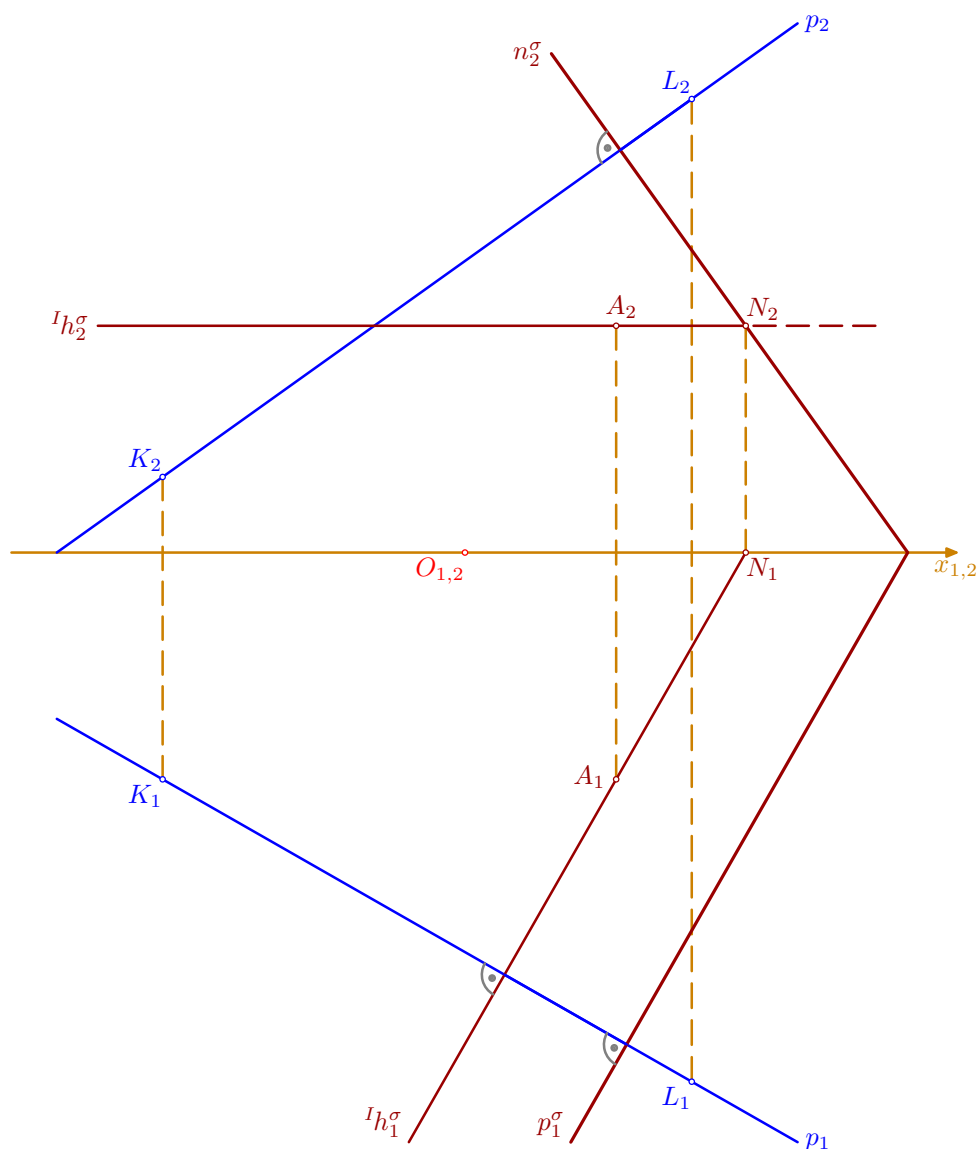
1. způsob řešení – užití roviny vedené daným bodem kolmo k dané přímce

**Příklad:** Určete vzdálenost  $v = |Ap|$  bodu  $A$  od přímky  $p = KL$ ;  $A[2; 3; 3]$ ,  $K[-4; 3; 1]$ ,  $L[3; 7; 6]$ .

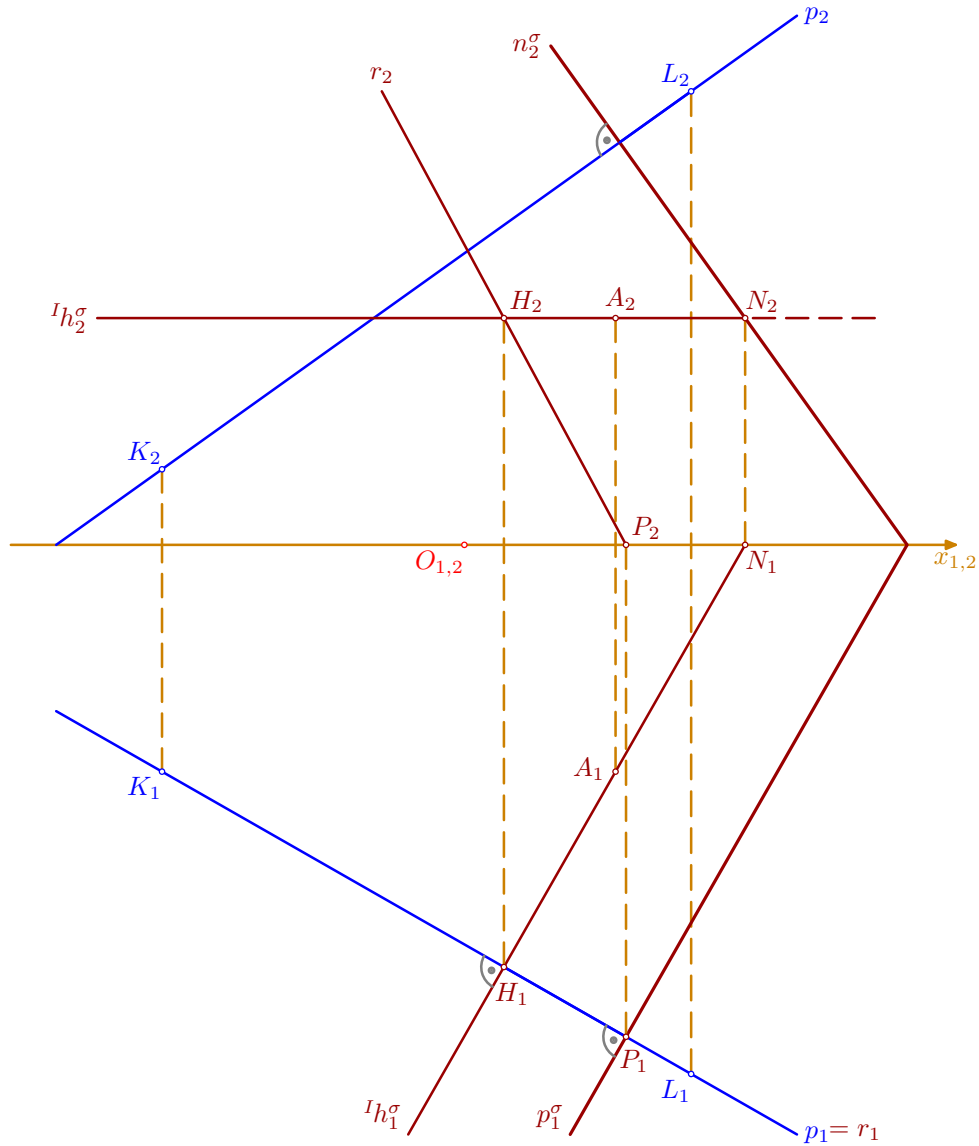
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2, K_1, K_2, L_1, L_2, p_1, p_2$  bodů  $A, K, L$  a přímky  $p = KL$



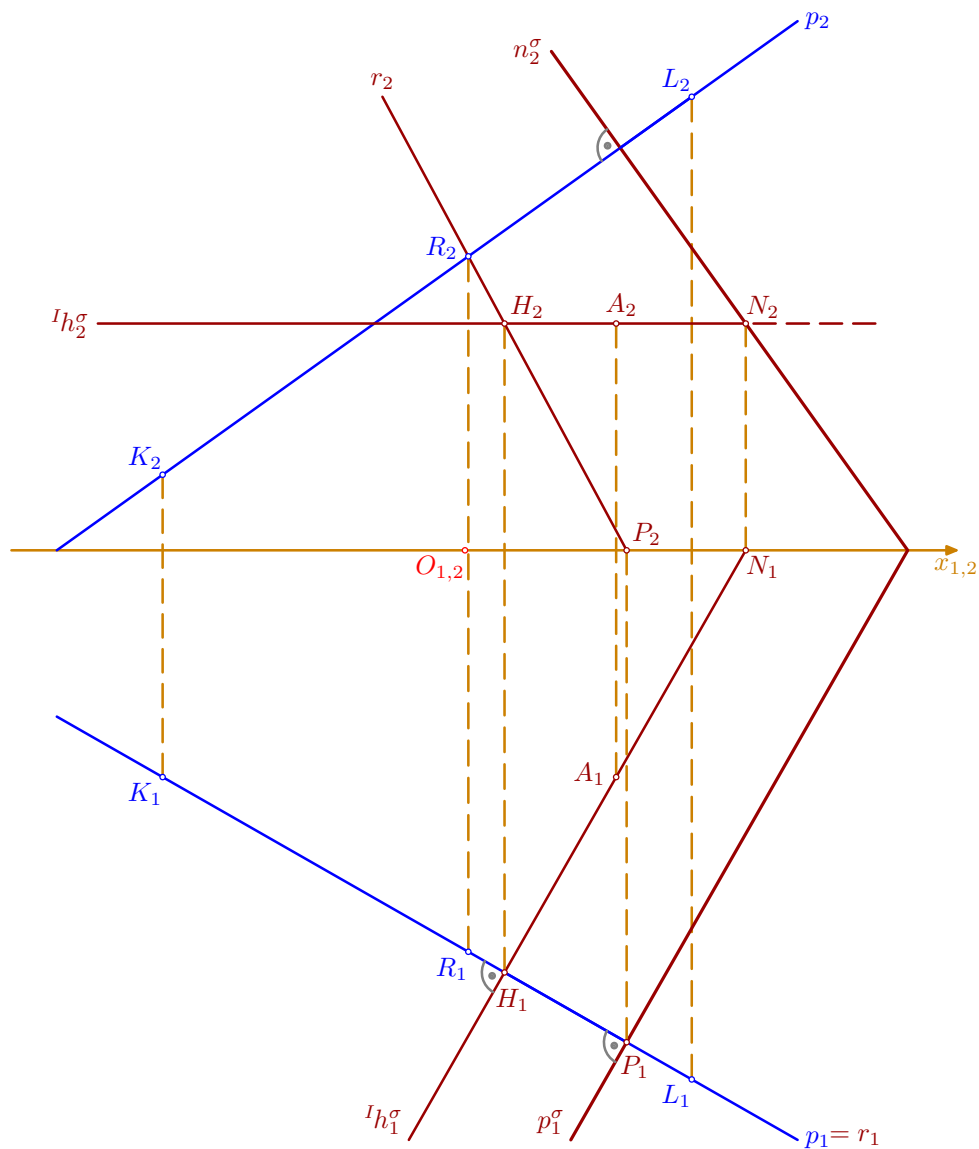
- bodem  $A$  vedeme rovinu  $\sigma \perp p$ : přímka  ${}^I h_1^\sigma \perp p_1$ ,  $A_1 \in {}^I h_1^\sigma$  je půdorysem hlavní přímky I. osnovy roviny  $\sigma$ , pro její nárys platí  ${}^I h_2^\sigma \parallel x_{1,2}$ ,  $A_2 \in {}^I h_2^\sigma$ ; bod  $N_1 = {}^I h_1^\sigma \cap x_{1,2}$  je půdorysem nárysného stopníku  $N = {}^I h^\sigma \cap \nu$  sestřojené hlavní přímky, jeho nárys  $N_2$  leží na ordinále a na přímce  ${}^I h_2^\sigma$ ; a bodem  $N_2$  prochází nárysná stopa  $n_2^\sigma \perp p_2$ , která se s půdorysnou stopou  $p_1^\sigma \perp p_1$  protíná na ose  $x$



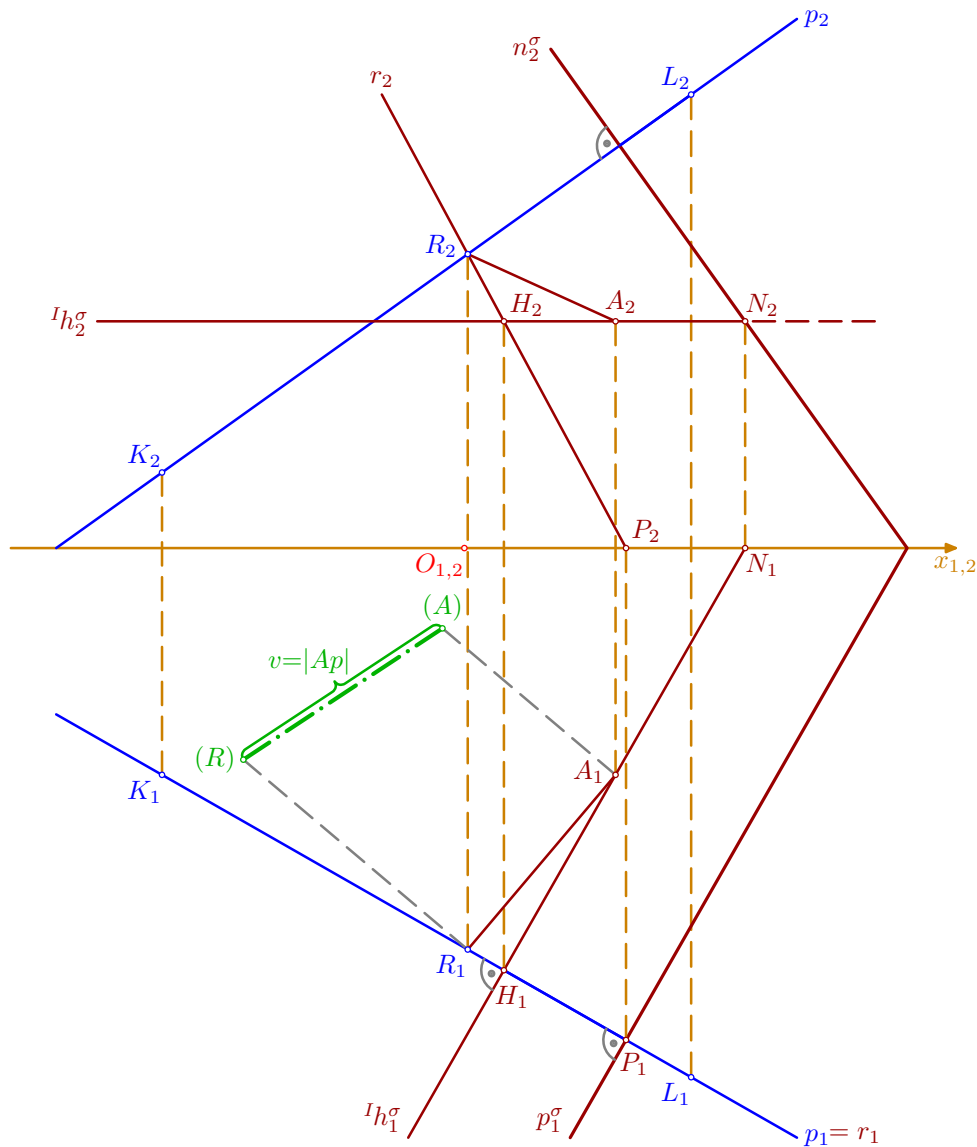
- půdorysně promítací rovina přímky  $p$  protíná rovinu  $\sigma$  v přímce  $r = PH$ , kde  $P_1 = p_1^\sigma \cap p_1$  a nárys  $P_2$  leží na ordinále a na ose  $x$ , podobně je  $H_1 = {}^I h_1^\sigma \cap p_1$  a nárys  $H_2$  leží na ordinále a na přímce  ${}^I h_2^\sigma$ ; v půdoryse je pak  $r_1 = P_1 H_1 = p_1$  ( $r$  je půdorysně krycí přímka) a v náryse dostaneme  $r_2 = P_2 H_2$



- sestrojená přímka  $r$  protíná danou přímku  $p$  v bodě  $R$ , který je současně průsečíkem přímky  $p$  s rovinou  $\sigma$ ; v náryse je  $R_2 = p_2 \cap r_2$  a půdorys  $R_1$  na ordinále a na přímce  $p_1 = r_1$



- na závěr stačí určit skutečnou délku úsečky  $AR$ ; provedme to sklopením její půdorysně promítací roviny: pro sklopené polohy  $(A), (R)$  bodů  $A, R$  platí  $|(A)A_1| = z_A = 3$ ,  $|(R)R_1| = z_R = |xR_2|$ ; řešením úlohy je délka  $v = |Ap| = |AR| = |(A)(R)$

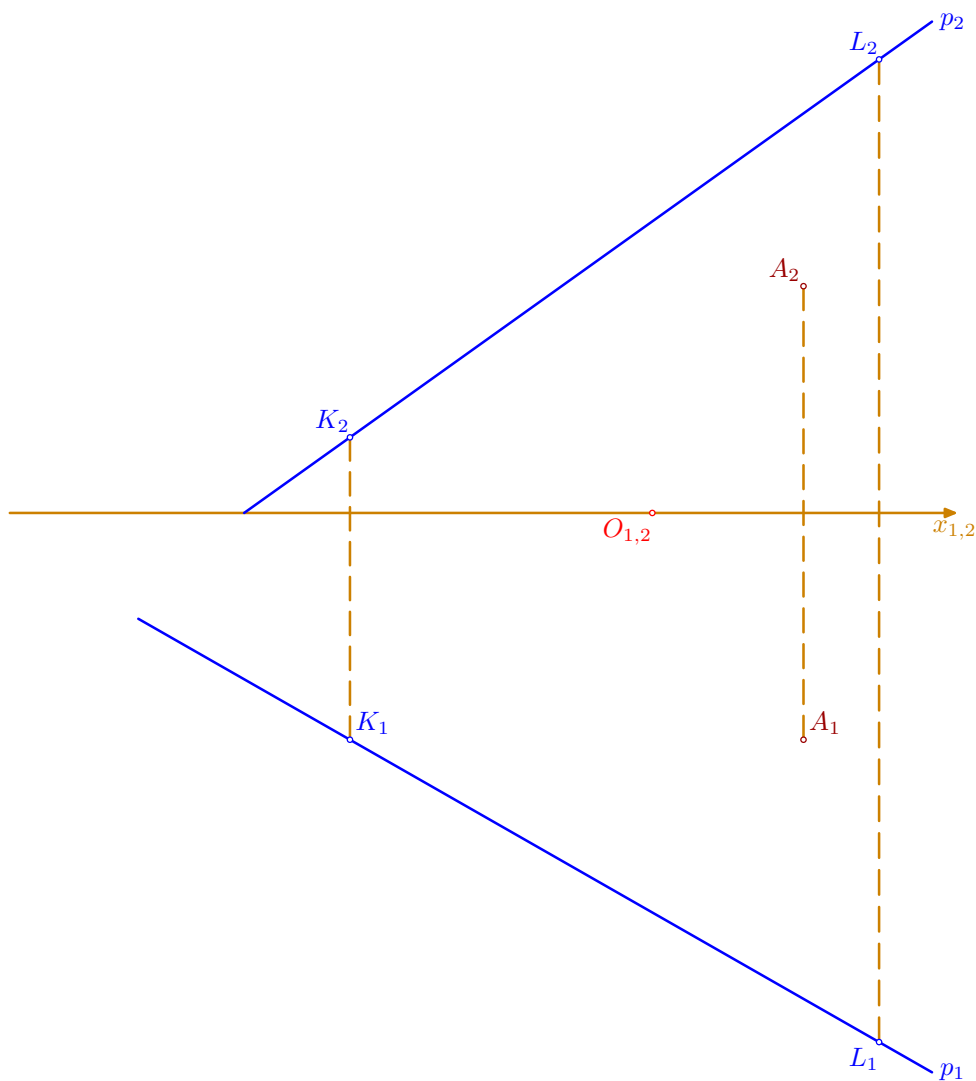


□

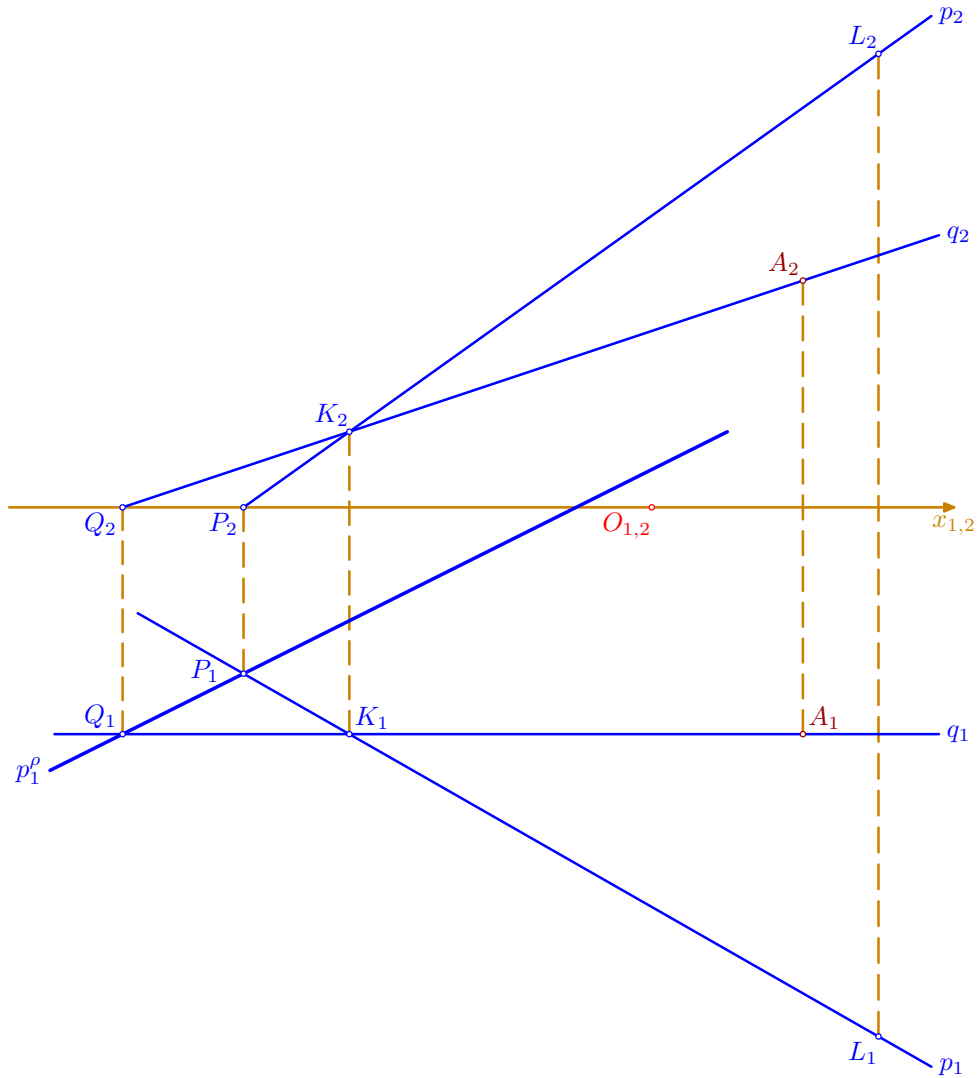
2. způsob řešení – pomocí otočení roviny určené daným bodem a danou přímkou

**Příklad:** Určete vzdálenost  $v = |Ap|$  bodu  $A$  od přímky  $p = KL$ ;  $A[2; 3; 3]$ ,  $K[-4; 3; 1]$ ,  $L[3; 7; 6]$ .

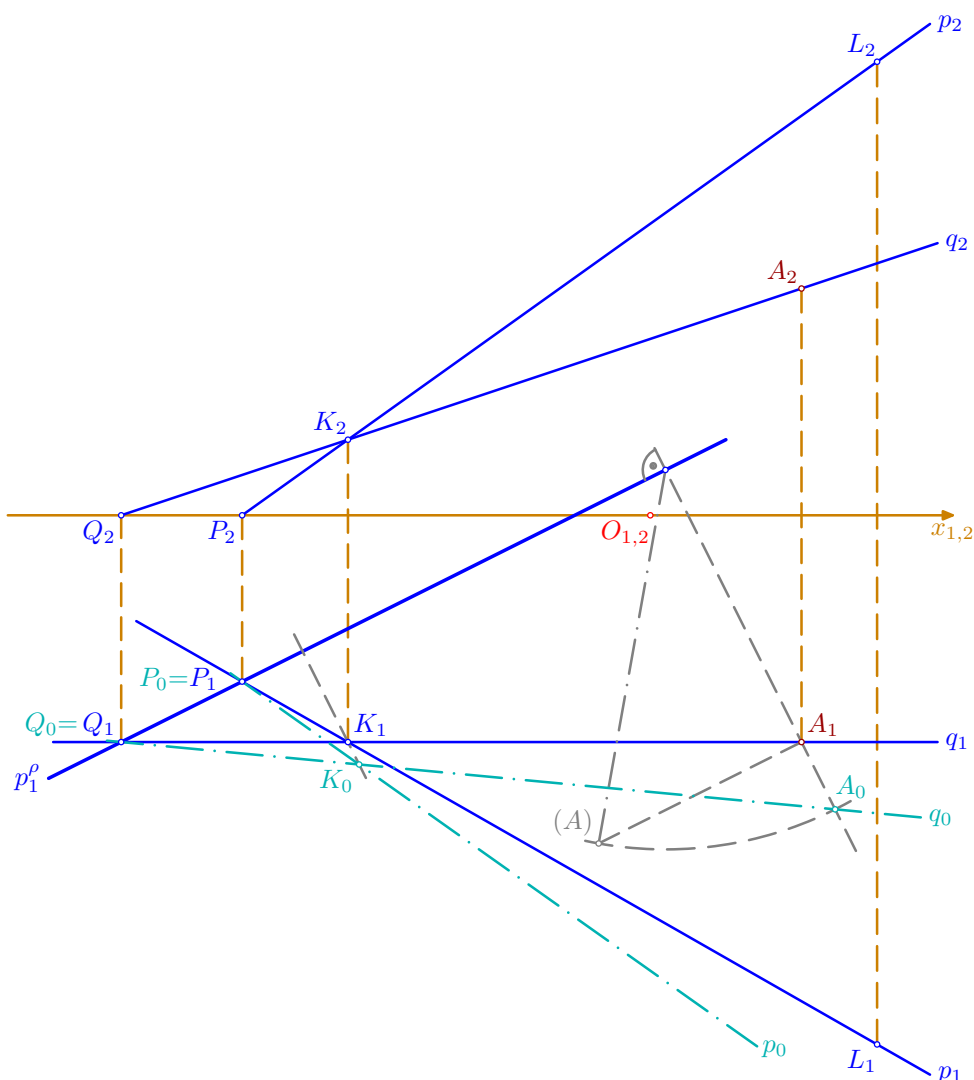
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2, K_1, K_2, L_1, L_2, p_1, p_2$  bodů  $A, K, L$  a přímky  $p = KL$



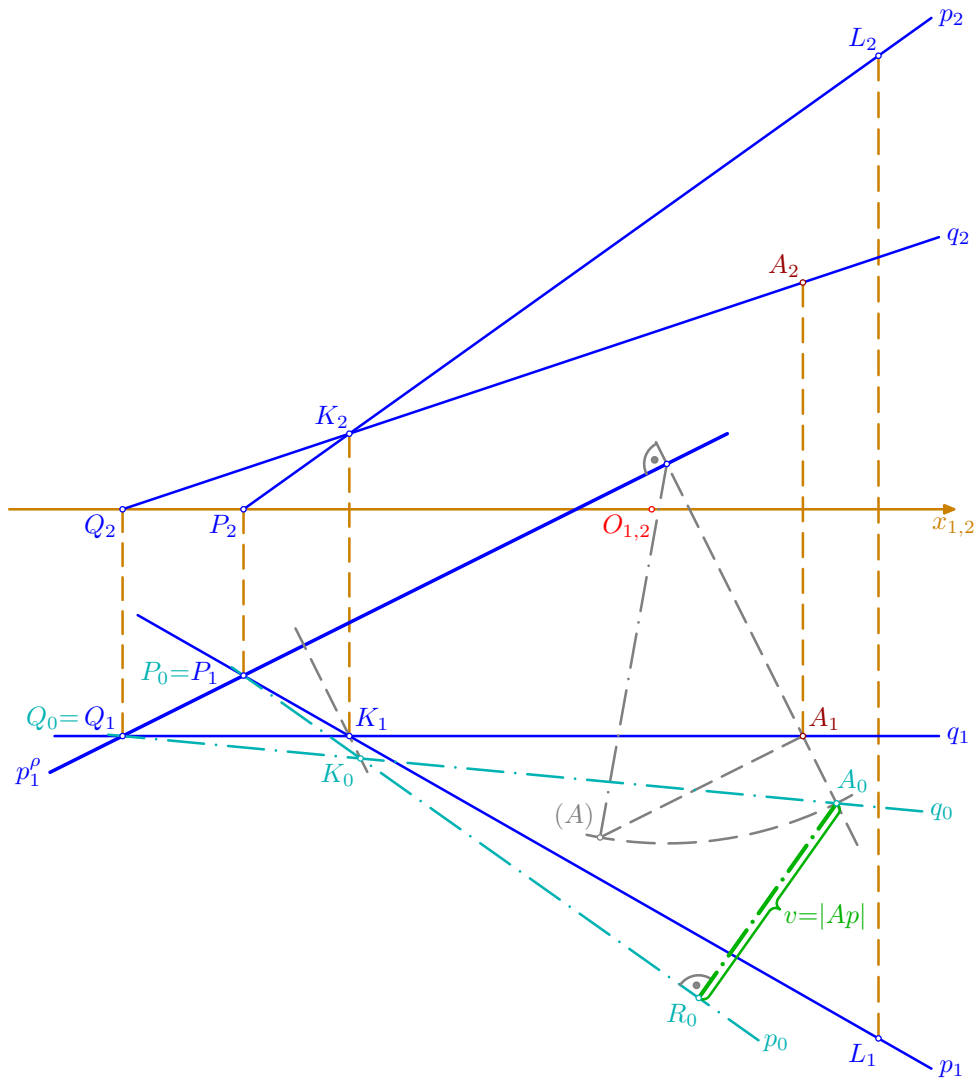
- sestrojme půdorysnou stopu  $p^p = PQ$  roviny  $\rho = Ap = AKL$ , kde body  $P, Q$  jsou půdorysné stopníky přímek  $p = KL, q = AK$ : v náryse je  $P_2 = p_2 \cap x_{1,2}$  a  $Q_2 = q_2 \cap x_{1,2}$ , půdorysy  $P_1 \in p_1, Q_1 \in q_1$  leží na příslušných ordinálách; půdorysná stopa je přímka  $p_1^p = P_1Q_1$



- rovinu  $\rho$  otočme kolem půdorysné stopy  $p^\rho$  do půdorysny, sestrojme otočené polohy  $A_0, p_0$  bodu  $A$  a přímky  $p$ : nejprve určíme poloměr otáčení bodu  $A$  sklopením příslušné roviny otáčení (viz sklopená poloha  $(A)$  bodu  $A$ , kde  $|A_1(A)| = z_A = 3$ ) a sestrojme otočenou polohu  $A_0$  (volíme variantu otočení o menší úhel); bod  $Q = Q_1 = Q_0$  zůstává při otáčení na místě a přímka  $q_0 = Q_0A_0$  je otočenou polohou přímky  $q$ ; na ní sestrojíme otočenou polohu  $K_0$  bodu  $K$  a následně otočenou polohu  $p_0 = P_0K_0$  přímky  $p$ , kde  $P_0 = P_1 = P$ ; jinak řečeno, body  $A_1$  a  $A_0$ , resp.  $K_1$  a  $K_0$ , si odpovídají v pravoúhlé osové afinitě, jejíž osou je stopa  $p_1^\rho$ ; v této afinitě si také odpovídají přímky  $p_1$  a  $p_0$ , resp.  $q_1$  a  $q_0$ , které se protínají v samodružném bodě  $P_1 = P_0$ , resp.  $Q_1 = Q_0$ , na ose  $p_1^\rho$



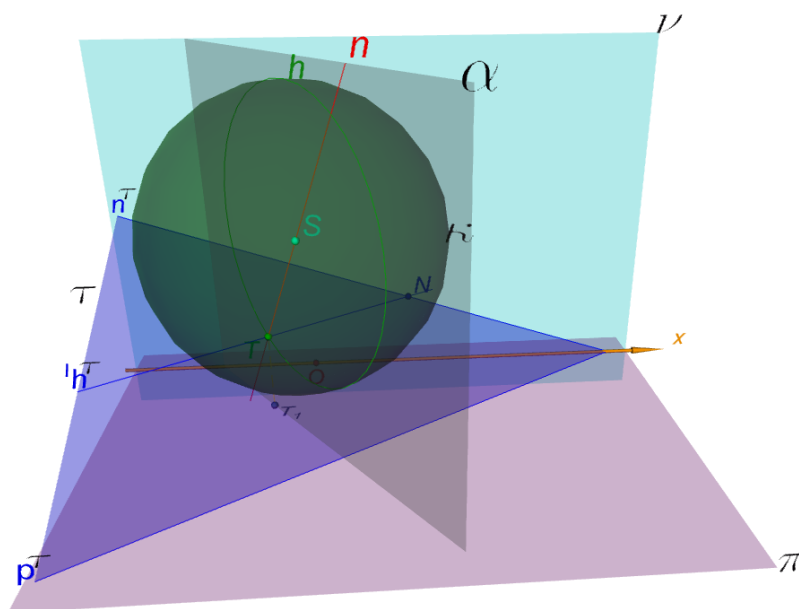
- nyní již snadno úlohu dořešíme v otočení: bodem  $A_0$  ved' me kolmici k přímce  $p_0$ , její patu označme  $R_0$  a svorkou zvýrazněme výsledek, jímž je velikost  $v = |A_0R_0| = |A_0p_0| = |Ap|$  úsečky  $A_0R_0$



□

Např. pomocí kružítko můžeme zkusit ověřit, že oba způsoby řešení vedou k témuž výsledku. . .

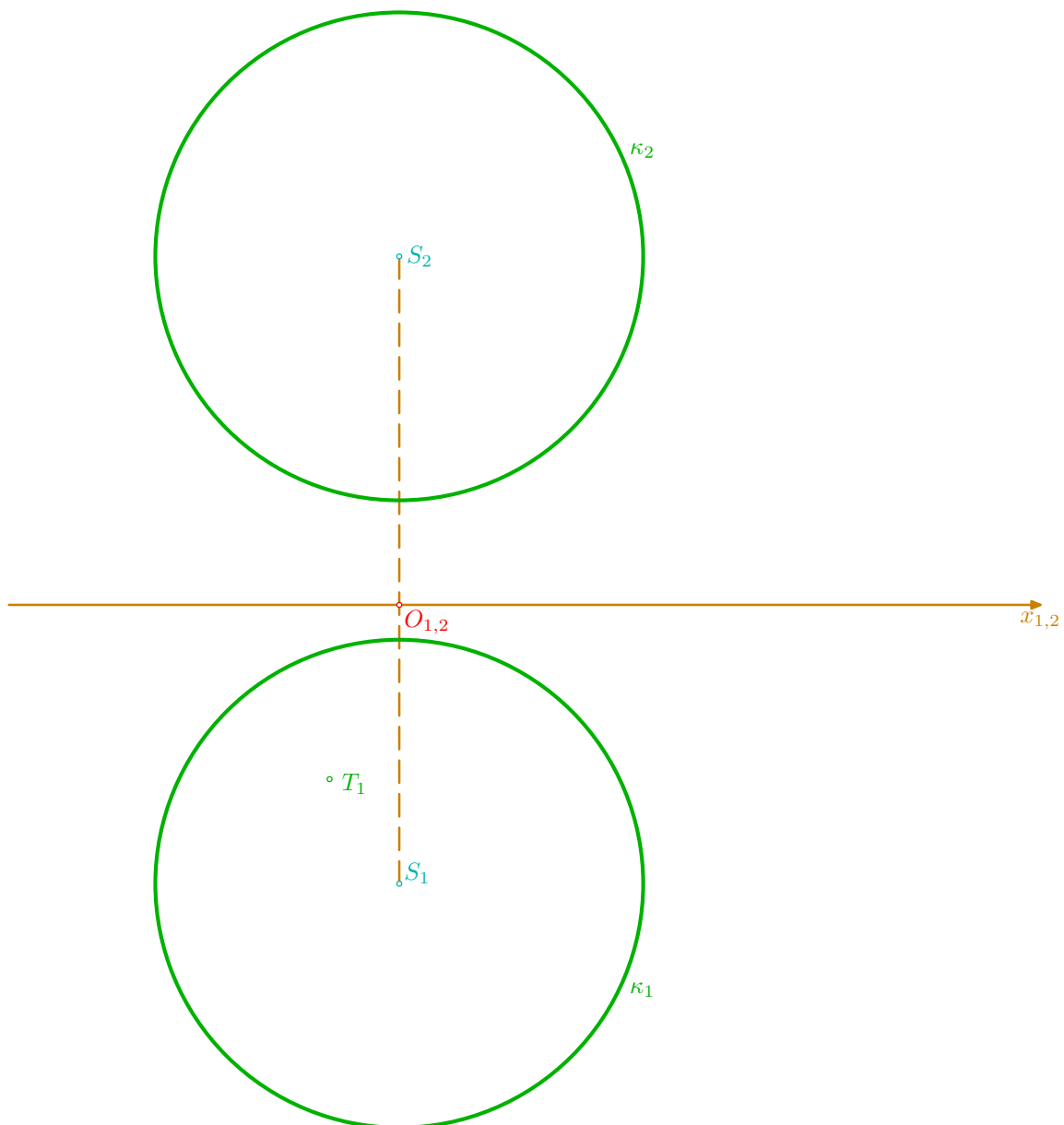
## 5.6. Tečná rovina kulové plochy



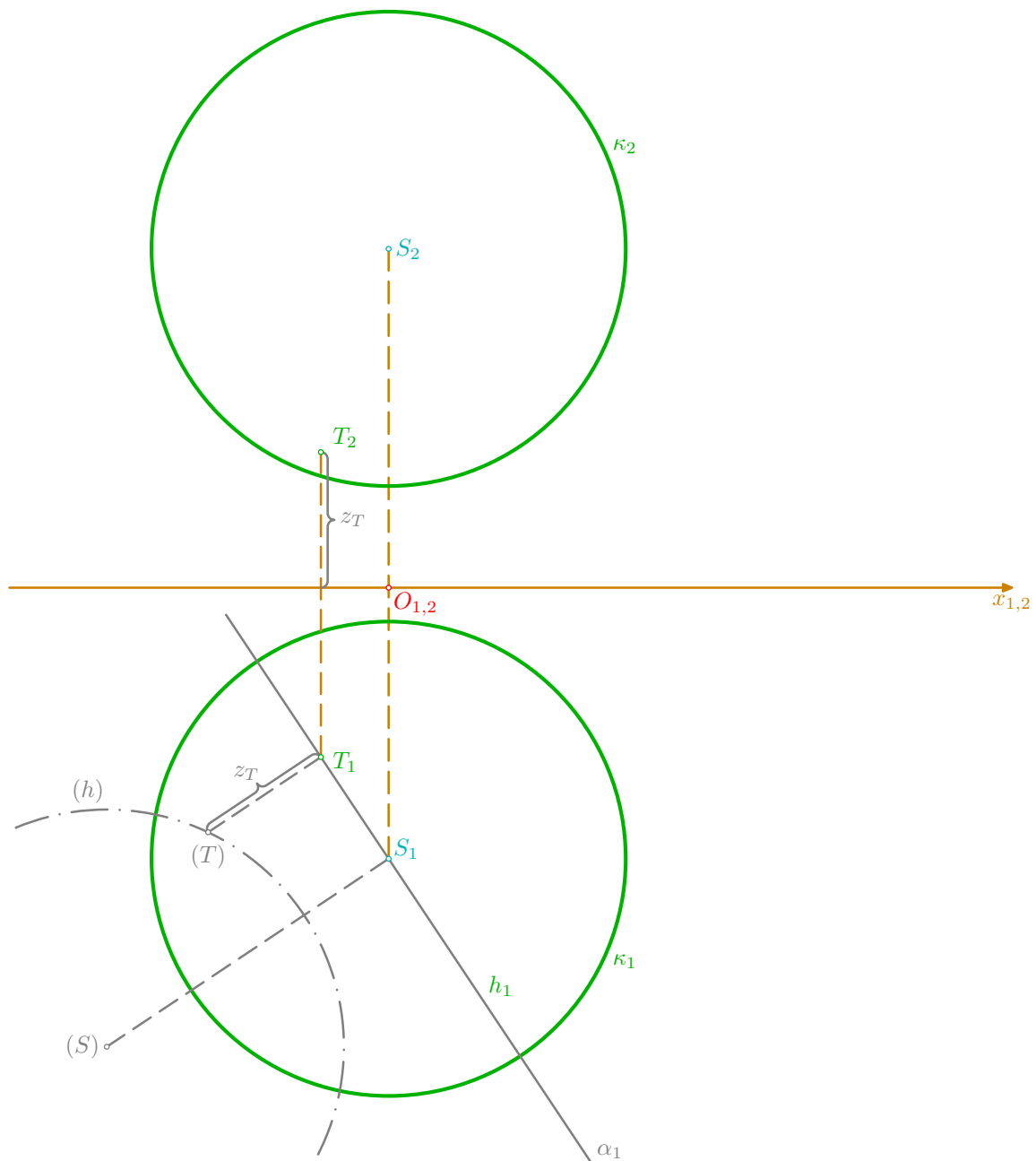
## Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte tečnou rovinu  $\tau$  kulové plochy  $\kappa(S, r)$  v jejím bodě  $T$ ;  $S[0; 4; 5]$ ,  $r=3,5$ ,  $T[-1; 2,5; ?]$ .

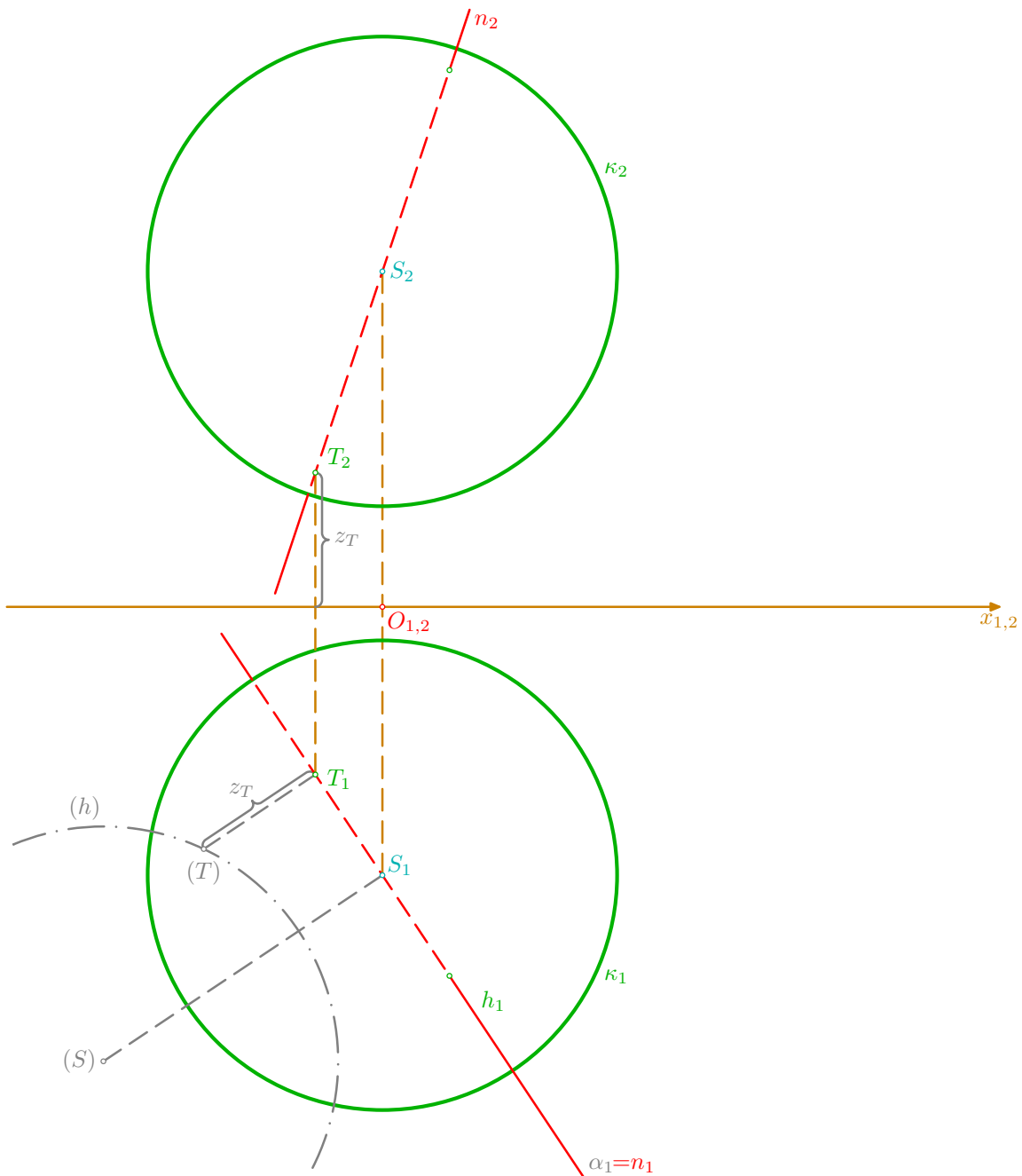
- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojme sdružené průměty  $S_1, S_2$  bodu  $S$  a půdorys  $T_1$  bodu  $T$ ; půdorysem  $\kappa_1$ , resp. nárysem  $\kappa_2$ , kulové plochy  $\kappa$  je kruh o středu  $S_1$ , resp.  $S_2$ , a poloměru  $r = 3,5$



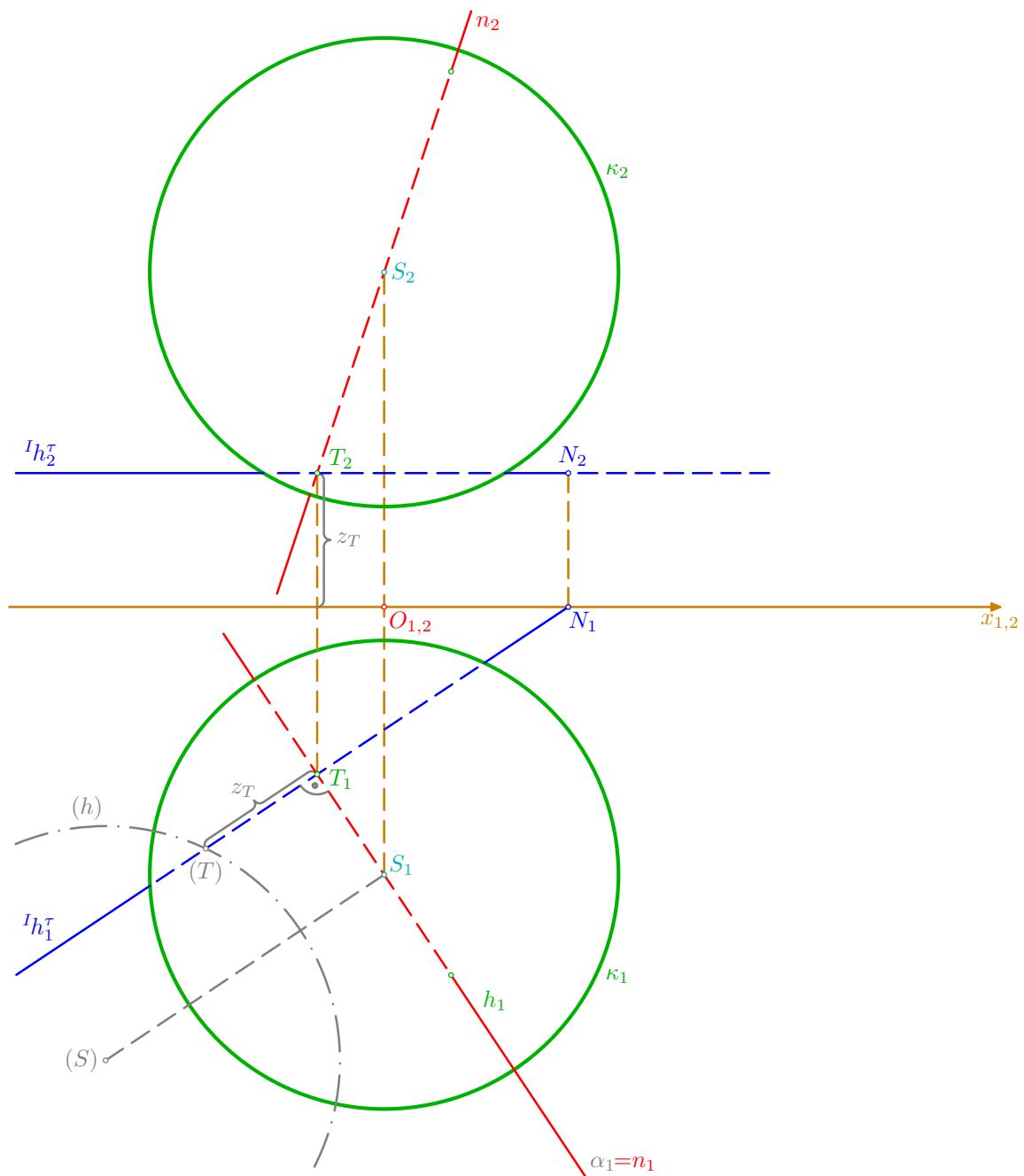
- nejprve doplníme nárys  $T_2$  bodu  $T \in \kappa$ : přímka  $\alpha_1 = S_1T_1$  je půdorysem roviny  $\alpha \perp \pi$ , která protíná kulovou plochu  $\kappa$  v hlavní kružnici  $h(S, r)$ ; sklopme rovinu  $\alpha$  do půdorysny a sestrojme sklopené polohy  $(S)$ ,  $(h)$ ,  $(T)$  středu  $S$ , kružnice  $h$  a na ní ležícího bodu  $T$  (ze dvou možností vyberme bod bližší k půdorysně); ve sklopení získáme  $z$ -ovou souřadnici  $z_T = |T_1(T)|$  bodu  $T$ , kterou vyneseme od osy  $x$  na příslušnou ordinálu a sestrojíme tak nárys  $T_2$  dotykového bodu  $T$



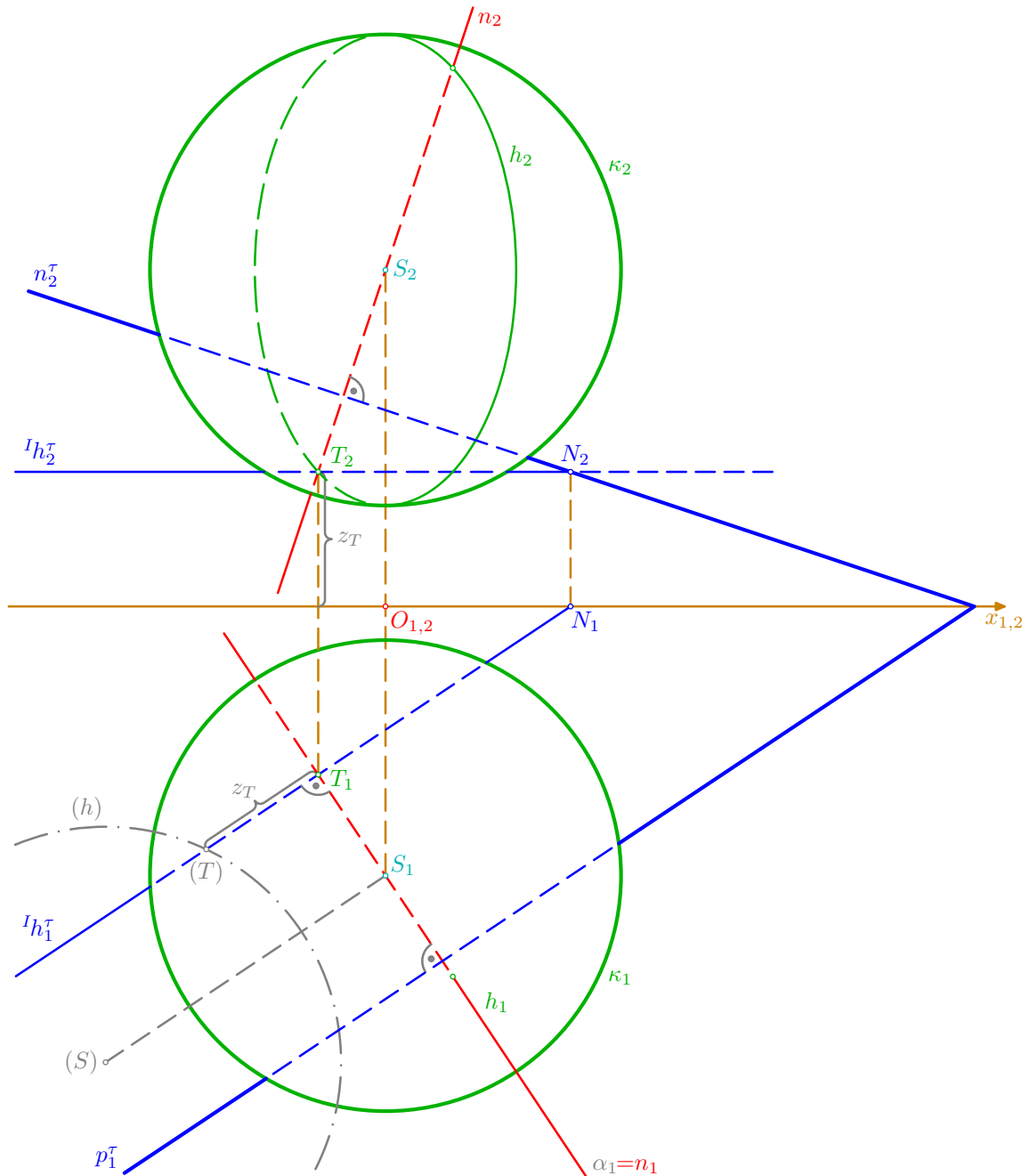
- hledaná tečná rovina  $\tau$  musí být kolmá k přímce  $n = ST$ , jejímž půdorysem je přímka  $n_1 = S_1T_1$  a nárysem přímka  $n_2 = S_2T_2$ ; v obou průmětech je naznačena viditelnost normály  $n$  vzhledem ke kulové ploše  $\kappa$ ; k tomu účelu jsou doplněny sdružené průměty bodu souměrného s bodem  $T$  podle středu  $S$



- pro rovinu  $\tau \perp n$  je nejprve bodem  $T$  vedena hlavní přímka  ${}^I h^\tau$  její I. osnovy: v půdoryse je  ${}^I h_1^\tau \perp n_1, T_1 \in {}^I h_1^\tau$  a v náryse platí  ${}^I h_2^\tau \parallel x_{1,2}, T_2 \in {}^I h_2^\tau$ ; současně je sestaven také nárysný stopník  $N$  přímky  ${}^I h^\tau$ : pro jeho půdorys platí  $N_1 = {}^I h_1^\tau \cap x_{1,2}$  a nárys leží na ordinále a na přímce  ${}^I h_2^\tau$

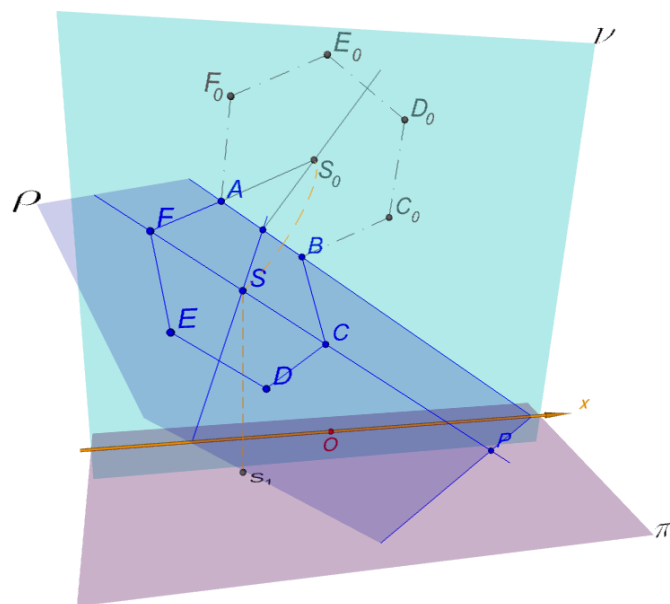


- na závěr již snadno doplníme stopy hledané tečné roviny  $\tau$ , která se dotýká dané kulové plochy  $\kappa(S, r)$  v jejím daném bodě  $T$ : nárysná stopa  $n_2^\tau$  prochází bodem  $N_2$  kolmo k přímce  $n_2 = S_2T_2$  a protíná se s půdorysnou stopou  $p_1^\tau \perp n_1$  na ose  $x = x_{1,2}$



□

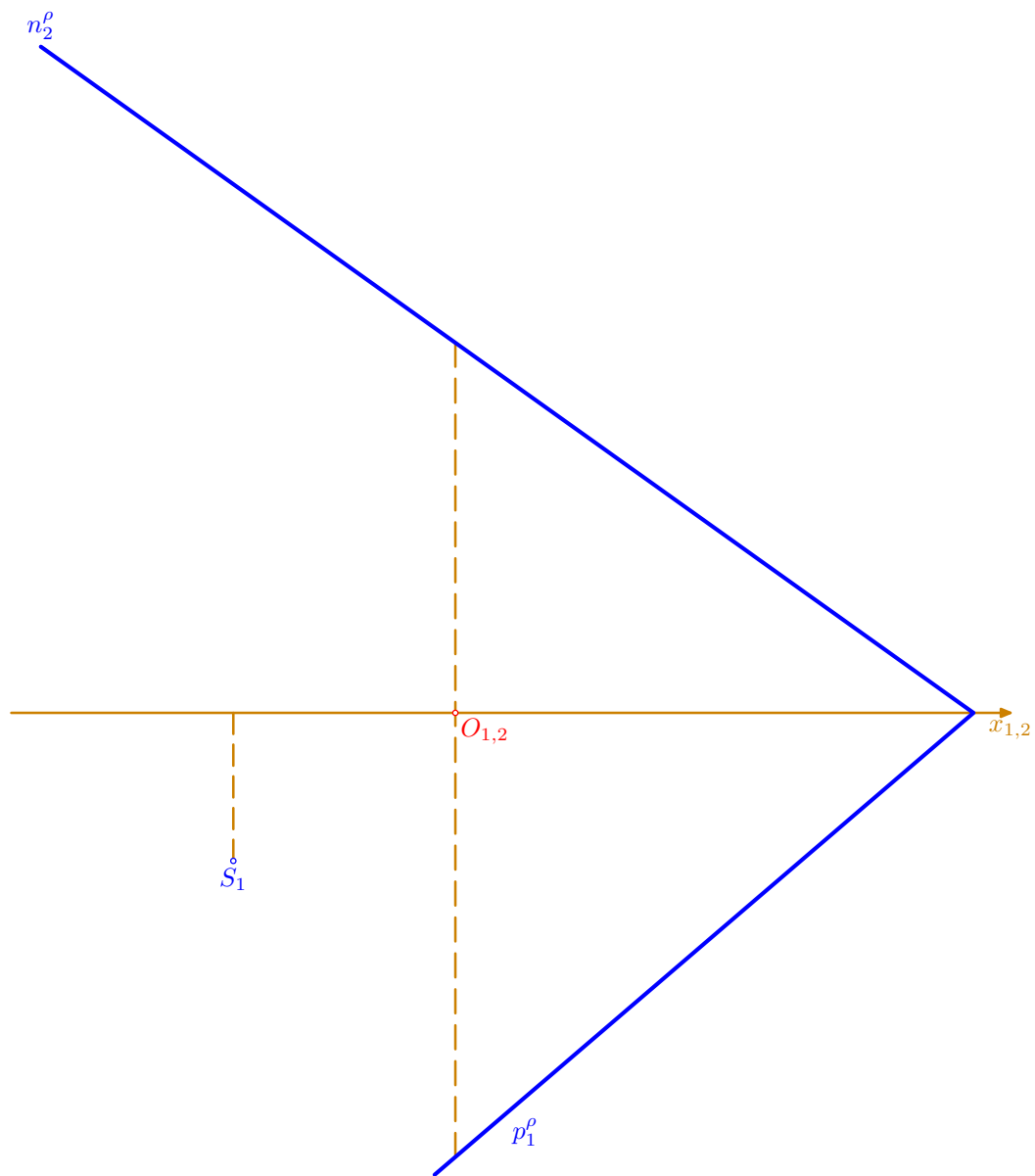
## 5.7. Konstrukce pravidelného šestiúhelníka



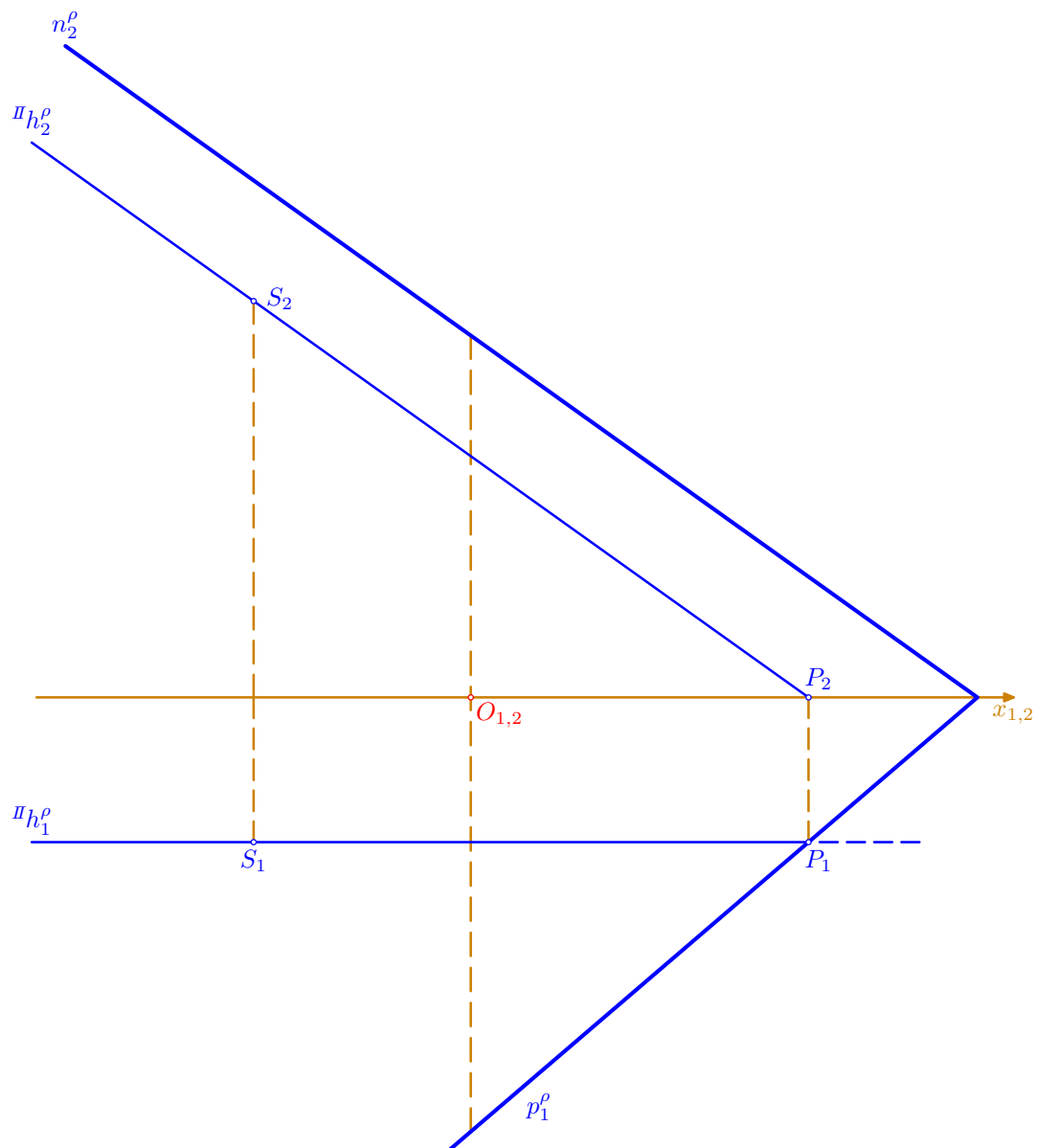
## Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte pravidelný šestiúhelník v rovině  $\rho$ , je-li dán jeho střed  $S$  a jedna strana leží v nárysně  $\nu$ ;  $\rho(7; 6; 5), S[-3; 2; ?]$ .

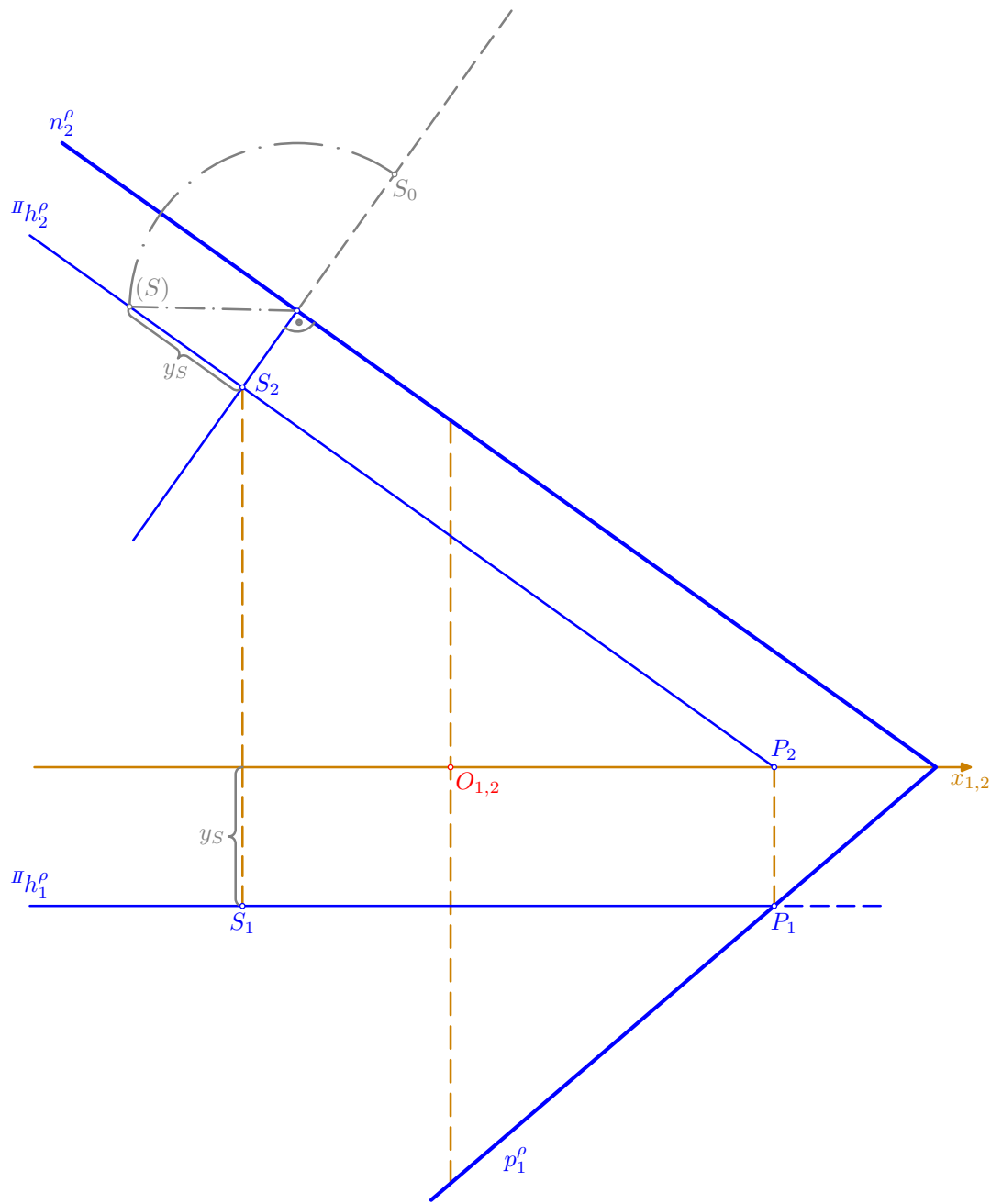
- podle zadání sestrojme stopy  $p_1^{\rho}$ ,  $n_2^{\rho}$  roviny  $\rho$  a půdorys  $S_1$  bodu  $S$



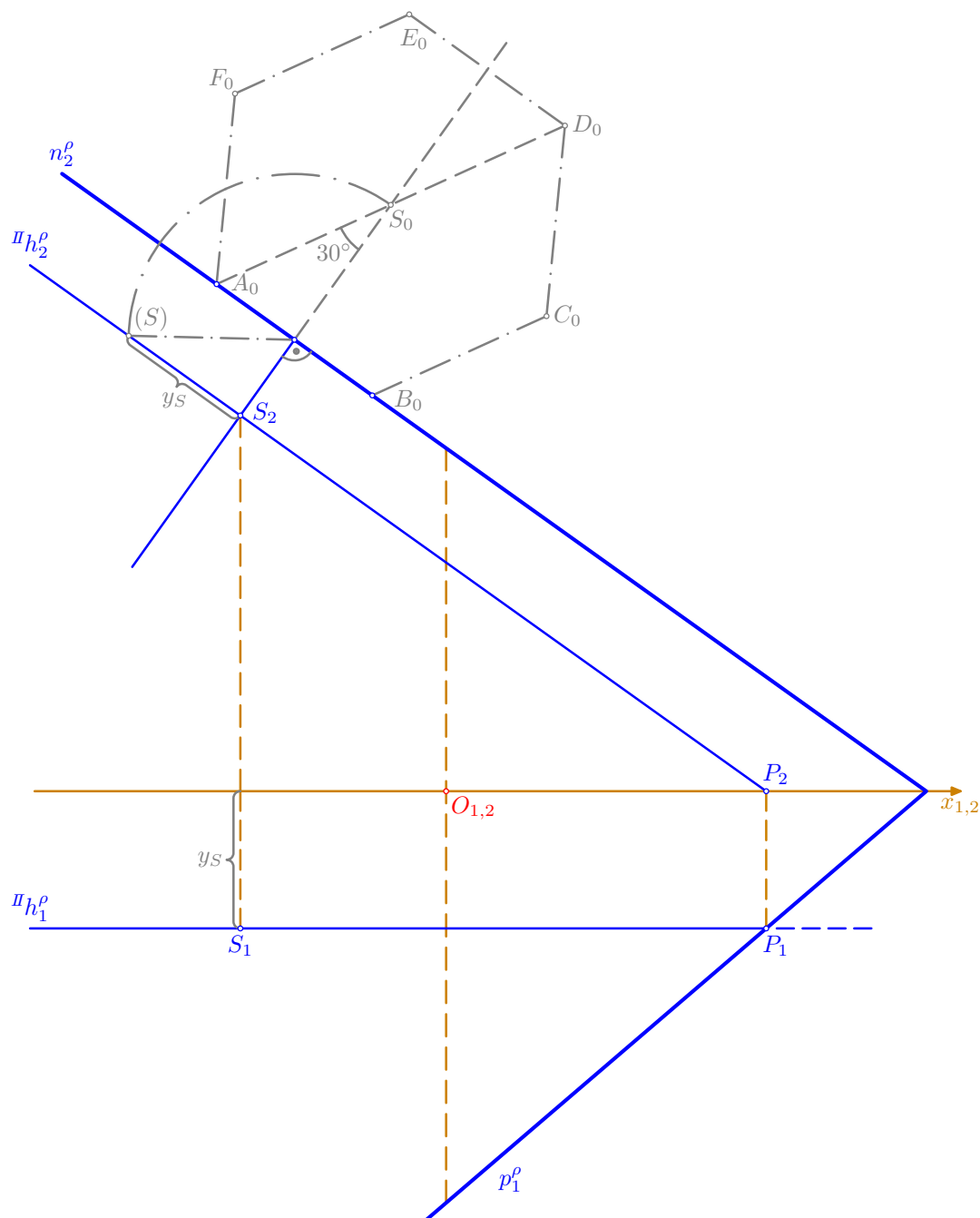
- doplníme nárys  $S_2$  bodu  $S$  pomocí hlavní přímky  ${}^{II}h^\rho$  II. osnovy roviny  $\rho$  a jejího půdorysného stopníku  $P = {}^{II}h^\rho \cap \pi$ : v půdorysu je  ${}^{II}h_1^\rho \parallel x_{1,2}$ ,  $S_1 \in {}^{II}h_1^\rho$  a  $P_1 = {}^{II}h_1^\rho \cap p_1^\rho$ , nárys  $P_2$  leží na ordinále a na ose  $x$  a pro nárys přímky  ${}^{II}h^\rho$  platí  ${}^{II}h_2^\rho \parallel n_2^\rho$ ,  $P_2 \in {}^{II}h_2^\rho$ ; nárys  $S_2$  leží na příslušné ordinále a na sestrojené přímce  ${}^{II}h_2^\rho$



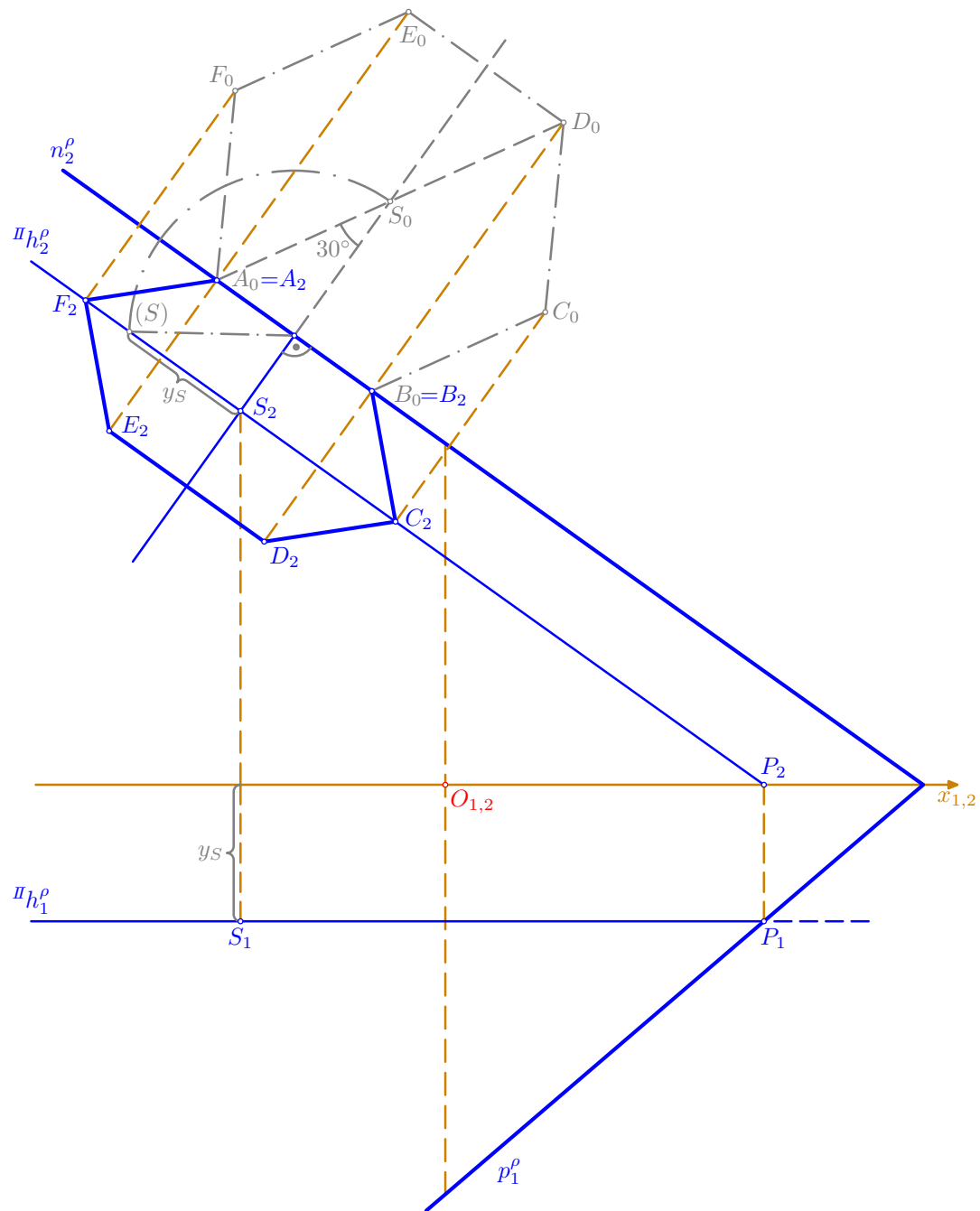
- sestrojme otočenou polohu  $S_0$  bodu  $S$  v otočení roviny  $\rho$  do nárýsny kolem nárýsné stopy  $n^\rho$ : poloměr  $|Sn^\rho|$  otáčení zjistíme ve sklopení příslušné roviny otáčení, kde pro sklopenou polohu  $(S)$  bodu  $S$  platí  $(S) \in \Pi h_2^\rho$ ,  $|S_2(S)| = y_S = |S_1x_{1,2}| = 2$ , a následně provedeme otočení do bodu  $S_0$  v uvedeném sklopení; konstrukce jsou provedeny obvyklým způsobem, tj. čerchovaně



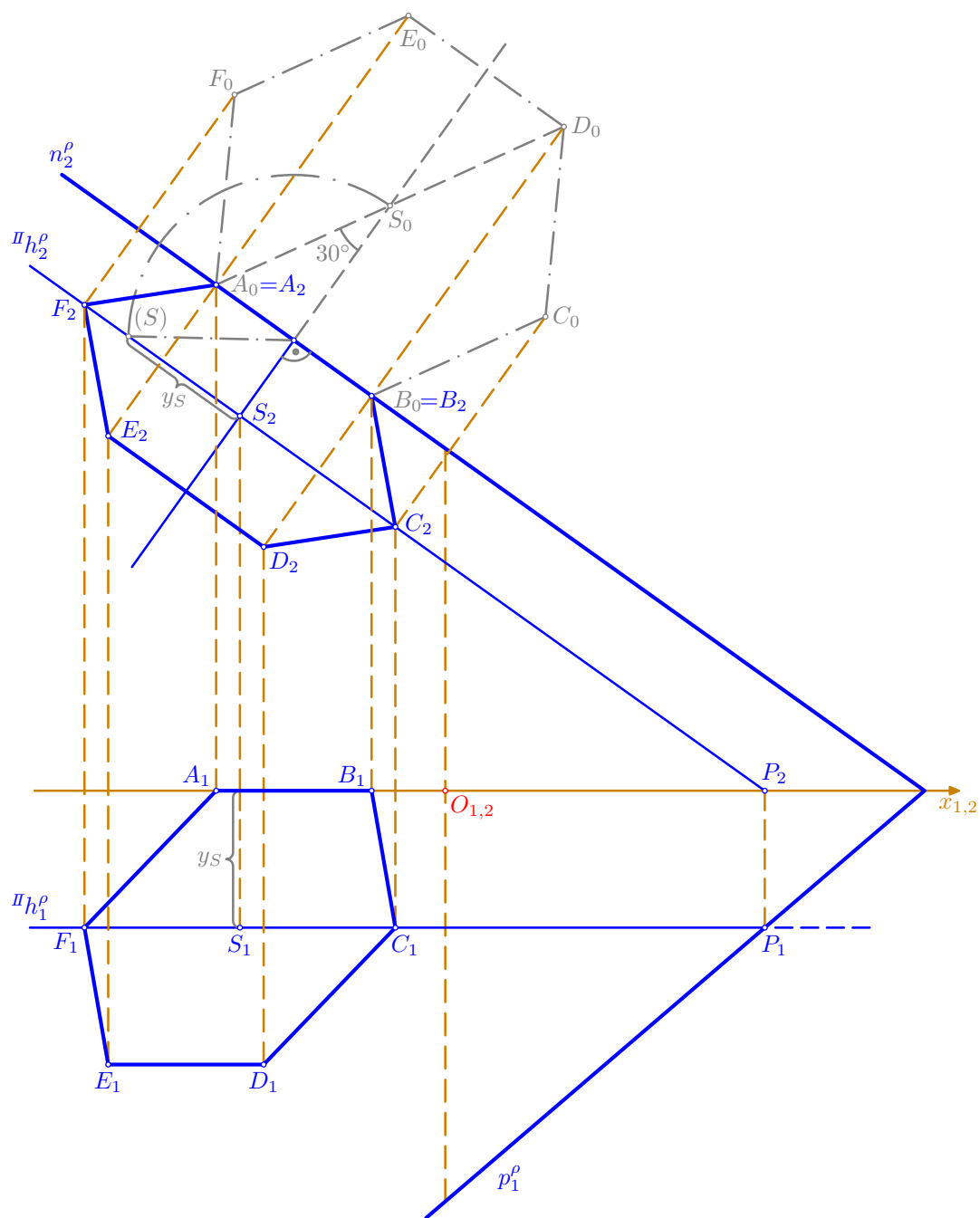
- v otočení vyřešíme zadanou úlohu: sestrojíme pravidelný šestiúhelník  $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ , který má střed  $S_0$  a jehož strana  $A_0B_0$  leží na nárysné stopě  $n_2^p$  (způsob konstrukce je patrný z obrázku); tento šestiúhelník je vskutku řešením, neboť po otočení zpět do roviny  $\rho$  bude mít střed v bodě  $S$  a strana  $AB$  zůstane ležet v nárysně



- provedme otočení zpět a sestrojme nárys  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$  šestiúhelníka  $ABCDEF$ ; při tom lze využít pravoúhlou osovou afinitu, jejíž osou je nárysná stopa  $n_2^p$  a v níž si odpovídají body  $S_0$  a  $S_2$ ; při ručním rýsování vede ovšem její užití často k nepřesnostem a je velmi vhodné průběžně konstrukce kontrolovat pomocí středové souměrnosti, která se v průmětu zachová

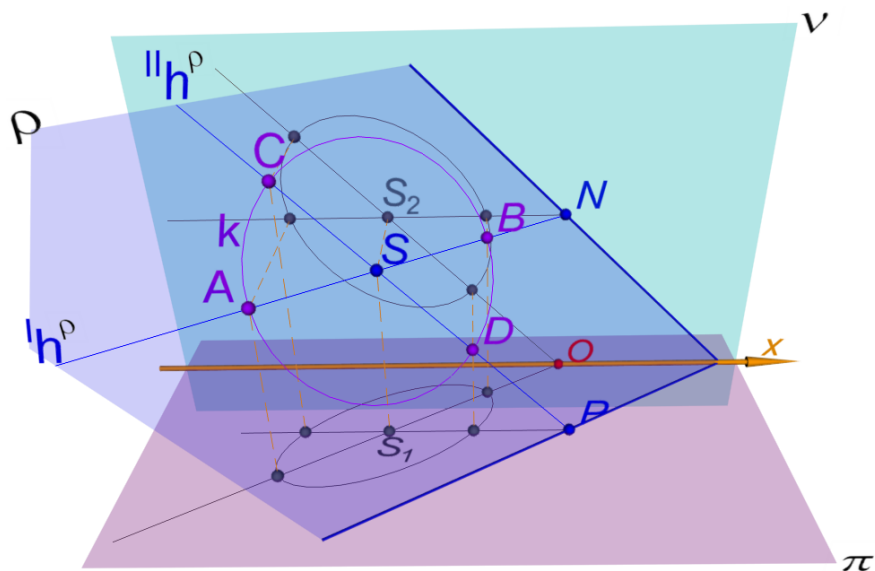


- na závěr doplňme půdorys  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  šestiúhelníka  $ABCDEF$ ; zde využijeme ordinály a opět středovou souměrnost tentokrát podle bodu  $S_1$



□

## 6. Zobrazení kružnice v Mongeově promítání



### Výklad

- půdorysem i nárysem kružnice, která leží v rovině obecně položené k oběma průmětnám, jsou **elipsy**, jež mají délky hlavních poloos rovny poloměru dané kružnice
- je-li kružnice v obecné rovině dána svým středem a poloměrem, lze její průměty snadno sestrojít podle následujícího příkladu
- pokud je kružnice dána jinak, např. třemi body nebo středem a tečnou, je obvykle nejvýhodnější **otočit rovinu této kružnice** do některé z průmětem, v otočení kružnici sestrojít a poté vrátit zpět do půdorysu a nárysu

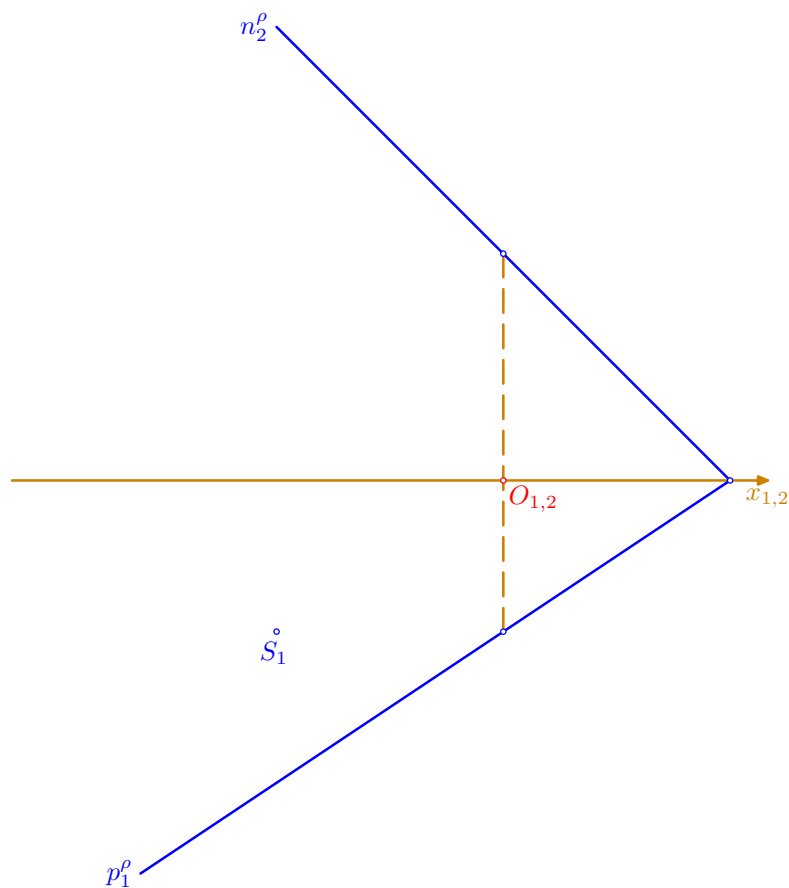




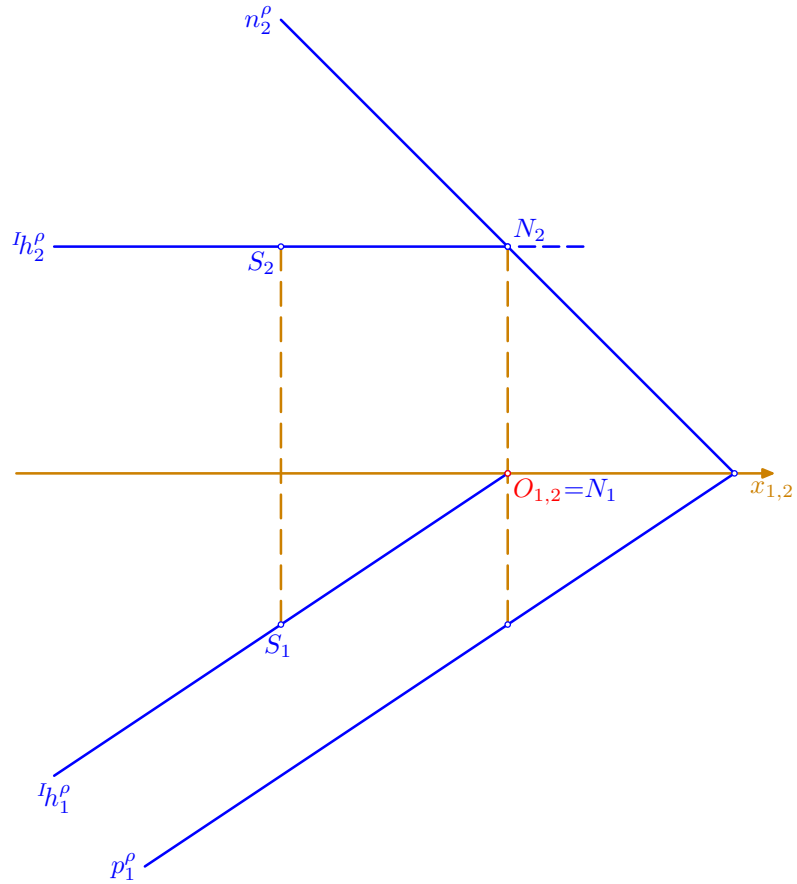
### Řešené úlohy

**Příklad:** V rovině  $\rho$  sestrojte kružnici  $k(S, r)$ ;  $\rho(3; 2; 3)$ ,  $S[-3; 2; ?]$ ,  $r = 2$ .

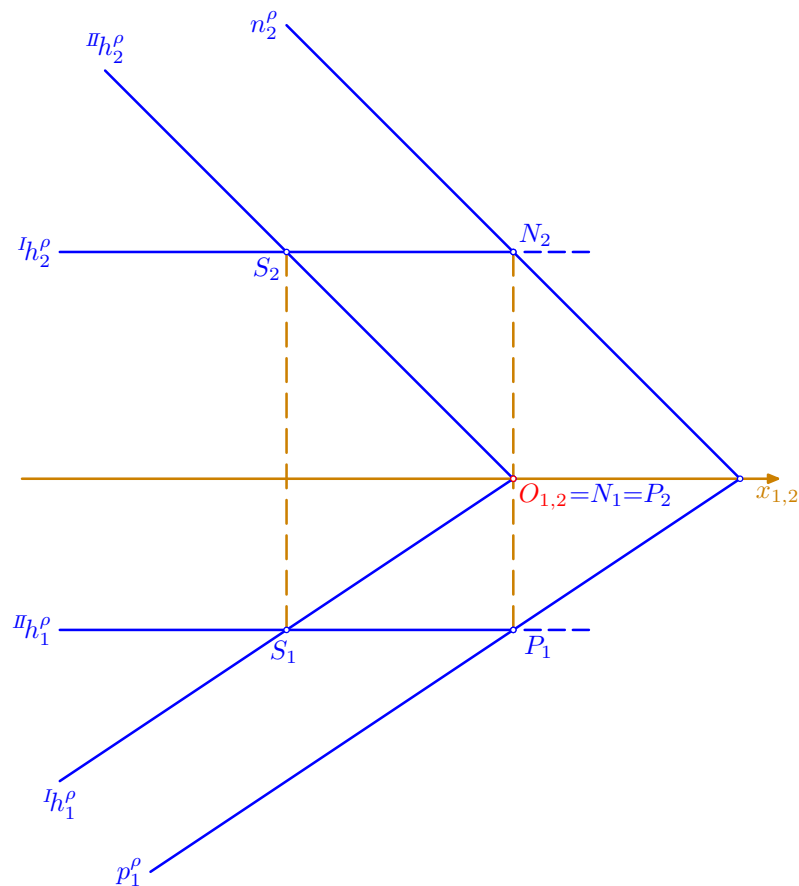
- podle zadání sestrojme stopy  $p_1^{\rho}$ ,  $n_2^{\rho}$  roviny  $\rho$  a půdorys  $S_1$  středu  $S$ ; poloměr  $r$  použijeme později



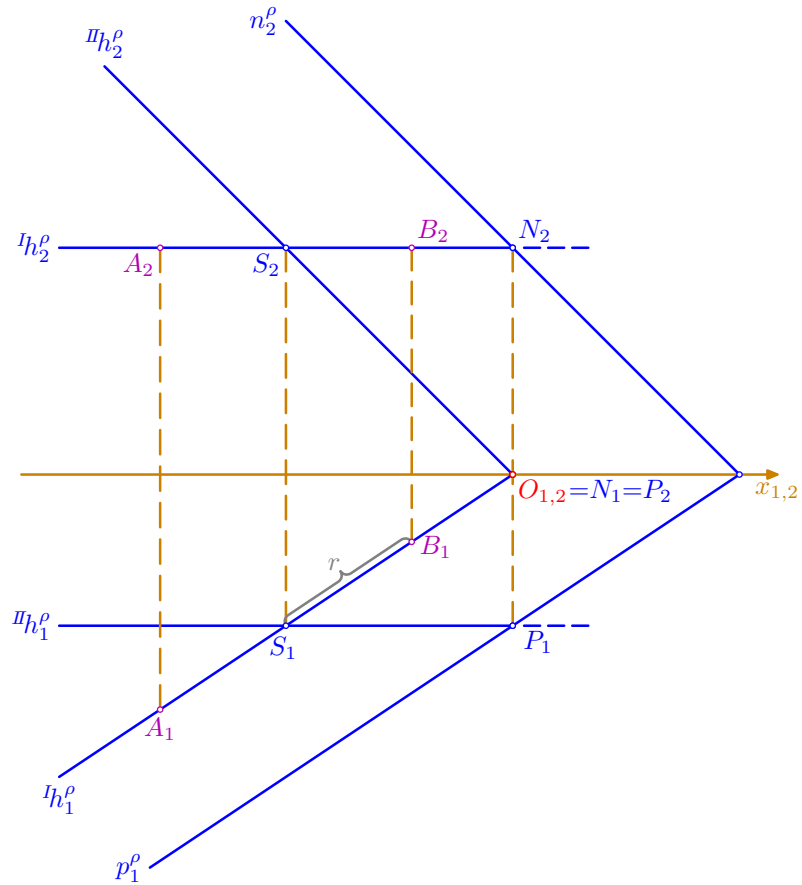
- pomocí hlavní přímky  $h^p$  I. osovy doplňme nárys bodu  $S \in \rho$ : je  $h_1^p \parallel p_1^p, S_1 \in h_1^p$ , nárysny stopník  $N$  má půdorys  $N_1 = h_1^p \cap x$  (vychází do počátku  $O$ ), nárys  $N_2$  leží na ordinále a na stopě  $n_2^p$ , jím prochází nárys  $h_2^p \parallel x$  užité hlavní přímky; bod  $S_2$  najdeme na ordinále a sestrojíme přímce  $h_2^p$



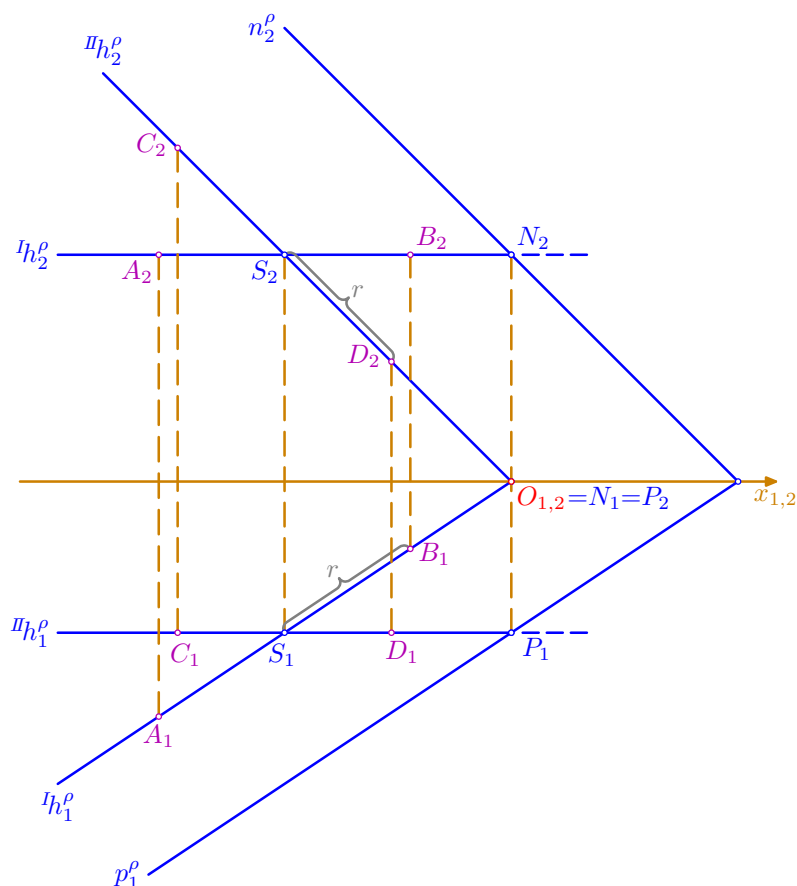
- bodem  $S$  vedme také hlavní přímku  $h^p$  II. osnovy: pro její sdružené průměty platí  $h_1^p \parallel x, S_1 \in h_1^p$  a  $h_2^p \parallel n_2, S_2 \in h_2^p$ ; pro půdorysný stopník  $P$  této hlavní přímky platí  $P_1 = h_1^p \cap p_1^p$  a  $P_2$  leží na ordinále a na ose  $x$  (také vychází do počátku  $O$ )



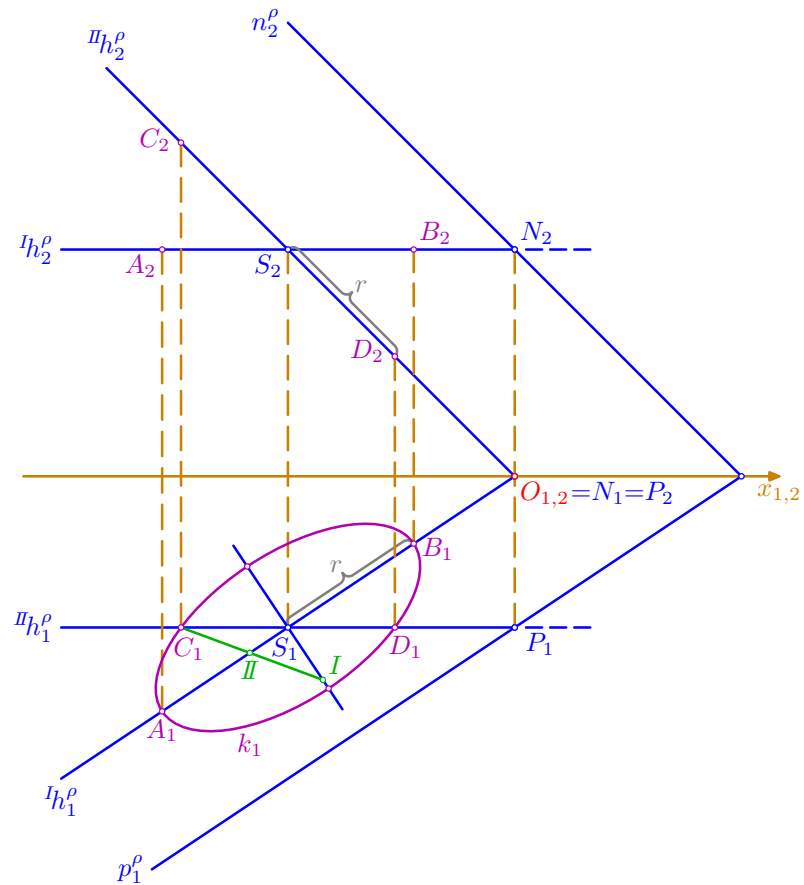
- sestrojme body  $A, B = I_{h^{\rho}} \cap k$ : v půdorysu se na  $I_{h_1^{\rho}}$  zachová délka úsečky a platí tedy  $|A_1 S_1| = |B_1 S_1| = r$ , nárysy  $A_2, B_2$  bodů  $A, B$  najdeme po ordinálách na přímce  $I_{h_2^{\rho}}$ ; úsečka  $AB$  je jediný průměr kružnice  $k$ , který se v půdorysu nezkrátí, a tudíž jsou body  $A_1, B_1$  hlavní vrcholy elipsy  $k_1$ , která je půdorysem dané kružnice  $k$ ; nárysy  $A_2, B_2$  jsou obecnými body elipsy  $k_2$ , která je nárysem kružnice  $k$



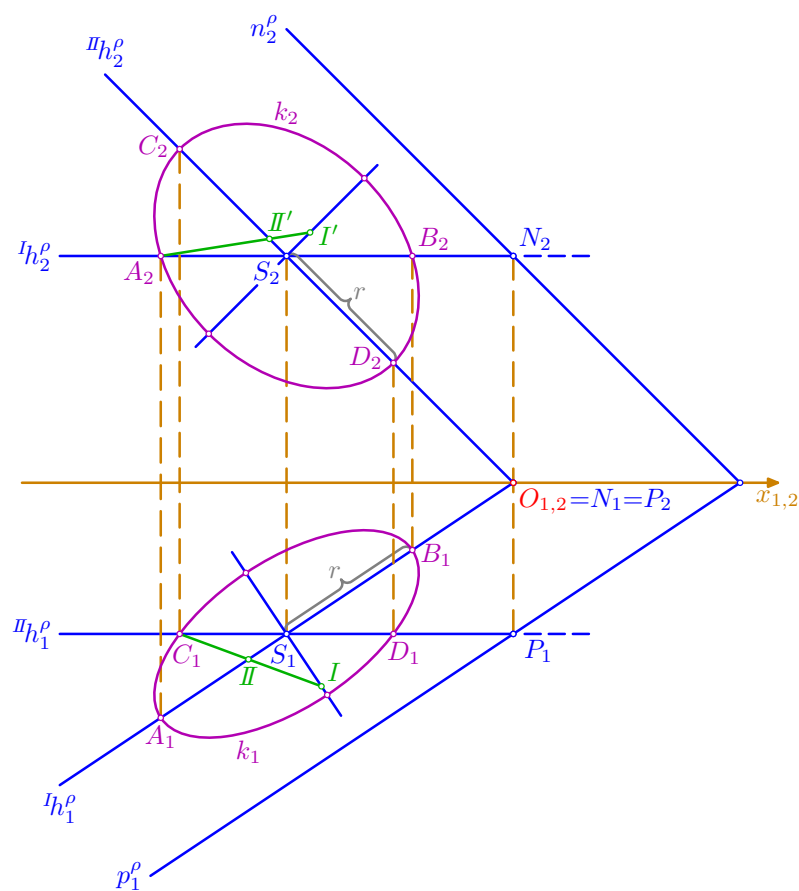
- podobně sestrojme body  $C, D = \Pi h^p \cap k$ : tentokrát se zachová délka na nárysu  $\Pi h_2^p$ , kde můžeme nanést poloměr  $r$  kružnice  $k$  ve skutečné velikosti, tj.  $|C_2 S_2| = |D_2 S_2| = r$ , a půdorysy  $C_1, D_1$  získáme opět po ordinálách na přímce  $\Pi h_1^p$ ; tím jsme analogicky jako v předchozím kroku získali hlavní vrcholy  $C_2, D_2$  elipsy  $k_2$  a obecné body  $C_1, D_1$ , kterými bude procházet elipsa  $k_1$



- pro půdorys  $k_1$  kružnice  $k$  již stačí jen doplnit vedlejší vrcholy – to je provedeno pomocí **rozdílové proužkové konstrukce** (podrobněji viz na straně 196): bod  $I$  leží na vedlejší ose a platí pro něj  $|IC_1|=|A_1S_1|$ , délka úsečky  $IIC_1$ , kde  $II=C_1I \cap A_1S_1$ , pak udává délku vedlejší poloosy elipsy  $k_1$ , kterou je (nejlépe za pomoci hyperoskulačních kružnic ve vrcholech) nyní možno vyrýsovat



- taktéž v nárysu jsou vedlejší vrcholy elipsy  $k_2$  sestrojeny pomocí **rozdílové proužkové konstrukce** (pomocné body  $I'$ ,  $II'$ ), jinak je postup stejný jako v půdorysu; elipsy  $k_1$  a  $k_2$  jakožto sdružené průměty kružnice  $k$  mají tedy stejnou délku hlavní poloosy navíc rovnou poloměru  $r$ , délka vedlejší poloosy je však v obou průmětech obecně různá

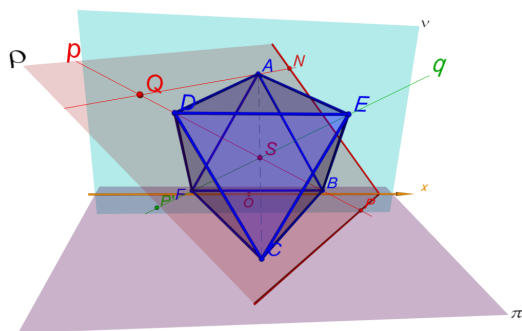


□

## 7. Konstrukční úlohy v Mongeově promítání

- v následujících úlohách jde o to sestavit určený geometrický objekt z daných prvků
- přitom je vždy nejprve na základě vztahů mezi danými a hledanými útvary, tj. na základě **rozboru** úlohy, stanoven **postup** konstrukcí v prostoru, tzv. **prostorový princip** řešení
- poté je krok po kroku provedena konstrukce v Mongeově promítání

### 7.1. Pravidelný osmistěn

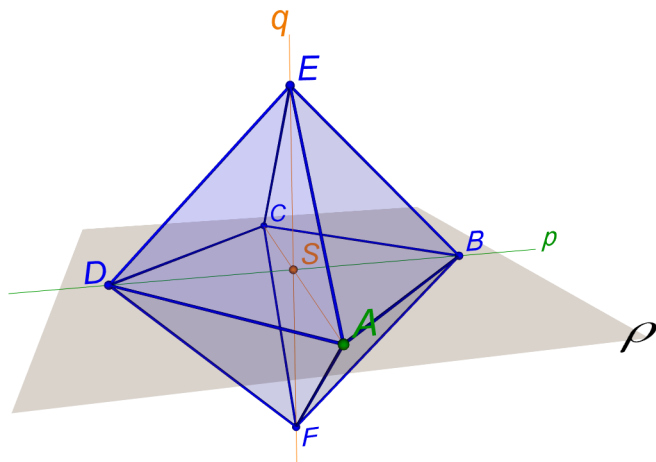


#### Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte pravidelný osmistěn, je-li dán jeho vrchol  $A$  a úhlopříčka  $BD$  leží na přímce  $p=PQ$ ;  $A[0; 2; 6]$ ,  $P[5; 2; 0]$ ,  $Q[-4; 7; 6]$ .



Rozbor úlohy

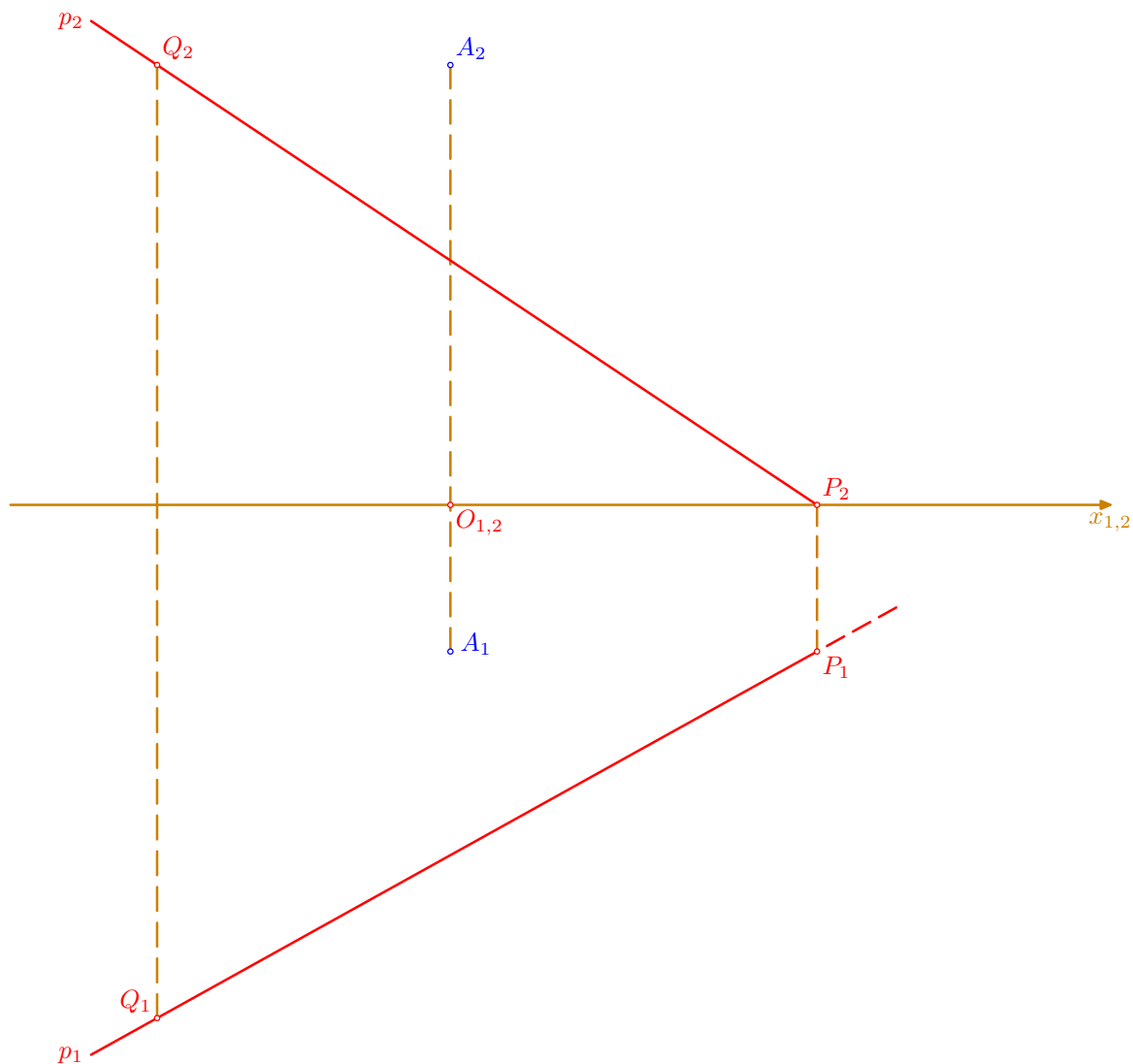


Prostorový princip řešení

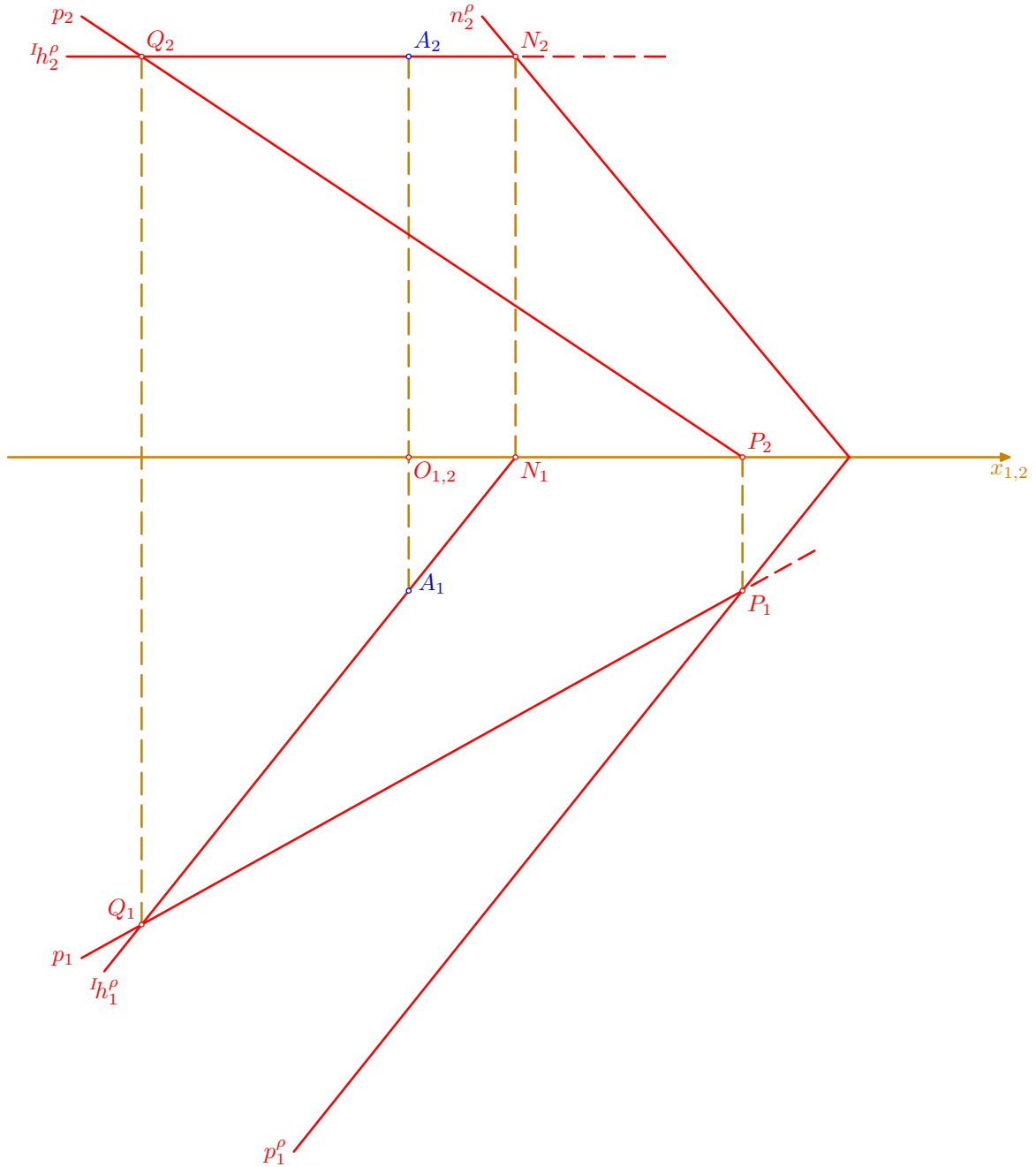
1.  $\rho$ ;  $\rho = Ap$
2.  $\square ABCD$ ; leží v  $\rho$ , má vrchol  $A$  a úhlopříčku  $BD$  na přímce  $p$ , jeho střed  $S$  je středem osmistěnu
3.  $q$ ;  $S \in q$ ,  $q \perp \rho$
4.  $E, F$ ;  $E, F \in q$ ,  $|ES| = |FS| = |AS|$
5. pravidelný osmistěn  $ABCDEF$

Konstrukce

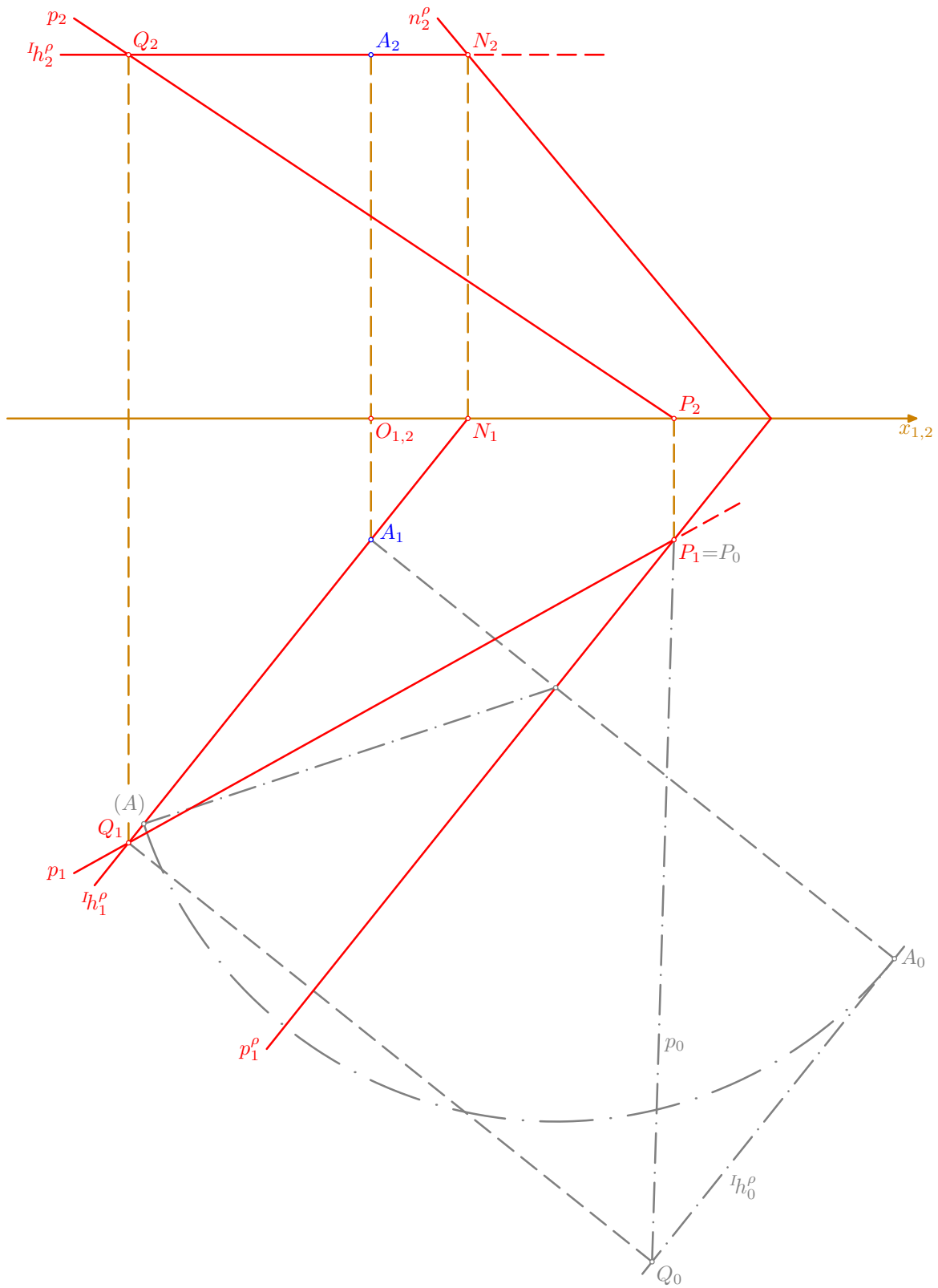
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2, p_1=P_1Q_1, p_2=P_2Q_2$  bodu  $A$  a přímky  $p=PQ$



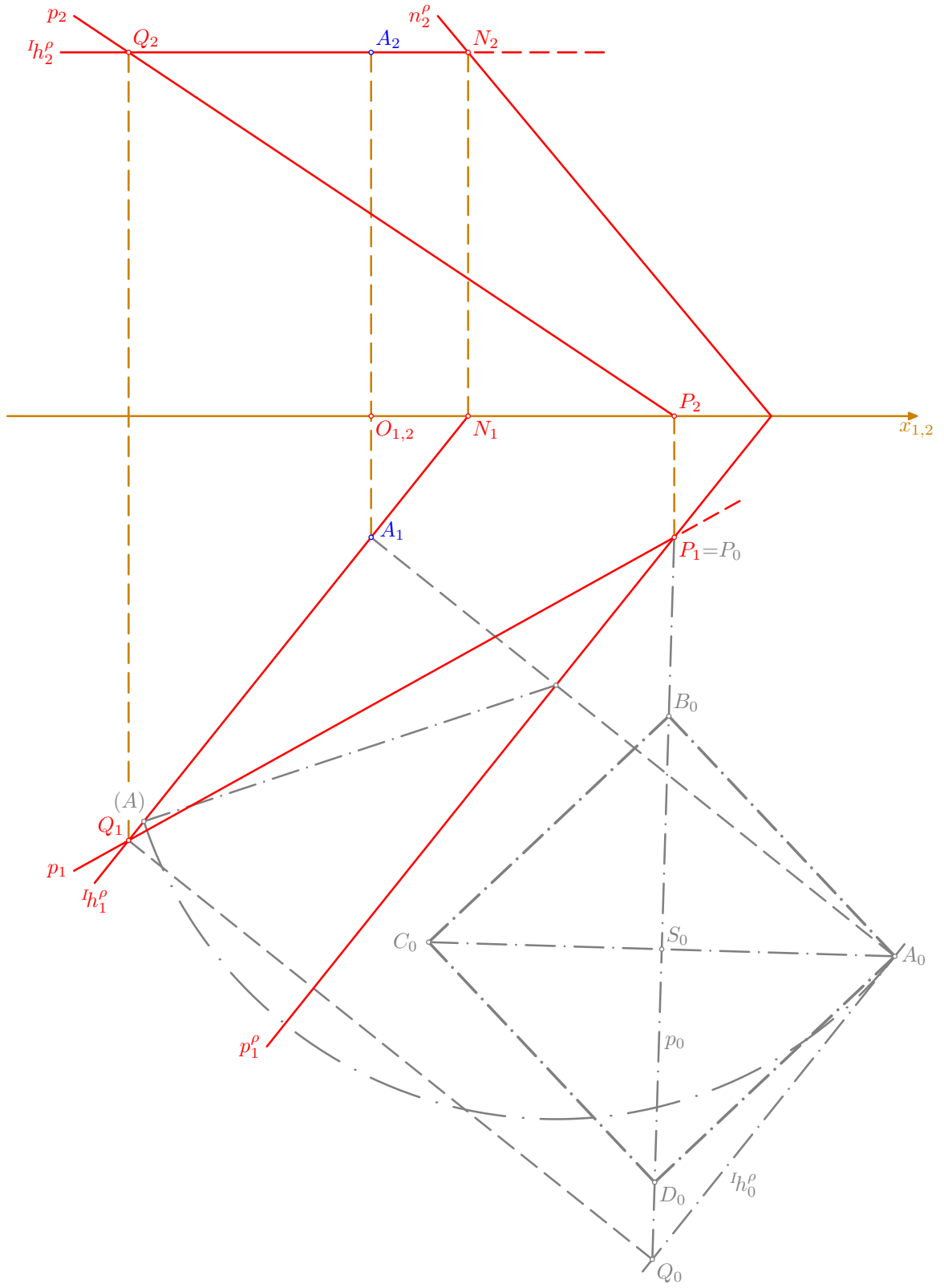
- ze zadání bodů  $A, Q$  ( $z_A = z_Q = 6$ ) vyplývá, že přímka  ${}^I h^\rho = AQ$  je hlavní přímkou I. osnovy roviny  $\rho = Ap$ ; pro její půdorysnou stopu  $p^\rho$  tudíž platí  $p_1^\rho \parallel {}^I h_1^\rho, P_1 \in p_1^\rho$ ; nárysná stopa  $n^\rho$  prochází nárysným stopníkem  $N$  hlavní přímky  ${}^I h^\rho$  ( $N_1 = {}^I h_1^\rho \cap x, N_2$  leží na ordinále a na přímce  ${}^I h_2^\rho$ ) a protíná se s půdorysnou stopou na ose  $x$



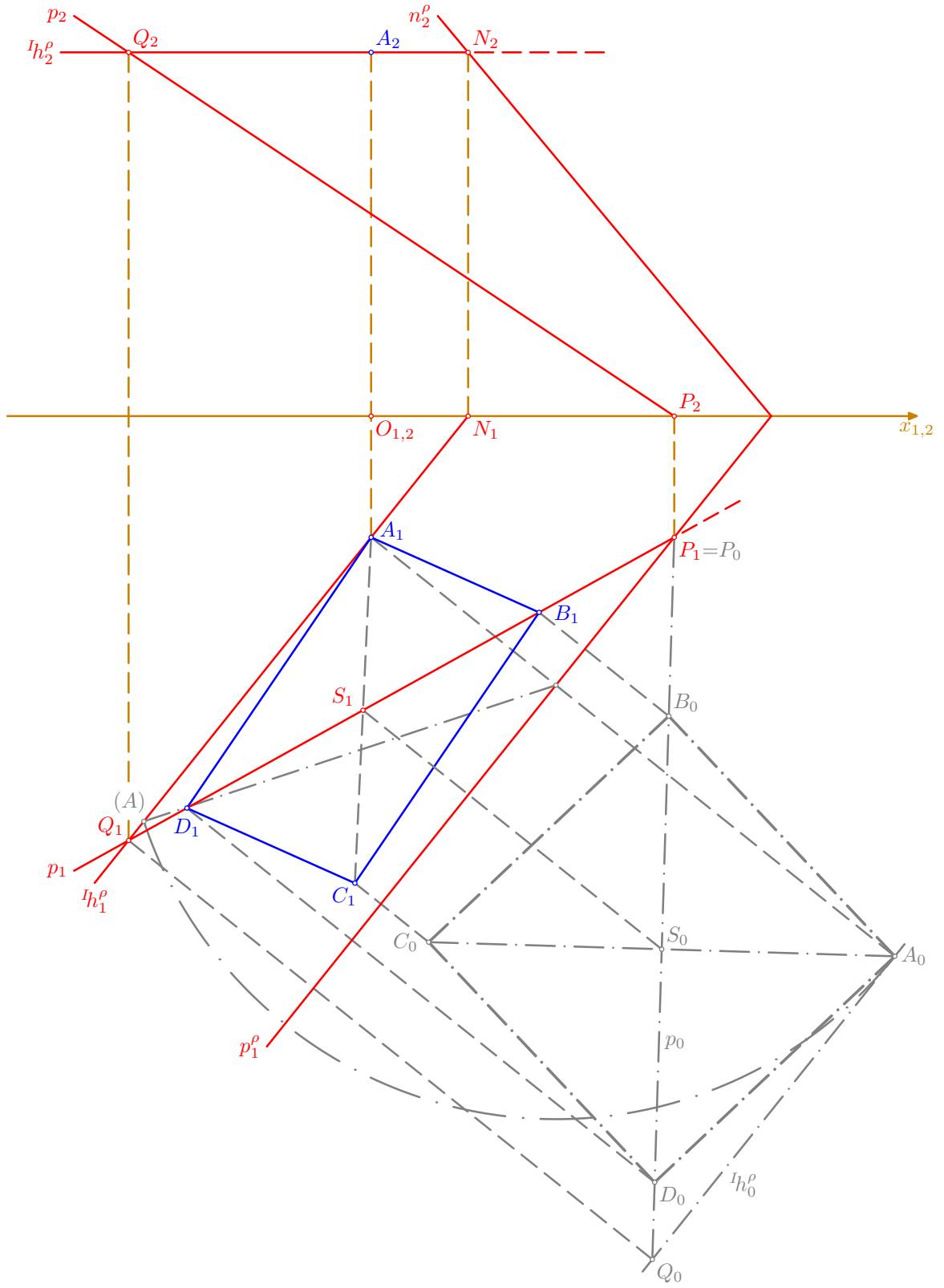
- sestrojme otočené polohy  $A_0, p_0=P_0Q_0$  bodu  $A$  a přímky  $p=PQ$  ležících v rovině  $\rho$  (otáčíme kolem stopy  $p^\rho$  do půdorysny  $\pi$ ); bod  $A$  je otočen ve sklopení půdorysně promítací roviny příslušné spádové přímky, bod  $P \in \pi$  zůstává při otáčení na místě (tj.  $P_0=P_1$ ) a poloměr otáčení bodu  $Q$  je stejný jako u bodu  $A$  (je tudíž přímka  $h_0^\rho=A_0Q_0$  rovnoběžná se stopou  $p_1^\rho$  a body  $Q_1, A_1, A_0, Q_0$  tvoří obdélník)



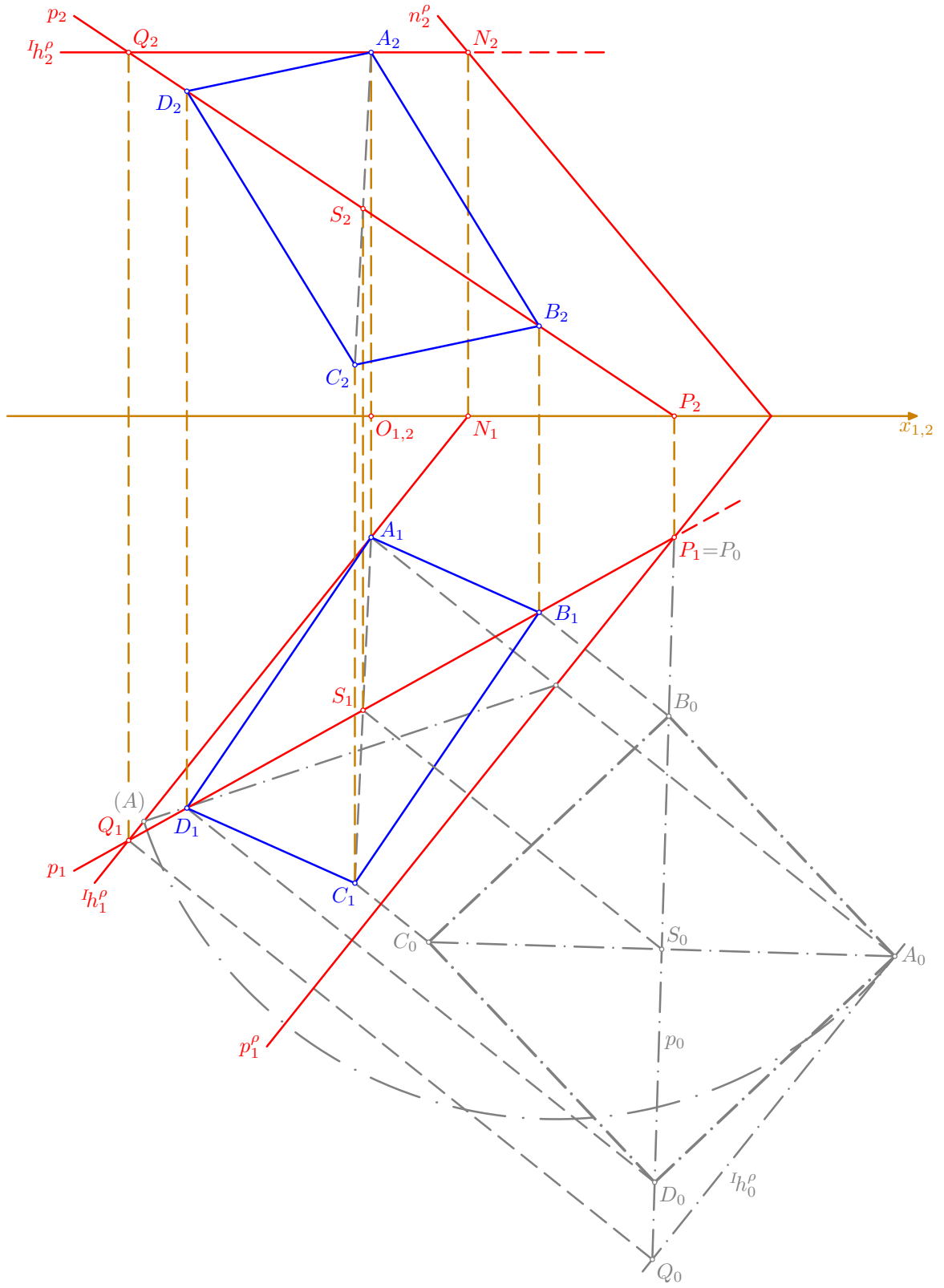
- v otočení je sestroyen čtverec  $A_0B_0C_0D_0$ , který má vrchol v bodě  $A_0$  a jehož úhlopříčka  $B_0D_0$  (a tedy i střed  $S_0$ ) leží na přímce  $p_0=P_0Q_0$ ; úloha má jediné řešení (útvary v otočení je zvykem podobně jako ve sklopení rýsovat *čerchovaně*)



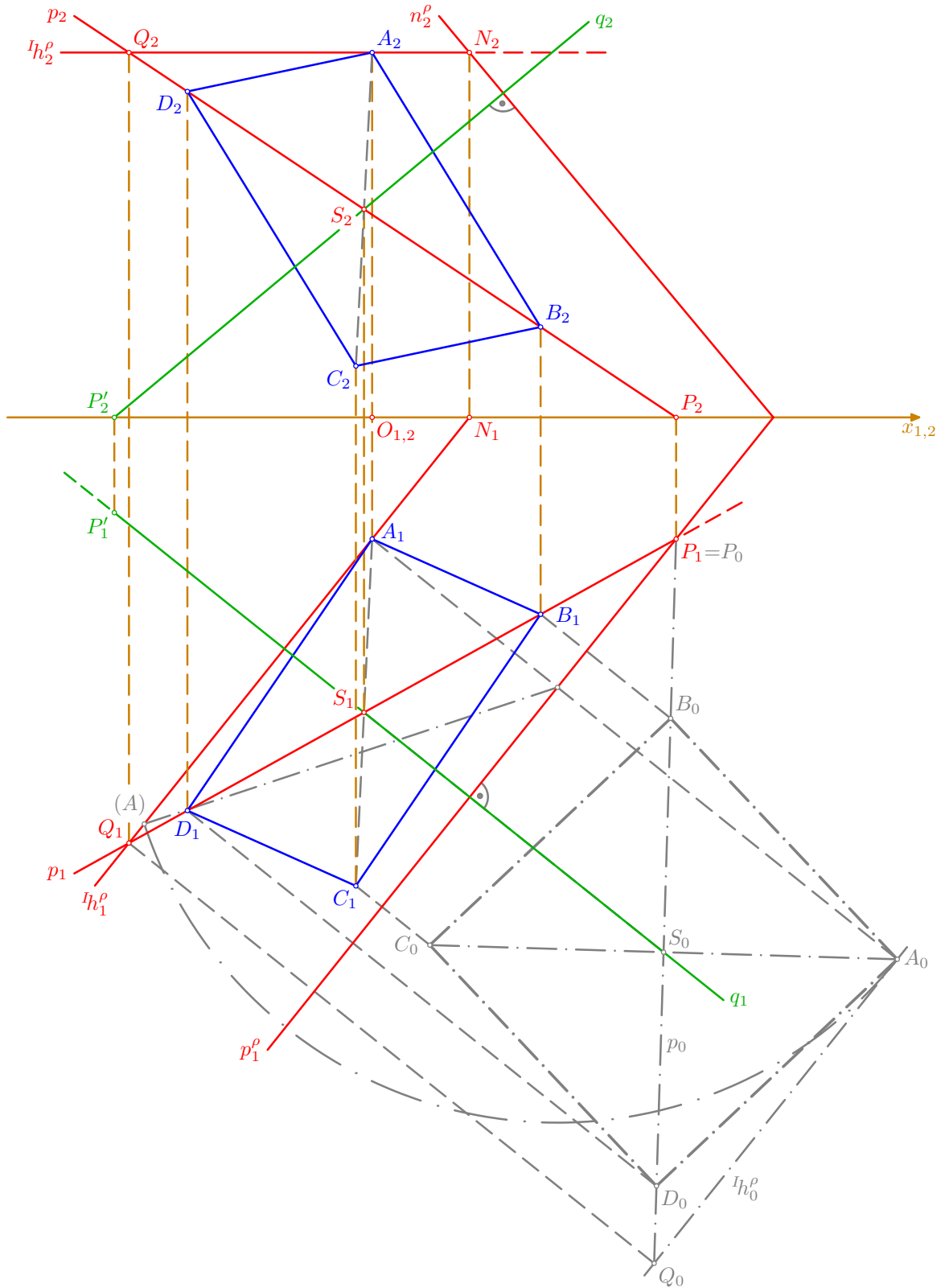
- z otočení se vraťme do půdorysu; funguje zde *pravoúhlá osová afinita*, jejíž osou je stopa  $p_1^p$  a v níž si odpovídají např. body  $A_0$  a  $A_1$ ; její užití je při ručním rýsování ovšem často dosti nepřesné, proto se jí budeme snažit vyhnout; půdorysy  $B_1, S_1, D_1$  bodů  $B, S, D \in p$  najdeme snadno na přímce  $p_1$  a na kolmicích vedených ke stopě  $p_1^p$  body  $B_0, S_0, D_0$ ; bod  $C_1$  je středově souměrný s bodem  $A_1$  podle bodu  $S_1$  (tím také zajistíme, že nám v průmětu určitě vyjde rovnoběžník  $A_1B_1C_1D_1$  o středu v bodě  $S_1$ ); pro zajímavost zkontrolujme přesnost rýsování – úsečka  $C_1C_0$  by měla být kolmá ke stopě  $p_1^p$  a přímky  $A_0C_0$  a  $A_1C_1$  by se měly protínat v samodružném bodě na ose  $p_1^p$  afinity



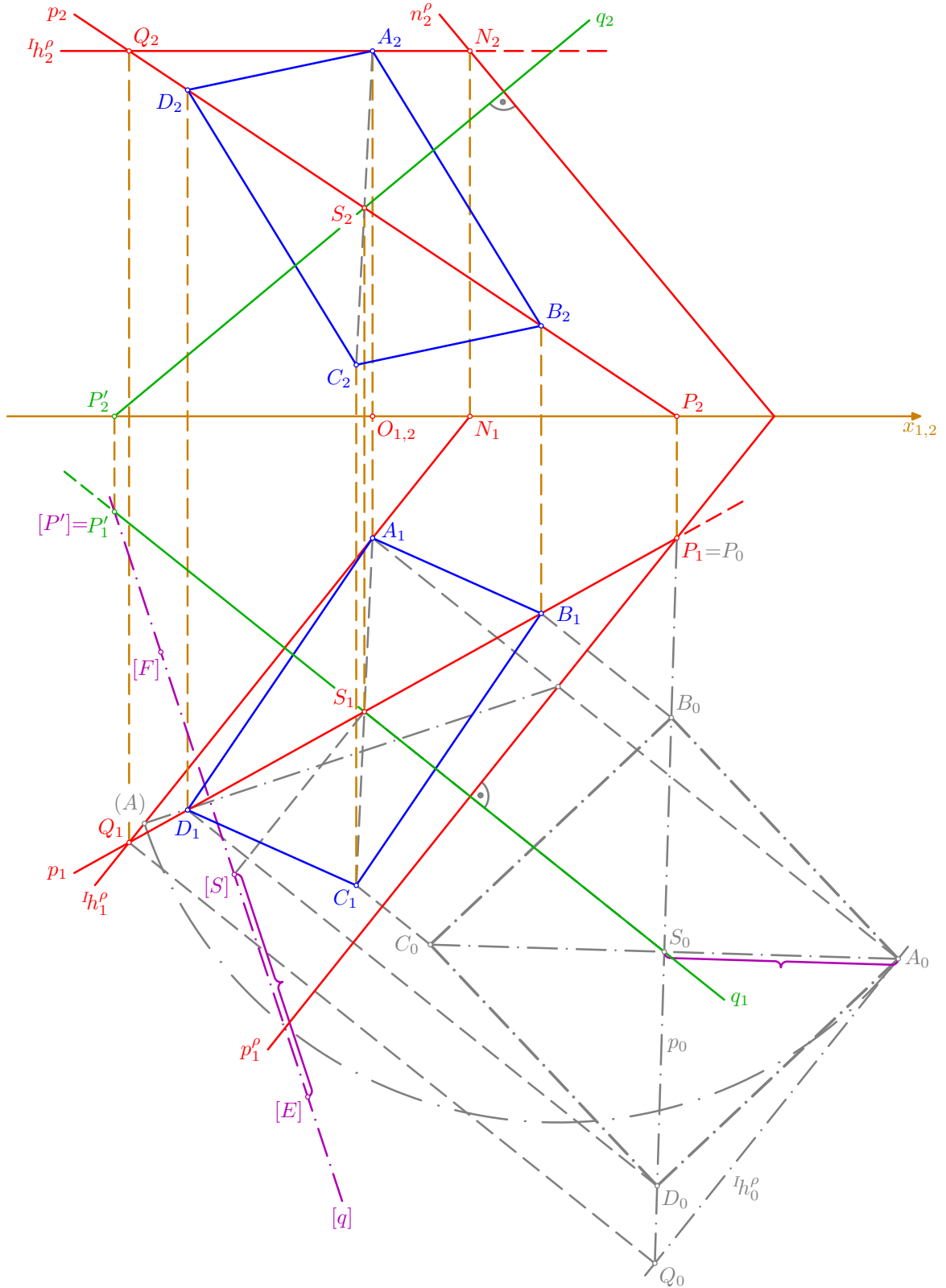
- po ordinálách vytáhneme nahoru nárysy bodů  $B_2, S_2, D_2$  na přímkou  $p_2$ , bod  $C_2$  je opět souměrný s  $A_2$  podle  $S_2$  (nárysem čtverce  $ABCD$  je tedy opět rovnoběžník); tím jsme dokončili nejnáročnější část celého postupu řešení, z hlediska prostorového principu máme sestrojeny čtyři vrcholy  $A, B, C, D$  hledaného osmistěnu (splnily jsme tedy krok číslo 2) a zbývá nám doplnit vrcholy  $E, F$



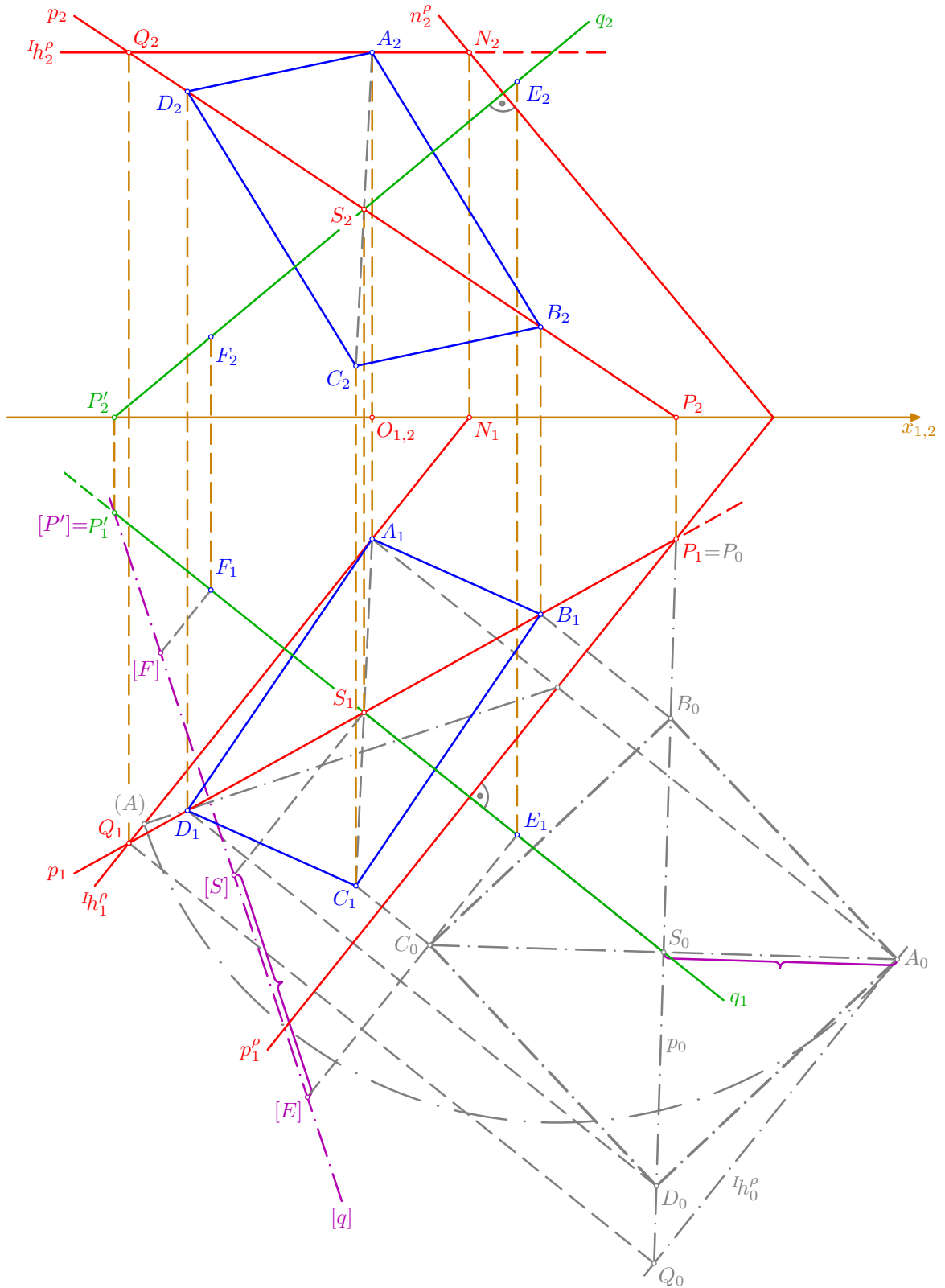
- středem  $S$  čtverce  $ABCD$  vedeme přímkou  $q \perp \rho$ : pro její půdorys platí  $q_1 \perp p_1^{\rho}$ ,  $S_1 \in q_1$  (je tedy také  $S_0 \in q_1$ ), podobně v nárýsu je  $q_2 \perp n_2^{\rho}$ ,  $S_2 \in q_2$ ; pro další konstrukci bude ještě užitečné sestavit půdorysný stopník  $P'$  přímky  $q$ :  $P_2' = q_2 \cap x$  a půdorys  $P_1'$  leží na ordinále a na přímce  $q_1$



- dále sklopme půdorysně promítací rovinu přímky  $q$ , abychom na její sklopené poloze  $[q]$  mohli od bodu  $[S]$  nanést skutečnou velikost úsečky  $AS$  (odměříme ji v otočení,  $|AS|=|A_0S_0|$ ) a získat tak sklopené polohy  $[E], [F]$  zbývajících vrcholů  $E, F \in q$ ; pro sklopenou polohu  $[S]$  bodu  $S$  platí  $|[S]S_1| = z_S = |S_2x|$ , dále je  $[q] = [P'] [S]$  (kde  $[P'] = P'_1$ ) a  $[E], [F] \in [q]$ ,  $|[E][S]| = |[F][S]| = |A_0S_0|$

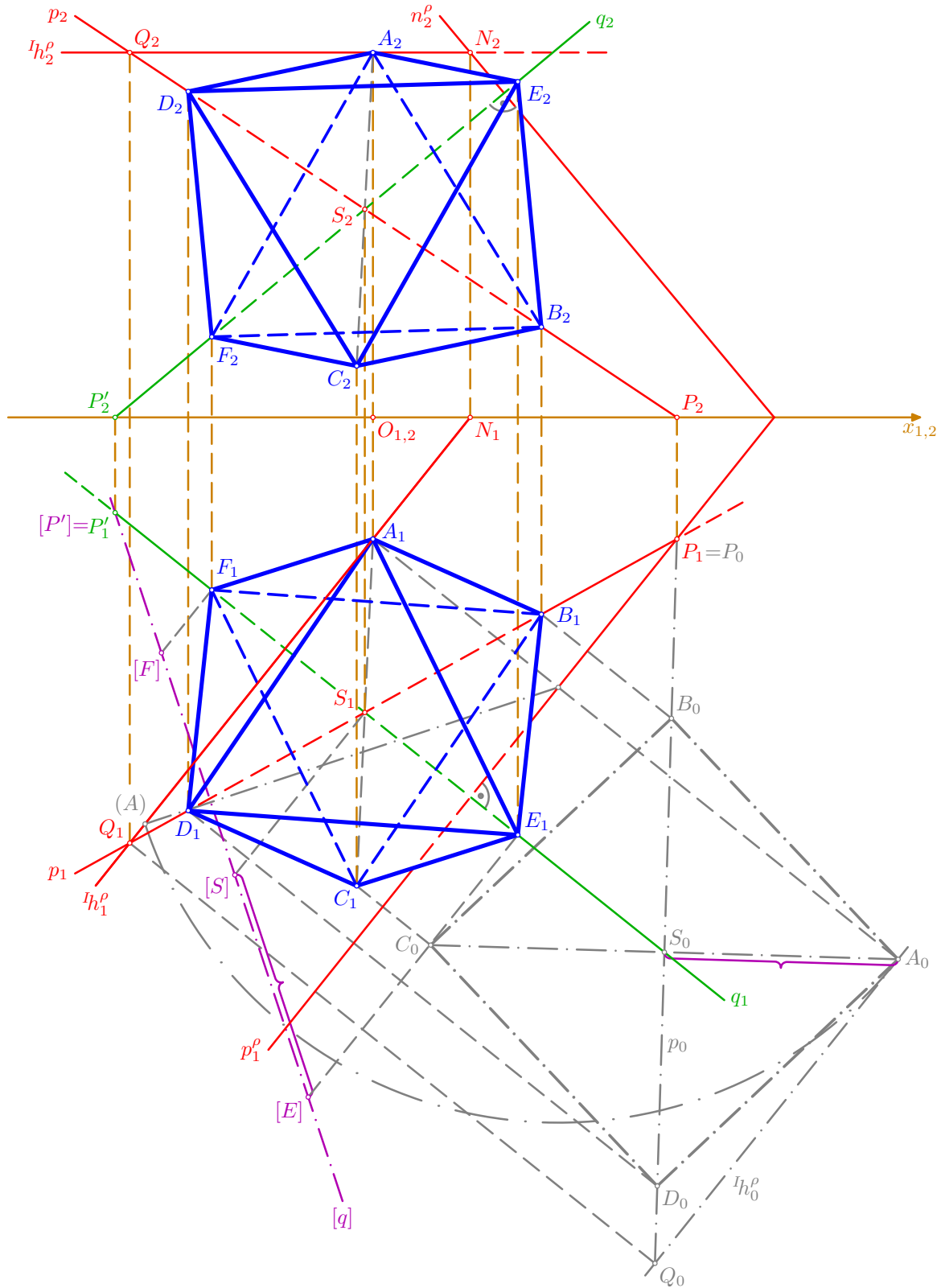


- vraťme body  $E, F$  ze sklopených poloh  $[E], [F]$  po kolmicích do půdorysů  $E_1, F_1$  na přímce  $q_1$  a z nich po ordinálách vytáhněme nahoru nárysy  $E_2, F_2$  na přímku  $q_2$ ; tím máme sestrojeny sdružené průměty všech vrcholů hledaného pravidelného osmistěnu, který má jeden daný vrchol  $A$  a jehož úhlopříčka  $BD$  leží vskutku na dané přímce  $p = PQ$



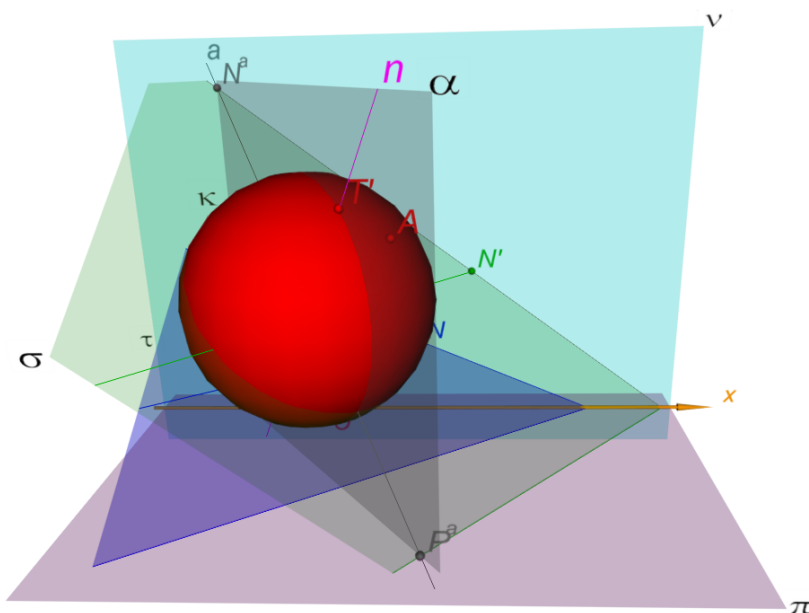
- na závěr doplníme zbývající hrany a určíme viditelnost v obou průmětech: v půdorysu vytáhneme obrysový rovnoběžník  $A_1B_1E_1C_1D_1F_1$  a z nárýsu zjistíme, že vrcholy  $A, D, E$  leží výše než vrcholy  $B, C, F$ , strany  $\triangle ADE$  budou tedy v půdorysu vidět, naopak půdorysy stran  $\triangle BCF$  vytáhneme čárkovaně; podobně je v nárýsu obrysovým rovnoběžníkem šestiúhelník  $A_2E_2B_2C_2F_2D_2$  a neviditelné jsou strany, které leží ve stěně  $ABF$  (vrcholy  $A, B, F$  leží k nárýsně blíže než ostatní vrcholy  $C, D, E$ )

Poznamenejme ještě na okraj, že uvedenou úlohu lze prostorově řešit také jinak: mohli bychom vést bodem  $A$  rovinu  $\sigma \perp p$ , najít střed  $S = p \cap \sigma$  osmistěnu, dále v rovině  $\sigma$  sestrojít čtverec  $AECF$  o středu  $S$  a vrcholu  $A$ , a na závěr na přímce  $p$  doplnit vrcholy  $B, D$ ; laskavý čtenář si tento způsob řešení může důkladněji promyslet, případně vyrýsovat jako samostatné cvičení. . .



□

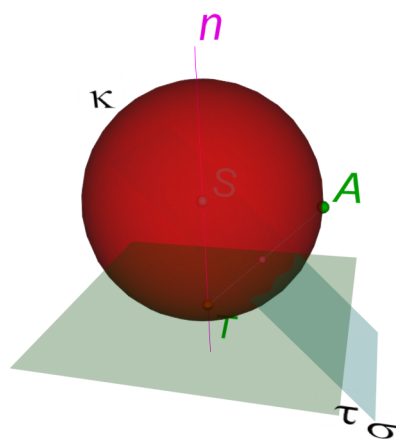
## 7.2. Kulová plocha



## Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte kulovou plochu  $\kappa$ , je-li dán její bod  $A$  a tečná rovina  $\tau$  s bodem dotyku  $T$ ;  $A[2; 5; 6]$ ,  $\tau(7; 5; 3)$ ,  $T[-1; ?; 2]$ .

Rozbor úlohy

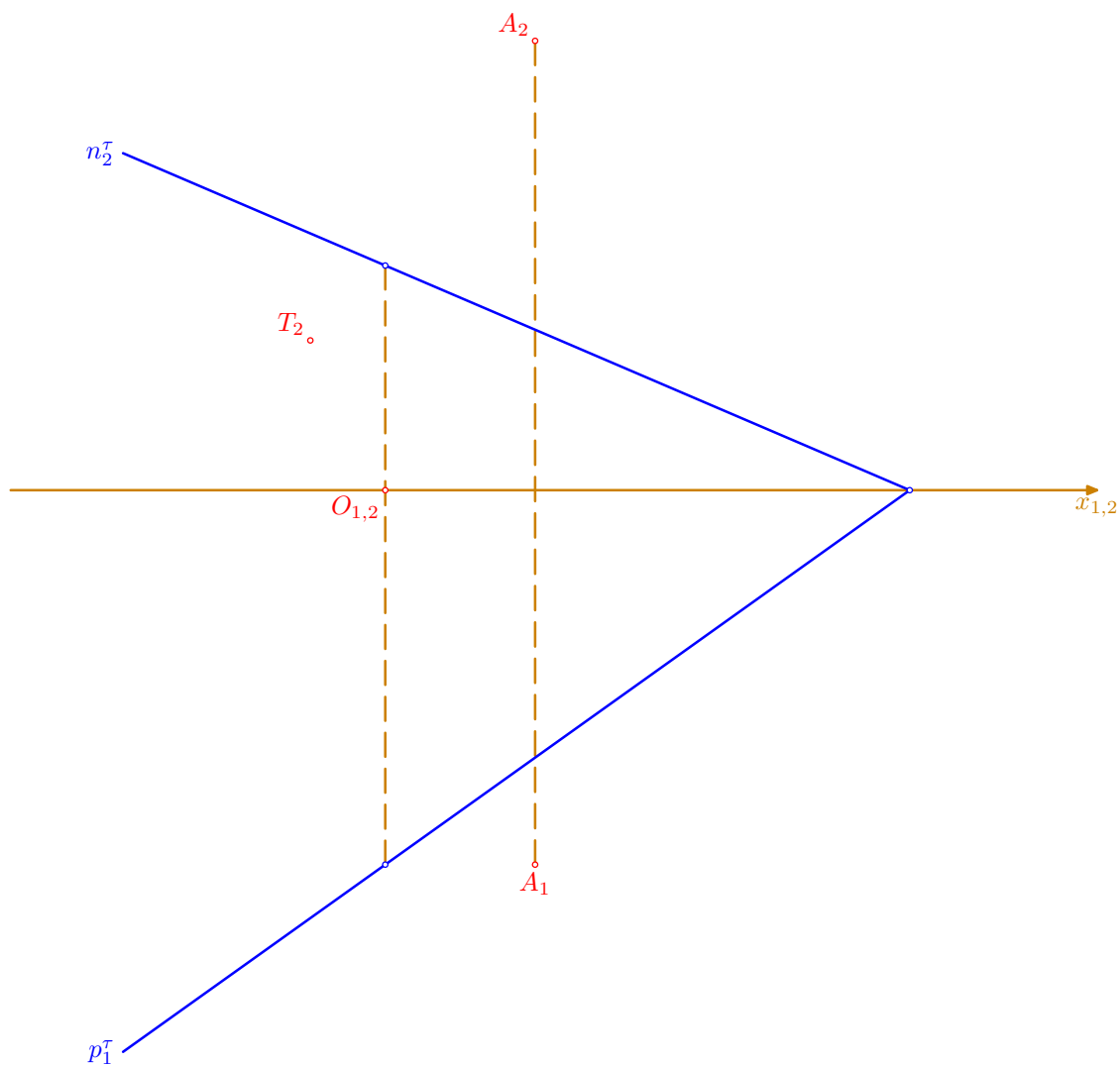


Prostorový princip řešení

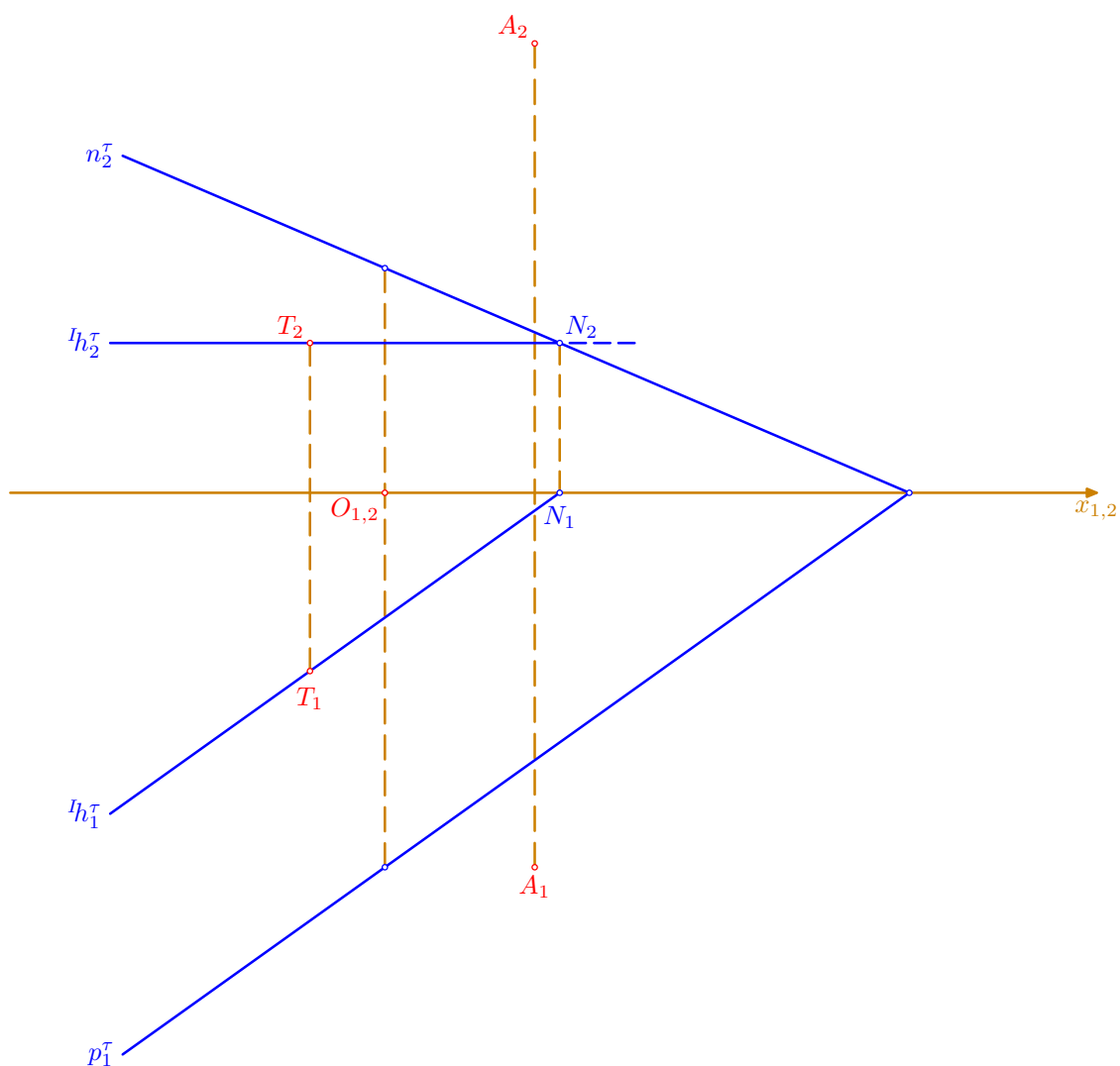
1.  $n; n \perp \tau, T \in n$
2.  $\sigma$ ; tzv. **rovina souměrnosti úsečky**  $AT$ ,  $\sigma \perp AT, C \in \sigma$ , kde bod  $C$  je střed úsečky  $AT$
3.  $S; S = n \cap \sigma$
4.  $\kappa; \kappa(S, r = |ST| = |SA|)$

## Konstrukce

- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2$  bodu  $A$ , stopy  $p_1^\tau, n_2^\tau$  roviny  $\tau$  a nárys  $T_2$  bodu  $T$

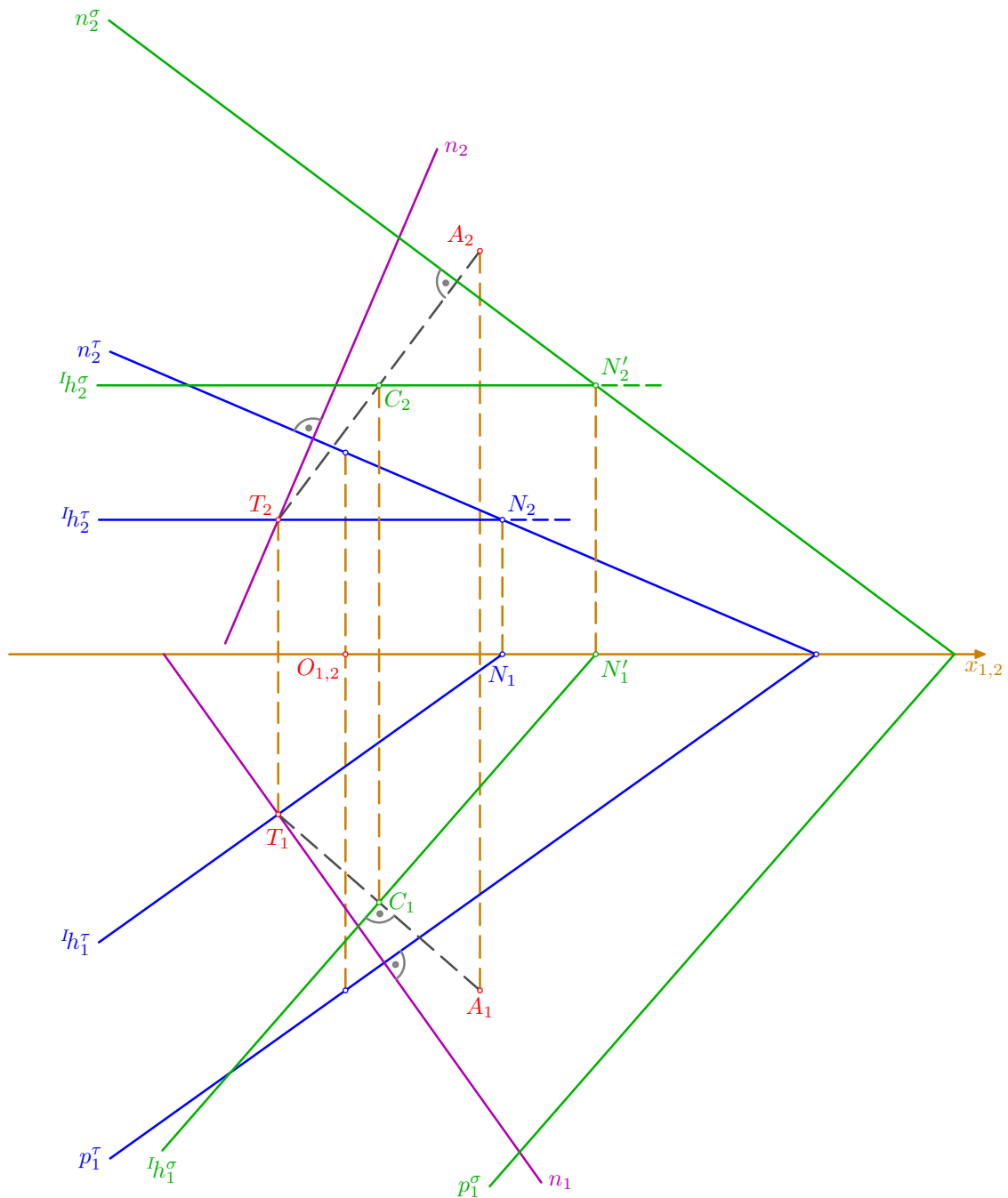


- pomocí hlavní přímky  $h^\tau$  I. osnovy roviny  $\tau$  a jejího nárysného stopníku  $N$  doplníme půdorys  $T_1$  bodu  $T \in \tau$ : je  $h_2^\tau \parallel x, T_2 \in h_2^\tau, N_2 = h_2^\tau \cap n_2^\tau, N_1$  najdeme po ordinále na ose  $x$ , dále je  $h_1^\tau \parallel p_1^\tau, N_1 \in h_1^\tau$ , a  $T_1$  leží na ordinále a na  $h_1^\tau$

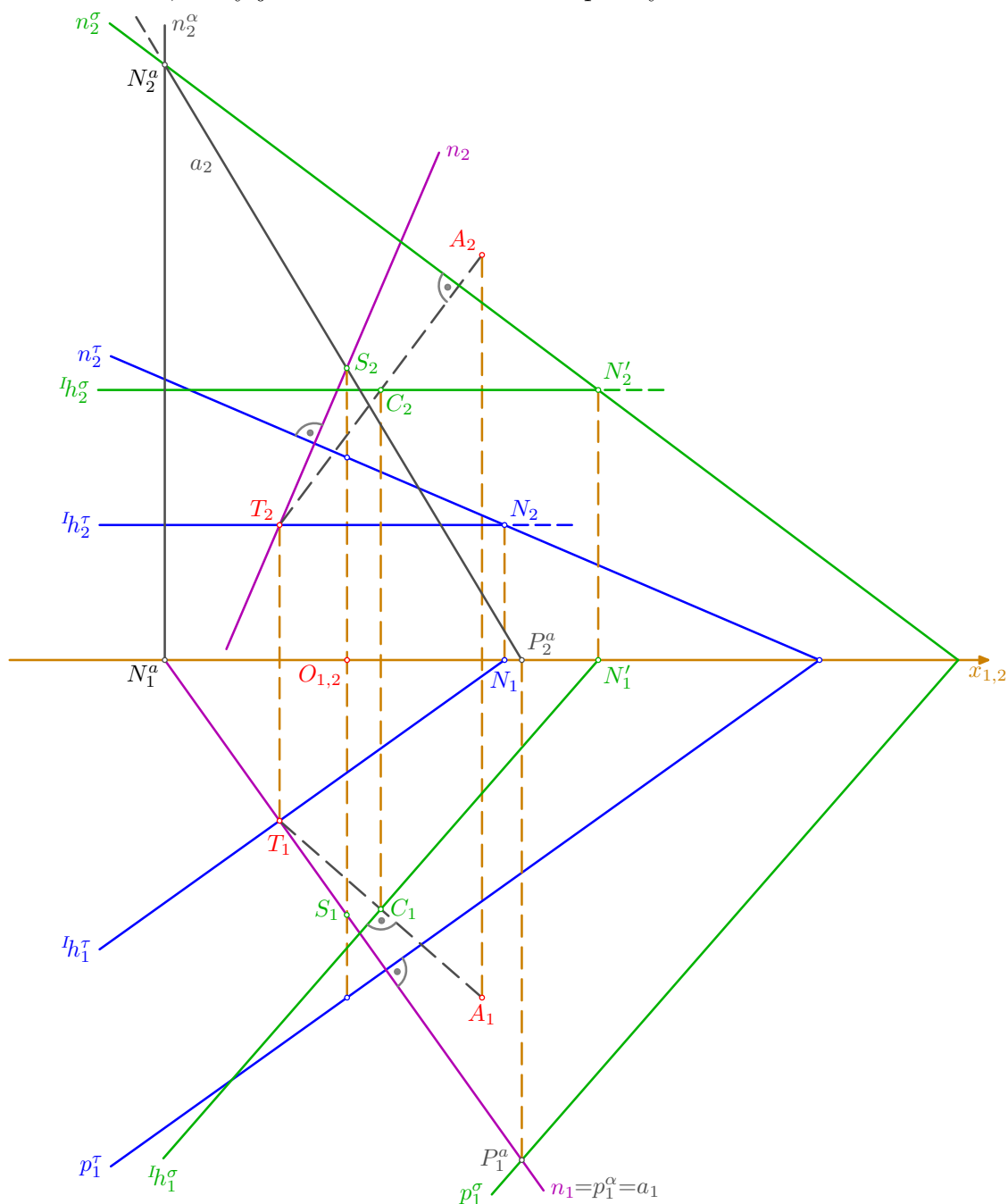




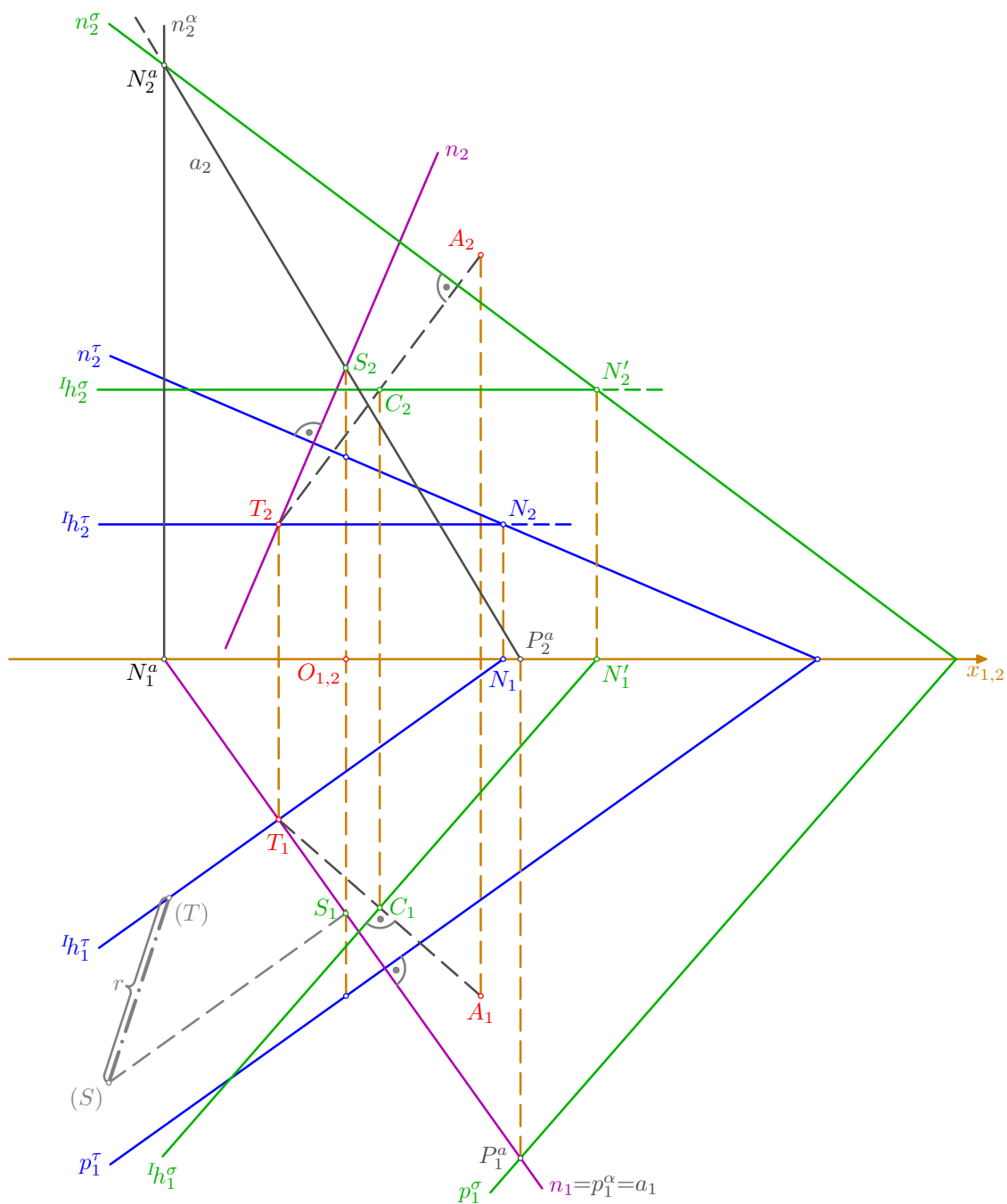
- středem  $C$  úsečky  $AT$  proložme rovinu  $\sigma \perp AT$ : průměty  $C_1, C_2$  půlí úsečky  $A_1T_1, A_2T_2$ ; pro konstrukci stop roviny  $\sigma$  uijeme hlavní přímku  ${}^I h^\sigma$  I. osnovy a její nárysný stopník  $N'$  – v půdorysu je  ${}^I h_1^\sigma \perp A_1T_1, C_1 \in {}^I h_1^\sigma$ , v nárysu je  ${}^I h_2^\sigma \parallel x, C_2 \in {}^I h_2^\sigma$ , dále je  $N'_1 = {}^I h_1^\sigma \cap x$  a nárys  $N'_2$  najdeme na ordinále a přímce  ${}^I h_2^\sigma$ ; bodem  $N'_2$  pak prochází nárysná stopa  $n_2^\sigma \perp A_2T_2$  a půdorysná  $p_1^\sigma \parallel {}^I h_1^\sigma$  se s ní protíná na ose  $x$



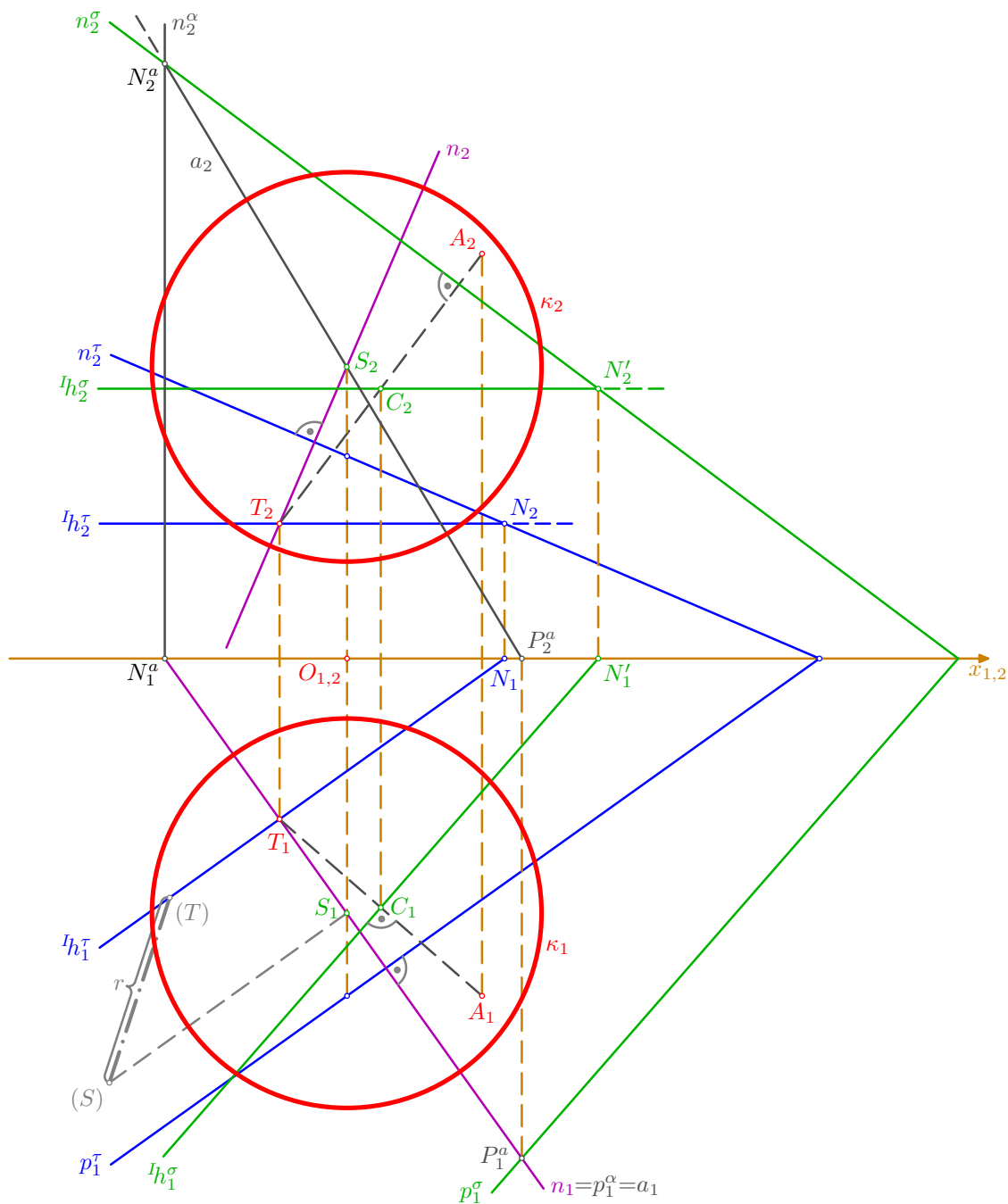
- sestrojme bod  $S=n\cap\sigma$ : přímkou  $n$  proložme pomocnou rovinu  $\alpha \perp \pi$ , je tedy  $p_1^\alpha = \alpha_1 = n_1$  a nárysná stopa  $n_2^\alpha \perp x$  se s půdorysnou stopou protíná na ose  $x$ ; sestrojme průsečnici  $a=P^\alpha N^a$  rovin  $\alpha$  a  $\sigma - P_1^a = p_1^\alpha \cap p_1^\sigma$  a nárys  $P_2^a$  leží na ordinále a na ose  $x$ , podobně je  $N_2^a = n_2^\alpha \cap n_2^\sigma$  a půdorys  $N_1^a$  leží opět na ordinále a na ose  $x$  (průsečík stop roviny  $\alpha$ ); pak je v půdorysu  $a_1 = P_1^a N_1^a = n_1$  (princip krycí přímky), v nárysu  $a_2 = P_2^a N_2^a$  a zde najdeme  $S_2 = a_2 \cap n_2$ , do půdorysu odvodíme  $S_1$  po ordinále na přímkou  $n_1 = a_1$ ; tím jsme našli bod  $S = n \cap \sigma$ , který je středem hledané kulové plochy



- poloměr  $r$  zjistíme jako velikost úsečky  $ST$ , konkrétně sklopením roviny  $\alpha$  do půdorysny; ve sklopení je pak  $r=(S)(T)$

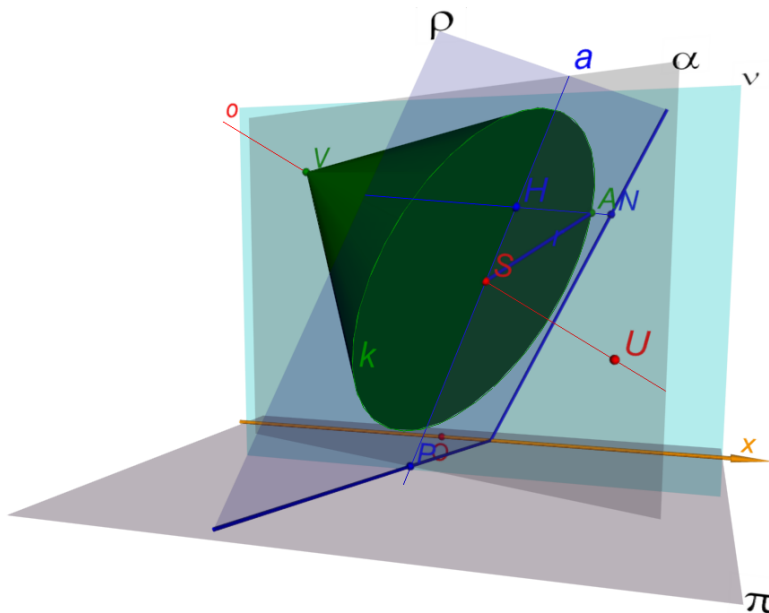


- půdorysem i nárysem kulové plochy  $\kappa$  jsou kruhy  $\kappa_1, \kappa_2$  o středech  $S_1, S_2$  a poloměru  $r$ ; v průmětech není vyřešena vzájemná viditelnost jednotlivých útvarů



□

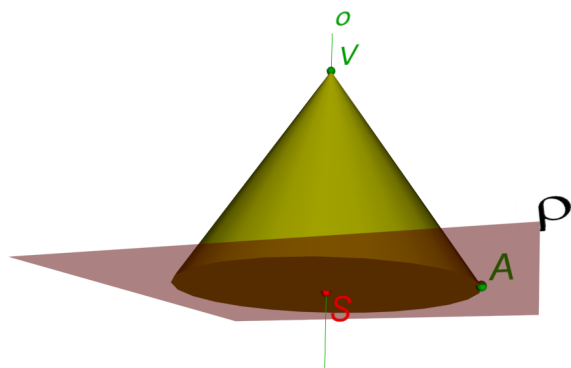
## 7.3. Rotační kužel



## Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte rotační kužel, je-li dána jeho osa  $o=UV$ , vrchol  $V$  a bod  $A$  na podstavné hraně;  $U[5; 5; 3]$ ,  $V[-3; 2; 7]$ ,  $A[4; 1; 6]$ .

Rozbor úlohy

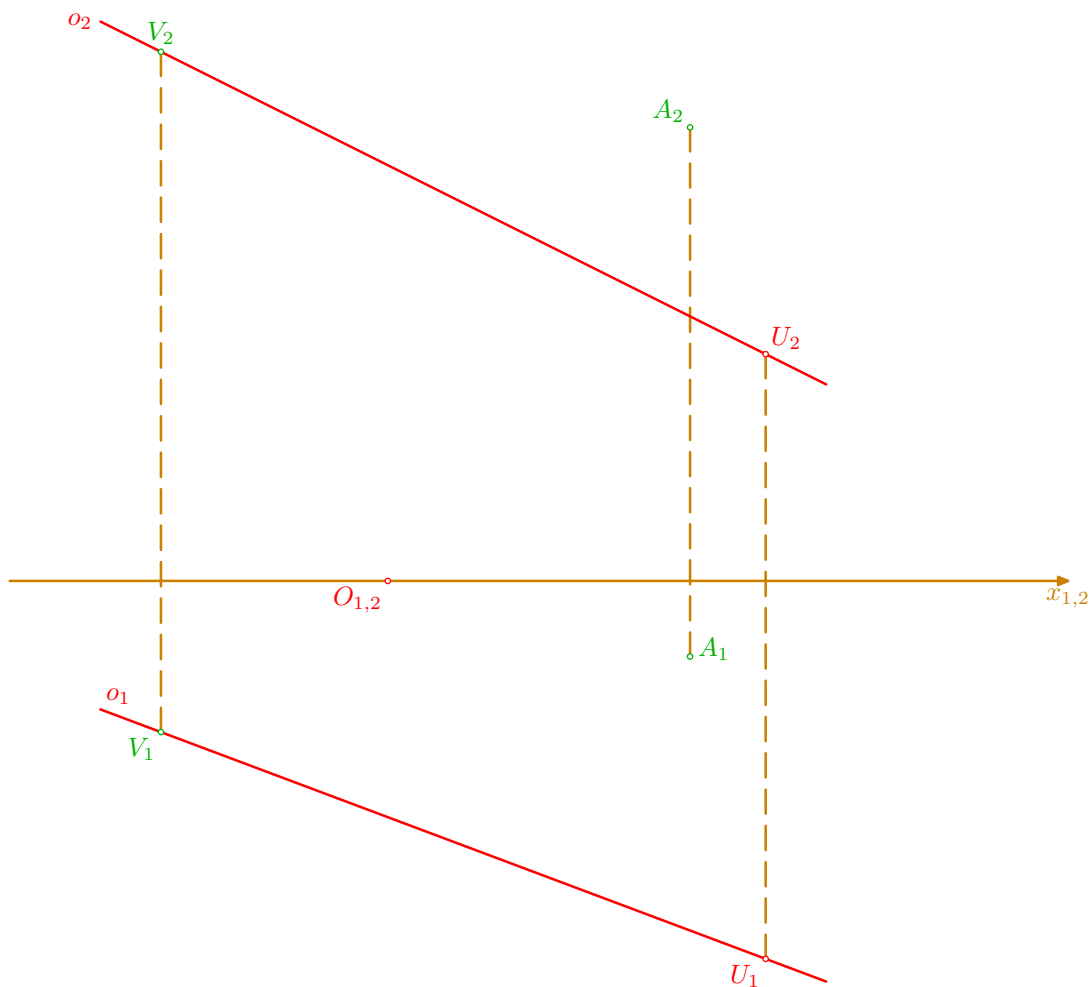


Prostorový princip řešení

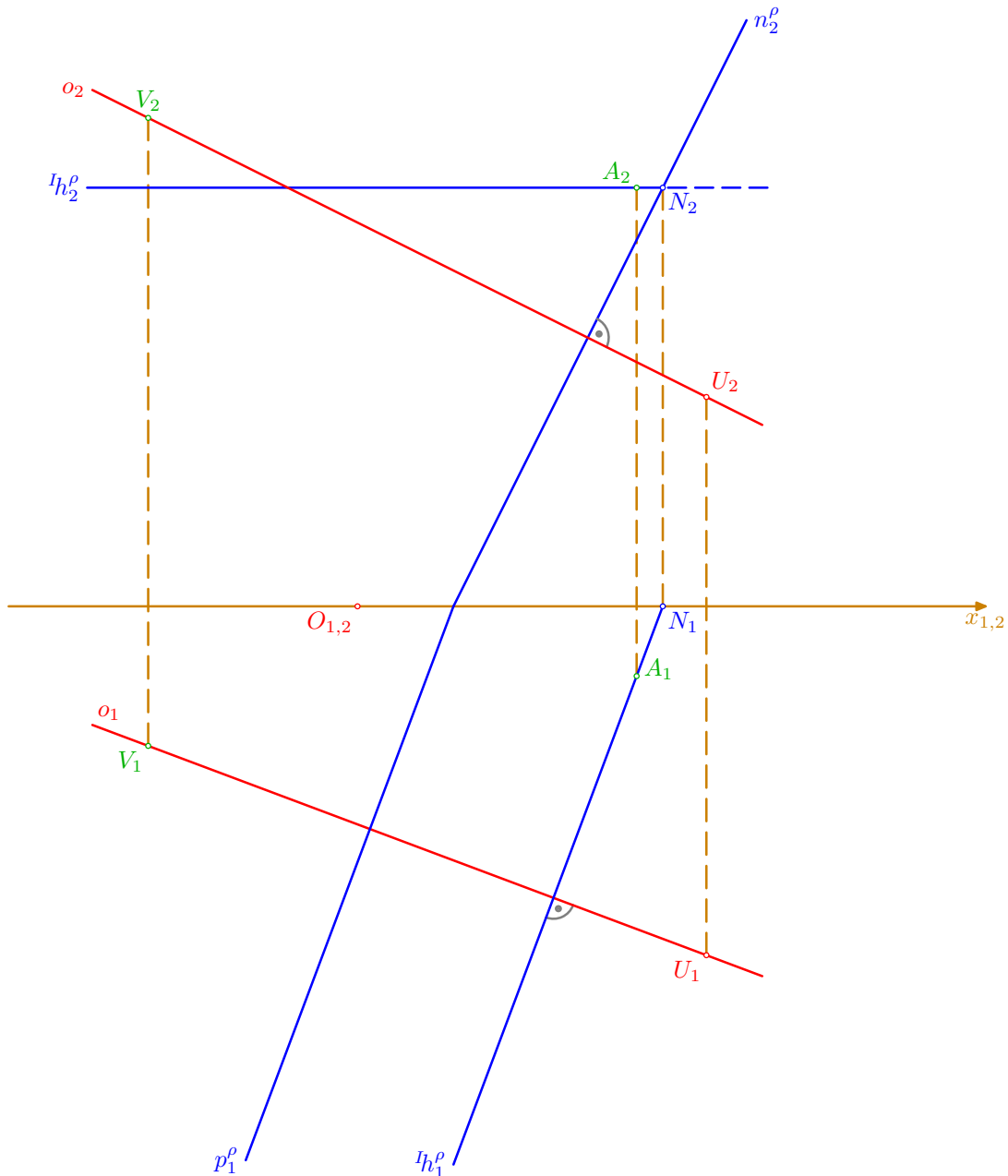
1.  $\rho$ ;  $\rho \perp o$ ,  $A \in \rho$
2.  $S$ ;  $S = \rho \cap o$
3.  $k$ ; kružnice  $k(S, r = |SA|)$  v rovině  $\rho$
4. rotační kužel

## Konstrukce

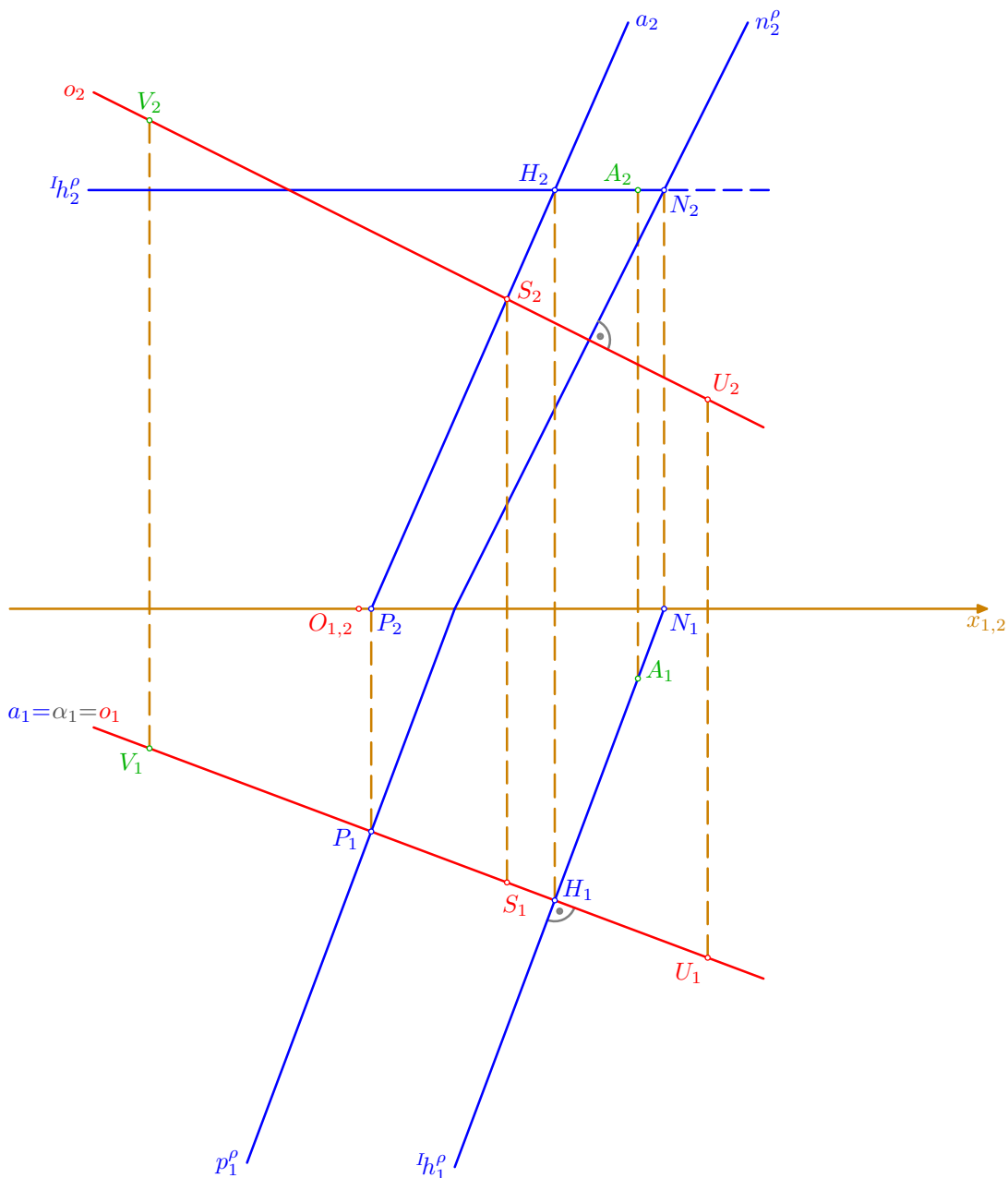
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2, o_1=U_1V_1, o_2=U_2V_2$  bodu  $A$ , osy  $o=UV$  a vrcholu  $V \in o$



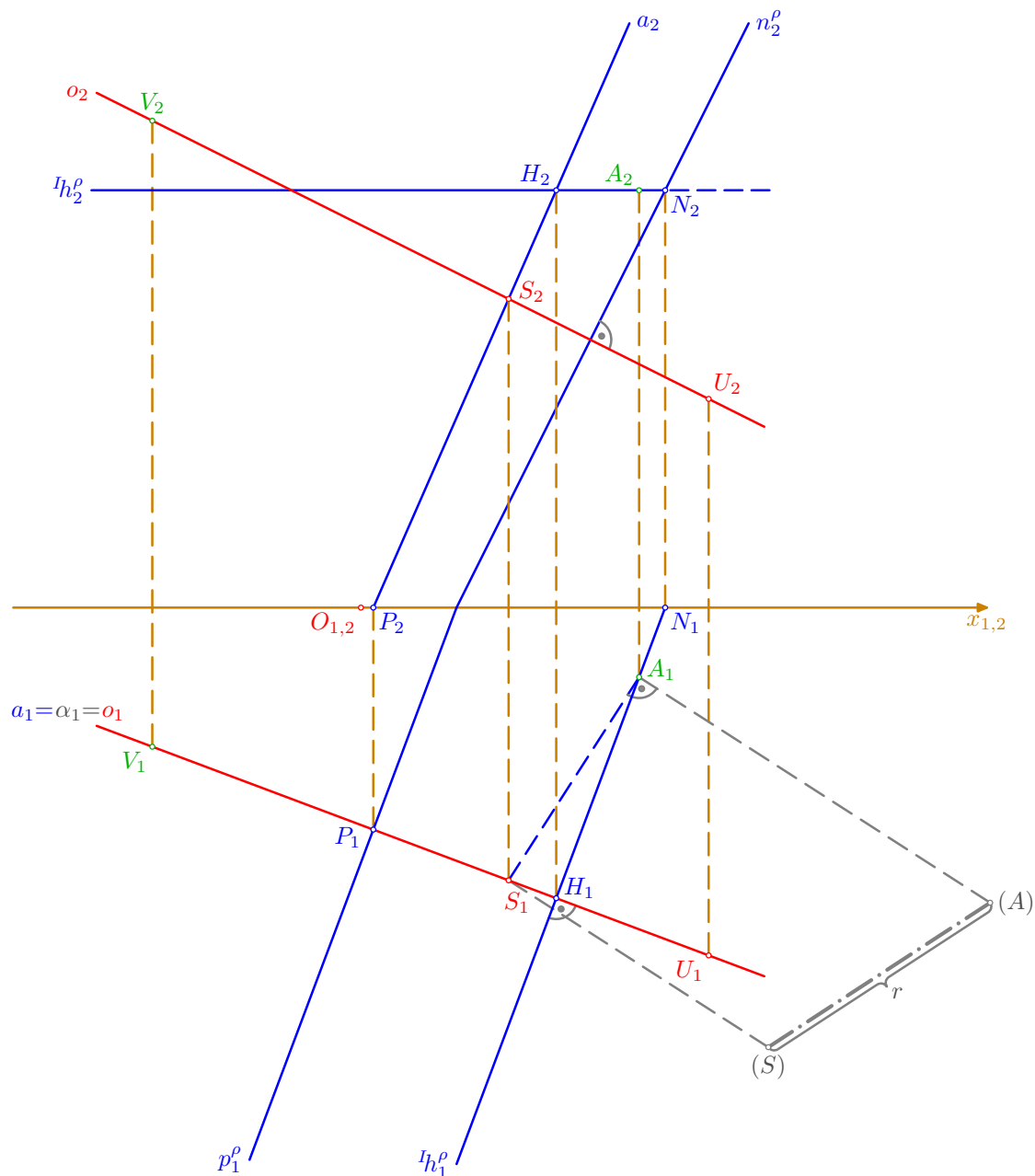
- pomocí hlavní přímky  ${}^I h^\rho$  I. osnovy a jejího nárysného stopníku  $N$  sestrojíme stopy roviny  $\rho \perp o$ ,  $A \in \rho$ :  ${}^I h_1^\rho \perp o_1$ ,  $A_1 \in {}^I h_1^\rho$ ,  ${}^I h_2^\rho \parallel x$ ,  $A_2 \in {}^I h_2^\rho$ , dále je půdorys  $N_1 = {}^I h_1^\rho \cap x$  a nárys  $N_2$  leží na ordinále a na přímce  ${}^I h_2^\rho$ ; bodem  $N_2$  pak prochází nárysná stopa  $n_2^\rho \perp o_2$  a půdorysná  $p_1^\rho \parallel {}^I h_1^\rho$  (nebo  $p_1^\rho \perp o_1$ ) se s nárysnou stopou protíná na ose  $x$



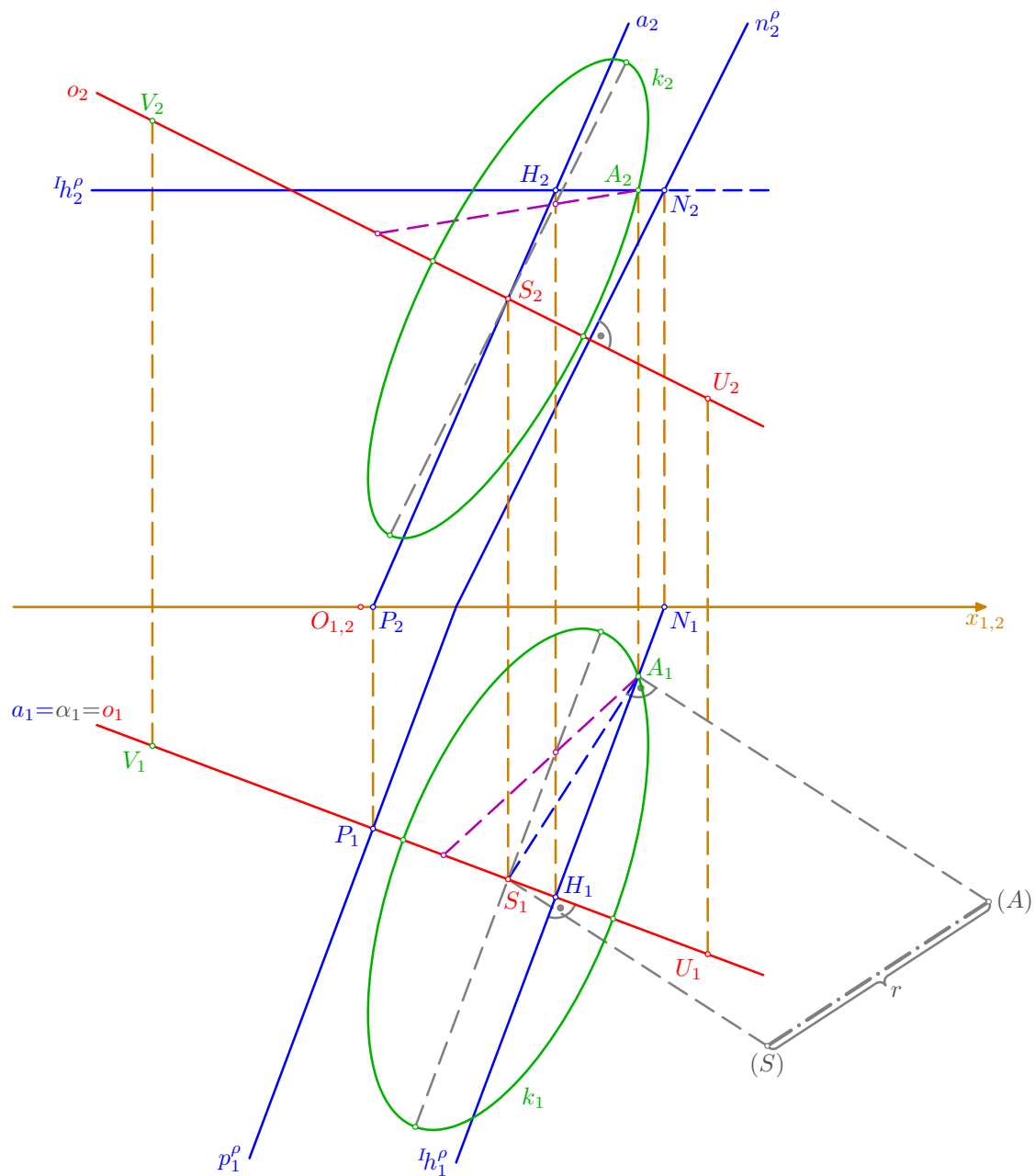
- najděme průsečík  $S$  osy  $o$  s rovinou  $\rho$ : přímkou  $o$  proložme pomocnou rovinu  $\alpha \perp \pi$ , tj.  $\alpha_1 = o_1$ , určíme její průsečíky  $P, H$  se stopou  $p^\rho$  a hlavní přímkou  $h^\rho$ , v průmětu je  $P_1 = p_1^\rho \cap \alpha_1$  a  $H_1 = h_1^\rho \cap \alpha_1$ , nárys  $P_2$  leží na ordinále a na ose  $x$ , nárys  $H_2$  odvodíme po ordinále na přímkou  $h_2^\rho$ ; nyní můžeme sestrojít sdružené průměty průsečnice  $a = \alpha \cap \rho$  – pro půdorys je  $a_1 = P_1 H_1 = \alpha_1 = o_1$  (krycí přímka) a pro nárys platí  $a_2 = P_2 H_2$ ; v nárysu pak najdeme průsečík  $S_2 = a_2 \cap o_2$  a po ordinále jej spustíme do půdorysu  $S_1 \in o_1$ ; tím jsme sestrojili střed  $S = o \cap \rho$  podstavy konstruovaného rotačního kuželu



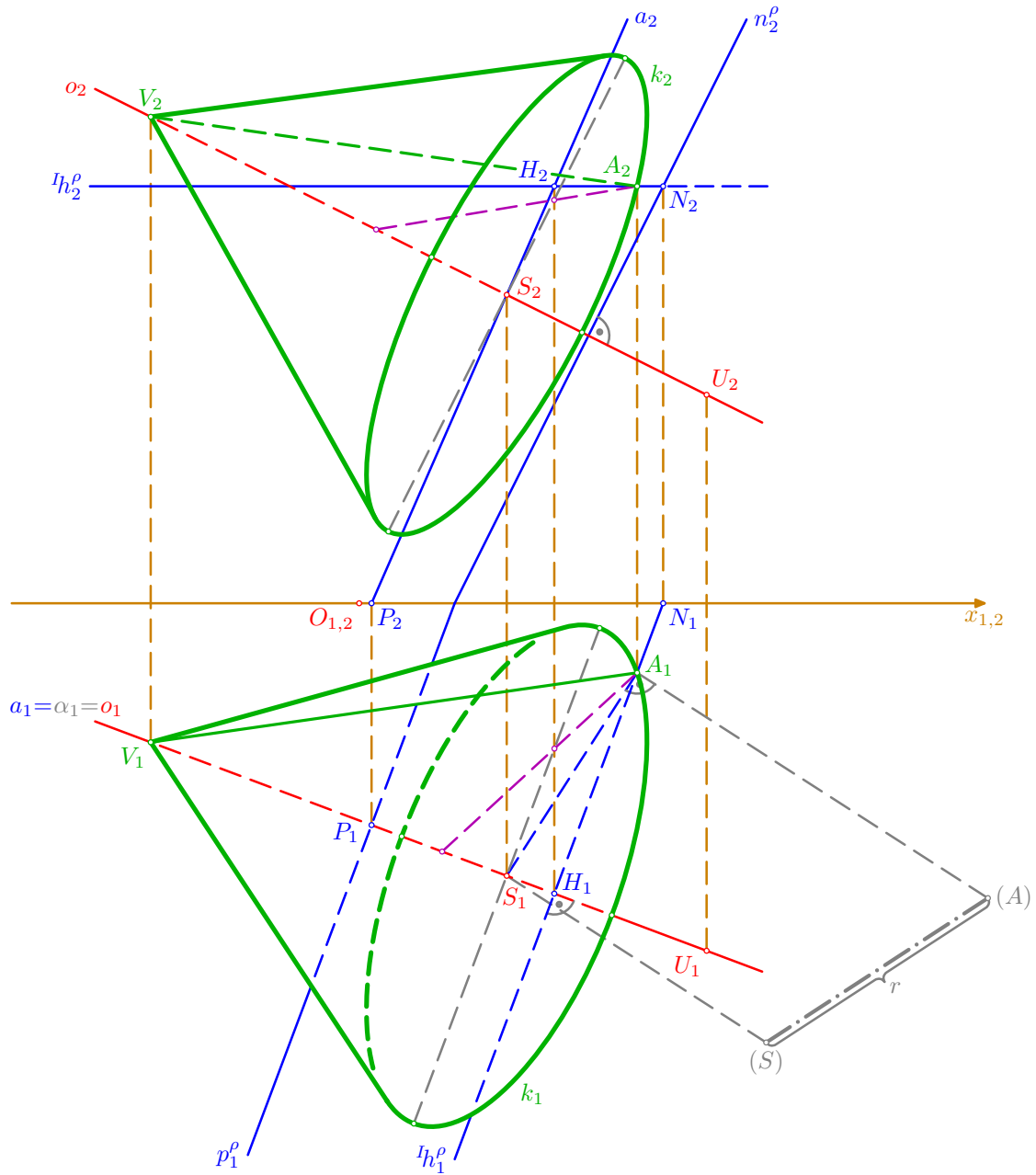
- ve sklopení půdorysně promítací roviny úsečky  $AS$  určíme její skutečnou délku: sestrojíme sklopené polohy  $(A)$ ,  $(S)$  bodů  $A, S$  a zjistíme tím poloměr  $r = |SA| = |(S)(A)|$  podstavy



- obvyklým způsobem zobrazíme sdružené průměty podstavné kružnice  $k(S, r) \subseteq \rho$ : hlavní vrcholy elipsy  $k_1$  resp.  $k_2$  leží ve vzdálenosti poloměru  $r$  na kolmici k přímce  $o_1$  resp.  $o_2$  vedené bodem  $S_1$  resp.  $S_2$ , ke konstrukci vedlejších vrcholů v obou průmětech uijeme **proužkové konstrukce** (v půdorysu je užito rozdílové, v narysu součtové varianty, více viz na straně 196) a sdružených průmětů  $A_1, A_2$  bodu  $A \in k$



- na závěr zbývá dokončit obrys kuželu v obou průmětech, tj. sestrojiti tečny z bodů  $V_1, V_2$  k elipsám  $k_1, k_2$ , a určit viditelnost; obrysové tečny je možno sestrojiti pomocí ohniskových vlastností elipsy (viz úloha *Tečny k elipse daným bodem* na straně 184) nebo užitím osové afinity – obě varianty jsou však dosti pracné a při ručním rýsování „háklivé“ na přesnost; proto je dostačující tzv. „inženýrská konstrukce“ tečny pouhým přiložením pravítka; vrchol  $V$  leží výše nad půdorysnou než střed  $S$  podstavy, a část podstavné kružnice je tudíž při pohledu shora skryta (část elipsy  $k_1$  mezi body dotyku obrysových úseček je vyrýsována čárkovaně); naopak je střed  $S$  dále od nárýsny než vrchol  $V$  a v nárýsu je tedy vidět celá podstavná kružnice (celá elipsa  $k_2$  je vytažena plnou čarou)



□

## 8. Úlohy k samostatnému řešení

Řešte v Mongeově promítání.

1. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník  $ABC$ , jehož ramena leží v rovinách  $\alpha, \beta$  a jehož základna  $AB$  leží na přímce  $m = QR$ .

$$\alpha(-6; 45^\circ; 75^\circ), \beta(6; 105^\circ; 135^\circ), Q[-3; 3,5; 3,5], R[3; 1; 3,5]$$

2. Stanovte paprsek tak, aby procházel bodem  $A$  a po odrazu na rovině  $\rho$  procházel bodem  $B$ .

$$A[-3; -1; 6], B[2; 1; 8], \rho(-5; 4; 3)$$

3. Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$  s osou  $o = MP$  a výškou  $v$ , je-li bod  $A$  vrcholem jeho podstavy; zobrazte pouze jedno ze dvou možných řešení.

$$M[-1; 4; 5], P[6; 1; 0], v = 7, A[-1; 5; 1]$$

4. Sestrojte pravidelný pětiboký jehlan  $ABCDEV$  s podstavou o středu  $S$  a vrcholu  $A$  v rovině  $\rho$ , je-li jeho výška  $v$  rovna délce podstavné hrany.

$$\rho(-4; 7; 5), S[1; 4; ?], A[2; 2; ?]$$

5. Sestrojte pravidelný šestiboký jehlan  $ABCDEFV$  s podstavou o středu  $S$  v rovině  $\rho$ , jestliže jedna jeho boční stěna leží v půdorysně  $\pi$ .

$$\rho(8; 9; 7), S[-1; ?; 3]$$

6. Zobrazte rovnoběžnostěn, jehož tři stěny leží v rovinách  $\rho, \sigma$  a  $\pi$  a jeden jeho vrchol je v bodě  $A$ .

$$\rho(-6; 6; -9), \sigma(8; 6; -20), A[-0,5; 4; 7]$$

7. Sestrojte krychli  $ABCDEFGH$  o hraně délky  $a$ , jejíž hrana  $AB$  leží na přímce  $m = AP$  a vrchol  $D$  je v nárýsně  $\nu$ ; úloha má celkem 8 řešení, zobrazte pouze jedno z nich.

$$A[4; 3; 4], P[-1; 6; 0], a = 5$$

8. Sestrojte pravidelný pětiboký hranol  $ABCDEA'B'C'D'E'$ , jehož jedna podstava o středu  $S$  leží v rovině  $\rho$  a bod  $A'$  je vrcholem druhé podstavy.

$$\rho(7; 8; 7), S[-1; ?; 4], A'[4; 5; 6]$$

9. Sestrojte kulovou plochu  $\kappa$ , která prochází body  $A, B$  a jejíž střed  $S$  leží na přímce  $l = KL$ .

$$A[3; 5; 1], B[-1; 7; 3], K[4; 3; 3], L[-5; 6; 7]$$

10. Sestrojte kulovou plochu  $\kappa$ , pro niž je dán střed  $S$  a tečná rovina  $\tau$ .

$$S[0; 5; 6], \tau(-8; 4; 5)$$

11. Sestrojte kulovou plochu  $\kappa$ , jejíž střed  $S$  leží na přímce  $p = MN$  a která se dotýká přímky  $t = TQ$  v jejím bodě  $T$ .

$$M[-3; 5; 3], N[3; 5; 3], T[-2; 3; 5], Q[-5; 6; 2]$$

12. Sestrojte těleso, které vznikne rotací  $\triangle ABC$  kolem jeho strany  $AB$ .

$$A[8; 11; 9], B[-6; 2; 2], C[4; 4; 5]$$

13. Sestrojte rovnostranný kužel s podstavou o středu  $S$  v rovině  $\rho$ , je-li dán bod  $A$  na jeho plášti.

$$\rho(-7; 4; 10), S[0; 2; ?], A[0; 5; 3]$$

14. Sestrojte rotační kužel, daný vrcholem  $V$ , středem  $S$  a poloměrem  $r$  podstavy.

$$V[-3; 8; 8], S[1,5; 4; 3,5], r = 3$$

15. Sestrojte rotační válec, jsou-li dány středy  $S, S'$  jeho podstav a poloměr  $r$ .

$$S[2; 5; 4], S'[-3; 8; 8], r = 4$$

16. Sestrojte rotační válec výšky  $v$ , jehož podstavná kružnice  $k(S, r)$  leží v rovině  $\rho$ ; zobrazte pouze jedno ze dvou existujících řešení.

$$\rho(-6; 7; 5), S[0; 3; ?], r = 3, v = 6$$

17. Zobrazte rotační válec, jsou-li dány body  $A, B, C$  jeho podstavné hrany a výška  $v$ .

$$A[-3; 3; 3], B[4; 8; 3], C[0; 1; 8], v = 5$$

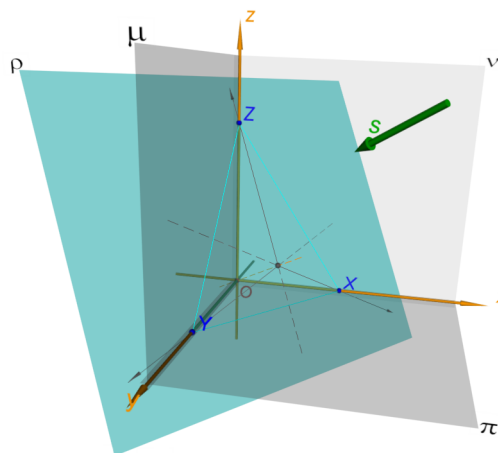
# Pravoúhlá axonometrie

## Tematický obsah

- Zobrazení základních útvarů
  - Základní pojmy
  - Zobrazení bodu, Zobrazení přímky, Zobrazení roviny
- Polohové úlohy
  - Průsečnice dvou rovin, Průsečík přímky s rovinou
- Zobrazení kružnice (ležící v půdorysně)
- Zobrazení tělesa
  - Pravidelný čtyřboký jehlan, Zářezová (Eckhartova) metoda

## 1. Zobrazení základních útvarů v pravoúhlé axonometrii

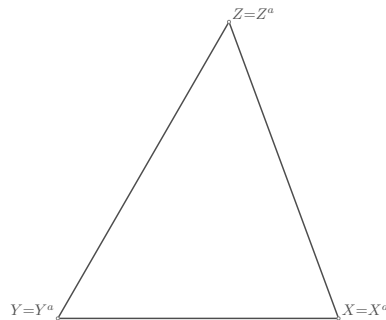
### 1.1. Základní pojmy



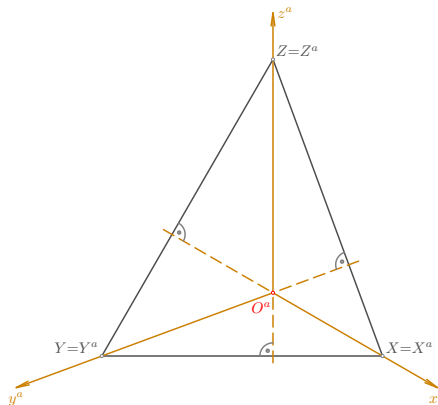


## Výklad

- na začátku mějme souřadnicový systém os  $x, y, z$  a rovin  $\pi, \nu, \mu$  s počátkem v bodě  $O$
- **axonometrická průmětna**  $\rho$  není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou a neprochází počátkem; směr promítání  $s$  je kolmý k  $\rho$
- průmětna  $\rho$  protíná osy  $x, y, z$  po řadě v bodech  $X, Y, Z$ ; ty tvoří vrcholy tzv. **axonometrického trojúhelníka**, který je vždy ostroúhlý; je-li tento trojúhelník obecný resp. rovnoramenný resp. rovnostranný, nazývá se příslušná axonometrie **trimetrie** resp. **dimetrie** resp. **izometrie**

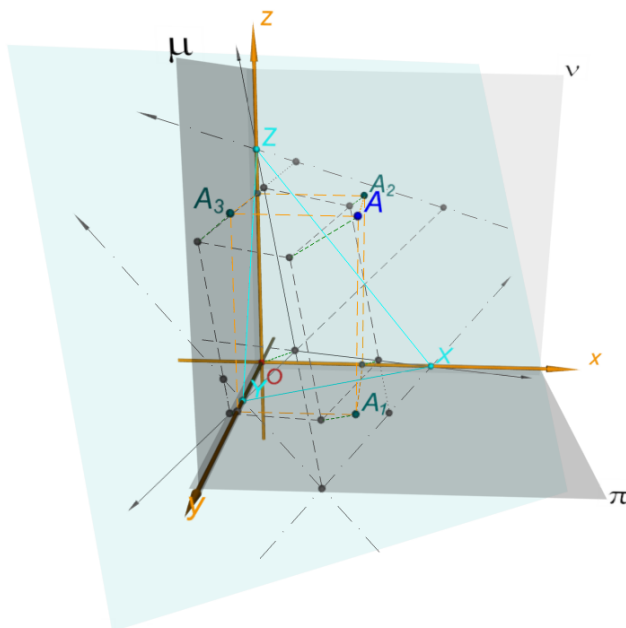


- pravouhlé průměty  $x^a, y^a, z^a$  os  $x, y, z$  se zobrazí jako výšky v trojúhelníku  $XYZ$  a jejich průsečík  $O^a$  je tedy axonometrickým průmětem počátku  $O$



□

## 1.2. Zobrazení bodu



## Výklad

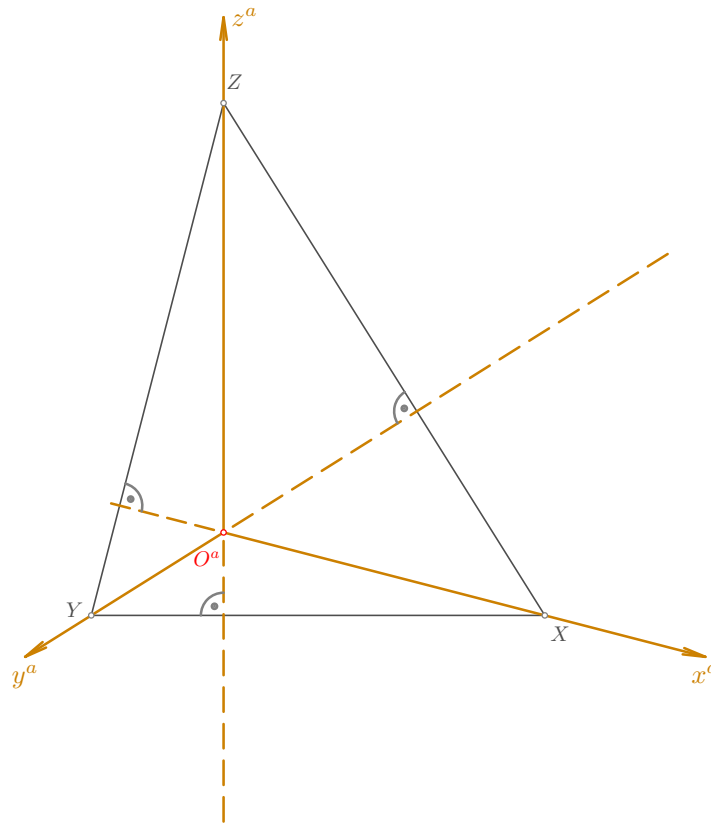
- pravoúhlá axonometrie poskytuje obvykle názornější obrazy prostorových útvarů, ovšem vynášení souřadnic je poměrně komplikovaná a časově zdlouhavá konstrukce
- axonometrická průmětna má k souřadnicovým osám obecnou polohu, a je tedy třeba zjistit zkrácení délkové jednotky na průmětech příslušných os
- k tomu se nejčastěji používá konstrukce otáčení souřadnicových rovin do axonometrické průmětny kolem stran axonometrického trojúhelníka
- proto se také v praxi častěji užívá dimetrie nebo izometrie, kdy se délková jednotka zkrátí na průmětech dvou nebo všech tří souřadnicových os stejně
- jak již bylo naznačeno, axonometrický průmět nějakého útvaru  $U$  označíme vpravo nahoře indexem  $a$ , tj.  $U^a$ ; toto označení nedodržíme pouze při popisu stop nějaké roviny, takže např. axonometrický průmět půdorysné stopy roviny  $\rho$  označíme  $p^\rho$  (tj. jako v prostoru) místo  $p^{\rho a}$

## Řešené úlohy

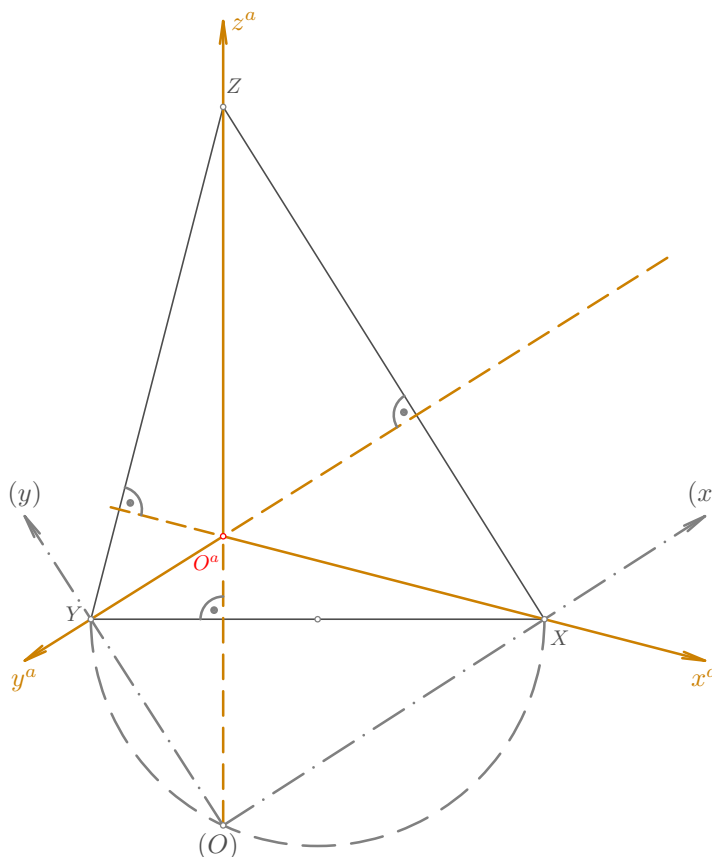


**Příklad:** Zobrazte průmět bodu  $A[3; 4; 5]$  v pravoúhlé axonometrii dané trojúhelníkem  $\triangle(6; 7; 8)$ .

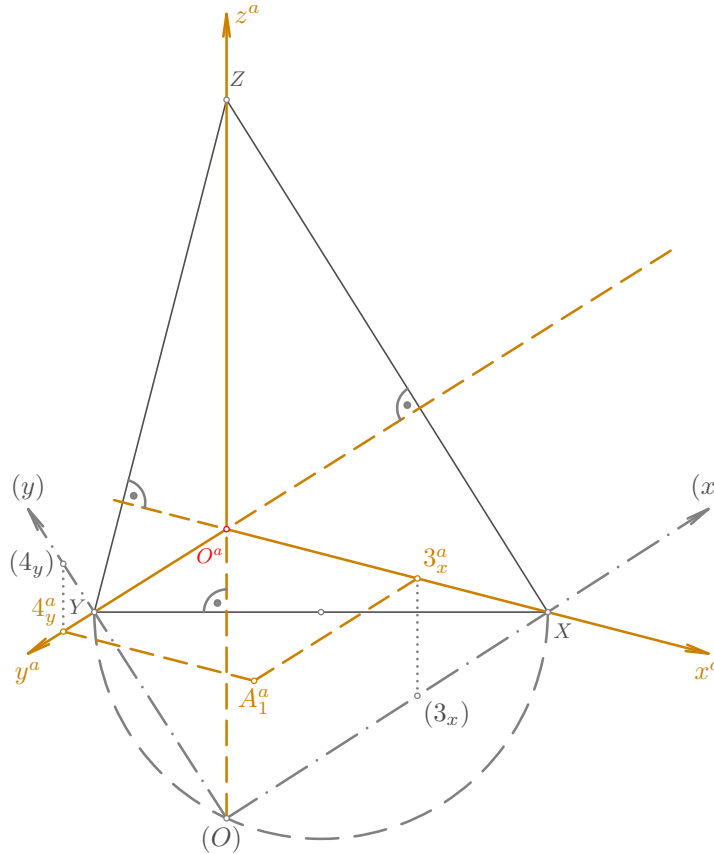
- axonometrický trojúhelník  $XYZ$  je dán délkami svých stran (platí  $|XY|=6$ ,  $|YZ|=7$ ,  $|ZX|=8$ ), průměty  $x^a, y^a, z^a$  souřadnicových os  $x, y, z$  se zobrazí jako výšky, jejich průsečík  $O^a$  je průmětem počátku  $O$



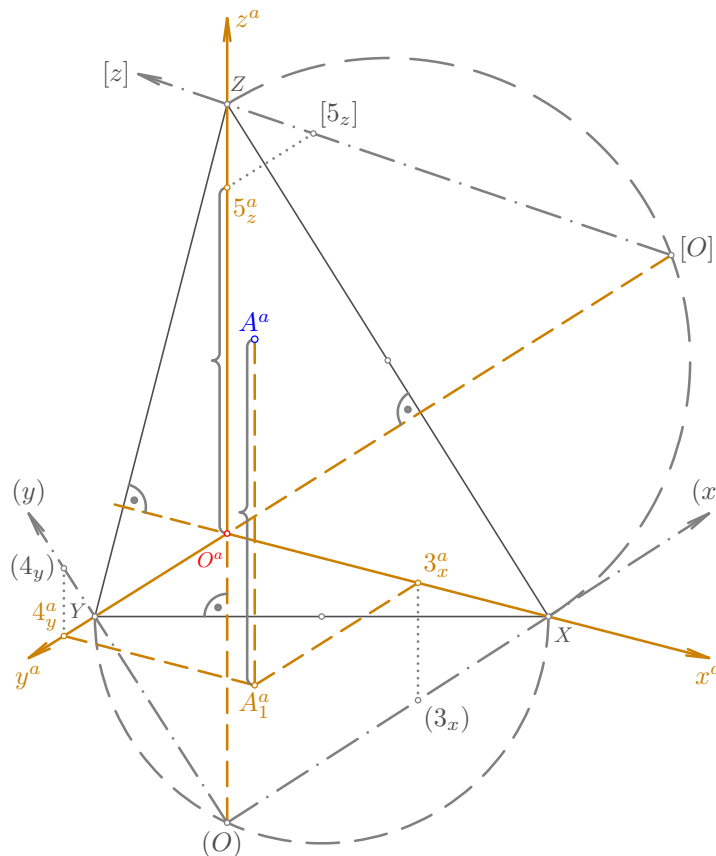
- půdorysna  $\pi$  je otočena kolem přímky  $XY$  do axonometrické průmětny; otočená poloha  $(O)$  počátku  $O$  leží na přímce  $z^a$  a na Thaletově kružnici nad průměrem  $XY$ ; otočené polohy  $(x)=(O)X$ ,  $(y)=(O)Y$  os  $x$ ,  $y$  jsou tedy navzájem kolmé a lze je použít k vynesení souřadnic



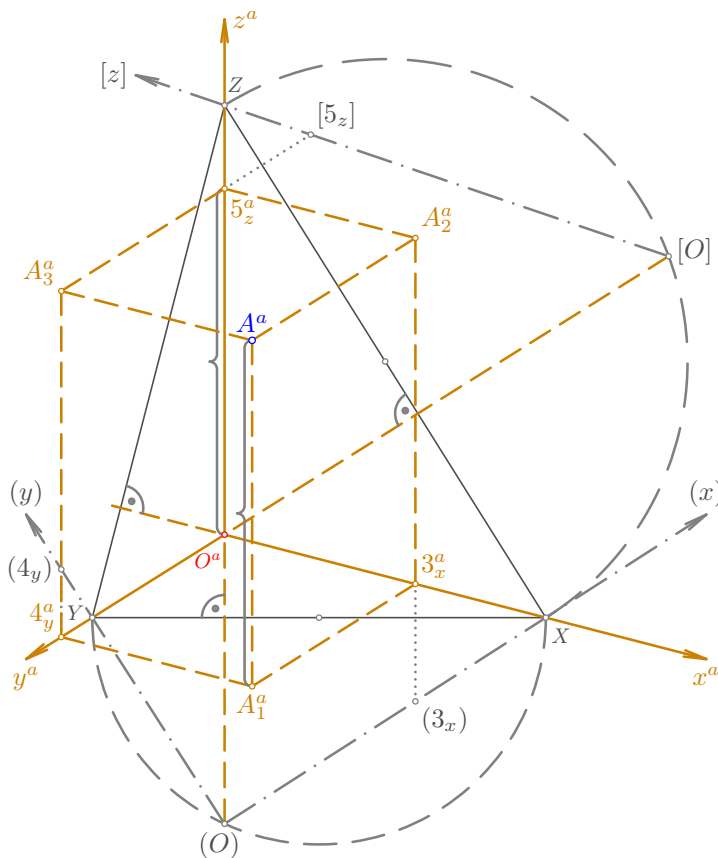
- v otočení nanese se  $x$ -ovou a  $y$ -ovou bodu  $A$  souřadnici a získáme tak body  $(3_x) \in (x)$  a  $(4_y) \in (y)$ ; ty vrátíme po kolmících k přímce  $XY$  zpět na průměty  $x^a, y^a$  os  $x, y$  do bodů  $3_x^a, 4_y^a$ ; pomocí rovnoběžek s přímkami  $x^a, y^a$  pak získáme axonometrický půdorys  $A_1^a$  bodu  $A$



- nad bod  $A_1^a$  nanese se ve směru přímky  $z^a$   $z$ -ovou souřadnici, ovšem v příslušném zkrácení; to zjistíme např. v otočení náryсны  $\nu$  do axonometrické průmětny kolem přímky  $XZ$ : otočená poloha  $[O]$  počátku  $O$  leží na přímce  $y^a$  a na Thaletově kružnici nad průměrem  $XZ$  a přímka  $[z]=[O]Z$  je otočenou polohou osy  $z$ ; v otočení najdeme bod  $[5_z] \in [z]$  (kde  $|[O][5_z]|=z_A=5$ ), po kolmici k přímce  $XZ$  jej vrátíme zpět do bodu  $5_z^a \in z^a$  a jeho vzdálenost od bodu  $O^a$  je pak hledaným zkrácením  $z$ -ové souřadnice bodu  $A$ , tj.  $|A_1^a A^a|=|O^a 5_z^a|$

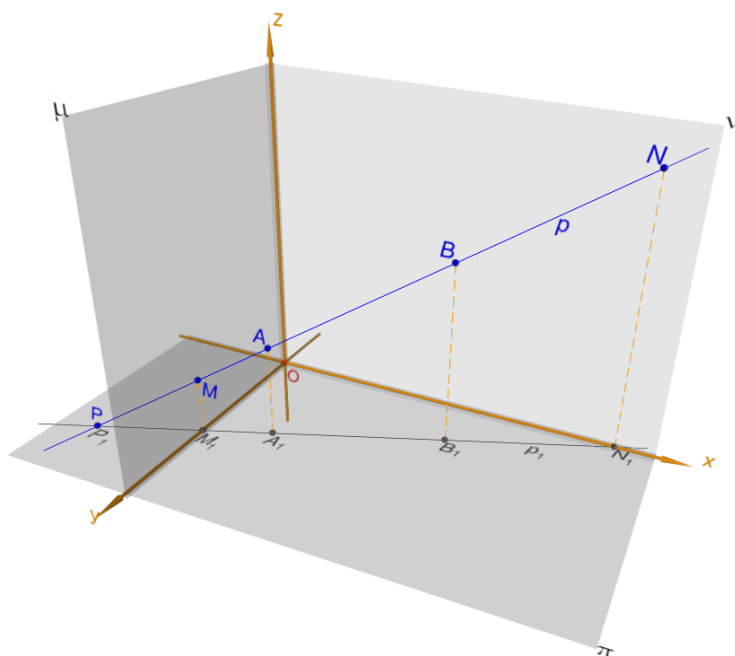


- na závěr jsou pro zajímavost a větší názornost doplněny axonometrické průměty  $A_2^a, A_3^a$  nárýsu  $A_2$  a bokorysu  $A_3$  a je tak sestaven tzv. **souřadnicový kvádr** bodu  $A$ ; tato konstrukce již však není pro zobrazení bodu  $A$  v dané axonometrii nezbytně nutná. . .



□

## 1.3. Zobrazení přímky



## Výklad

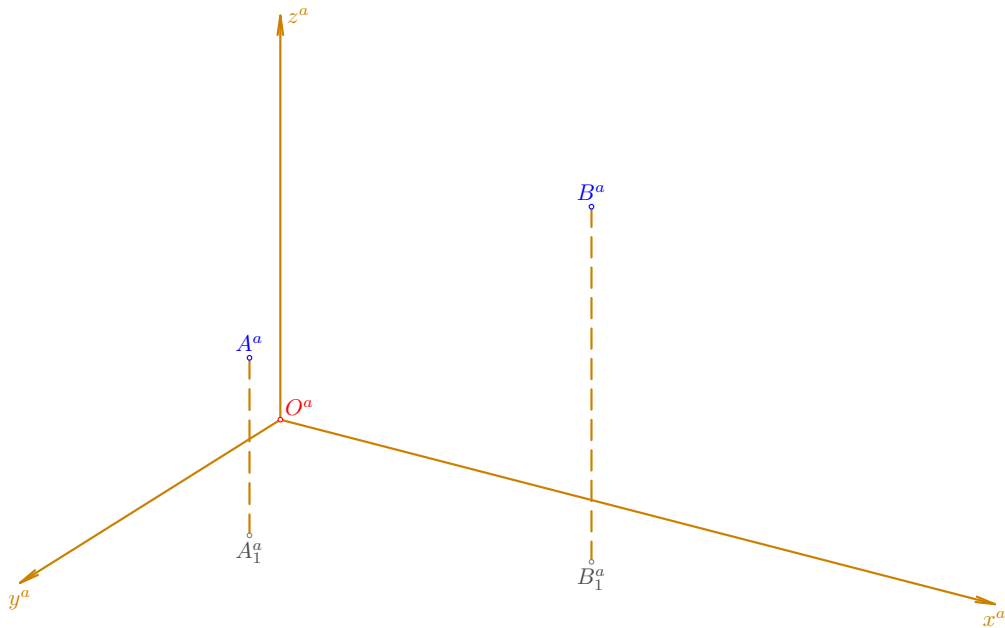
- protože je vynášení souřadnic v pravoúhlé axonometrii dosti pracné a nákrasna se rychle zaplní konstrukcemi, budeme v této a v dalších polohových úlohách pracovat bez souřadnic
- pravoúhlá axonometrie bude zadána pouze tzv. **osovým křížem** a další útvary budeme volit libovolně vhodně



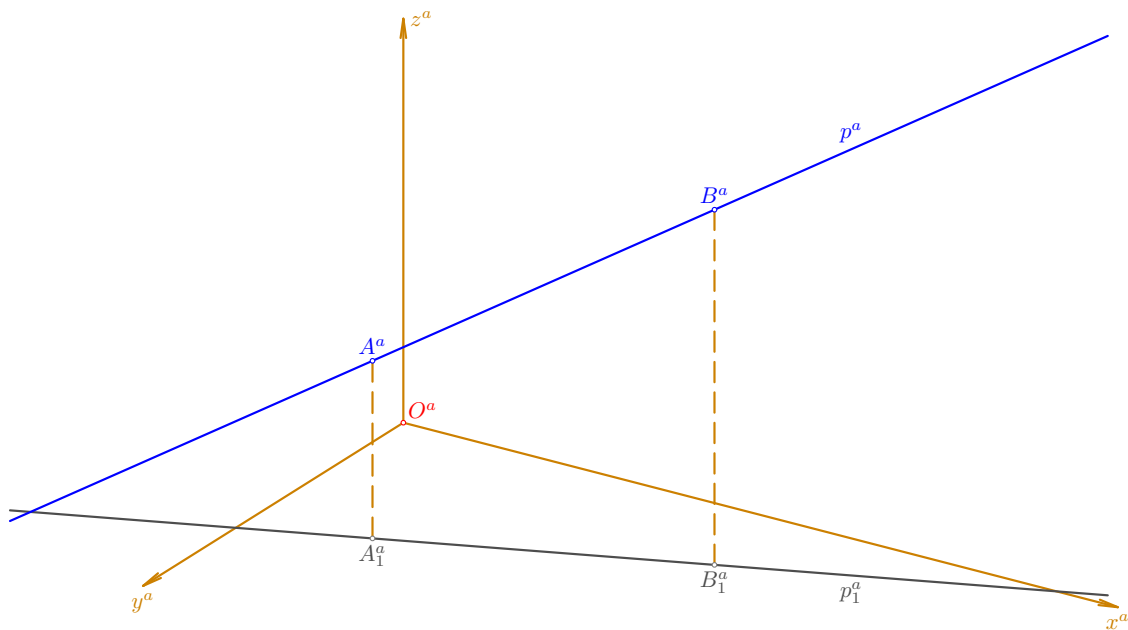
## Řešené úlohy

**Příklad:** V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem zobrazte přímku  $p=AB$  a najděte její průsečíky s rovinami  $\pi, \nu, \mu$ .

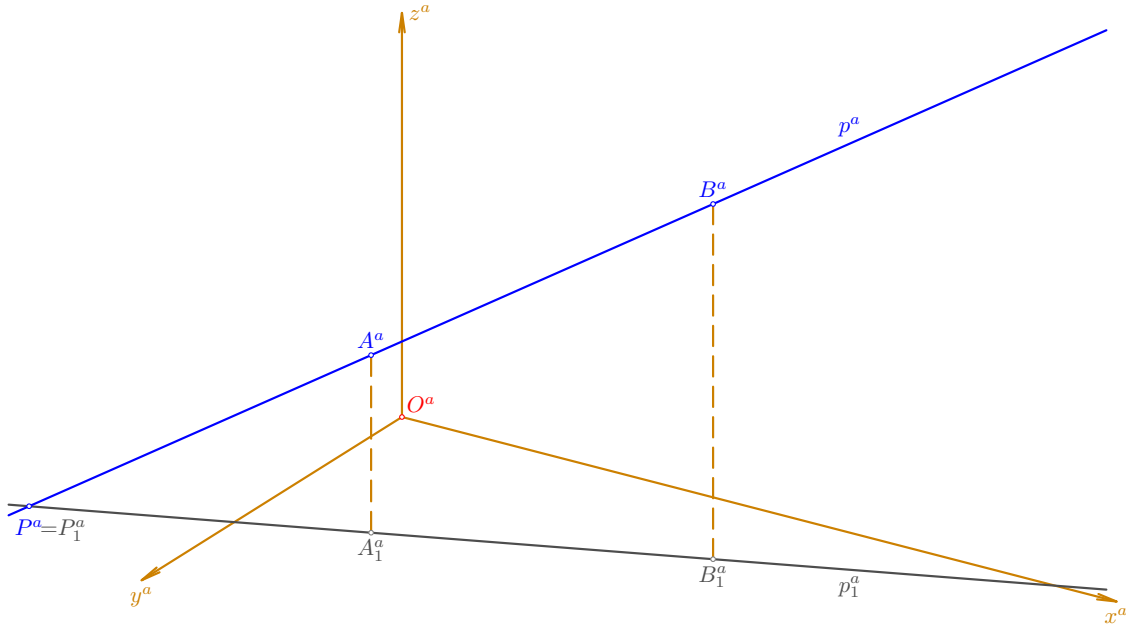
- pro body  $A, B$  zvolme jejich axonometrické půdorysy  $A_1^a, B_1^a$  a axonometrické průměty  $A^a, B^a$ , přičemž platí  $A_1^a A^a \parallel B_1^a B^a \parallel z^a$ ; takto zvolené body leží v tzv. **prvním oktantu**, tj. nad půdorysnou, před nárysnou a před bokorysnou



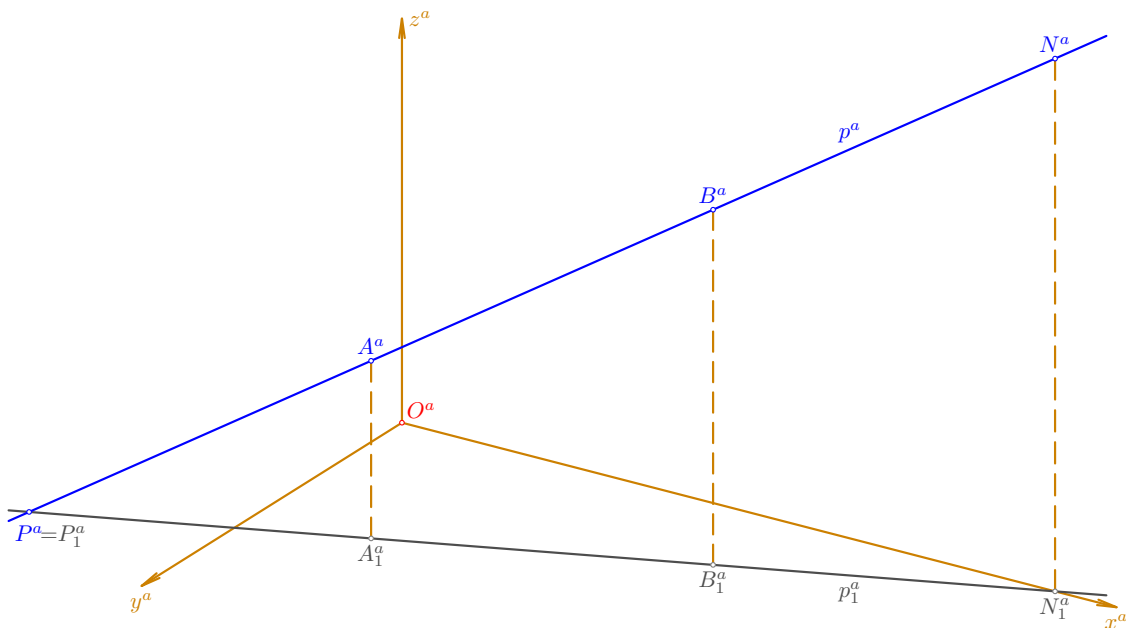
- sestrojme axonometrický průmět  $p^a = A^a B^a$  a axonometrický půdorys  $p_1^a = A_1^a B_1^a$  přímky  $p = AB$



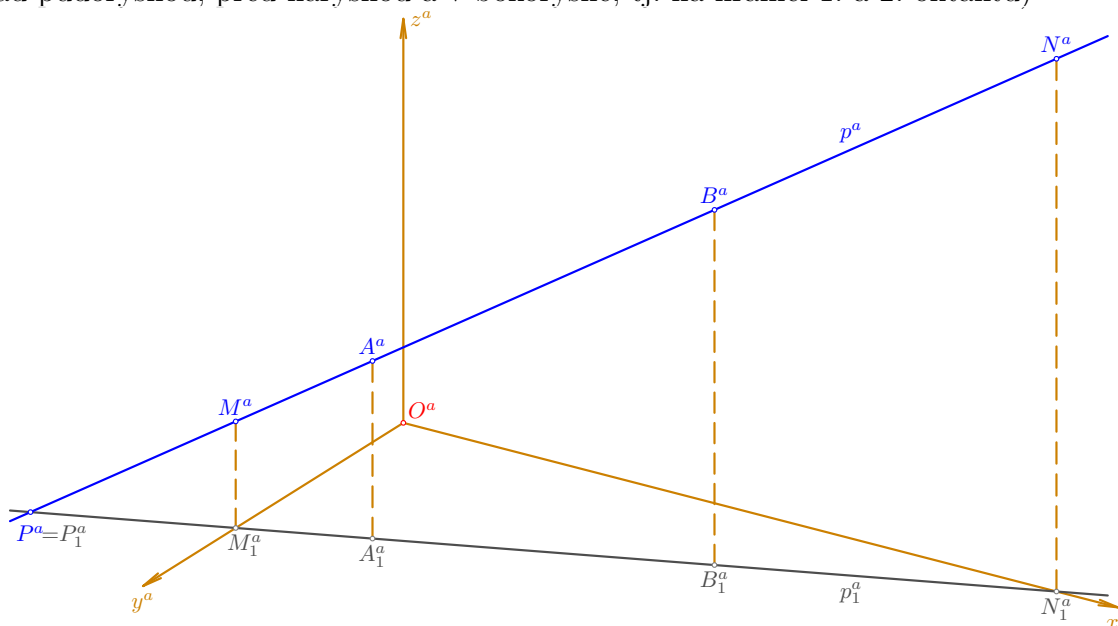
- průsečík  $P=p \cap \pi$  je současně půdorysným stopníkem přímky  $p$  a platí pro něj  $P = P_1 = p \cap p_1$ ; v průmětu je tudíž  $P^a = P_1^a = p^a \cap p_1^a$  (bod  $P$  leží v půdorysně, před nárýsnou a za bokorysnou, tj. na hranici 2. a 6. oktantu)



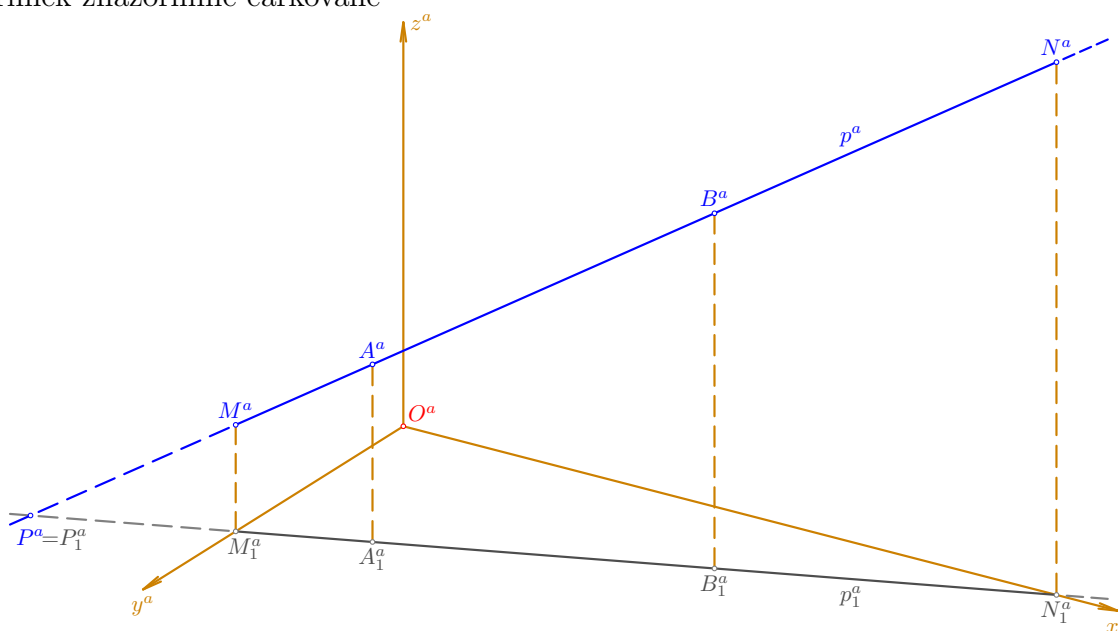
- půdorys  $N_1$  nárýsného stopníku  $N=p \cap \nu$  musí ležet na půdorysu  $p_1$  a na ose  $x$ ; v průmětu je tedy  $N_1^a = p_1^a \cap x^a$  a pro bod  $N^a$  platí  $N^a \in p^a, N_1^a N^a \parallel z^a$  (bod  $N$  leží nad půdorysnou, v nárýsně a před bokorysnou, tj. na hranici 1. a 4. oktantu)



- analogicky leží půdorys  $M_1$  nárysného stopníku  $M=p \cap \mu$  na půdorysu  $p_1$  a na ose  $y$ ; v průmětu je tedy  $M_1^a=p_1^a \cap y^a$  a pro bod  $M^a$  platí  $M^a \in p^a, M_1^a M^a \parallel z^a$  (bod  $M$  leží nad půdorysnou, před nárysnou a v bokorysně, tj. na hranici 1. a 2. oktantu)

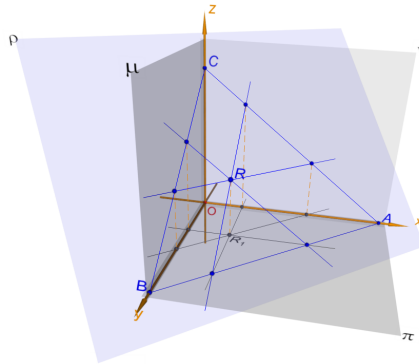


- předpokládáme-li, že souřadnicové roviny  $\pi, \nu, \mu$  jsou neprůhledné (pohled do prvního oktantu pak připomíná roh místnosti), uvidíme přímky  $p, p_1$  pouze mezi nárysnou a bokorysnou, a úsečky  $N^a M^a, N_1^a M_1^a$  tedy vytáhneme plnou čarou, ostatní části těchto přímek znázorníme čárkovaně



□

## 1.4. Zobrazení roviny



## Výklad

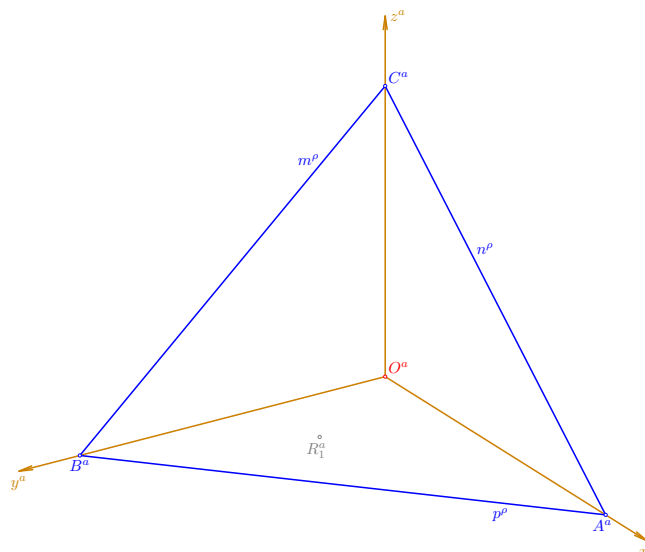
- při zobrazení roviny se nejčastěji uplatňují **stopy roviny**, tj. průsečnice se souřadnicovými rovinami  $\pi, \nu, \mu$ , a **hlavní přímky všech tří os**
- právě při popisu stop a hlavních přímek je pravý horní index rezervován pro označení roviny, a proto je vynechán index  $^a$  označující axonometrický průmět



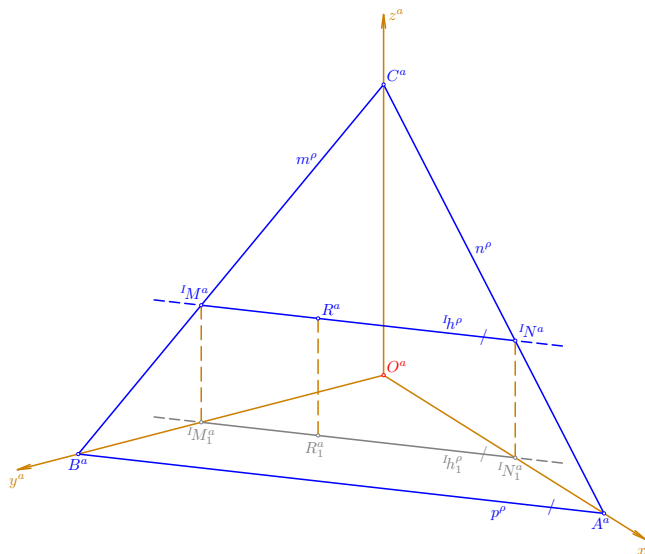
## Řešené úlohy

**Příklad:** V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem zobrazte bod  $R$  v rovině  $\rho$ ; bod  $R$  je dán svým půdorysem  $R_1$  a rovina  $\rho$  stopami.

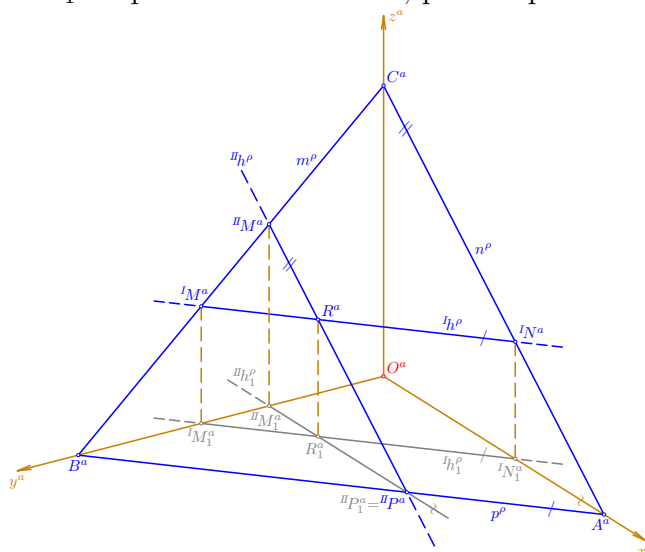
- na přímkách  $x^a, y^a, z^a$  zvolme průměty  $A^a, B^a, C^a$  bodů  $A, B, C$ , v nichž protíná rovina  $\rho$  souřadnicové osy  $x, y, z$ ; body  $A, B, C$  tvoří tzv. **stopní trojúhelník** a určují stopy  $p^\rho = AB, n^\rho = AC, m^\rho = BC$  roviny  $\rho$



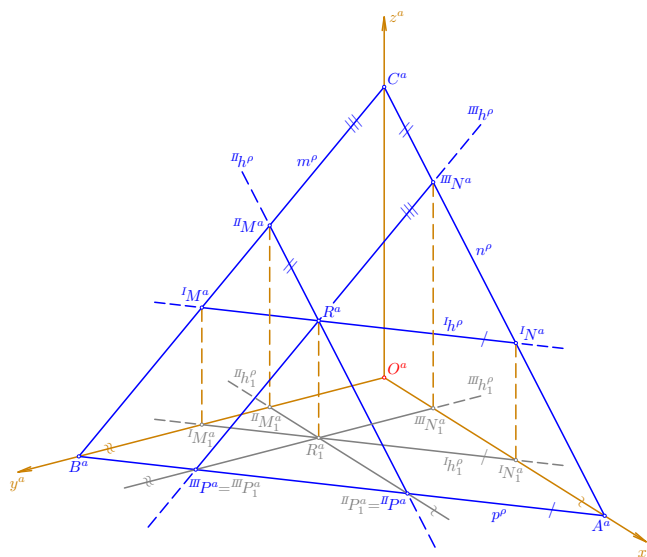
- bod  $R \in \rho$  najdeme pomocí hlavní přímky  ${}^I h^\rho$  I. osnovy roviny  $\rho$ : pro její půdorys je  ${}^I h_1^\rho \parallel p^\rho$ ,  $R_1 \in {}^I h_1^\rho$ ; na osách  $x, y$  najdeme půdorysy  ${}^I N_1 = {}^I h_1^\rho \cap x$ ,  ${}^I M_1 = {}^I h_1^\rho \cap y$  nárysného a bokorysného stopníku, pro něž platí  ${}^I N \in n^\rho$ ,  ${}^I N_1 {}^I N \parallel z$  a  ${}^I M \in m^\rho$ ,  ${}^I M_1 {}^I M \parallel z$ ; pro hlavní přímku  ${}^I h^\rho = {}^I N {}^I M$  pak platí  ${}^I h^\rho \parallel p^\rho$ ; bod  $R$  najdeme na rovnoběžce s osou  $z$  vedené půdorysem  $R_1$  a na přímce  ${}^I h^\rho$ ; uvedený popis konstrukcí se vztahuje k situaci v prostoru – v axonometrickém průmětu platí tytéž vztahy pro axonometrické průměty příslušných útvarů



- podobně lze použít hlavní přímku  ${}^{II} h^\rho$  II. osnovy roviny  $\rho$ : pro její půdorys  ${}^{II} h_1^\rho$  platí  ${}^{II} h_1^\rho \parallel x$ ,  $R_1 \in {}^{II} h_1^\rho$ ; bod  ${}^{II} P = {}^{II} P_1 = {}^{II} h_1^\rho \cap p^\rho$  je půdorysným stopníkem přímky  ${}^{II} h^\rho$ , pro bokorysný stopník  ${}^{II} M$  je  ${}^{II} M \in m^\rho$ ,  ${}^{II} M_1 {}^{II} M \parallel z$ , kde  ${}^{II} M_1 = {}^{II} h_1^\rho \cap y$ ; bod  $R$  pak najdeme nad svým půdorysem  $R_1$  na přímce  ${}^{II} h^\rho = {}^{II} P {}^{II} M$ , pro niž platí  ${}^{II} h^\rho \parallel n^\rho$



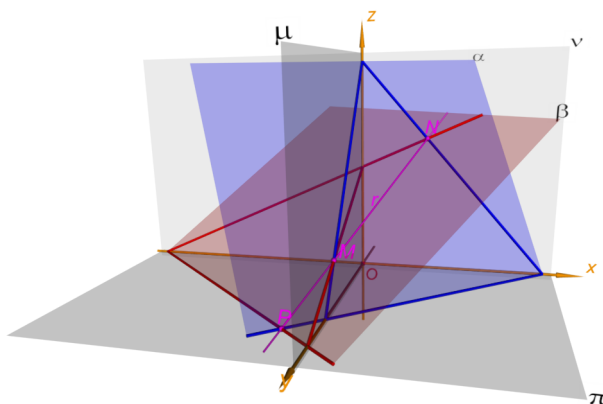
- zcela analogicky postupujeme přes hlavní přímku  $IIIh^\rho$  III. osnovy roviny  $\rho$ : pro její půdorys  $IIIh_1^\rho$  platí  $IIIh_1^\rho \parallel y$ ,  $R_1 \in IIIh_1^\rho$ ; bod  $III P = III P_1 = III h_1^\rho \cap p^\rho$  je půdorysným stopníkem přímky  $IIIh^\rho$ , pro nárysný stopník  $III N$  je  $III N \in n^\rho$ ,  $III N_1 III N \parallel z$ , kde  $III N_1 = III h_1^\rho \cap x$ ; bod  $R$  pak leží nad svým půdorysem  $R_1$  na přímce  $III h^\rho = III P III N$ , pro niž platí  $III h^\rho \parallel m^\rho$ ; tutéž úlohu jsme tak vyřešili třemi různými způsoby



□

## 2. Polohové úlohy v pravoúhlé axonometrii

### 2.1. Průsečnice dvou rovin



### Výklad



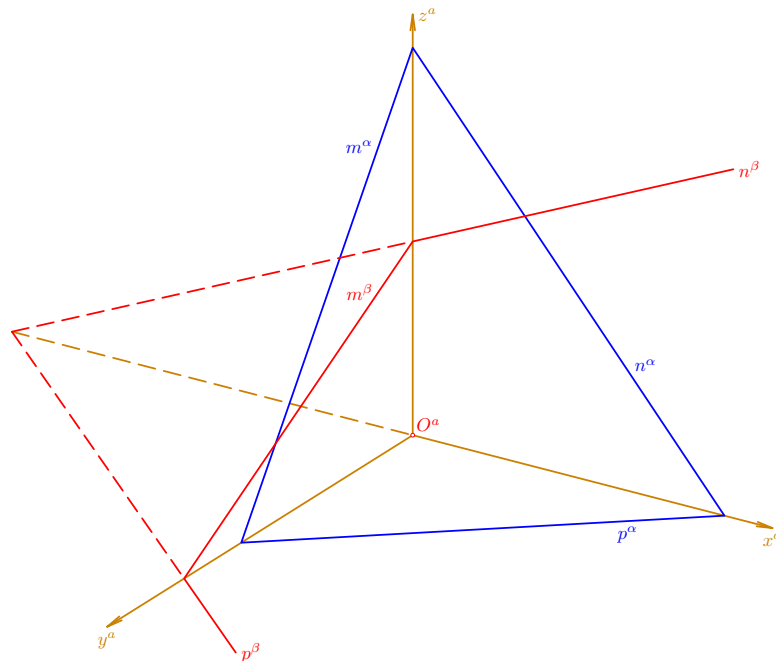
- dvě různoběžné roviny se protínají v přímce – k jejímu sestrojení tedy stačí sestrojiti alespoň dva společné body obou rovin
- v pravoúhlé axonometrii se nejčastěji užívají průsečíky příslušných stop obou rovin; není-li některá z rovin dána stopami, je možno použít **princip krycí přímky**

### Řešené úlohy

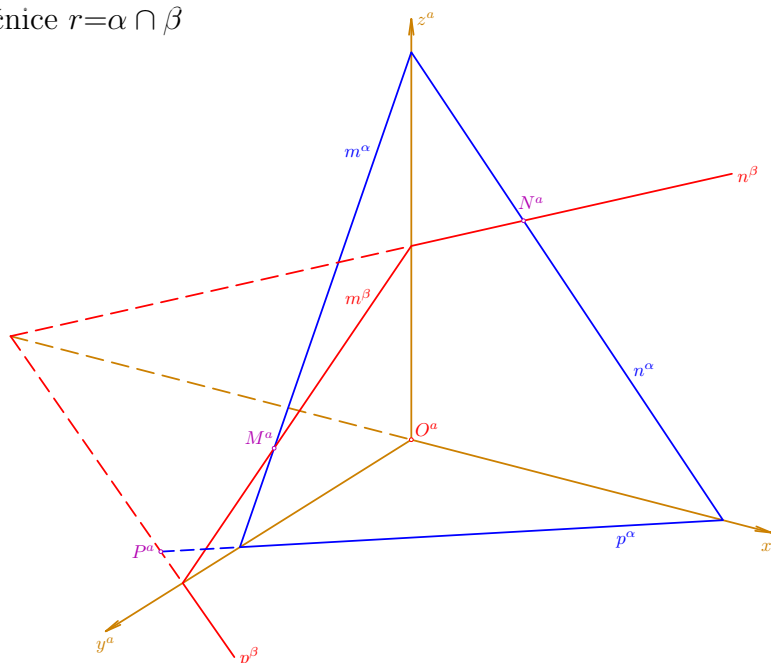


**Příklad:** V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem najděte průsečnici  $r$  rovin  $\alpha$  a  $\beta$ ; roviny  $\alpha, \beta$  jsou dány svými stopami.

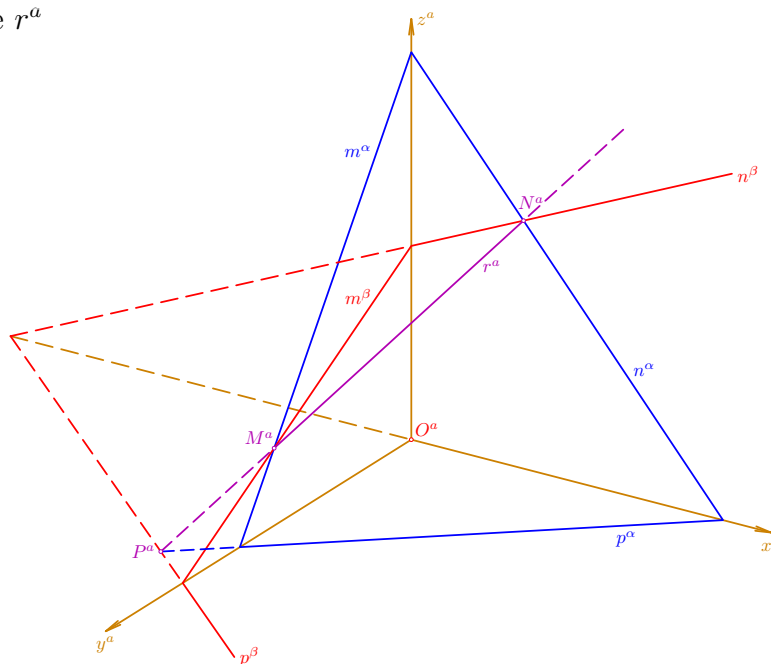
- zadání: jeden vrchol stopního trojúhelníka roviny  $\beta$  leží na záporné části osy  $x$



- najdeme průsečíky příslušných stop obou rovin:  $P=p^\alpha \cap p^\beta$ ,  $N=n^\alpha \cap n^\beta$ ,  $M=m^\alpha \cap m^\beta$  (podle výše uvedeného výkladu stačí najít dva z těchto bodů); jsou to vlastně stopníky hledané průsečnice  $r=\alpha \cap \beta$

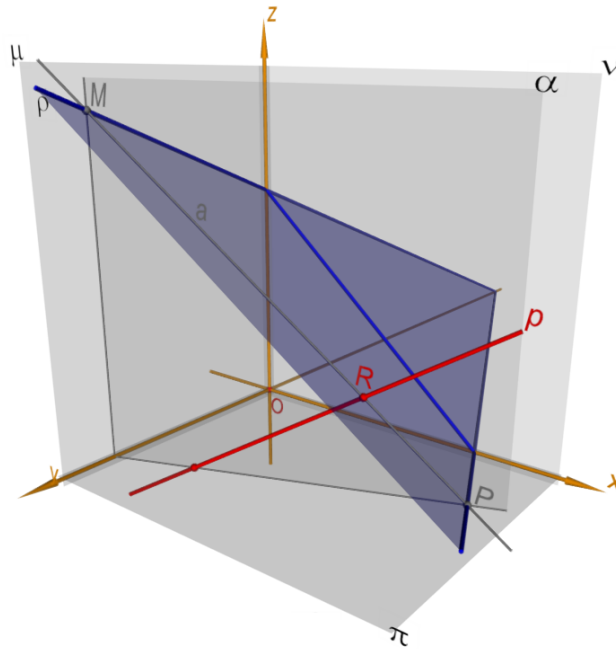


- sestrojené body  $P, N, M$  leží v jedné přímce, která je průsečnicí  $r$  daných rovin  $\alpha, \beta$ ; při přesném rýsování musí také axonometrické průměty  $P^a, N^a, M^a$  bodů  $P, N, M$  ležet v jedné přímce  $r^a$



□

## 2.2. Průsečík přímky s rovinou



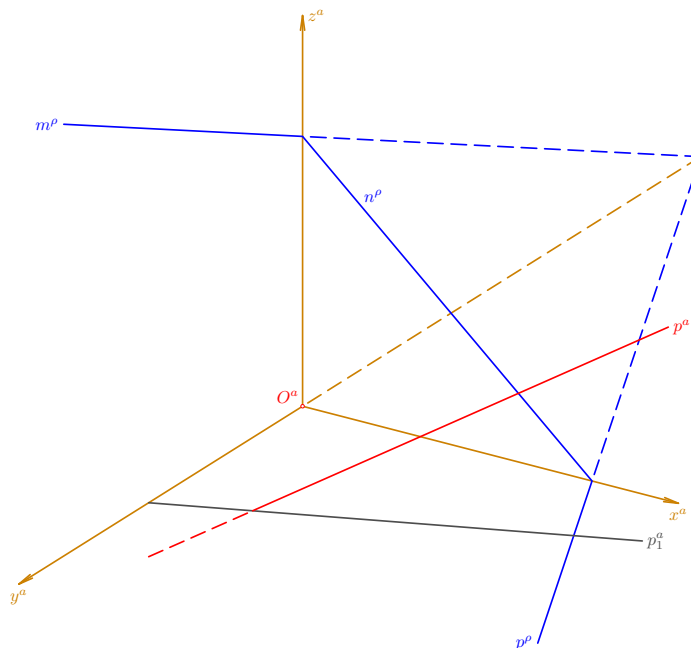
### Výklad

- k sestrojení průmětu průsečíku dané přímky a roviny je třeba proložit zadanou přímkou **pomocnou rovinou**; obecně lze tuto rovinu volit libovolně vhodně – v pravoúhlé axonometrii se nejčastěji prokládá rovina kolmá k půdorysně  $\pi$  nebo k axonometrické průmětně (užívá se tím tzv. **krycí přímka**)
- je-li tedy dána přímka  $p$  a rovina  $\rho$ , proložme přímkou  $p$  rovinu  $\alpha$  kolmou k  $\pi$ ; průsečnice  $a$  rovin  $\rho$  a  $\alpha$  pak protíná přímkou  $p$  v hledaném průsečíku  $R$  přímky  $p$  s rovinou  $\rho$

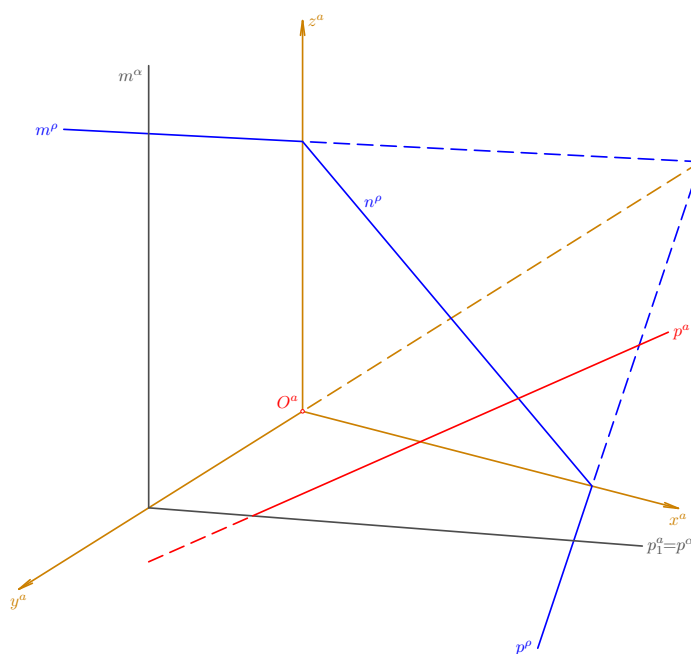
### Řešené úlohy

**Příklad:** V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem sestrojte průsečík  $R$  přímky  $p$  s rovinou  $\rho$ ; přímka  $p$  je dourčena svým půdorysem, rovina  $\rho$  je dána svými stopami.

- zadání úlohy: pro přímkou  $p$  je dán její axonometrický průmět  $p^a$  a axonometrický půdorys  $p_1^a$ , pro rovinu  $\rho$  jsou dány axonometrické průměty jejích stop (jeden vrchol stopního trojúhelníka leží v záporné části osy  $y$ )

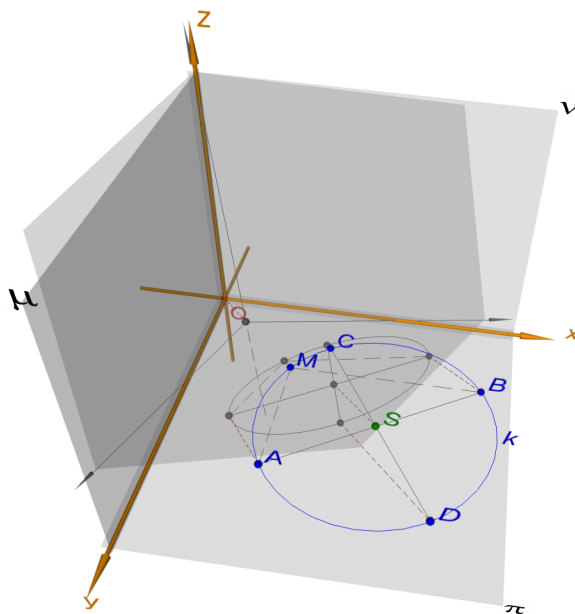


- přímkou  $p$  proložíme rovinu  $\alpha \perp \pi$ : její půdorysná stopa  $p^\alpha$  splývá s půdorysem  $p_1$  přímky  $p$ , bokorysná stopa  $m^\alpha \parallel z$  se s půdorysnou stopou protíná na ose  $y$





### 3. Zobrazení kružnice (ležící v půdorysně) v pravoúhlé axonometrii



#### Výklad

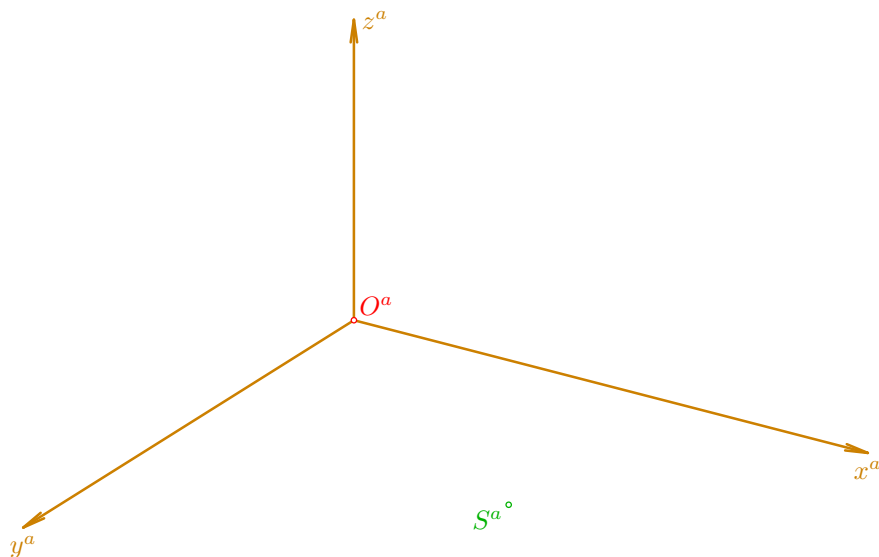
- v pravoúhlé axonometrii lze poměrně snadno sestrojít průmět kružnice dané středem a poloměrem, která leží v souřadnicové rovině nebo v rovině s ní rovnoběžné
- průmětem takové kružnice je elipsa, jejíž hlavní osa je kolmá k průmětu té souřadnicové osy, která je normálou roviny dané kružnice; délka hlavní poloosy je rovna poloměru kružnice
- pro omezení vedlejší poloosy je možno poměrně snadno najít průmět dalšího bodu dané kružnice a použít některou proužkovou konstrukci
- v následujícím příkladě je zobrazen axonometrický průmět kružnice  $k(S,r)$  ležící v půdorysně
- je-li kružnice dána jinak (např. třemi body nebo středem a tečnou), je potřeba použít otočení příslušné souřadnicové roviny do axonometrické průmětny

## Řešené úlohy

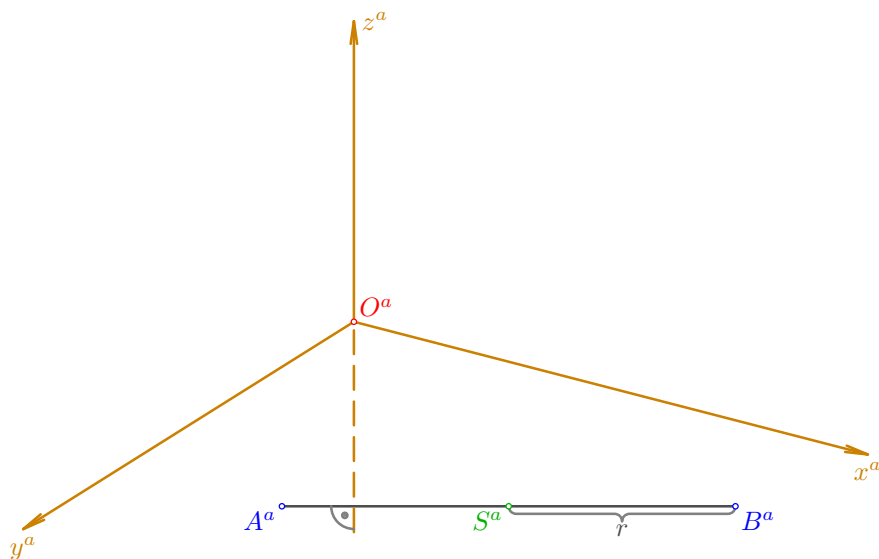


**Příklad:** V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem zobrazte kružnici  $k(S, r=3)$  ležící v půdorysně  $\pi$ ; střed  $S$  je dán svým axonometrickým průmětem  $S^a$ .

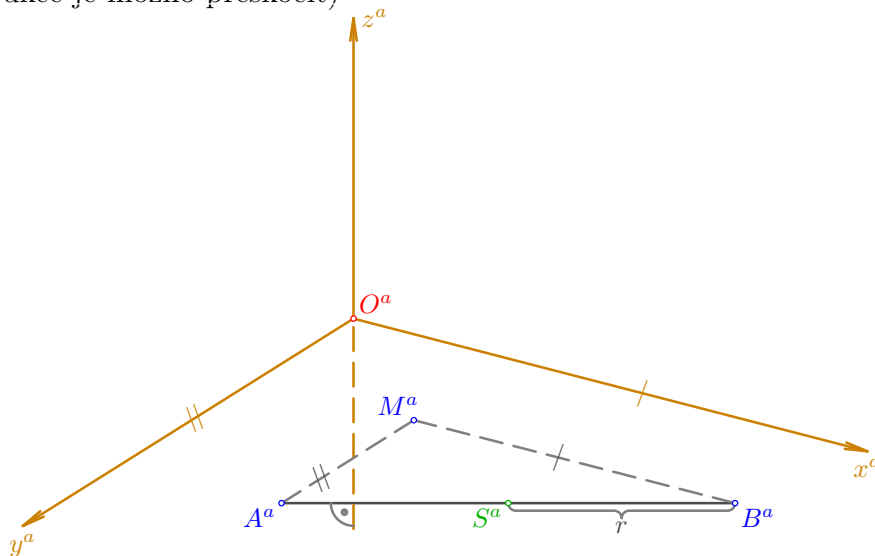
- zadání úlohy



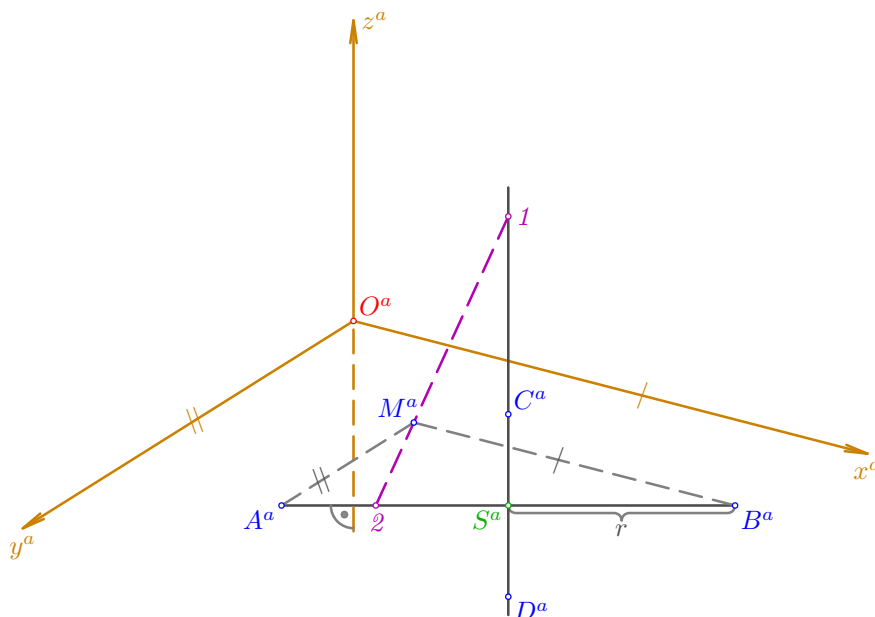
- je-li průměr  $AB$  kružnice  $k$  rovnoběžný s axonometrickou průmětnou, pak při libovolné volbě axonometrického trojúhelníka  $XYZ$  bude  $AB \parallel A^a B^a \parallel XY$  a odtud vyplývá  $A^a B^a \perp z^a$ ; navíc se na průmětu průměru  $AB$  zachová délka úsečky a body  $A^a, B^a$  ( $|A^a B^a| = 2r$ ) jsou tedy hlavní vrcholy elipsy, která je průmětem dané kružnice  $k$



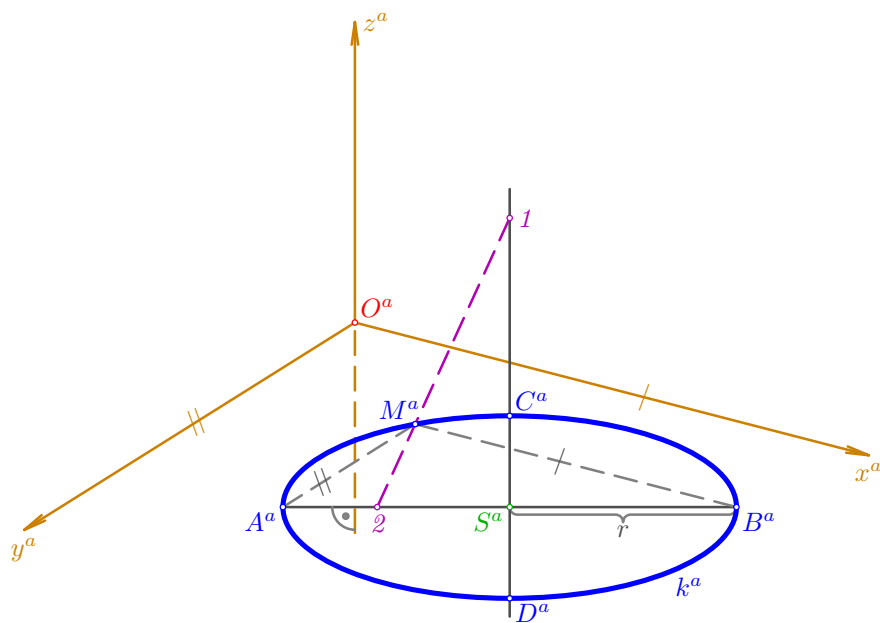
- rovnoběžky s osami  $y, x$  vedené po řadě body  $A, B$  jsou navzájem kolmé a podle Thaletovy věty se protínají v bodě  $M$  kružnice  $k$ ; v průmětu se rovnoběžnost zachová (kolmost obecně nikoliv) a bod  $M^a$  je dalším bodem konstruované elipsy  $k^a$  (speciálně půlí-li přímka  $z^a$  úhel mezi  $x^a$  a  $y^a$ , je bod  $M^a$  vedlejším vrcholem elipsy  $k^a$  a další krok této konstrukce je možno přeskočit)



- vedlejší vrcholy  $C^a, D^a$  jsou sestrojeny pomocí **proužkové konstrukce** (součtové, více viz na straně 196): pro bod  $1$  na vedlejší ose elipsy je  $|1 M^a| = |A^a S^a| = r$ , přímka  $1 M^a$  protíná hlavní osu  $A^a B^a$  v bodě  $2$  a délka vedlejší poloosy elipsy  $k^a$  je rovna délce úsečky  $2 M^a$



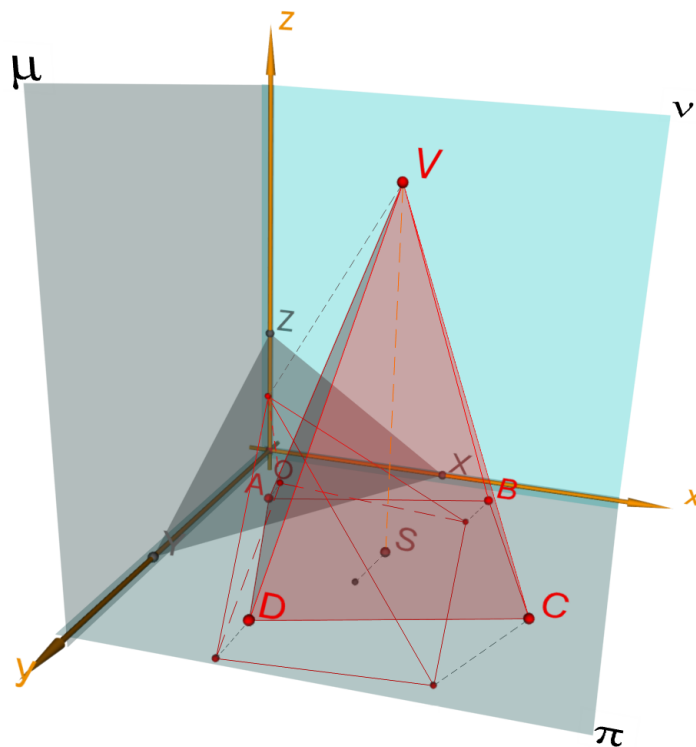
- na závěr je vyrýsována elipsa  $k^a$ , která je průmětem kružnice  $k(S, r=3) \subseteq \pi$



□

## 4. Zobrazení tělesa v pravoúhlé axonometrii

### 4.1. Pravidelný čtyřboký jehlan



#### Výklad

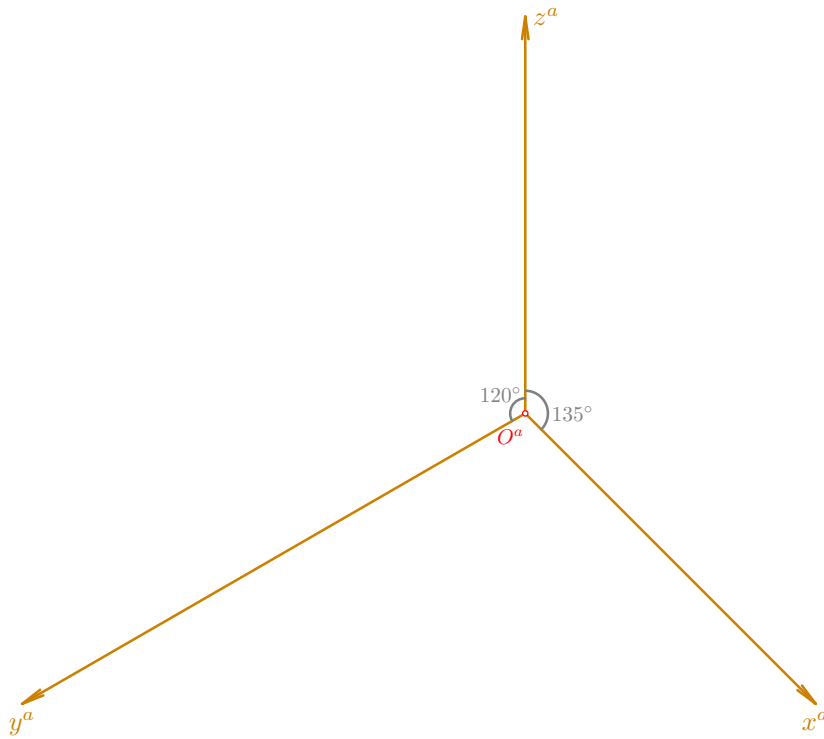
- v následujícím příkladě je pravoúhlá axonometrie určena osovým křížem, a to konkrétně pomocí velikostí úhlů, které svírají kladné směry průmětů souřadnicových os
- pro vynesení souřadnic je pak možno zvolit axonometrický trojúhelník libovolně velký, pouze je potřeba dodržet kolmost jeho stran k odpovídajícím průmětům souřadnicových os
- různé volby axonometrického trojúhelníka znamenají v prostoru posun axonometrické průmětny ve směru promítání, a nemají tudíž vliv na výslednou polohu promítaných objektů

## Řešené úlohy

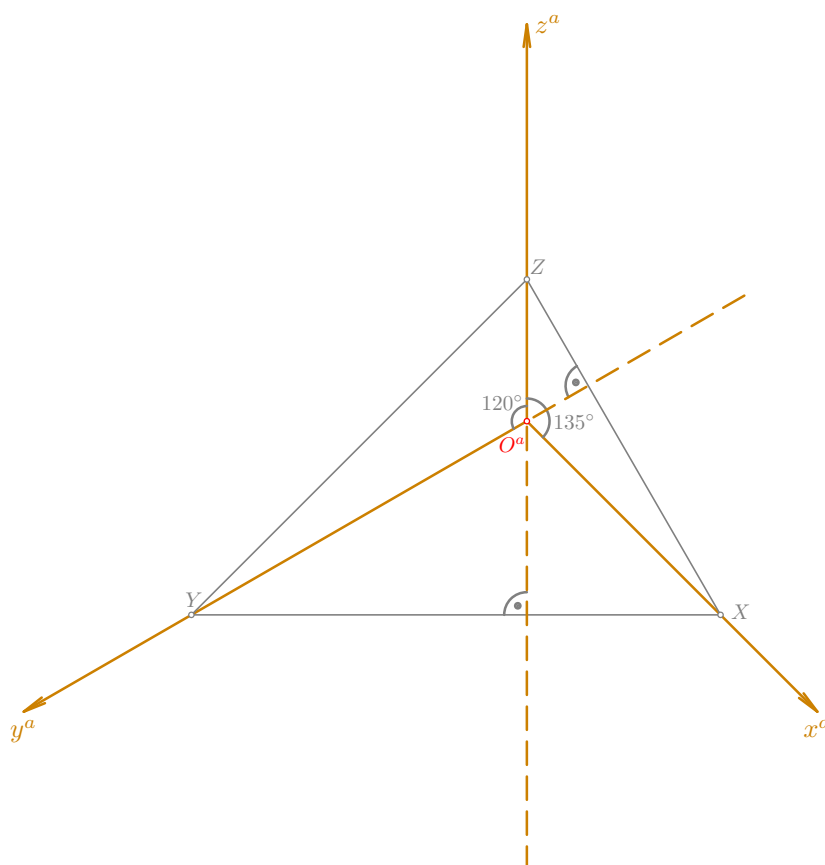


**Příklad:** V pravoúhlé axonometrii sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ , pro který je dán hlavní vrchol  $V$  a jehož podstava o vrcholu  $A$  leží v půdorysně  $\pi$ ;  $V[4; 4; 7]$ ,  $A[1; 2,5; 0]$ , axo:  $\sphericalangle(x, z)=135^\circ$ ,  $\sphericalangle(y, z)=120^\circ$ .

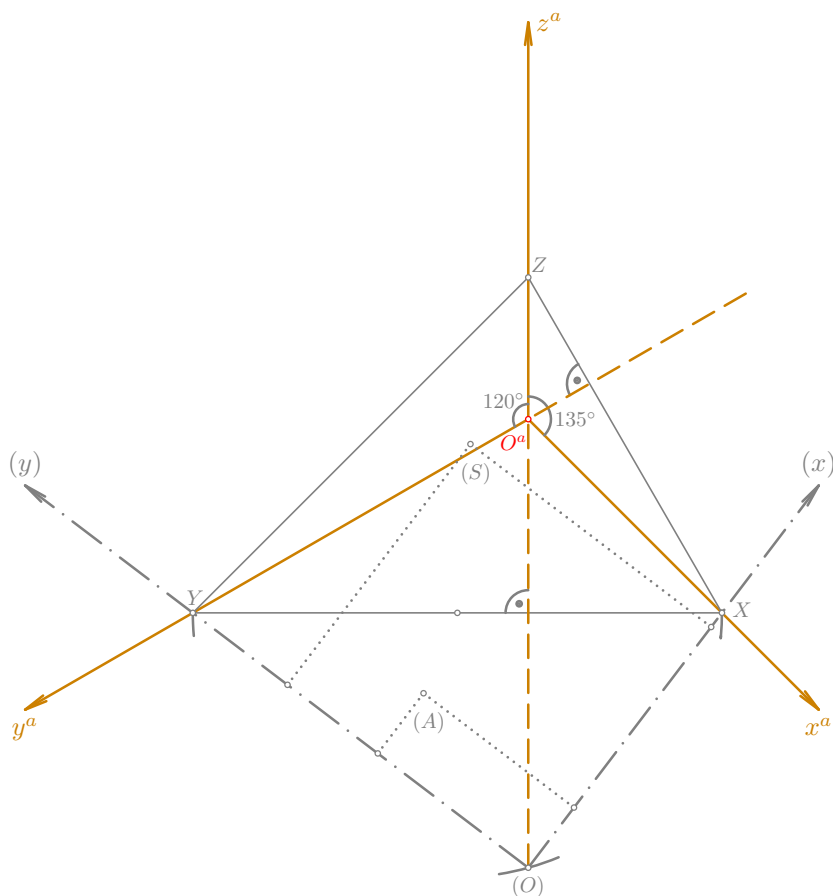
- zvolme nejprve svisle průmět  $z^a$  osy  $z$ , na něm průmět  $O^a$  počátku  $O$  a kladné směry průmětů  $x^a, y^a$  os  $x, y$  sestrojme pod zadanými úhly  $135^\circ$  a  $120^\circ$  od kladného směru průmětu osy  $z$



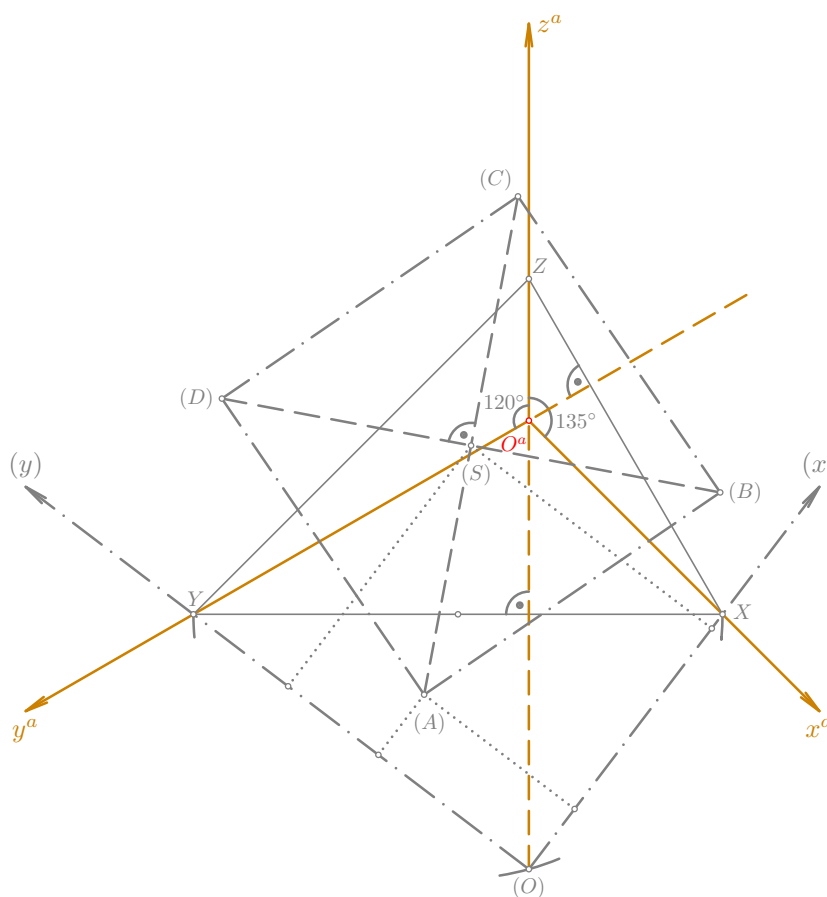
- nyní proved' me volbu axonometrického trojúhelníka  $XYZ$ : nejprve zvolme jeho stranu  $XY \perp z^a$ , doplníme stranu  $XZ \perp y^a$  a potom už je nutně  $ZY \perp x^a$ ; jak bylo uvedeno výše, na velikosti trojúhelníka  $XYZ$  nezávisí průmět daného objektu; některé strany se ovšem používají při otáčení souřadnicových rovin do axonometrické průmětny, proto je vhodné nevolit axonometrický trojúhelník příliš velký ani příliš malý



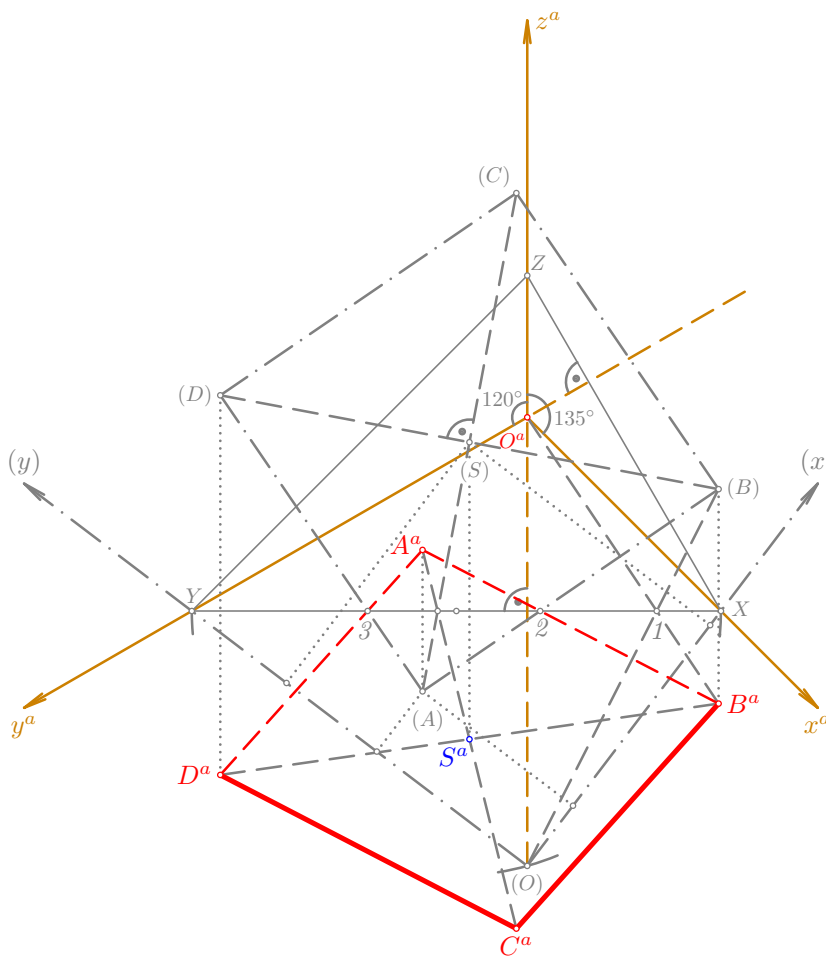
- pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem  $XY$  sestrojíme otočenou polohu  $(O) \in z^a$  počátku  $O$  a otočené polohy  $(x)=(O)X, (y)=(O)Y$  souřadnicových os  $x, y$ ; v otočení vynesme souřadnice zadaného vrcholu  $A$  podstavy a středu  $S$  podstavy, který leží v  $\pi$  pod vrcholem  $V$  a je tudíž  $S[4; 4; 0]$ ; získáme tak jejich otočené polohy  $(A), (S)$



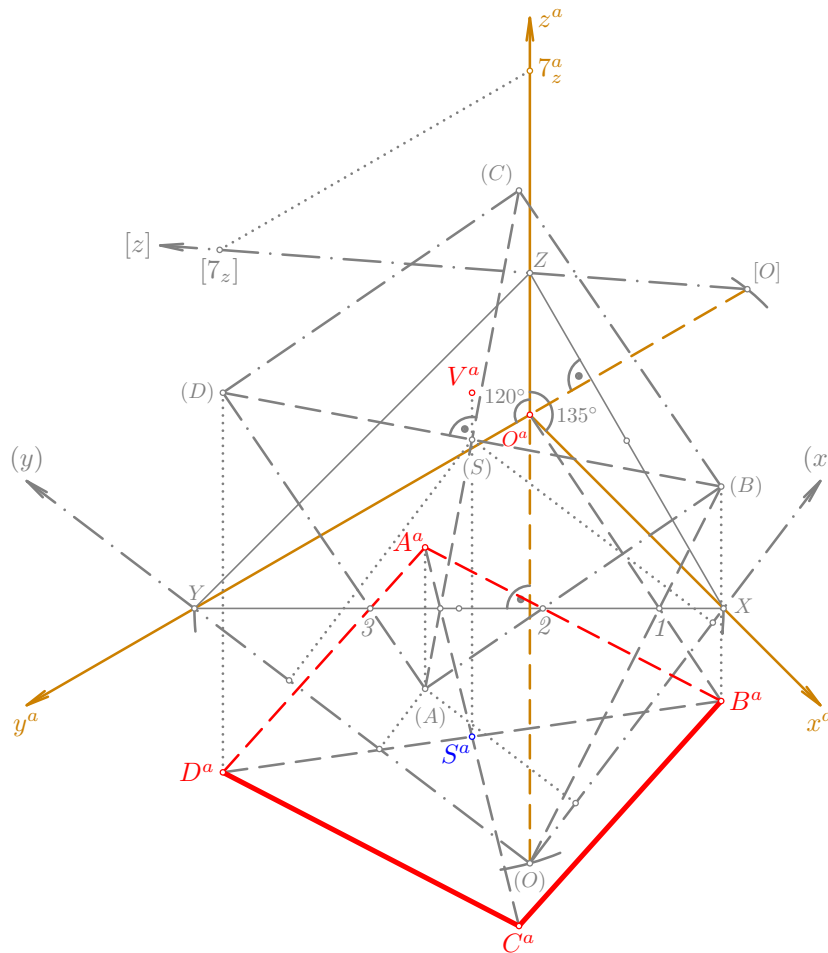
- v otočení doplníme zbývající vrcholy  $(C)$ ,  $(B)$ ,  $(D)$  čtverce, který je dán středem  $(S)$  a vrcholem  $(A)$  (v otočení jsou strany čtverce vyrýsovány čerchovaně)



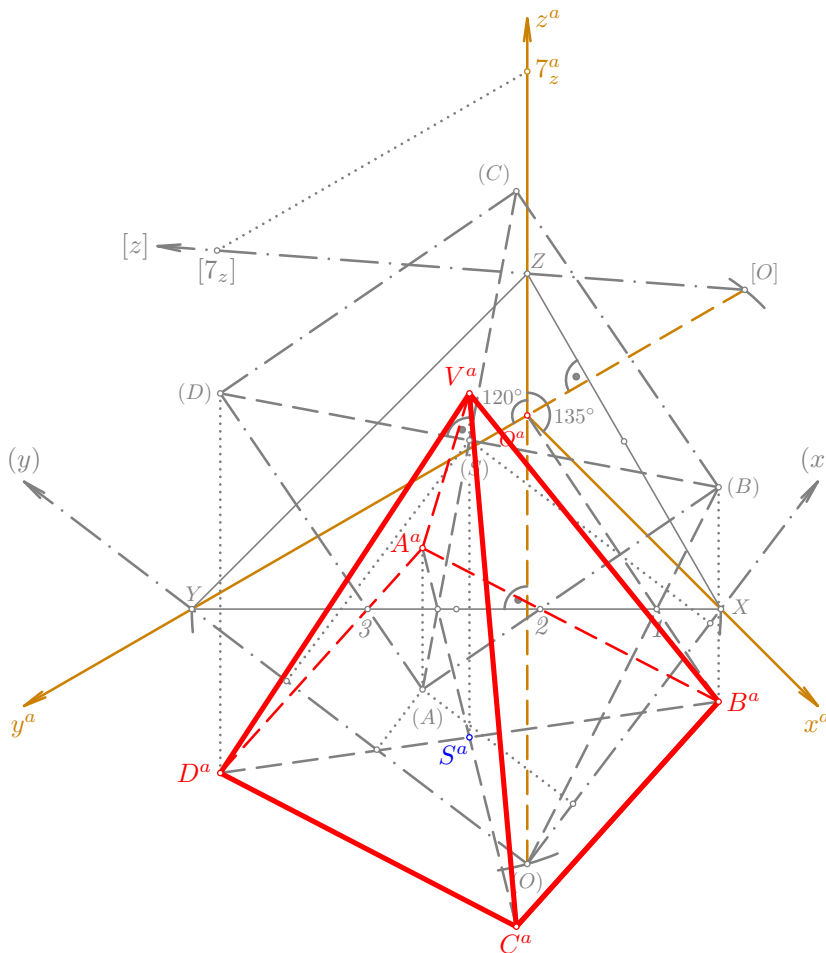
- axonometrické průměty vrcholů čtverce sestrojíme užitím kolmé osové afinity, jejíž osou je přímka  $XY$  a v níž si odpovídají body  $(O)$  a  $O^a$ : přímka  $(O)(B)$  protíná osu afinity  $XY$  v samodružném bodě  $1$  a průmět  $B^a$  vrcholu  $B$  je tedy průsečíkem přímky  $O^a 1$  s kolmicí k ose afinity vedenou bodem  $(B)$ ; analogicky postupujeme dál a pomocí samodružných bodů  $2, 3$  doplníme průměty  $A^a, D^a$  vrcholů  $A, D$ ; pro zachování přesnosti je nyní lepší najít střed  $S^a$  úsečky  $B^a D^a$  (je také  $S^a(S) \perp XY$ ) a bod  $C^a$  sestrojít souměrně s bodem  $A^a$  podle středu  $S^a$  (opět platí  $C^a(C) \perp XY$ ); průmětem čtverce  $ABCD$  je tedy rovnoběžník  $A^a B^a C^a D^a$  o středu  $S^a$ ; viditelnost jeho stran je v obrázku vyznačena již s ohledem na další konstrukce



- zbývá sestrojít hlavní vrchol  $V$ : pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem  $XZ$  sestrojíme otočenou polohu  $[O] \in y^a$  počátku  $O$  a otočenou polohu  $[z]=[O]Z$  osy  $z$ ; v otočení nanese  $z$ -ovou souřadnici bodu  $V$  ( $z_V=7$ ) a získáme tak bod  $[7_z]$ ; po kolmici k přímce  $XZ$  jej vraťme zpět do průmětu do bodu  $7_z^a$  a velikost úsečky  $O^a 7_z^a$  (zkrácení sedmi jednotek ve směru průmětu osy  $z$ ) nanese nad bod  $S^a$ , čímž dostaneme hledaný bod  $V^a$ ; je tedy  $S^a V^a \parallel z^a$  a  $|S^a V^a|=|O^a 7_z^a|$

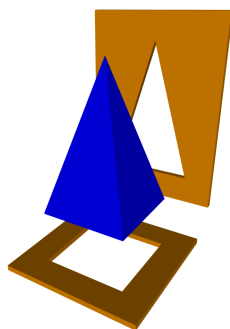


- na závěr vytáhneme průměty zbývajících hran jehlanu s ohledem na viditelnost; zřejmě není vidět vrchol  $A$  a žádná hrana, která z něj vychází; i když se to podle průmětu nezdá, sestrojený jehlan je poměrně štíhlý a vysoký – zadaná axonometrie totiž dost zkresluje ve směru průmětu osy  $z$



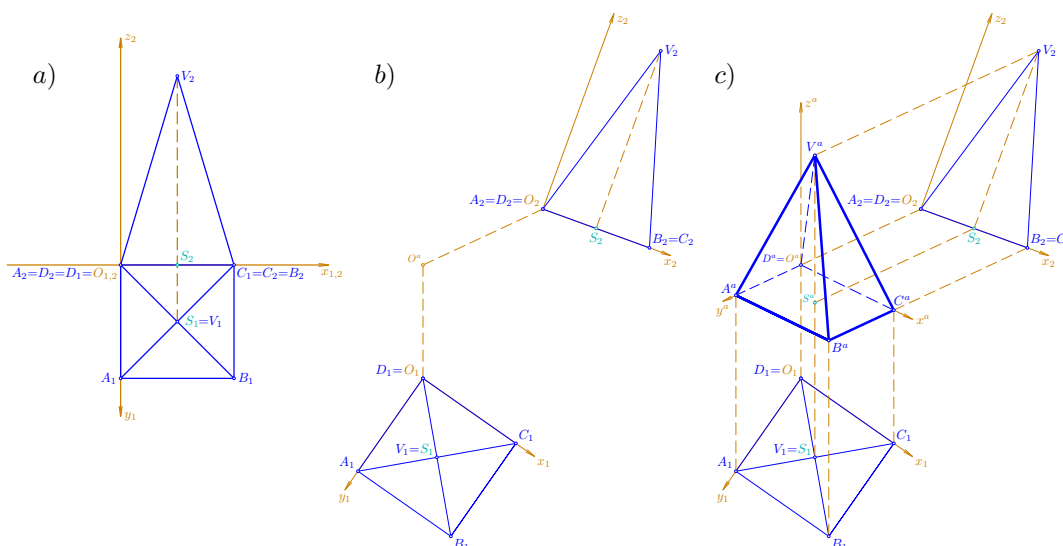
□

## 4.2. Zářezová (Eckhartova) metoda



## Výklad

- mějme dány sdružené průměty nějakého tělesa, např. v obrázku a) je dán půdorys a nárys pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$
- odtrhněme od sebe půdorys a nárys, vhodně je pootočíme a zvolme axonometrický průmět jednoho bodu – v obrázku b) je to průmět  $O^a$  počátku  $O$
- pomocí průsečíků odpovídajících si rovnoběžek s přímkami  $O_1O^a$  a  $O_2O^a$  provedme **zářez** daného tělesa – viz obrázek c)
- získáme tak axonometrický průmět objektu, obecně se ovšem jedná o tzv. **kosoúhlou axonometrii**, u níž může při nevhodné volbě dojít k nepřirozenému zkreslení
- následující příklad ukazuje užití naznačené **zářezové metody** (často také nazývané **Eckhartova metoda**) v pravoúhlé axonometrii

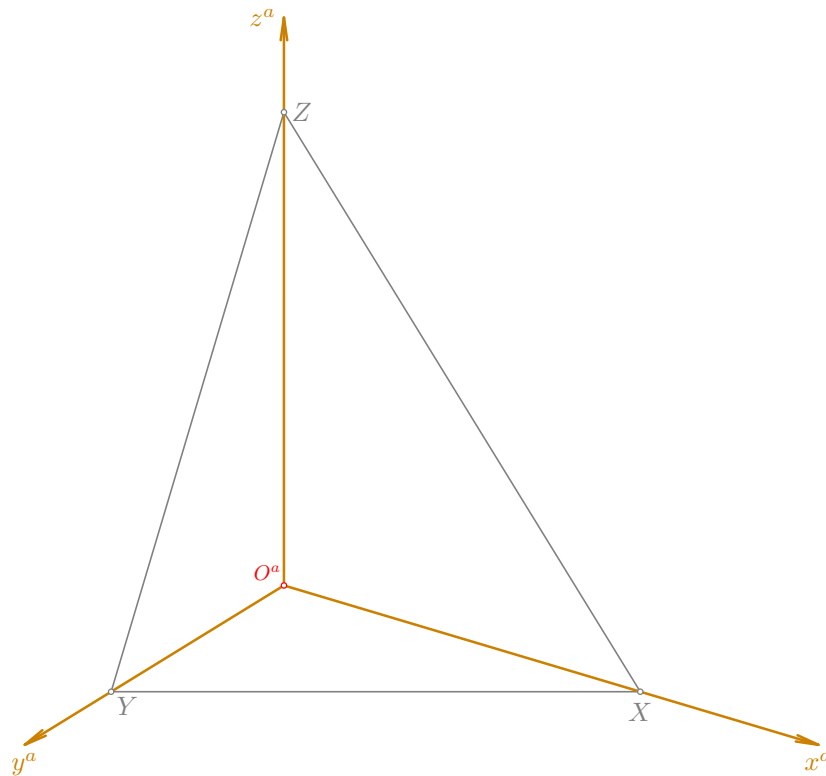


## Řešené úlohy

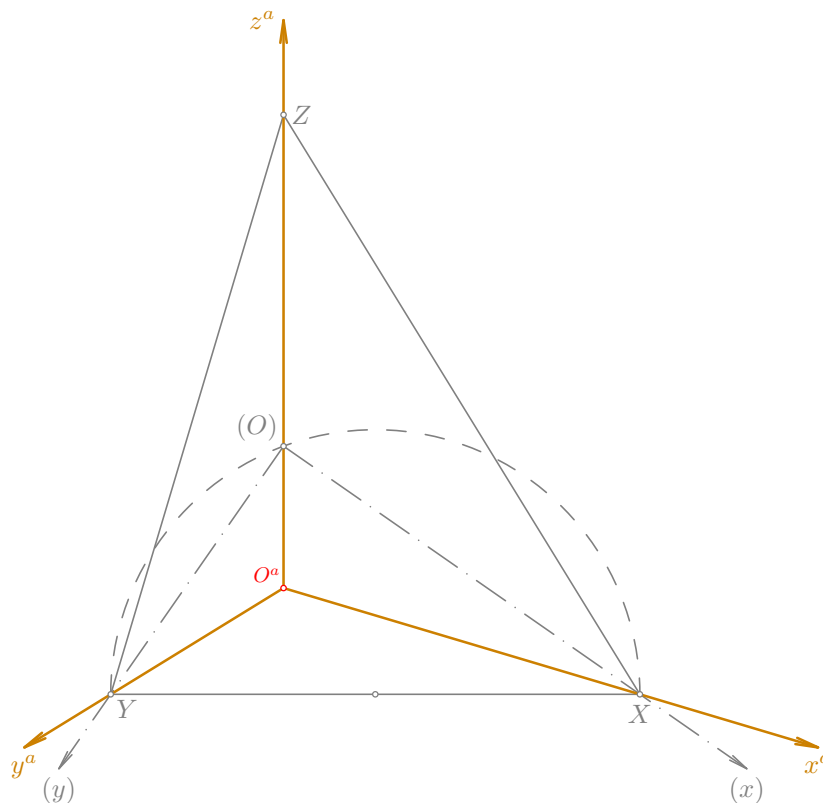


**Příklad:** V pravoúhlé axonometrii  $\Delta(7; 8; 9)$  zobrazte pomocí zářezové metody těleso, jsou-li dány jeho sdružené průměty.

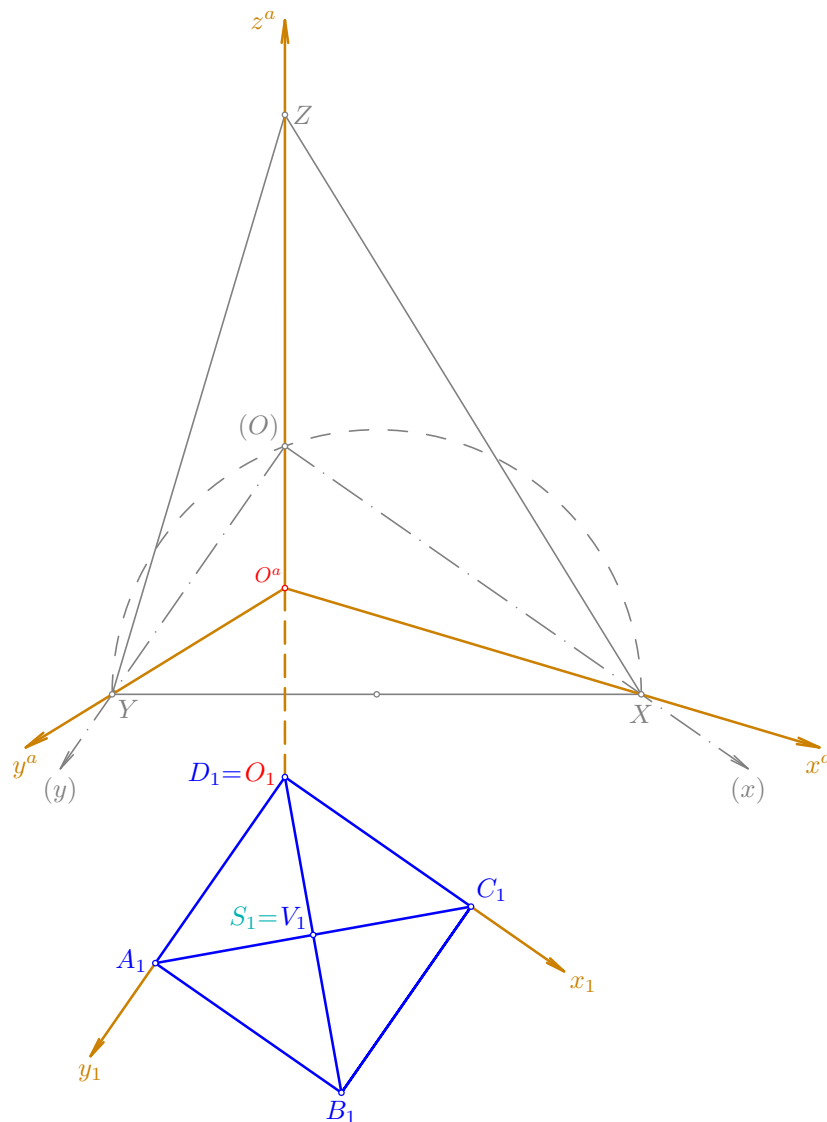
- podle zadání je sestrojen axonometrický trojúhelník  $XYZ$  ( $|XY|=7$ ,  $|YZ|=8$ ,  $|ZX|=9$ ) a průměty  $x^a, y^a, z^a$  souřadnicových os  $x, y, z$  jako jeho výšky (tj.  $x^a \perp YZ$  a  $X \in x^a$ ,  $y^a \perp XZ$  a  $Y \in y^a$ ,  $z^a \perp XY$  a  $Z \in z^a$ ); průmět  $O^a$  počátku  $O$  je společným průsečíkem přímk  $x^a, y^a, z^a$  a tedy tzv. ortocentrem  $\Delta XYZ$



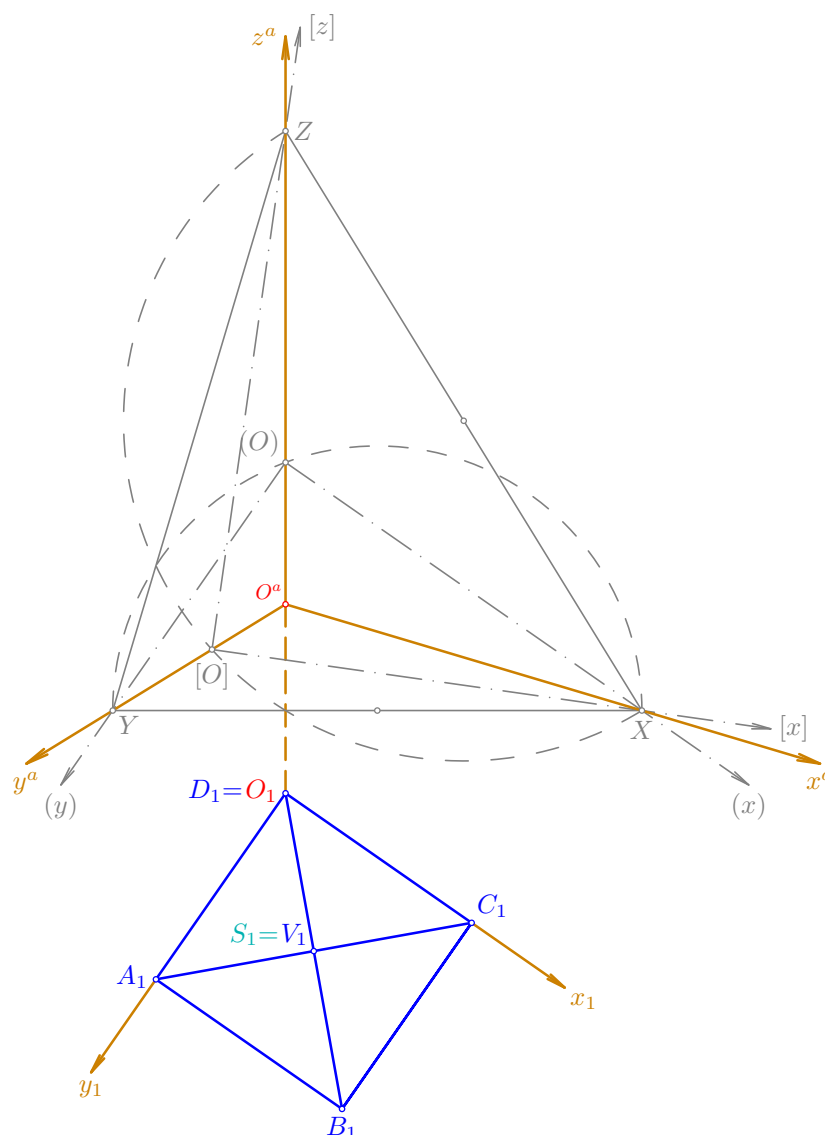
- pomocí Thaletovy půlkružnice nad průměrem  $XY$  provedeme otočení půdorysny kolem přímky  $XY$  do axonometrické průmětny, podobně jako při přípravě na vynášení souřadnic; v tomto případě ovšem uvažujme otočení o menší úhel a otočenou polohu  $(O)$  počátku  $O$  sestrojme na kladné části průmětu  $z^a$  osy  $z$ ; slabě čerchovaně doplníme otočené polohy  $(x)=(O)X$ ,  $(y)=(O)Y$  souřadnicových os  $x, y$



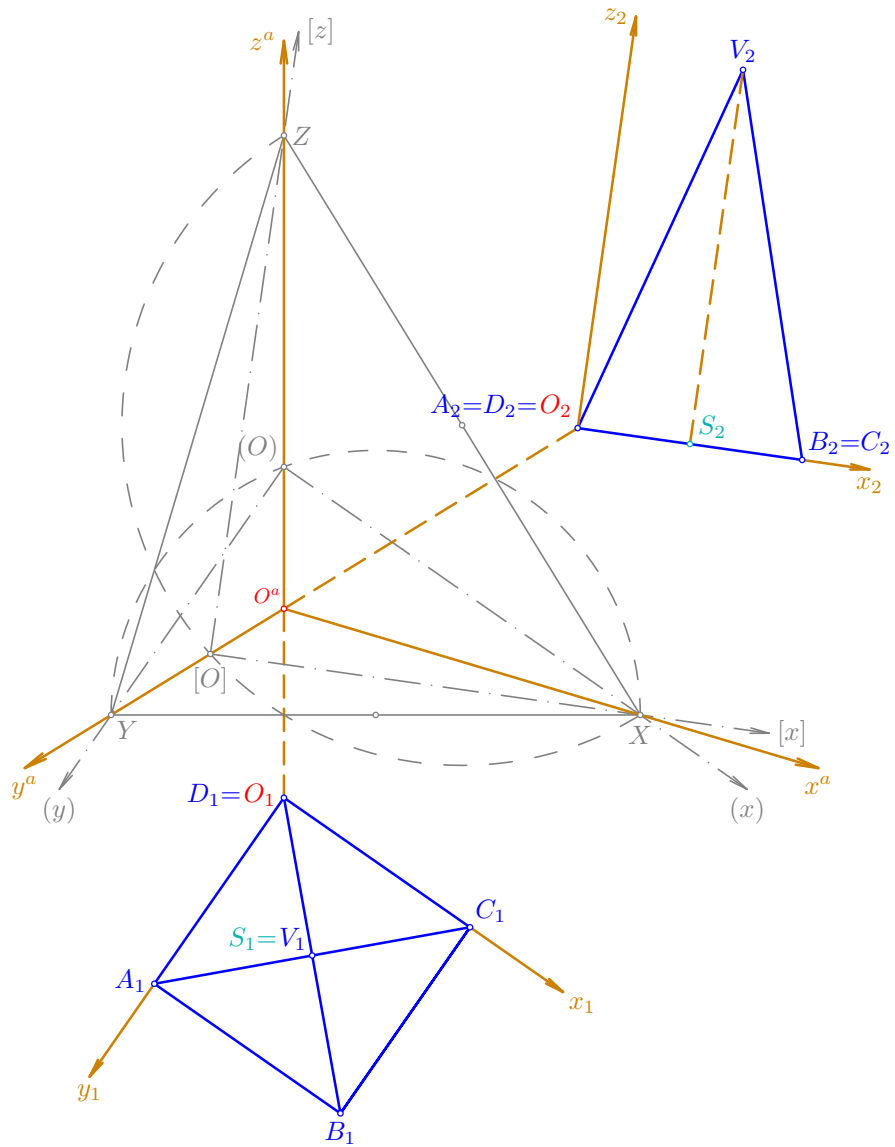
- v pravoúhlé axonometrii se často otočené polohy zobrazovaných útvarů kryjí s výsledným axonometrickým průmětem objektu; abychom se tomu vyhnuli, provedeme pomocné vysunutí otočeného půdorysu ve směru přímky  $z^a$ : na záporné části průmětu osy  $z$  zvolme pomocný půdorys  $O_1$  a veďme jím pomocné půdorysy  $x_1 \parallel (x), y_1 \parallel (y)$ ; do takto posunutého otočeného půdorysu ještě zakresleme skutečný půdorys daného tělesa – pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$



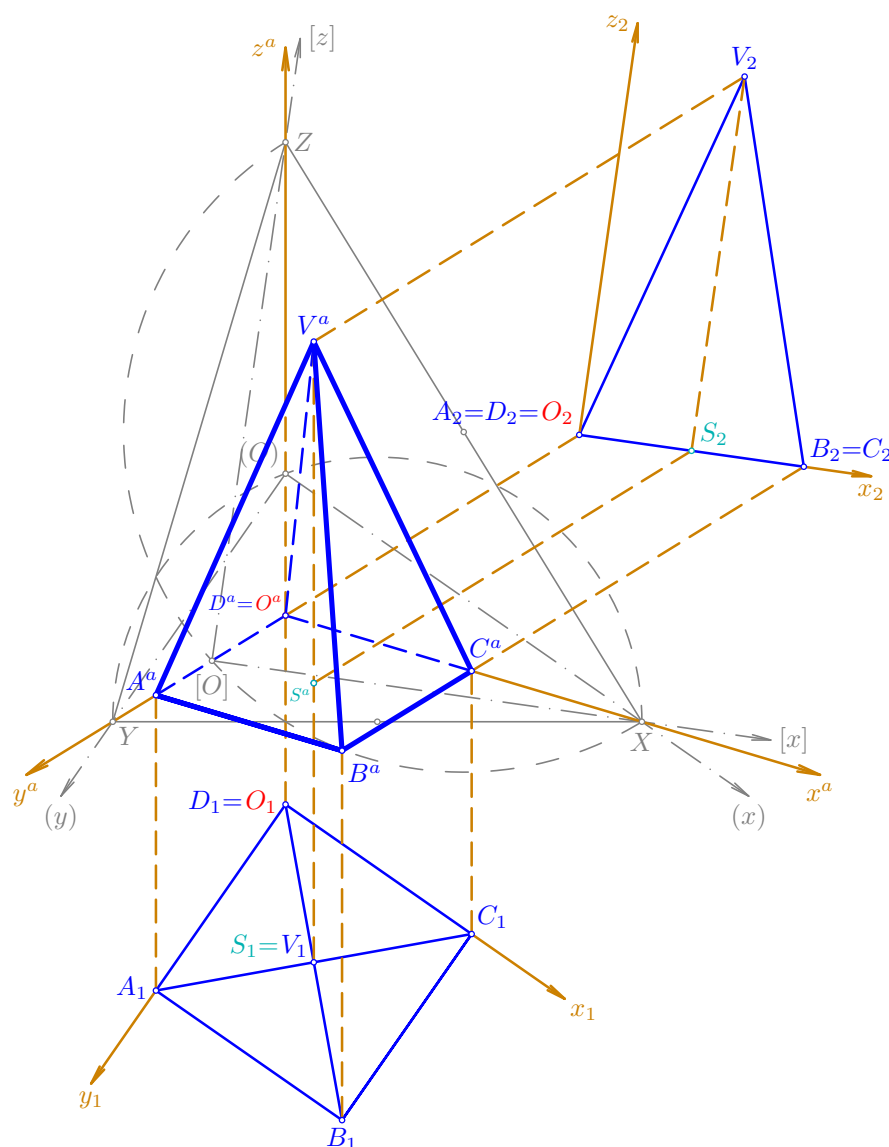
- předchozí dva kroky provedeme analogicky pro nárys objektu: nejprve připravme otočené polohy  $[O]$ ,  $[x]=[O]X$ ,  $[z]=[O]Z$  počátku  $O$  a souřadnicových os  $x, z$ ; uvažujme otočení nárysny kolem přímky  $XZ$  do axonometrické průmětny opět o menší z obou možných úhlů, bod  $[O]$  leží tedy na kladné části průmětu  $y^a$  osy  $y$  a na Thaletově půlkružnici nad průměrem  $XZ$



- na záporné části průmětu  $y^a$  osy  $y$  zvolme pomocný nárys  $O_2$  počátku  $O$  a veďme jím pomocné nárysy  $x_2 \parallel [x], z_2 \parallel [z]$ ; do tohoto vysunutého otočeného nárysu doplňme nezkreslený nárys daného jehlanu  $ABCDV$



- nyní je vše připraveno pro konečný zářez tělesa z jeho vysunutého otočeného půdorysu a nárysu; konstrukci popíšeme pro hlavní vrchol  $V$  jehlanu, průměty ostatních vrcholů se sestrojí analogicky: pomocným půdorysem  $V_1$  veďme rovnoběžku s přímkou  $z^a$ , pomocným nárysem  $V_2$  veďme rovnoběžku s přímkou  $y^a$  a průsečík těchto rovnoběžek je axonometrickým průmětem  $V^a$  vrcholu  $V$ ; podobně najdeme průměty zbývajících vrcholů; na závěr vytáhneme průměty viditelných hran tlustě a průměty neviditelných hran čárkovaně



□

# Křivky

## Tematický obsah

- Kuželosečky
  - Definice a ohniskové vlastnosti elipsy
  - Afinní vztah kružnice a elipsy (trojúhelníková, proužkové a Rytzova konstrukce)
  - Definice a ohniskové vlastnosti hyperboly
  - Definice, ohniskové vlastnosti a jedna užitečná konstrukce paraboly
  - Konstrukce kuželoseček z daných podmínek
- Šroubovice
  - Šroubovice v Mongeově promítání
- Úlohy k samostatnému řešení

## 1. Kuželosečky

### Výklad

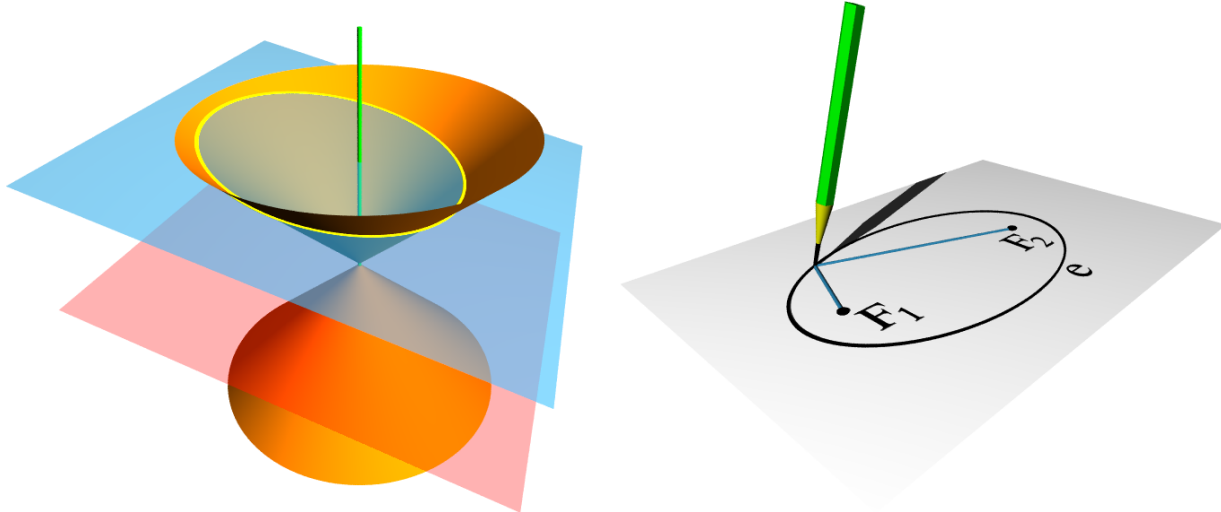


- souhrnný název pro křivky, které se objevují při rovinných řezech na rotační kuželové ploše
- dále jsou uvedeny pouze tzv. regulární kuželosečky (vyjma kružnice), jejichž rovina neprochází vrcholem kuželové plochy
- pro naše potřeby jsou však na následujících stránkách tyto křivky definovány přímo v rovině pomocí tzv. **ohniskových definic**

## 1.1. Elipsa



## Výklad



## 1.1.1. Definice a ohniskové vlastnosti

- *prostorová definice* (viz obrázek vlevo nahoře): **elipsa** je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řzná rovina není kolmá k ose rotační kuželové plochy a rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem má s kuželovou plochou společný pouze vrchol (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je větší než odchylka povrchových přímk)
- *ohnisková definice* (viz obrázek vpravo nahoře, který ukazuje tzv. **zahradnickou konstrukci** elipsy): **elipsa**  $e$  je množinou všech bodů v dané rovině  $\rho$ , jejichž součet vzdáleností od dvou různých pevných bodů  $F_1, F_2$  je roven danému číslu  $2a$ , které je větší než vzdálenost bodů  $F_1, F_2$ ; symbolicky zapsáno:

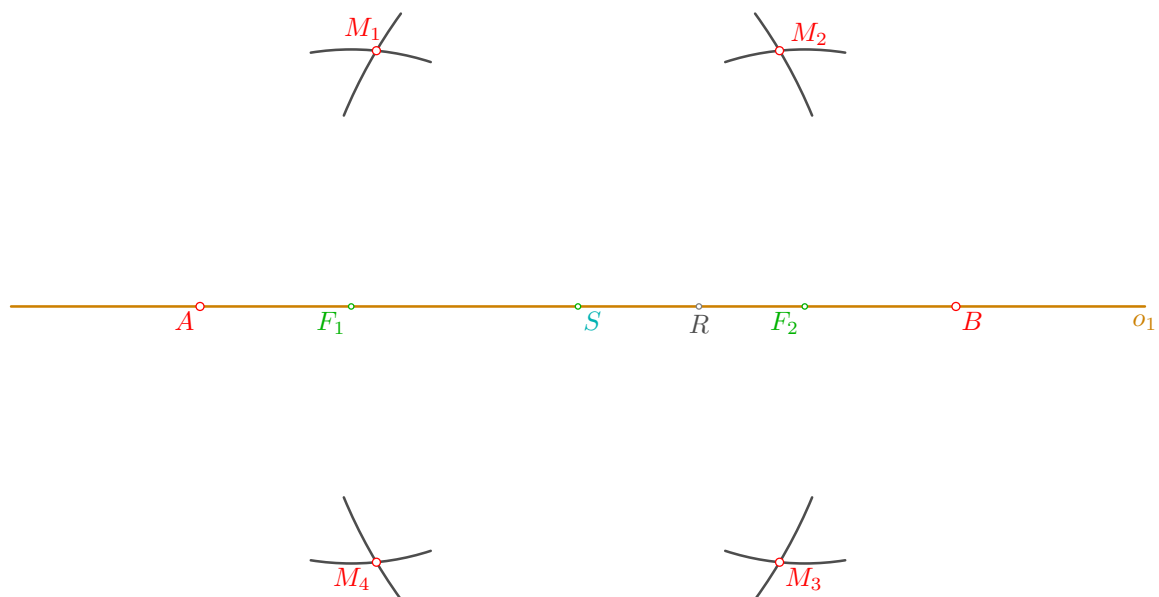
$$e = \{X \in \rho; |F_1X| + |F_2X| = 2a, 0 < |F_1F_2| < 2a\}$$

**Konstrukce a základní pojmy**

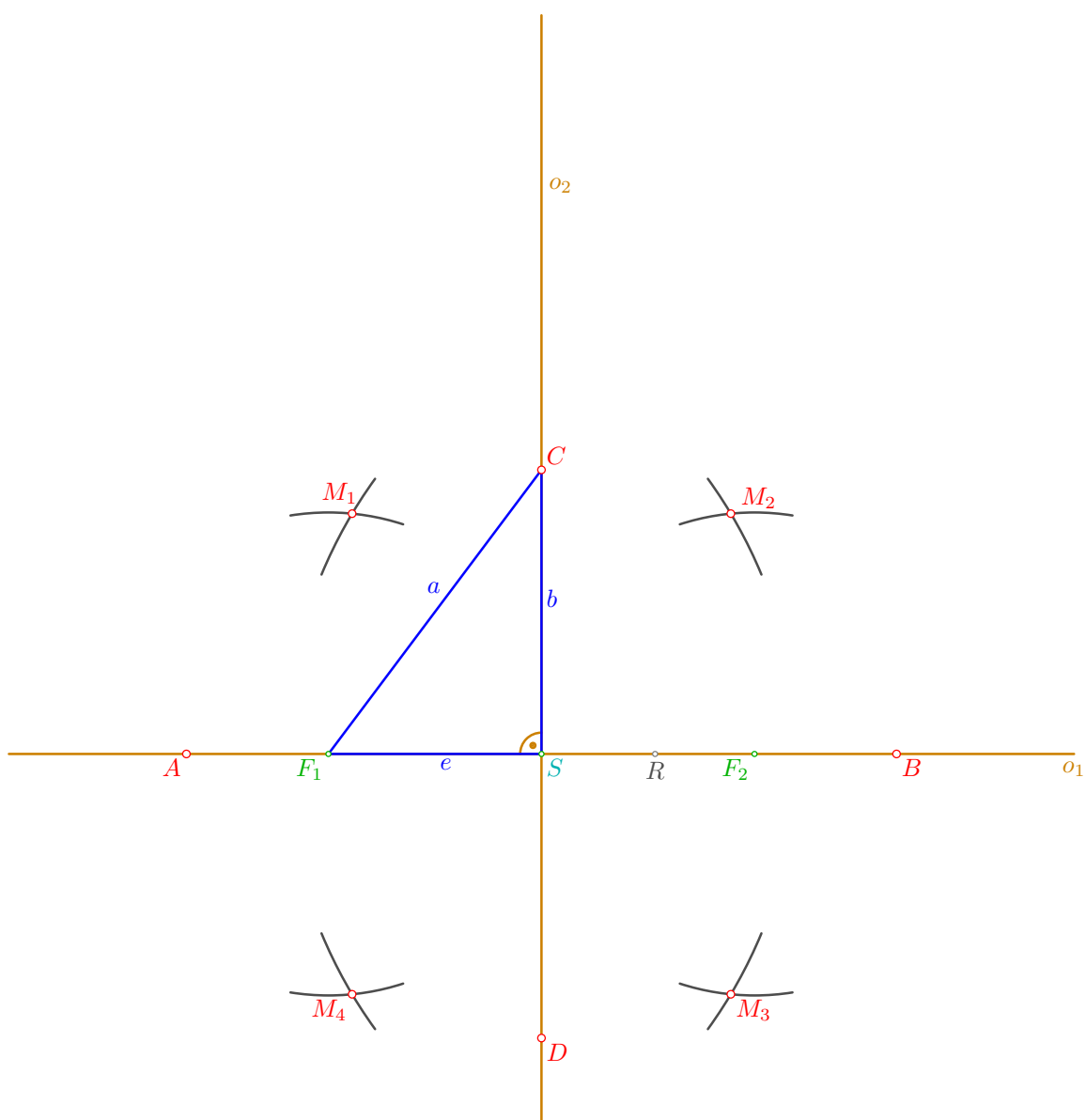
- na vodorovné přímce  $o_1$  zvolme bod  $S$  a od něj na obě strany souměrně nanese dvě libovolně zvolené vzdálenosti; bližší body označme  $F_1, F_2$  a nazvěme je **ohnisky** elipsy, oněmi pevnými body, o nichž se mluví v ohniskové definici; vzdálenější body označme  $A, B$  a necht' pro jejich vzdálenost platí  $|AB| = 2a$ ; pak je  $|F_1A| + |F_2A| = |F_1A| + |F_1B| = 2a$ , a podle definice je bod  $A$  bodem elipsy  $e$ ; totéž lze ukázat pro bod  $B$  a body  $A, B$  se nazývají **hlavní vrcholy** elipsy (elipsa v nich má největší křivost); přímka  $o_1 = AB = F_1F_2$  je **hlavní osa** elipsy a bod  $S$  je její **střed** (elipsa je podle něj středově souměrná)



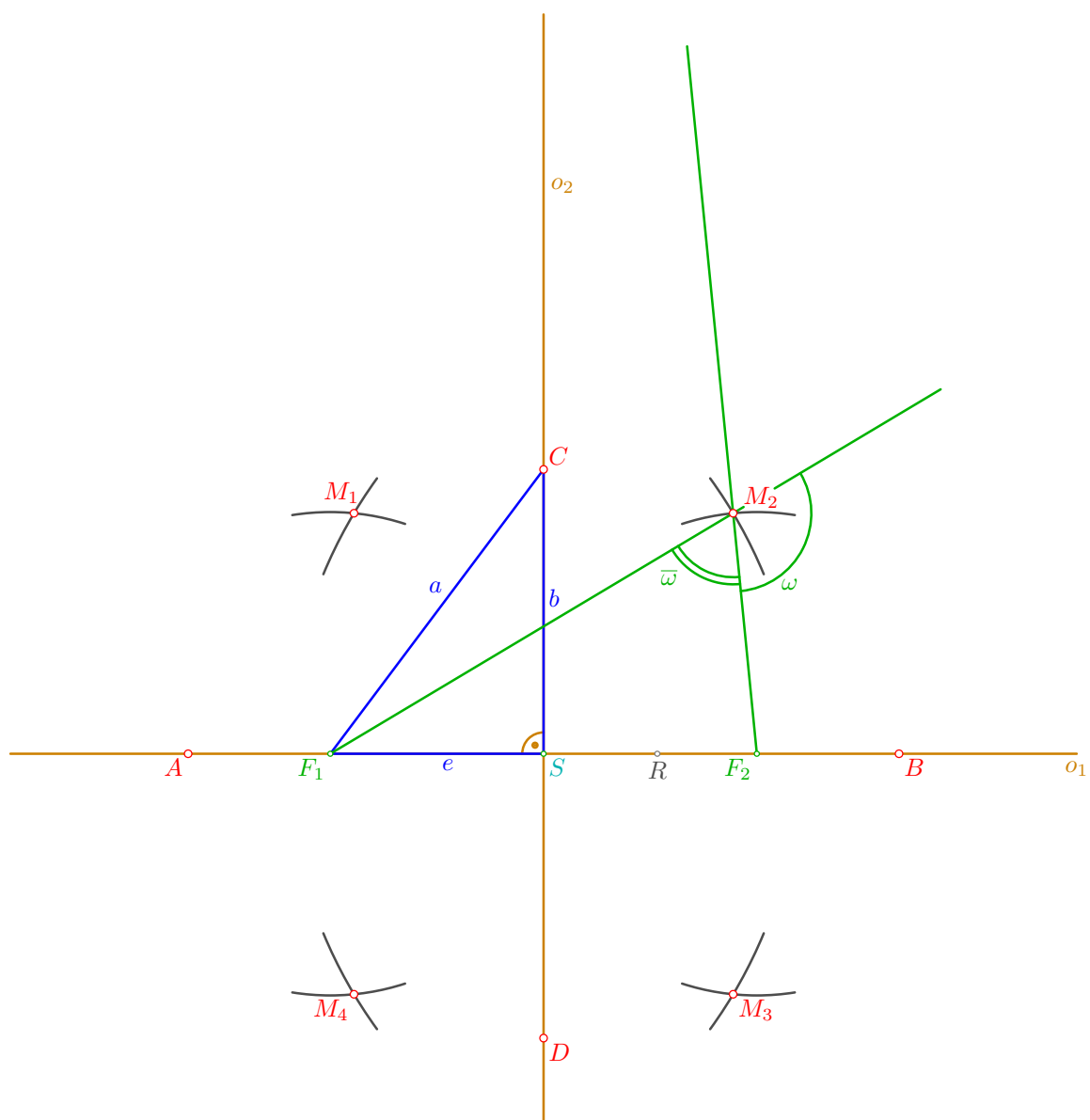
- sestrojme další **obecné body** elipsy: na úsečce  $F_1F_2$  zvolme pomocný bod  $R$ , vezměme do kružítka poloměr délky  $|AR|$  a opišme čtyři oblouky kružnic kolem ohnisek  $F_1, F_2$ ; změňme poloměr na délku  $|RB|$  a provedme totéž – kolem ohnisek protněme předchozí čtyři oblouky; získáme tak čtyři body  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , kde např. pro  $M_2$  platí  $|F_1M_2| + |F_2M_2| = |AR| + |RB| = 2a$  (analogicky pro  $M_1, M_3, M_4$ ); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu  $R$  konstruovat další a další body elipsy  $e$ ; zvolíme-li bod  $R$  v některém z ohnisek, dostaneme tímto způsobem hlavní vrcholy  $A, B$ ; při volbě bodu  $R$  (na hlavní ose  $o_1$ ) mimo úsečku  $F_1F_2$  se příslušné kruhové oblouky neprotnou a nezískáme tak žádné další body elipsy



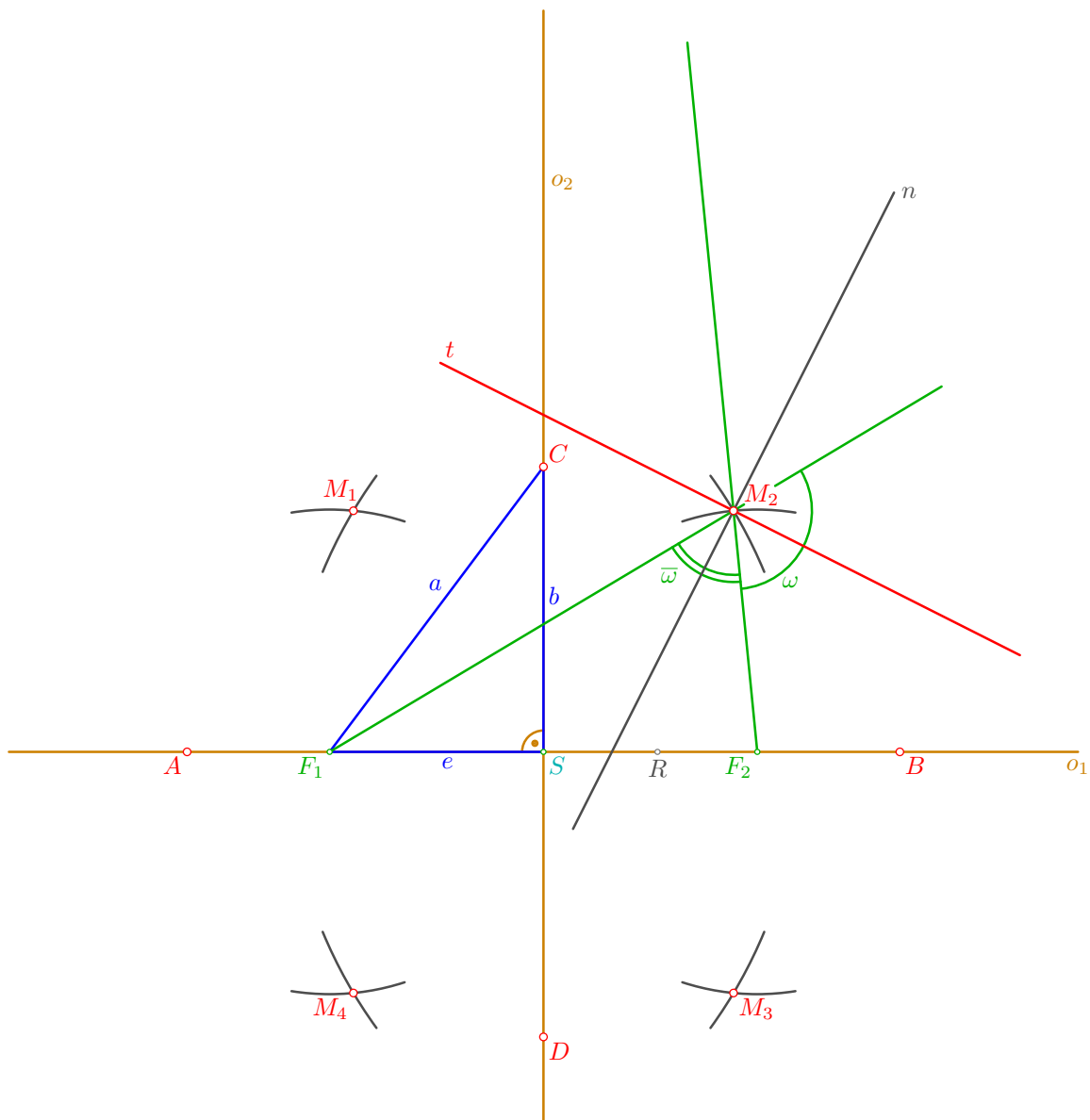
- provedeme-li předchozí konstrukci pro  $R = S$ , získáme pouze dva body – **vedlejší vrcholy**  $C, D$  elipsy, které leží na **vedlejší ose**  $o_2 \perp o_1, S \in o_2$ ; délka  $a = |SA|$  se nazývá **délka hlavní poloosy** a objevuje se také jako délka přepony  $F_1C$  v tzv. **charakteristickém trojúhelníku**  $F_1SC$  elipsy; délka jeho odvěsny  $SC$  se nazývá **délka vedlejší poloosy**  $b = |SC|$  a délka odvěsny  $F_1S$  udává tzv. **excentricitu** (výstřednost)  $e = |F_1S|$  elipsy (pro  $e \rightarrow 0$  se elipsa blíží kružnici, naopak pro  $e \rightarrow a$  se elipsa blíží k úsečce); z pravoúhlého trojúhelníka  $F_1SC$  a Pythagorovy věty vyplývá vztah mezi délkami poloos a excentricitou elipsy:  $a^2 = e^2 + b^2$



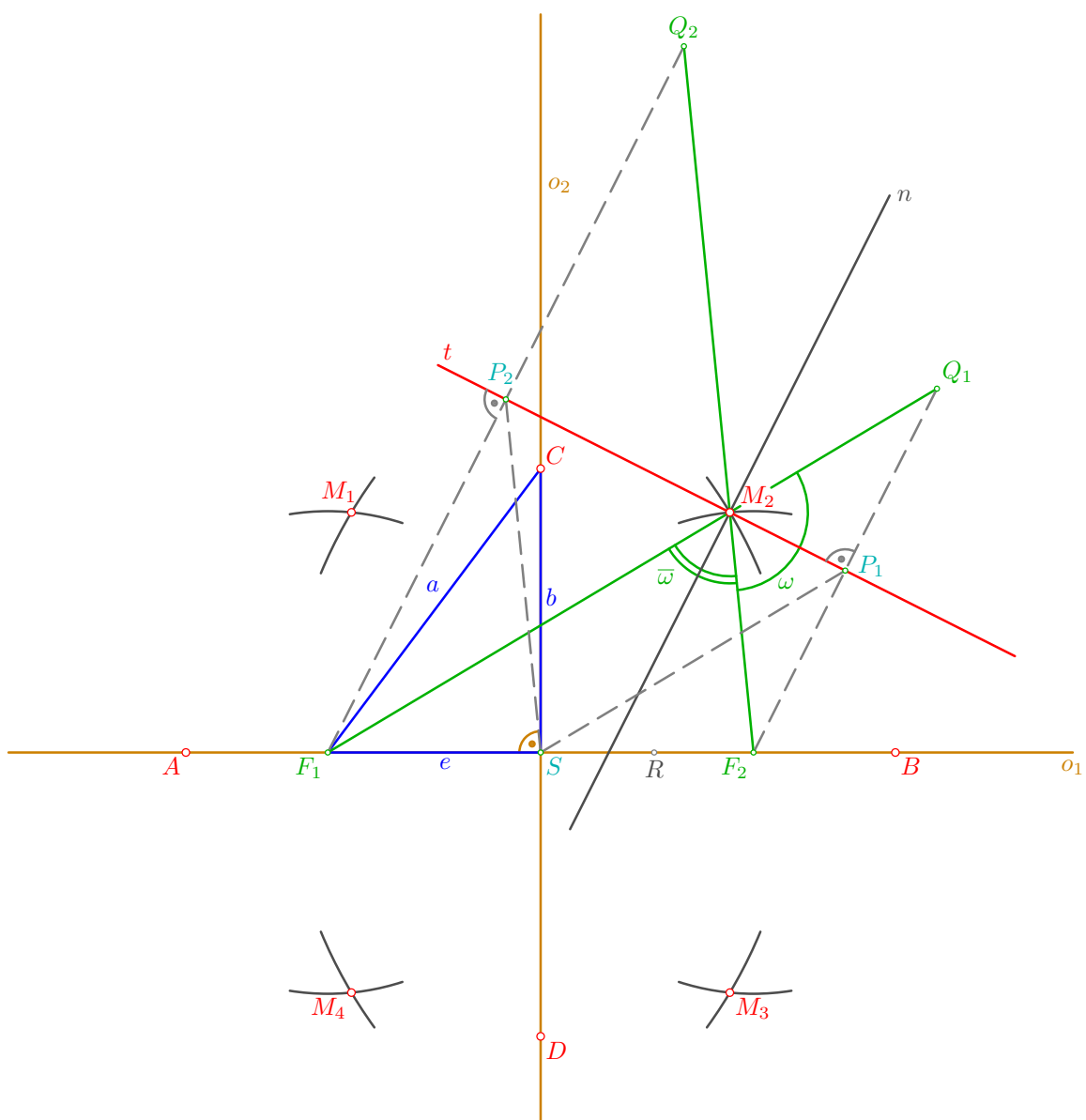
- pro další konstrukce vyberme např. bod  $M_2$  a sestrojme přímky  $F_1M_2, F_2M_2$ , což jsou tzv. **průvodiče bodu**  $M_2$ ; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží střed  $S$  (nebo úhel k němu vrcholový) označme  $\bar{\omega}$  a nazvěme ho **vnitřní úhel průvodičů** bodu  $M_2$ ; některý z úhlů vedlejších k úhlu  $\bar{\omega}$  označme  $\omega$  a řekněme mu **vnější úhel průvodičů** bodu  $M_2$



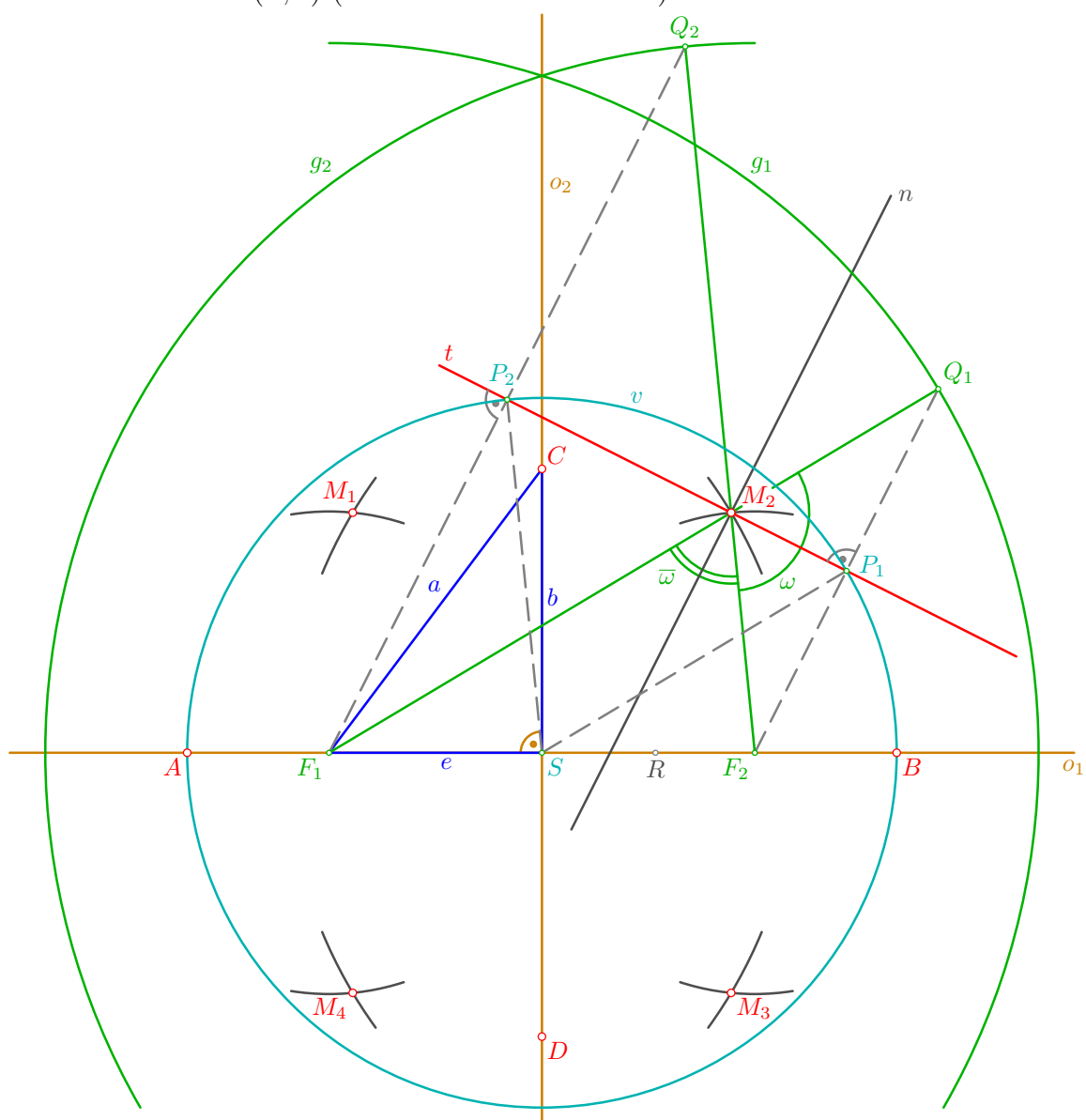
- dá se dokázat, že osa  $t$  vnějšího úhlu  $\omega$  průvodičů bodu  $M_2$  je současně **tečnou** elipsy v bodě  $M_2$ ; přímka  $n \perp t$  je pak **normálou** elipsy v bodě  $M_2$  a současně osou vnitřního úhlu  $\bar{\omega}$  průvodičů bodu  $M_2$ ; to platí v každém bodě elipsy a toto tvrzení je shrnuto v dále uvedené **Větě 1** (na straně 184)



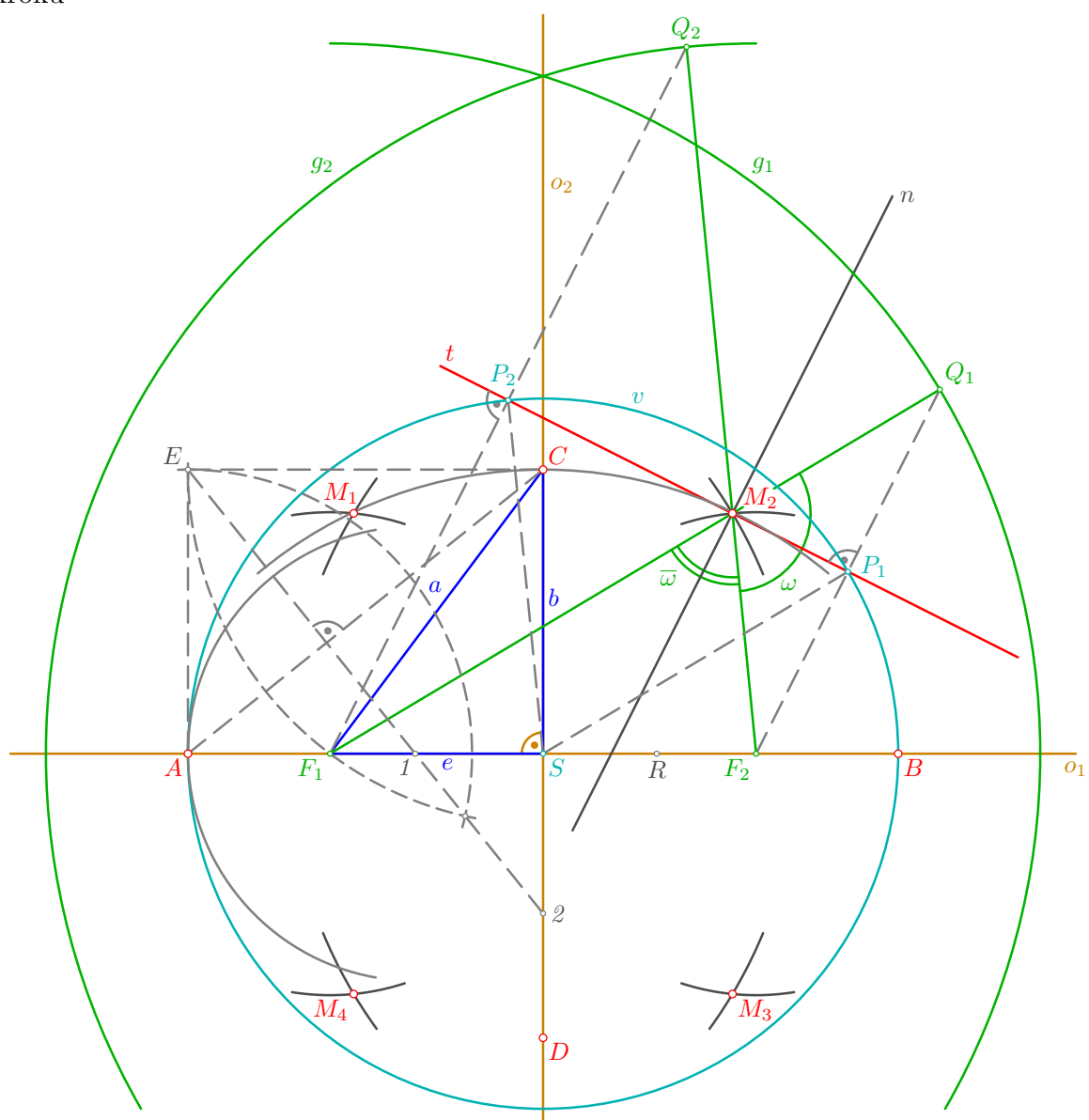
- na základě předchozího odvoďme další vlastnosti elipsy: sestrojme body  $Q_1, Q_2$  souměrně sdružené s ohnisky  $F_2, F_1$  podle tečny  $t$  a označme příslušné paty  $P_1, P_2$  kolmic  $Q_1F_2, Q_2F_1$  spuštěných z ohnisek  $F_2, F_1$  na tečnu  $t$  (tj. středy úseček  $Q_1F_2, Q_2F_1$ ); z osové souměrnosti průvodičů bodu  $M_2$  podle tečny  $t$  plyne, že bod  $Q_1$  leží na přímce  $F_1M_2$  a bod  $Q_2$  padne na průvodič  $F_2M_2$



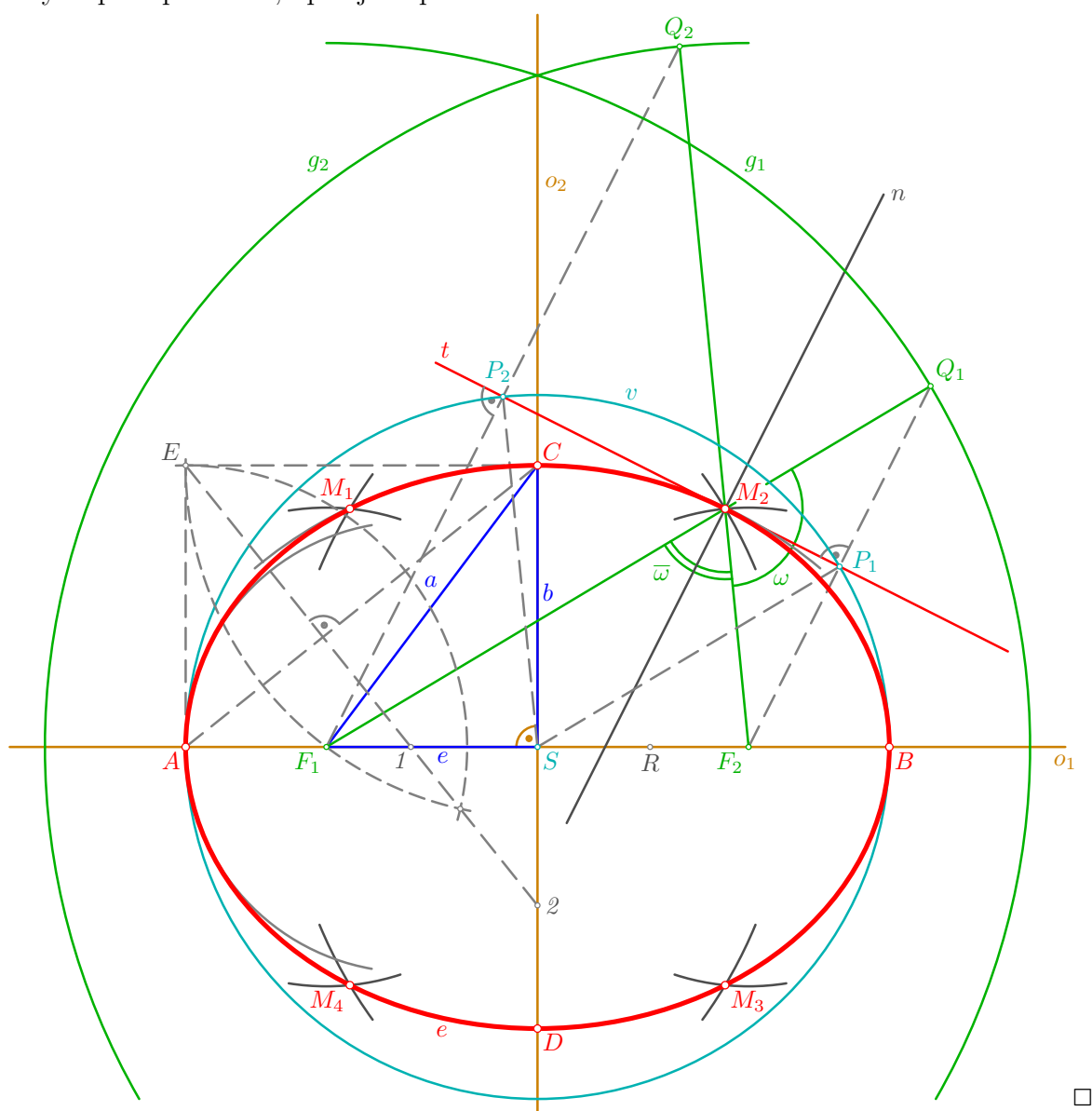
- díky osové souměrnosti je  $|M_2Q_1| = |M_2F_2|$ , a tudíž platí  $|F_1Q_1| = |F_1M_2| + |M_2Q_1| = |F_1M_2| + |M_2F_2| = 2a$ ; totéž lze ukázat v každém bodě elipsy, a všechny body souměrně sdružené s ohniskem  $F_2$  podle tečen elipsy tedy leží na tzv. **řídící kružnici**  $g_1(F_1, 2a)$ ; analogicky dostaneme  $|F_2Q_2| = 2a$  a můžeme sestavit druhou řídící kružnici  $g_2(F_2, 2a)$ , na níž leží všechny body souměrně sdružené s ohniskem  $F_1$  podle tečen elipsy (viz **Věta 2** na straně 184); úsečky  $SP_1, SP_2$  jsou po řadě střední příčky trojúhelníků  $F_1F_2Q_1, F_1F_2Q_2$  a pro jejich délky tedy platí:  $|SP_1| = \frac{|F_1Q_1|}{2} = a = \frac{|F_2Q_2|}{2} = |SP_2|$ ; obecně shrnuto, paty kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny leží na tzv. **vrcholové kružnici**  $v(S, a)$  (viz **Věta 3** na straně 184)



- pro jednodušší a pěknější vyrýsování elipsy sestrojme v jejích vrcholech oblouky tzv. **hyperoskulačních kružnic**: trojúhelník  $ASC$  doplníme na obdélník  $ASCE$ , vrcholem  $E$  vedme kolmici k úhlopříčce  $AC$  a určíme její průsečíky  $1, 2$  s hlavní a vedlejší osou elipsy; bod  $1$ , resp.  $2$ , je pak středem oblouku hyperoskulační kružnice ve vrcholu  $A$ , resp. ve vrcholu  $C$  (oblouky ve vrcholech  $B, D$  doplníme souměrně podle středu  $S$ , konstrukce není v obrázku provedena); tyto oblouky přibližně nahrazují průběh elipsy v blízkém okolí vrcholů a jejich konstrukce výrazně přispěje k vytažení souměrné křivky (a ne nějaké „brambory“); alternativní způsob konstrukce bodů  $1, 2$  je popsán v následujícím kroku



- body  $1,2$  je možné sestrojít také takto: kolem vedlejšího vrcholu  $C$  opišme oblouk kružnice o poloměru  $a = |SA|$  (prochází oběma ohnisky) a protněme jej obloukem kružnice o poloměru  $b = |SC|$  opsaným kolem hlavního vrcholu  $A$ ; přímka, která spojuje průsečíky sestrojených oblouků (jedním z nich je bod  $E$ ), je pak kolmice k přímce  $AC$  (kterou při použití tohoto způsobu není potřeba sestrojovat) a ta protíná hlavní a vedlejší osu elipsy v bodech  $1,2$ ; na závěr je vytažena elipsa  $e$ , což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka, anebo užitím tzv. **zahradnické konstrukce**: dva konce provázku délky  $|AB| = 2a$  se upevní do ohnisek a pohybující se hrot tužky, který napíná provázek, opisuje elipsu...



□

**Věta 1**

Tečna (normála) v bodě elipsy pólí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

**Věta 2**

Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je řídicí kružnice elipsy o středu ve druhém ohnisku a poloměru  $2a$ .

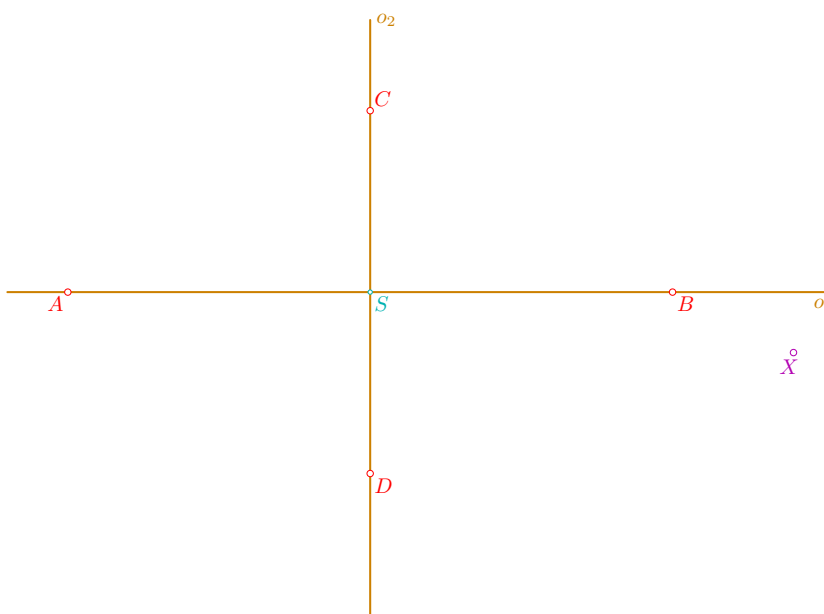
**Věta 3**

Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je vrcholová kružnice elipsy.

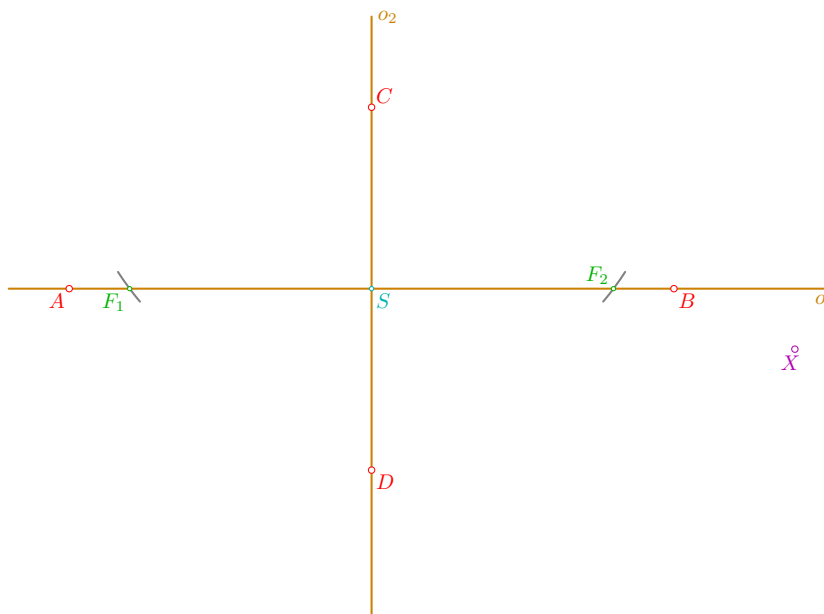
**Řešené úlohy****Tečny k elipse daným bodem**

**Příklad:** Bodem  $X$  veďte tečny k nenarýsované elipse  $e$ , která je dána hlavními a vedlejšími vrcholy.

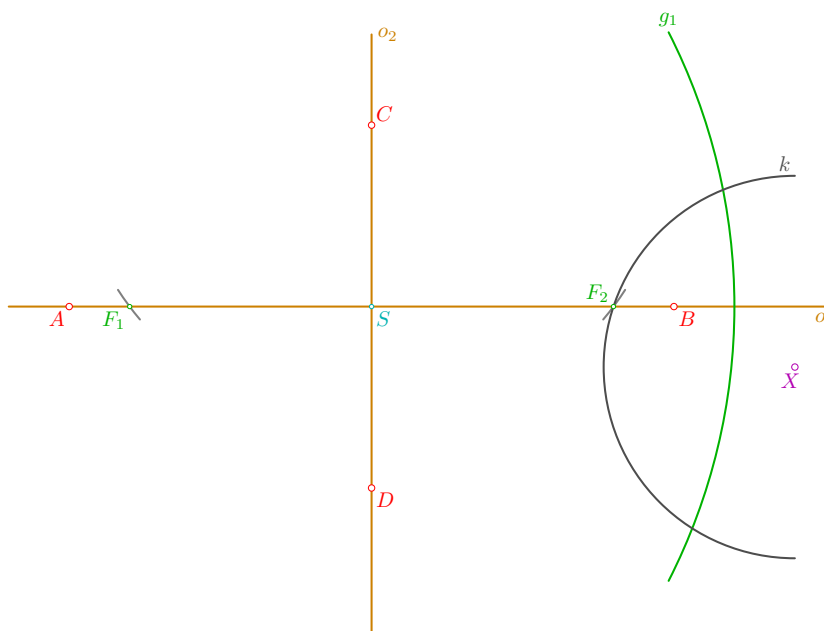
- zvolme střed  $S$ , vodorovně hlavní osu  $o_1$ , na ní hlavní vrcholy  $A, B$ , svisle vedlejší osu  $o_2 \perp o_1$  a na ní vedlejší vrcholy  $C, D$ ; rovněž zvolme bod  $X$ , z něhož pomocí výše uvedených vět povedeme tečny k zadané elipse



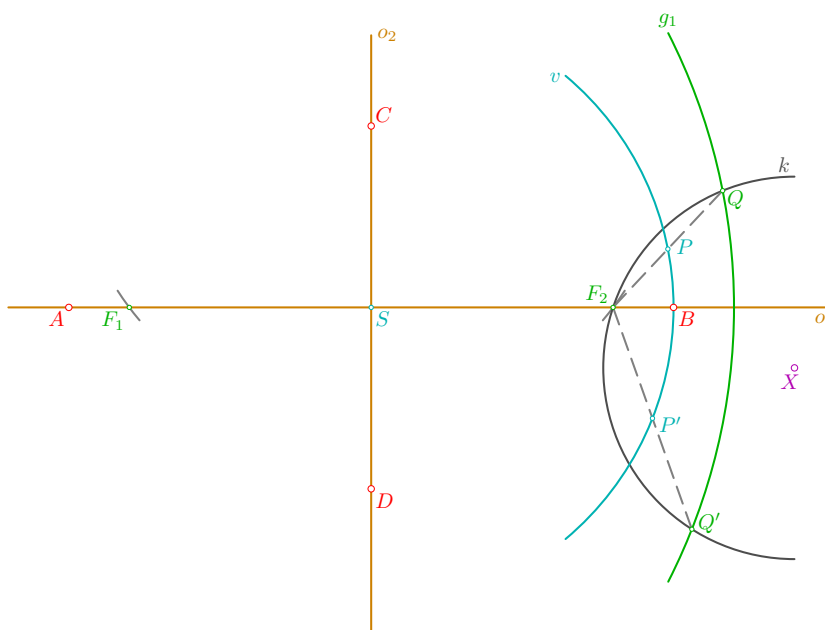
- nejprve doplníme ohniska  $F_1, F_2$  elipsy: ta leží na hlavní ose  $o_1$  a na kružnici o poloměru  $a = |SA|$  opsané kolem vedlejšího vrcholu  $C$ , tj. platí  $|F_1C| = |F_2C| = a$



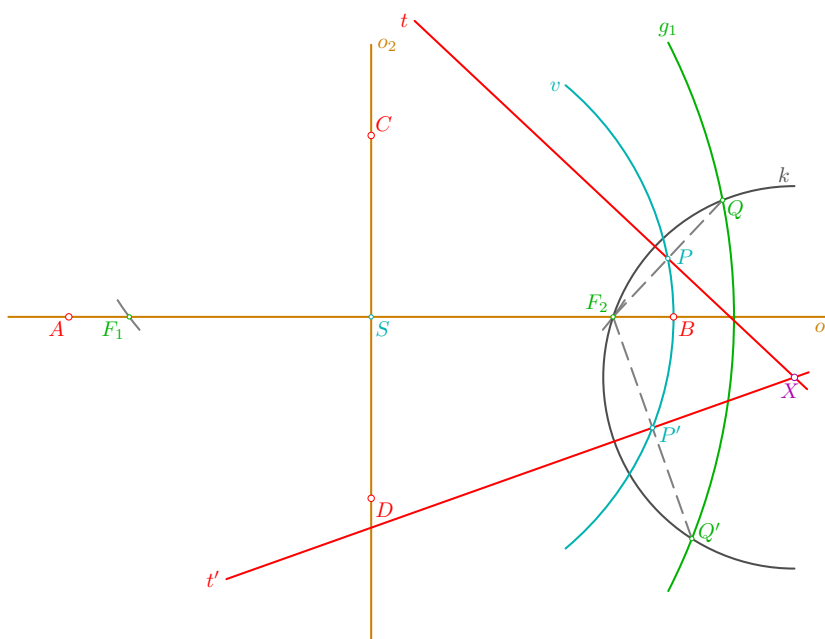
- podle **Věty 2** (na straně 184) leží body souměrně sdružené s ohniskem  $F_2$  podle hledaných tečen na řídicí kružnici  $g_1(F_1, 2a = |AB|)$ ; současně musí mít od bodu  $X$  vzdálenost  $|F_2X|$ , a musí tedy ležet také na kružnici  $k(X, |F_2X|)$



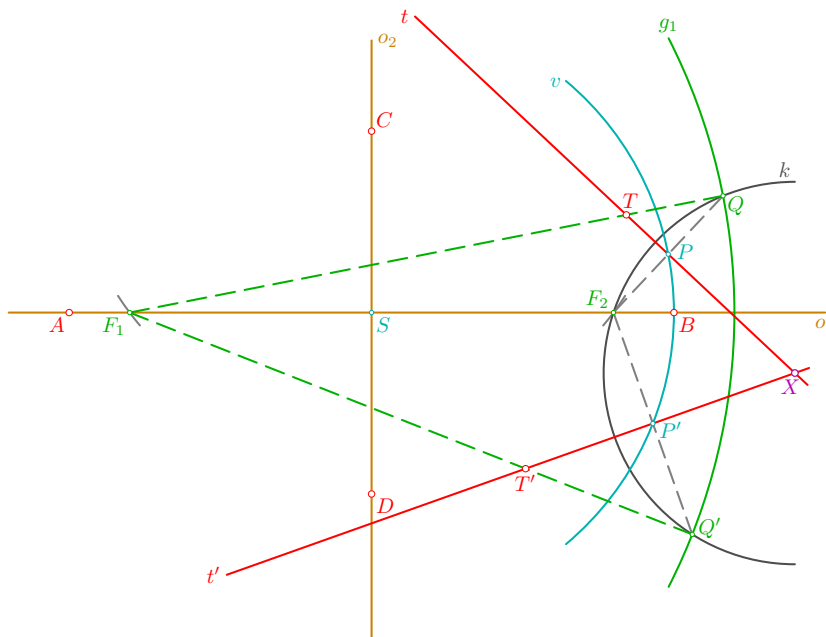
- kružnice  $g_1, k$  se protínají v bodech  $Q, Q'$ ; středy  $P, P'$  úseček  $F_2Q, F_2Q'$  jsou paty kolmic spuštěných z ohniska  $F_2$  na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 184) leží také na vrcholové kružnici  $v(S, a)$



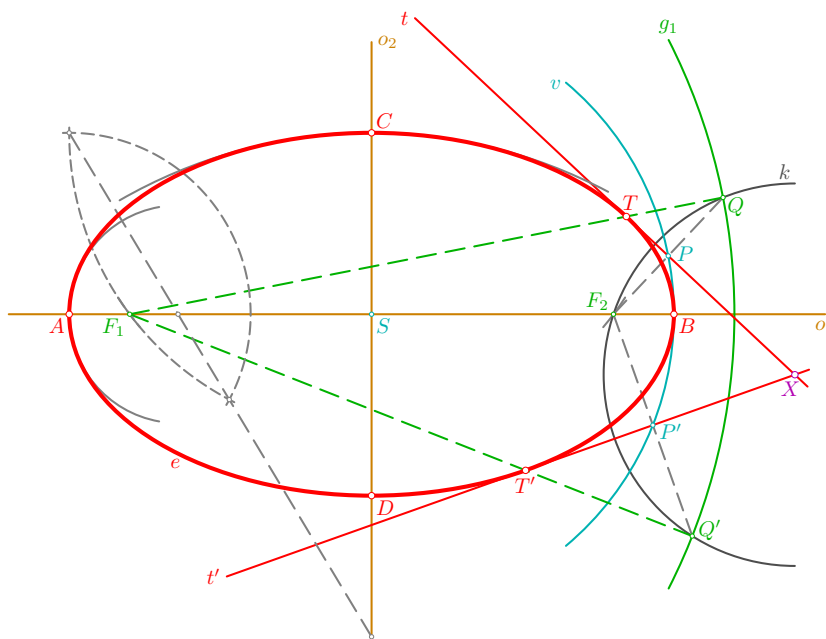
- nyní již můžeme sestrojít tečny  $t = XP, t' = XP'$ , pro které platí:  $t \perp F_2Q, t' \perp F_2Q'$



- pro body  $T, T'$  dotyku tečen  $t, t'$  s elipsou platí:  $T = t \cap F_1Q$ ,  $T' = t' \cap F_1Q'$ ; přímka  $F_1Q$ , resp. přímka  $F_1Q'$ , je vlastně jedním z průvodičů bodu  $T$ , resp. bodu  $T'$



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat elipsu  $e$ , která se v bodech  $T, T'$  dotýká tečen  $t, t'$  vedených z daného bodu  $X$



□

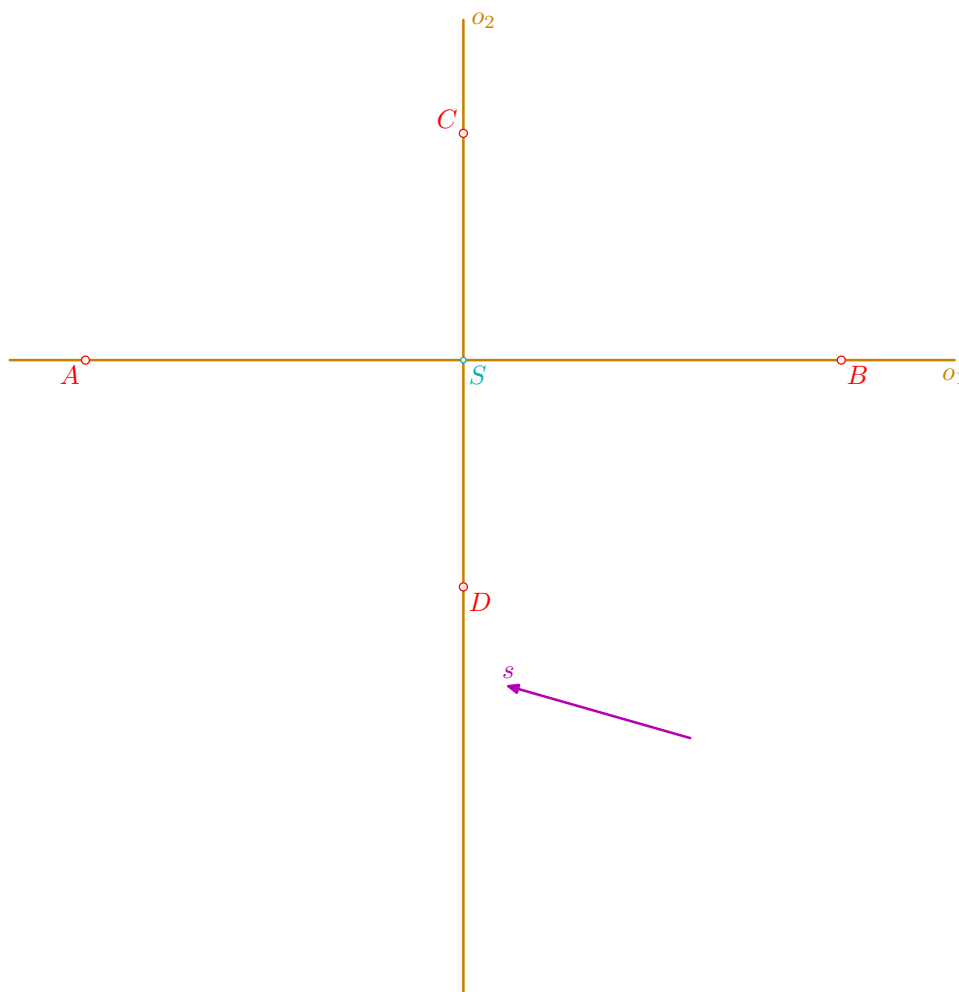
*Alternativní způsob řešení:* vystačíme pouze s vlastnostmi **Věty 3** (na straně 184), tj. s nalezením pat  $P, P'$  kolmic spuštěných z ohniska  $F_2$  na hledané tečny; body  $P, P'$  musí ležet na vrcholové kružnici  $v(S, a)$  a současně na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem  $F_2X$ ; pro body  $T, T'$  dotyku pak platí:  $T \in t, F_1T \parallel SP$  a  $T' \in t', F_1T' \parallel SP'$ ; roli obou ohnisek lze také prohodit, záleží na konkrétním zadání a velikosti nákresny; zkuste si jako cvičení. . .

*Diskuze:* pokud se kružnice  $g_1(F_1, 2a), k(X, |XF_2|)$  (případně  $g_2(F_2, 2a), k(X, |XF_1|)$ ) protínají ve dvou bodech, resp. se dotýkají v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod  $X$  leží ve vnější oblasti elipsy  $e$ , resp. bod  $X$  je bodem elipsy  $e$ , resp. bod  $X$  leží ve vnitřní oblasti elipsy  $e$ , a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané elipse  $e$ . Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové kružnice  $v(S, a)$  a Thaletovy kružnice nad průměrem  $F_2X$  nebo  $F_1X$ .

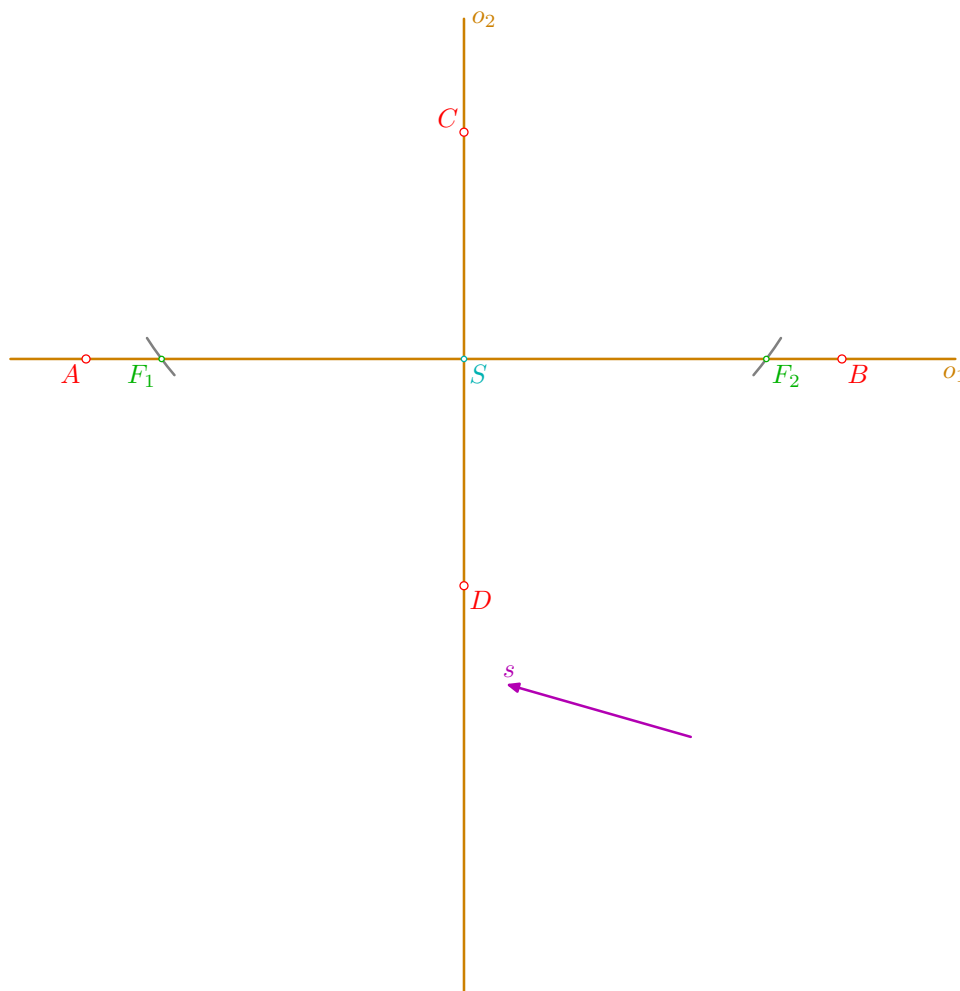
## Tečny k elipse daného směru

**Příklad:** K nenarýsované elipse  $e$ , která je dána hlavními a vedlejšími vrcholy, veďte tečny směru  $s$  (tj. rovnoběžné s přímkou  $s$ ).

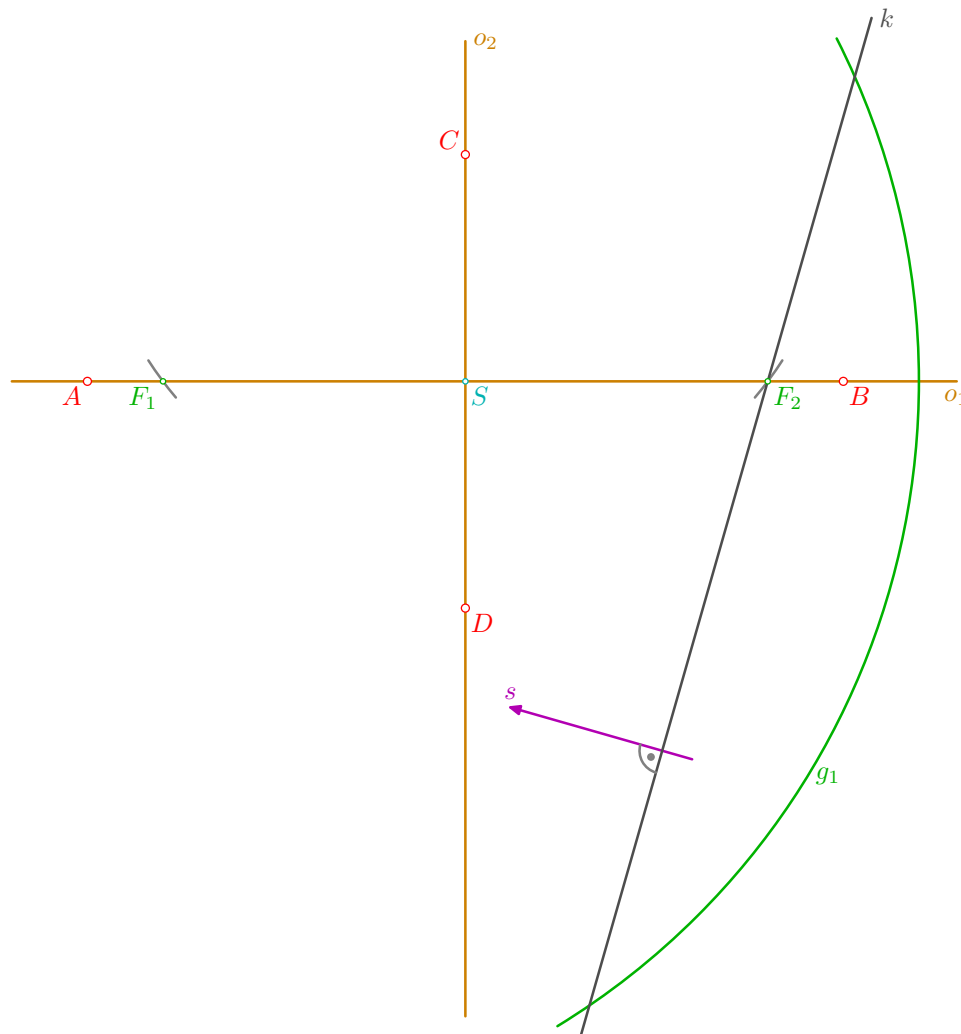
- zvolme střed  $S$ , vodorovně hlavní osu  $o_1$ , na ní hlavní vrcholy  $A, B$ , svisle vedlejší osu  $o_2 \perp o_1$  a na ní vedlejší vrcholy  $C, D$ ; rovněž zvolme směr  $s$ , s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



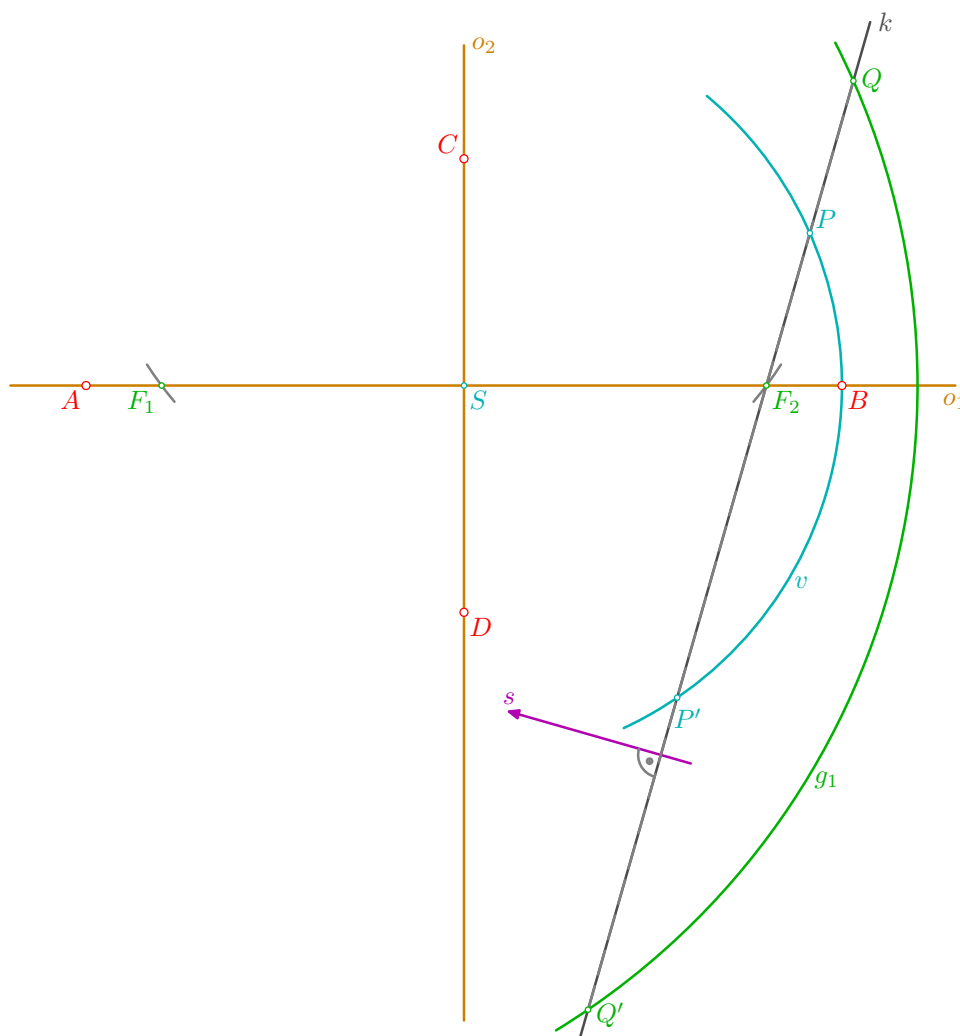
- nejprve doplníme ohniska  $F_1, F_2$  elipsy: ta leží na hlavní ose  $o_1$  a na kružnici o poloměru  $a = |SA|$  opsané kolem vedlejšího vrcholu  $C$ , tj. platí  $|F_1C| = |F_2C| = a$



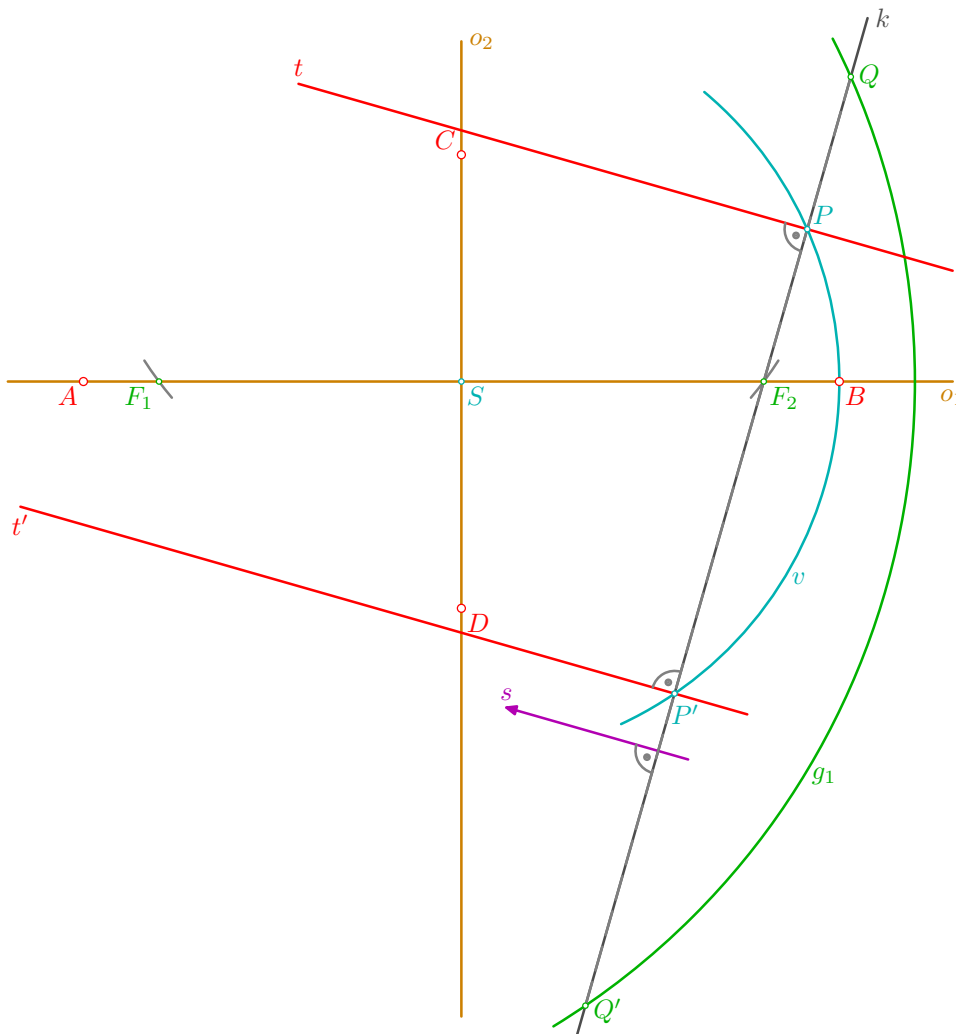
- podle **Věty 2** (na straně 184) leží body souměrně sdružené s ohniskem  $F_2$  podle hledaných tečen na řídicí kružnici  $g_1(F_1, 2a = |AB|)$ ; současně musí ležet na kolmici  $k$  vedené ohniskem  $F_2$  kolmo k danému směru  $s$ ; alternativně bychom mohli hledat body souměrně sdružené s ohniskem  $F_1$ , které musí ležet na řídicí kružnici  $g_2(F_2, 2a)$  a na přímce vedené tímto ohniskem kolmo ke směru  $s$



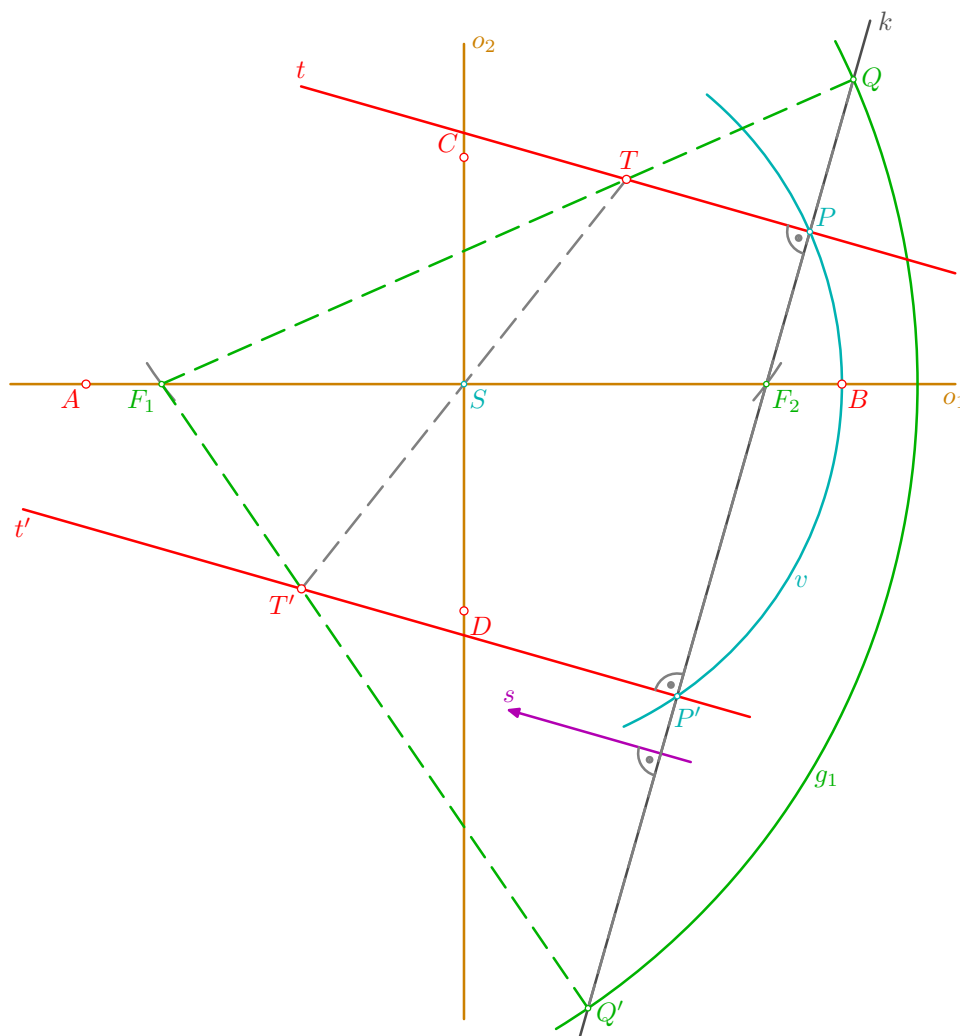
- přímka  $k$  protíná kružnici  $g_1$  v bodech  $Q, Q'$ ; středy  $P, P'$  úseček  $F_2Q, F_2Q'$  jsou paty kolmic spuštěných z ohniska  $F_2$  na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 184) leží také na vrcholové kružnici  $v(S, a)$ ; při řešení této úlohy bychom vystačili pouze s **Větou 3** a tedy s body  $P, P' = k \cap v$ ; to v případě, že některý z bodů  $Q, Q'$  vychází mimo nákresnu; my zde ovšem chceme demonstrovat také užití vlastností **Věty 2**



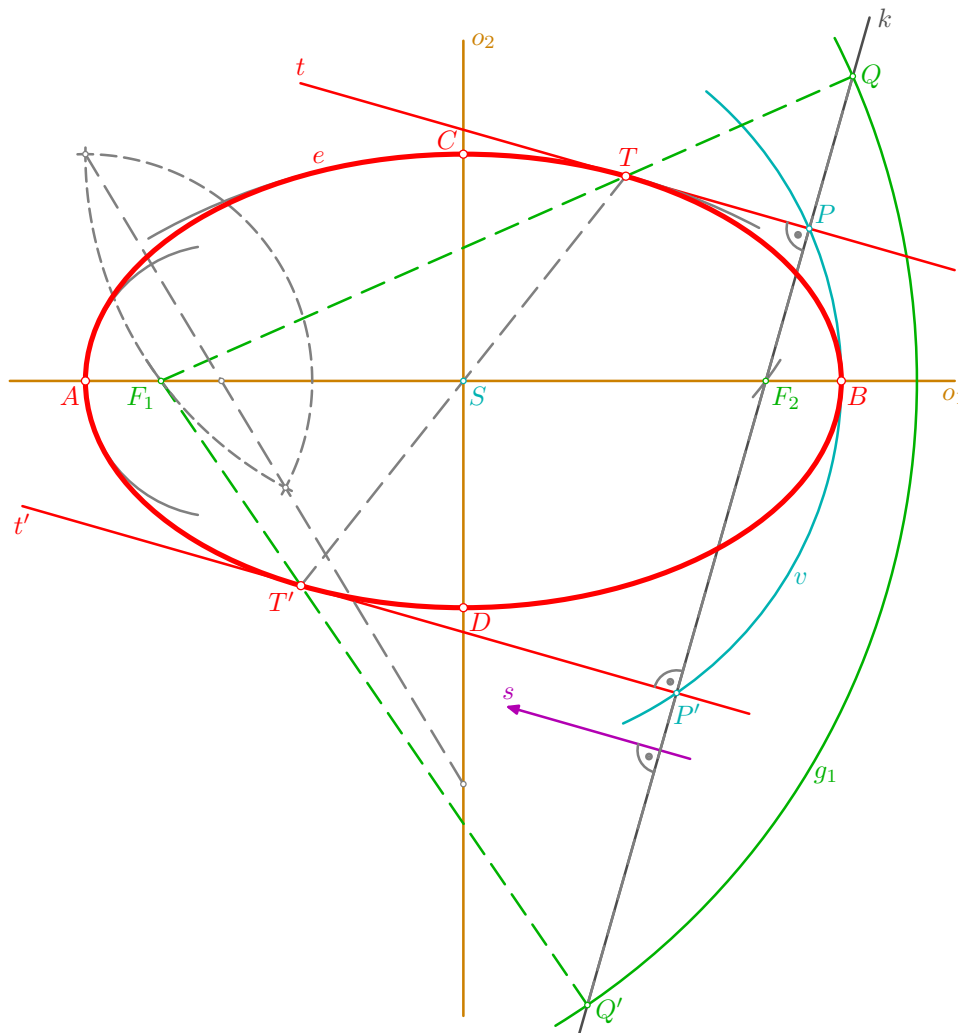
- nyní již můžeme sestrojít tečny  $t, t'$ , kde  $t \parallel t' \parallel s$  (tj.  $t \perp k, t' \perp k$ ) a  $P \in t, P' \in t'$ ; zvědavý čtenář si může do obrázku dokreslit alternativní variantu řešení: paty kolmice vedené ohniskem  $F_1$  kolmo ke směru  $s$  padnou na sestrojené tečny  $t, t'$  a současně na vrcholovou kružnici  $v(S, a)$



- pro body  $T, T'$  dotyku tečen  $t, t'$  s elipsou platí:  $T = t \cap F_1Q$ ,  $T' = t' \cap F_1Q'$ ; přímka  $F_1Q$ , resp. přímka  $F_1Q'$ , je vlastně jedním z průvodičů bodu  $T$ , resp. bodu  $T'$ ; současně platí  $F_1T \parallel SP$ ,  $F_1T' \parallel SP'$  a navíc jsou tečny  $t \parallel t'$  středově souměrné podle středu  $S$  elipsy, z čehož vyplývá  $S \in TT'$ ; v této úloze je tedy možné sestavit pouze jedno řešení na základě ohniskových vlastností a druhé lze snadno doplnit pomocí středové souměrnosti; konstrukce vztahující se k užití alternativního řešení pomocí druhého ohniska jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat elipsu  $e$ , která se v bodech  $T, T'$  dotýká tečen  $t, t'$  rovnoběžných s daným směrem  $s$



□

*Diskuze:* Řídící kružnice  $g_1(F_1, 2a)$  a přímka  $k$ , vedená ohniskem  $F_2$  kolmo k libovolně danému směru  $s$ , se vždy protínají právě ve dvou bodech, a úloha má tudíž vždy právě dvě řešení souměrná podle středu  $S$  elipsy  $e$ ; k témuž závěru lze dojít při užití alternativních způsobů řešení – tj. pomocí druhé řídicí kružnice  $g_2$ , nebo pomocí vrcholové kružnice  $v$ .

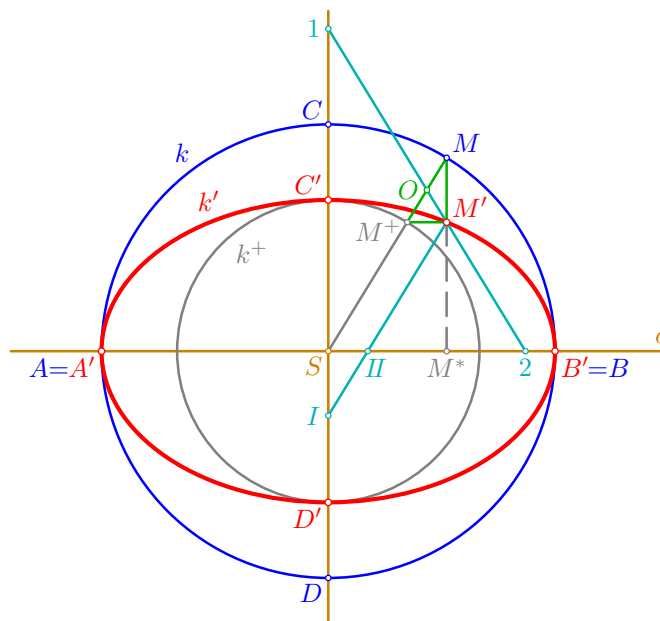
## 1.2. Afinní vztah kružnice a elipsy

### Výklad



- rovnoběžným průmětem kružnice do roviny je v obecném případě elipsa; speciálně se může kružnice promítnout do kružnice nebo do úsečky
- daná kružnice  $k$  a její rovnoběžný průmět – elipsa  $k'$  – si odpovídají v prostorové osové afinitě mezi rovinami obou křivek; rovnoběžným průmětem této prostorové osové afinity do nějaké roviny  $\rho$  je osová afinita v této rovině  $\rho$
- na základě tohoto afinního vztahu mezi kružnicí a elipsou lze odvodit některé užitečné konstrukce elipsy

### 1.2.1. Trojúhelníková a proužkové konstrukce elipsy



- pravouhlá osová afinita mezi kružnicí  $k$  a elipsou  $k'$  je dána takto: osou  $o$  afinity je hlavní osa elipsy  $k'$ , dvojici odpovídajících si bodů tvoří body  $C \in k$  a  $C' \in k'$  na vedlejší ose
- potom lze další body elipsy  $k'$  sestrojovat pomocí tzv. **trojúhelníkové konstrukce**
  - na kružnici  $k$  zvolme bod  $M$

- označme  $M^+$  průsečík polopřímky  $SM$  s kružnicí  $k^+(S, |SC'|)$
- bodem  $M^+$  vedme rovnoběžku s osou  $o$  a bodem  $M$  kolmici k ose  $o$  afinity; jejich průsečík  $M'$  je pak bodem elipsy  $k'$  (to lze odvodit z vlastností charakteristiky dané osovou afinitou:  $\frac{|M'M^*|}{|MM^*|} = \frac{|M^+S|}{|MS|} = \frac{|SC'|}{|SC|}$ )

- **součtová proužková konstrukce**

- sestrojený bod  $M'$  spojíme se středem  $O$  úsečky  $MM^+$
- tato spojnice protíná vedlejší a hlavní osu elipsy  $k'$  v bodech 1, 2, pro něž platí:  $|1M'| = |SM|$ , což je délka hlavní poloosy, a  $|2M'| = |SM^+|$ , což je délka vedlejší poloosy elipsy  $k'$
- kdybychom úsečku 12 (její délka je **součtem** délek hlavní a vedlejší poloosy) spolu s dělicím bodem  $M'$  přenesli na proužek papíru a jím pak pohybovali tak, aby bod 1 ležel stále na vedlejší resp. bod 2 na hlavní ose elipsy, potom bod  $M'$  bude opisovat elipsu  $k'$

- **rozdílová proužková konstrukce**

- sestrojeným bodem  $M'$  vedme rovnoběžku s přímkou  $SM$
- ta protne vedlejší a hlavní osu elipsy  $k'$  v bodech  $I, II$ , pro které platí:  $|IM'| = |SM|$ , což je délka hlavní poloosy, a  $|IIM'| = |SM^+|$ , což je délka vedlejší poloosy elipsy  $k'$
- kdybychom úsečku  $III$  (její délka je **rozdílem** délek hlavní a vedlejší poloosy) spolu s prodloužením do bodu  $M'$  nanесли na proužek papíru a jím pak pohybovali tak, aby bod  $I$  ležel stále na vedlejší resp. bod  $II$  na hlavní ose elipsy, potom bod  $M'$  bude opět opisovat elipsu  $k'$

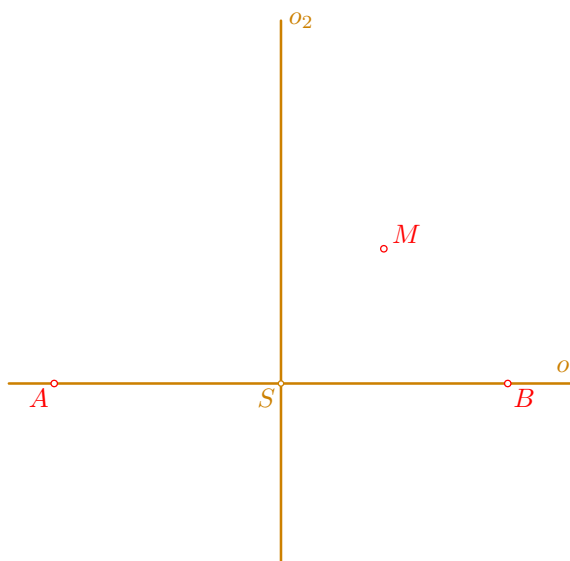
## 1.2.2. Užití proužkových konstrukcí



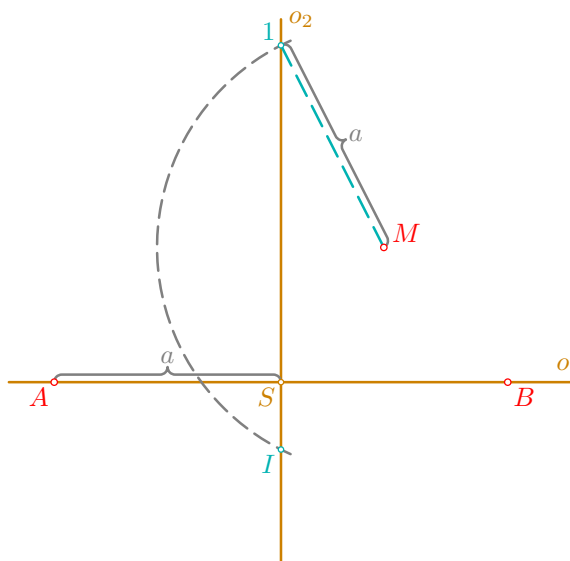
## Řešené úlohy

**Příklad:** Sestrojte vedlejší vrcholy  $C, D$  elipsy  $e$ , která je dána hlavními vrcholy  $A, B$  a obecným bodem  $M$ .

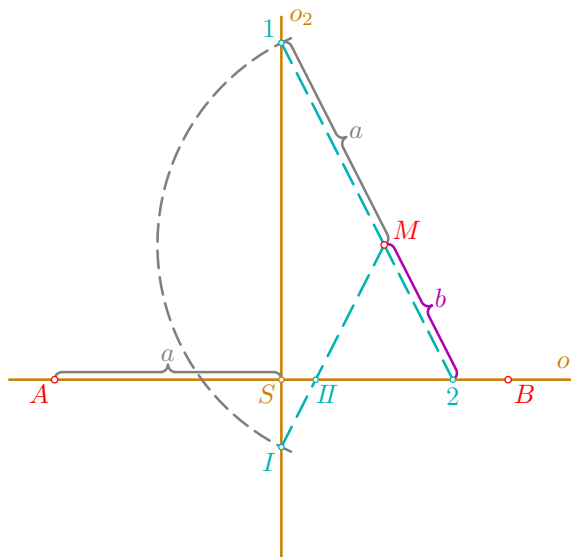
- pro elipsu  $e$  zvolme střed  $S$  a souměrně podle něj hlavní vrcholy  $A, B$  na hlavní ose  $o_1$ ; doplňme vedlejší osu  $o_2 \perp o_1, S \in o_2$  a obecný bod  $M$  tak, aby bylo  $|SM| < |SA|$



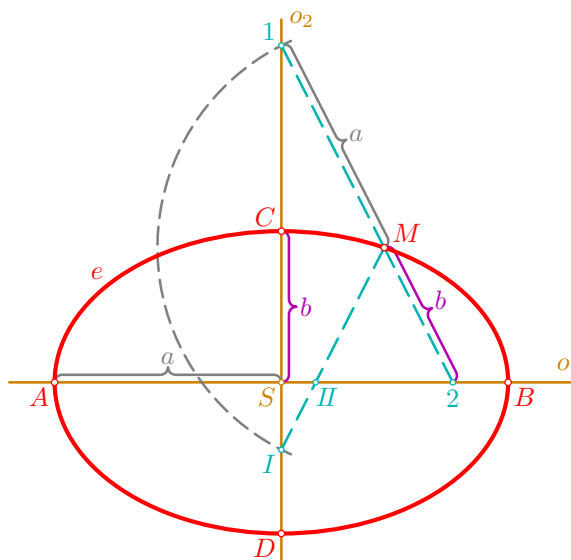
- kolem zvoleného bodu  $M$  opišme oblouk pomocné kružnice o poloměru délky  $a = |SA|$  hlavní poloosy a najděme její průsečíky  $1, I$  s vedlejší osou  $o_2$



- přímka  $1M$ , resp. přímka  $IM$ , protíná hlavní osu  $o_1$  v bodě 2, resp. v bodě  $II$ , přičemž  $|2M| = |IIM| = b$  je podle předchozího délkou vedlejší poloosy sestrojované elipsy  $e$



- nyní již můžeme snadno doplnit vedlejší vrcholy  $C, D \in o_2$ ,  $|SC| = |SD| = b$ , a (nejlépe za pomoci hyperoskulačních kružnic ve vrcholech, tato konstrukce ovšem není v obrázku provedena) vyrýsovat elipsu  $e$ ; pro řešení úlohy zřejmě stačí použít buď pouze součtovou (body 1, 2) nebo pouze rozdílovou variantu (body  $I, II$ ) některé z proužkových konstrukcí...

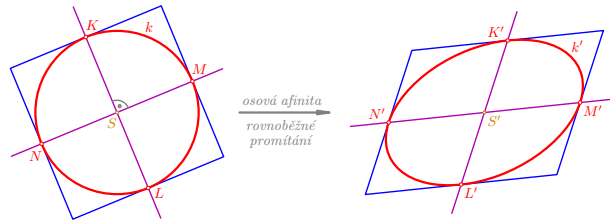


□

## 1.2.3. Sdružené průměry kružnice a elipsy



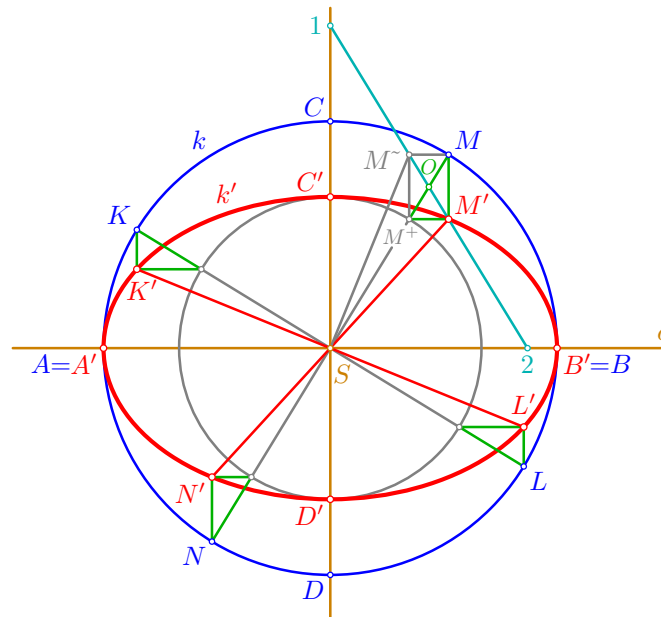
## Výklad



- dva průměry kružnice nebo elipsy se nazývají **sdružené**, právě když tečny v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem
- sdruženost průměrů se rovnoběžným promítáním a tedy i osovou afinitou zachovává
- u kružnice jsou každé dva sdružené průměry současně navzájem kolmé
- u elipsy existuje jediná dvojice sdružených a současně kolmých průměrů – na hlavní a vedlejší ose

## 1.2.4. Rytzova konstrukce

- ukazuje, jak lze sestavit hlavní a vedlejší vrcholy elipsy, která je dána pomocí dvojice svých sdružených průměrů



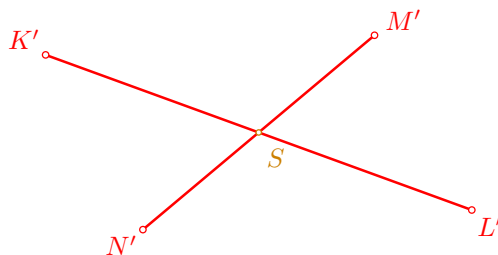
- kružnice  $k$  a elipsa  $k'$  si odpovídají v pravoúhlé osové afinitě, jejíž osou  $o$  je hlavní osa elipsy a v níž se bod  $C$  zobrazí na bod  $C'$
- zvolme dvojici kolmých (a tedy i sdružených) průměrů  $KL, MN$  kružnice  $k$  a pomocí trojúhelníkové konstrukce sestrojme odpovídající sdružené průměry  $K'L', M'N'$  elipsy  $k'$
- doplníme-li trojúhelník  $MM'M^+$  bodem  $M^\sim$  na obdélník, pak platí  $SM^\sim \perp K'L'$  a pro střed  $O$  obdélníka  $MM'M^+M^\sim$  je  $|OS| = |O1| = |O2|$
- na základě těchto vztahů lze odvodit tzv. **Rytzovu konstrukci**, jejíž použití předvedeme na následujícím příkladě

### Řešené úlohy

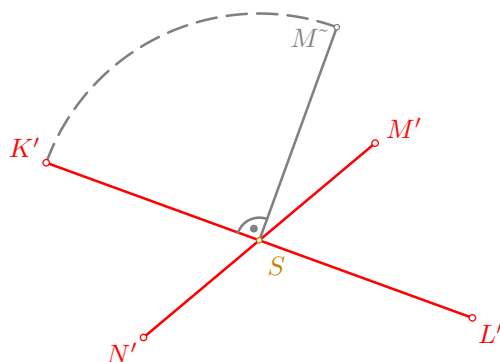
**Příklad:** Sestrojte hlavní a vedlejší vrcholy elipsy  $k'$ , která je dána dvojicí sdružených průměrů  $K'L', M'N'$ .



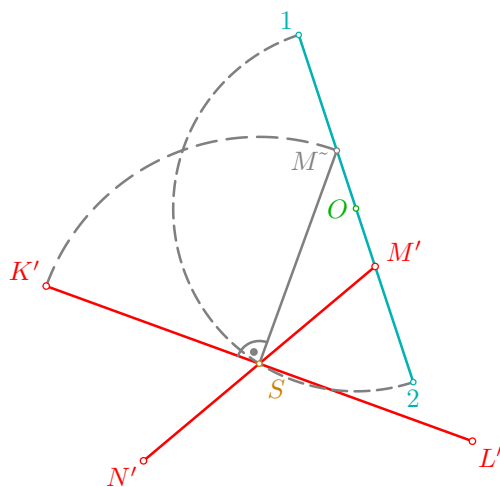
- zvolme dvojici obecných (tj. ne kolmých) sdružených průměrů  $K'L', M'N'$  elipsy  $k'$ , které se protínají v jejím středu  $S$ ; pro lepší orientaci a porozumění je ponecháno označení z předchozího obrázku



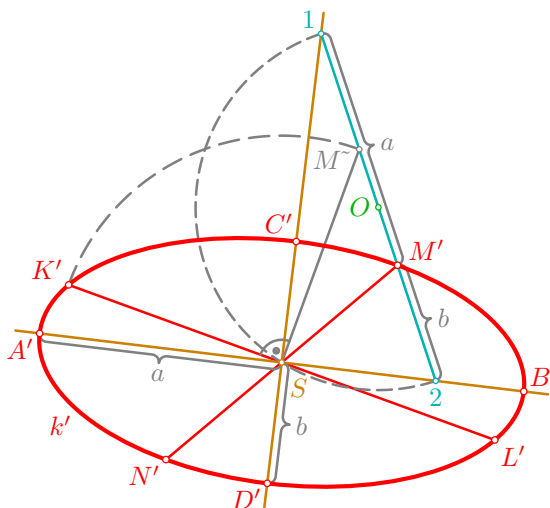
- krajní bod  $K'$  jednoho z průměrů otočme o  $90^\circ$  kolem středu  $S$  do bodu  $M'$ ; přitom je lhostejné, který z bodů  $K', L', M', N'$  vybereme a jestli jej otočíme v kladném nebo záporném smyslu



- bod  $M$  spojíme s některým (tradičně bližším, ale opět je to jedno) krajním bodem druhého průměru, tj. např. s bodem  $M'$ , a sestrojme střed  $O$  úsečky  $MM'$ ; dále na přímce  $MM'$  sestrojme body 1, 2, pro které platí  $|O1| = |O2| = |OS|$



- přímky  $1S, 2S$  jsou pak vedlejší a hlavní osou konstruované elipsy, přičemž hlavní osa vždy dělí ostrý úhel daných sdružených průměrů; délky hlavní a vedlejší poloosy určíme pomocí součtové proužkové konstrukce:  $a = |1M'|$  a  $b = |2M'|$ ; tyto délky nanese od středu  $S$  na příslušné osy a získáme hledané hlavní a vedlejší vrcholy  $A, B, C, D$ ; na závěr vyrýsujeme elipsu  $k'$ , pro niž známe osm bodů a v každém z nich bychom mohli snadno sestrojiti tečnu (jako rovnoběžku s příslušným sdruženým průměrem)...

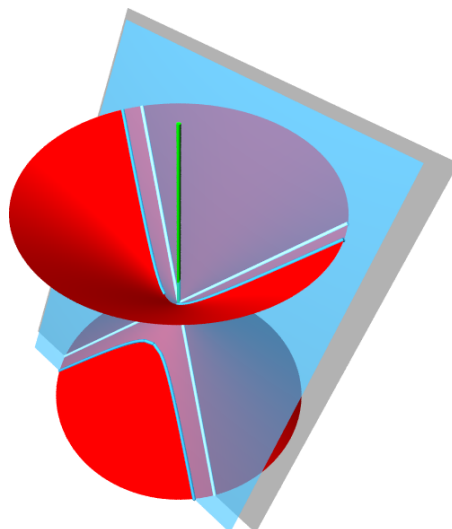


□

## 1.3. Hyperbola



### Výklad



#### 1.3.1. Definice a ohniskové vlastnosti

- *prostorová definice* (viz obrázek nahoře): **hyperbola** je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řezná rovina má takovou polohu, že rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem protíná kuželovou plochu ve dvou různoběžných přímkách (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je menší než odchylka povrchových přímek)
- *ohnisková definice*: **hyperbola**  $h$  je množinou všech bodů v dané rovině  $\rho$ , pro něž je absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou různých pevných bodů  $F_1, F_2$  rovna danému číslu  $2a$ , které je menší než vzdálenost bodů  $F_1, F_2$ ; symbolicky zapsáno:

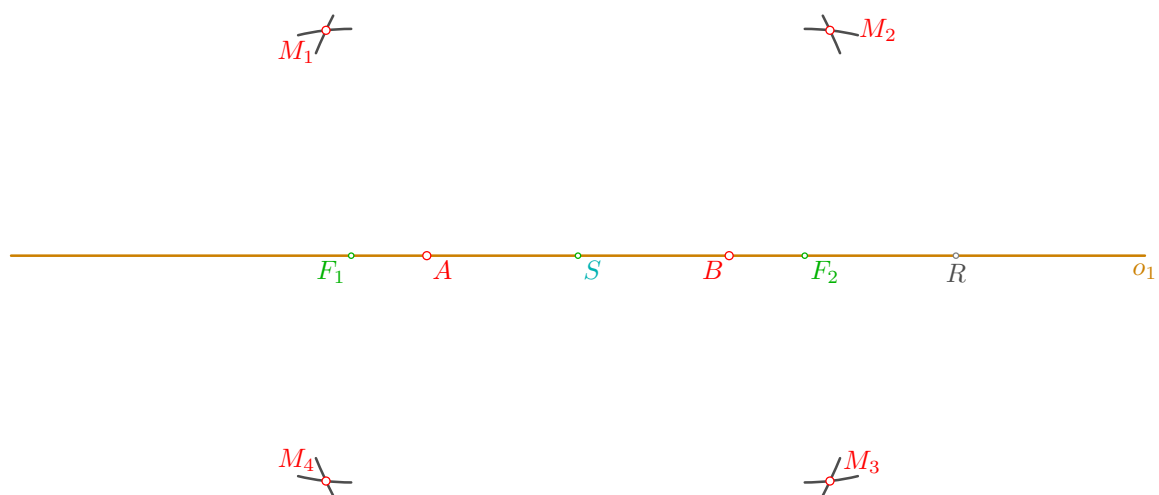
$$h = \{X \in \rho; ||F_1X| - |F_2X|| = 2a, 0 < 2a < |F_1F_2|\}$$

**Konstrukce a základní pojmy**

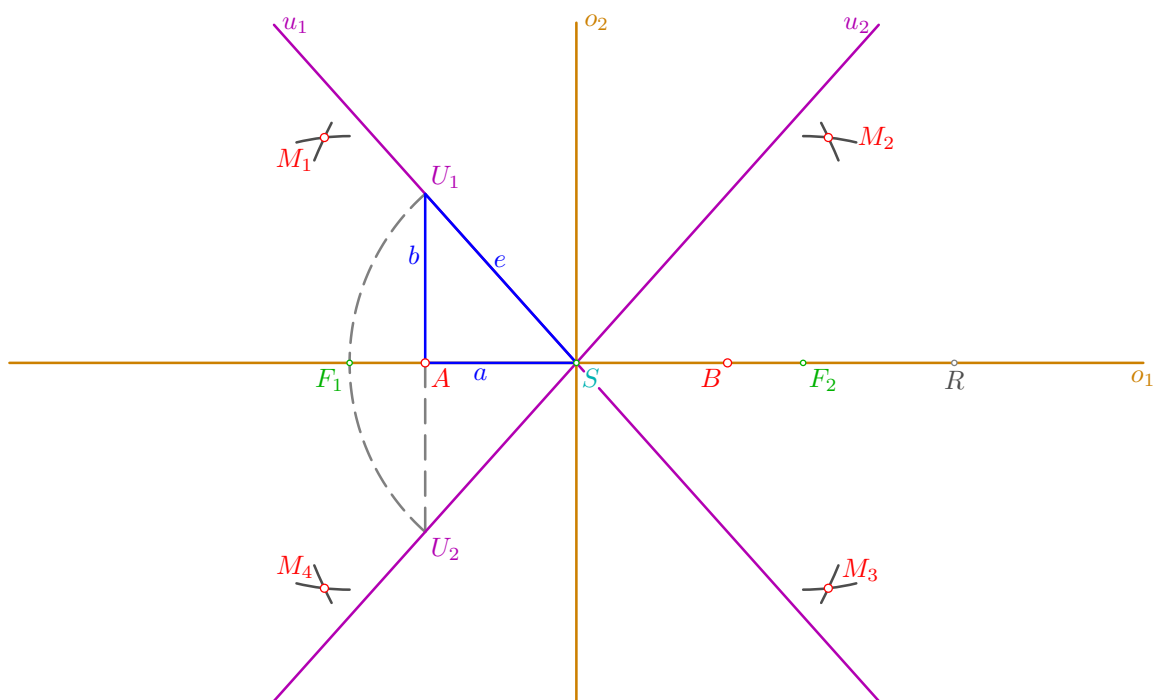
- na vodorovné přímce  $o_1$  zvolme bod  $S$  a od něj na obě strany souměrně nanesme dvě libovolně zvolené vzdálenosti; vzdálenější body označme  $F_1, F_2$  a nazvěme je **ohnisky** hyperboly, oněmi pevnými body, o nichž se mluví v ohniskové definici; bližší body označme  $A, B$  a necht' pro jejich vzdálenost platí  $|AB| = 2a$ ; pak je  $||F_1A| - |F_2A|| = = ||F_1B| - |F_2B|| = 2a$ , a podle definice je bod  $A$  bodem hyperboly  $h$ ; totéž lze ukázat pro bod  $B$  a body  $A, B$  se nazývají **vrcholy** (někdy se používá i přívlástek *hlavní*) hyperboly (hyperbola v nich má největší křivost); přímka  $o_1 = AB = F_1F_2$  je **hlavní osa** hyperboly a bod  $S$  je její **střed** (hyperbola je podle něj středově souměrná)



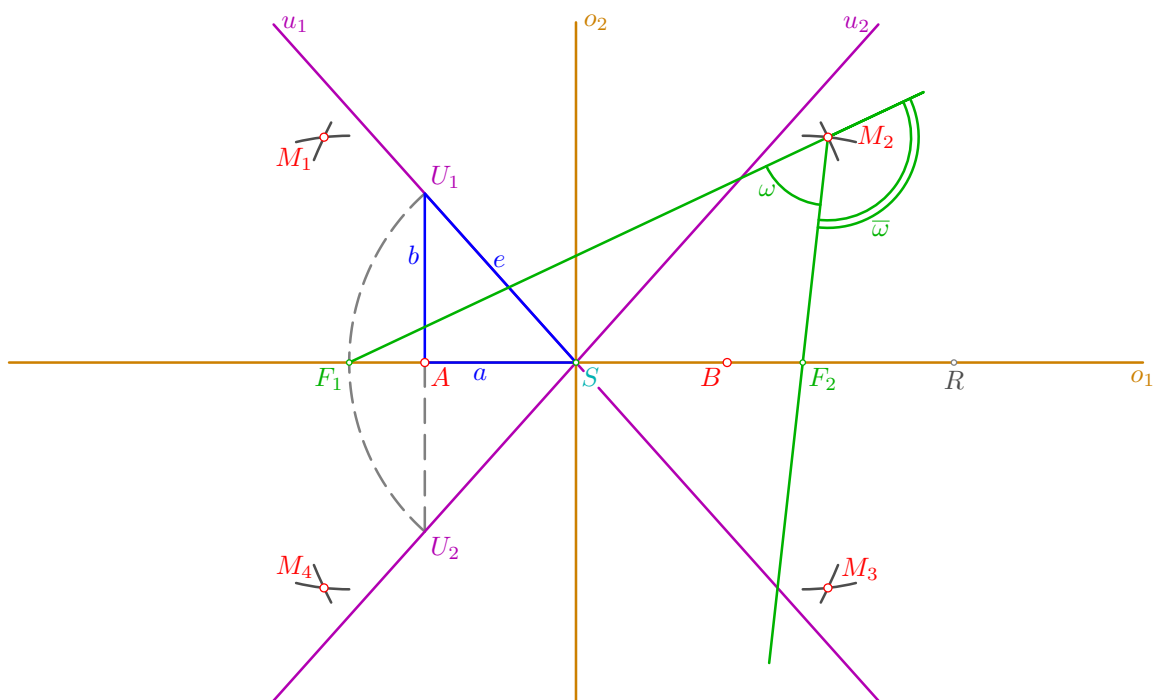
- sestrojme další **obecné body** hyperboly: na hlavní ose  $o_1$  mimo úsečku  $F_1F_2$  zvolme pomocný bod  $R$ , vezměme do kružítka poloměr délky  $|AR|$  a opišme čtyři oblouky kružnic kolem ohnisek  $F_1, F_2$ ; změňme poloměr na délku  $|BR|$  a provedme totéž – kolem ohnisek protněme předchozí čtyři oblouky; získáme tak čtyři body  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , kde např. pro  $M_2$  platí  $||F_1M_2| - |F_2M_2|| = ||AR| - |BR|| = |AB| = 2a$  (analogicky pro  $M_1, M_3, M_4$ ); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu  $R$  konstruovat další a další body hyperboly  $h$ ; zvolíme-li bod  $R$  v některém z ohnisek, dostaneme tímto způsobem vrcholy  $A, B$ ; při volbě bodu  $R$  uvnitř úsečky  $F_1F_2$  se příslušné kruhové oblouky neprotnou a nezískáme tak žádné další body hyperboly



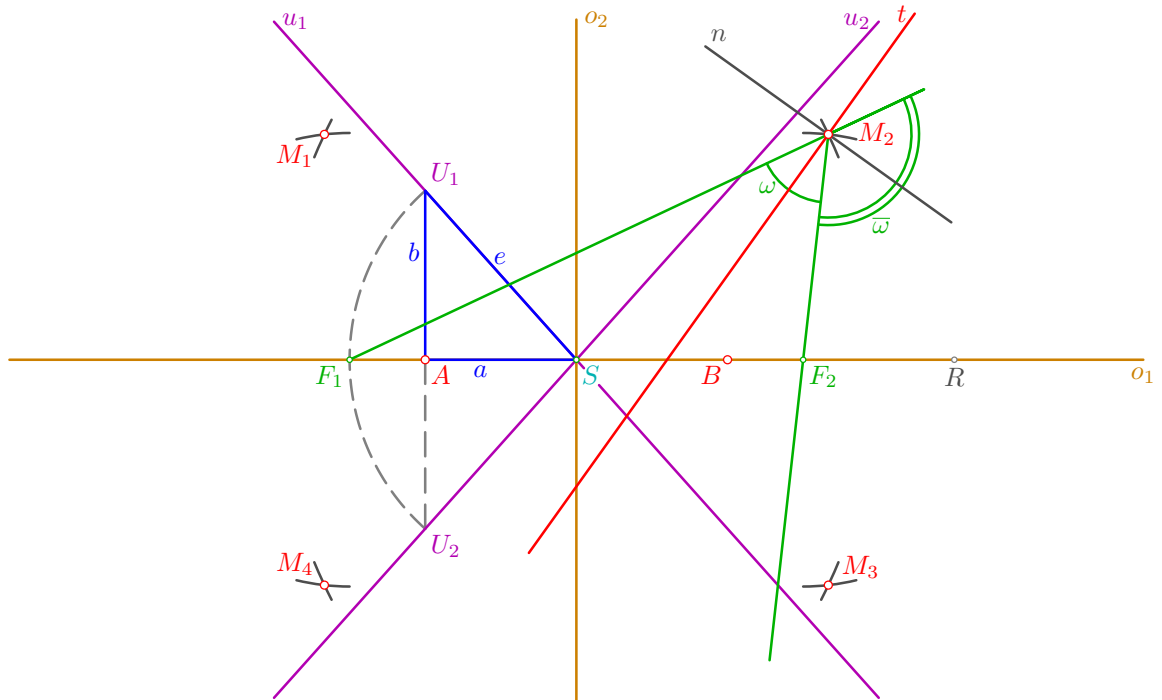
- vrcholem  $A$  vztyčme kolmici na hlavní osu  $o_1$  a sestrojme její průsečíky  $U_1, U_2$  s kružnicí, která má střed v bodě  $S$  a poloměr  $|SF_1|$ ; přímky  $u_1 = SU_1, u_2 = SU_2$  jsou pak tzv. **asymptoty** hyperboly – tečny, které se jí dotýkají v nekonečnu; hyperbola je osově souměrná také podle **vedlejší osy**  $o_2 \perp o_1, S \in o_2$ ; délka  $a = |SA|$  se nazývá **délka hlavní poloosy**, délka úsečky  $AU_1$  se nazývá **délka  $b = |AU_1|$  vedlejší poloosy** a délka úsečky  $F_1S$  udává tzv. **excentricitu** (výstřednost)  $e = |F_1S| = |SU_1|$  hyperboly; z charakteristického pravoúhlého trojúhelníka  $ASU_1$  a Pythagorovy věty vyplývá vztah mezi délkami poloos a excentricitou hyperboly:  $a^2 = e^2 - b^2$



- pro další konstrukce vyberme např. bod  $M_2$  a sestrojme přímky  $F_1M_2, F_2M_2$ , což jsou tzv. **průvodiče bodu**  $M_2$ ; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží střed  $S$  (nebo úhel k němu vrcholový) označme  $\omega$  a nazvěme ho **vnější úhel průvodičů** bodu  $M_2$ ; některý z úhlů vedlejších k úhlu  $\omega$  označme  $\bar{\omega}$  a říkejme mu **vnitřní úhel průvodičů** bodu  $M_2$



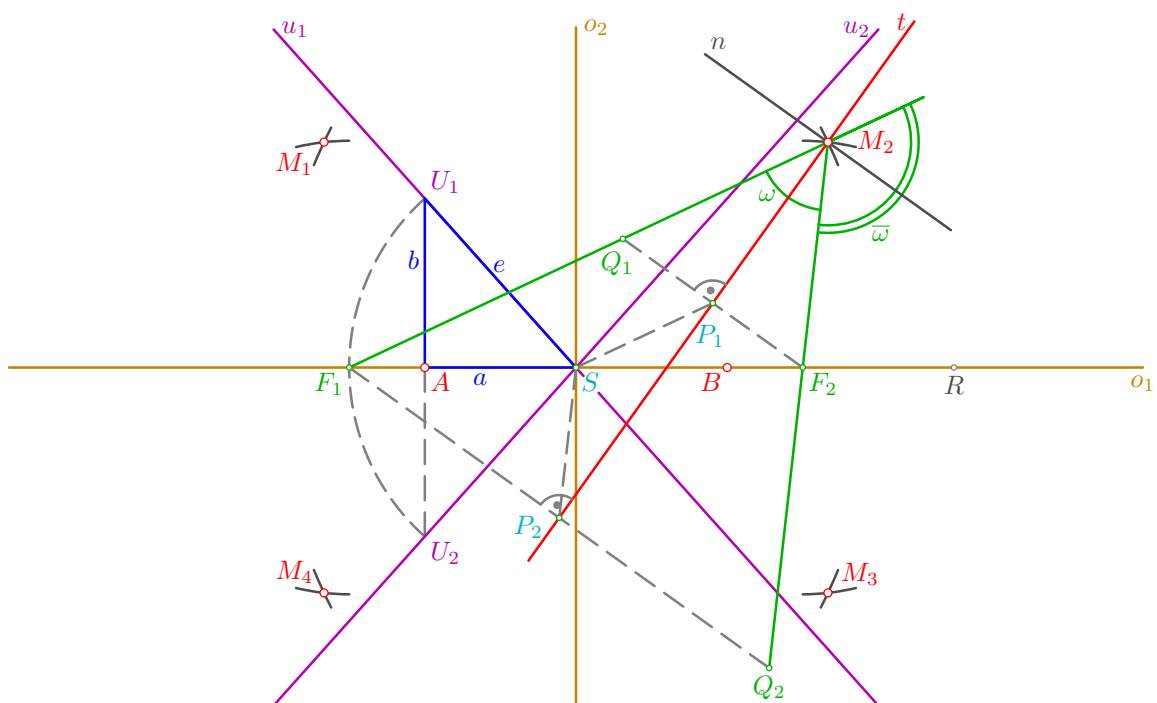
- dá se dokázat, že osa  $t$  vnějšího úhlu  $\omega$  průvodičů bodu  $M_2$  je současně **tečnou** hyperboly v bodě  $M_2$ ; přímka  $n \perp t$  je pak **normálou** hyperboly v bodě  $M_2$  a současně osou vnitřního úhlu  $\bar{\omega}$  průvodičů bodu  $M_2$ ; to platí v každém bodě hyperboly a toto tvrzení je shrnuto v níže uvedené Větě 1



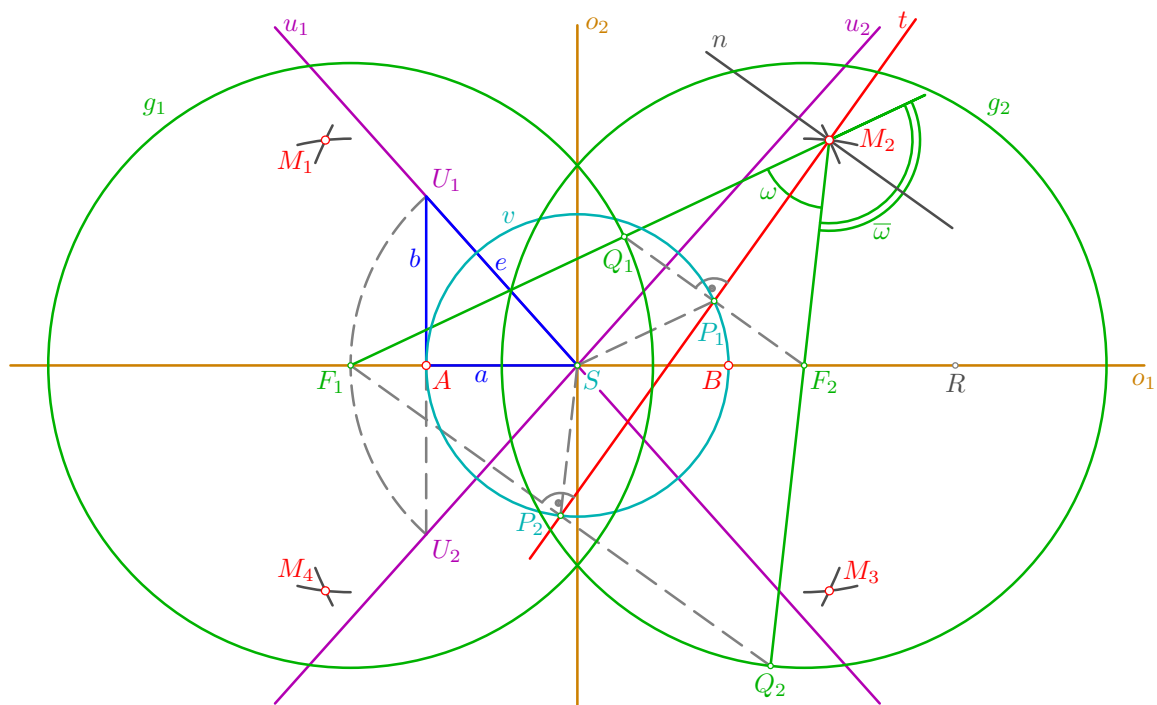
### Věta 1

Tečna (normála) v bodě hyperboly pólí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

- na základě předchozího odvoďme další vlastnosti hyperboly: sestrojme body  $Q_1, Q_2$  souměrně sdružené s ohnisky  $F_2, F_1$  podle tečny  $t$  a označme příslušné paty  $P_1, P_2$  kolmic  $Q_1F_2, Q_2F_1$  spuštěných z ohnisek  $F_2, F_1$  na tečnu  $t$  (tj. středy úseček  $Q_1F_2, Q_2F_1$ ); z osové souměrnosti průvodičů bodu  $M_2$  podle tečny  $t$  plyne, že bod  $Q_1$  leží na přímce  $F_1M_2$  a bod  $Q_2$  padne na průvodič  $F_2M_2$



- díky osové souměrnosti je  $|M_2Q_1| = |M_2F_2|$ , a tudíž platí  $|F_1Q_1| = ||F_1M_2| - |M_2Q_1|| =$   
 $= ||F_1M_2| - |M_2F_2|| = 2a$ ; totéž lze ukázat v každém bodě hyperboly, a všechny  
 body souměrně sdružené s ohniskem  $F_2$  podle tečen hyperboly tedy leží na tzv. **řídící**  
**kružnici**  $g_1(F_1, 2a)$ ; analogicky dostaneme  $|F_2Q_2| = 2a$  a můžeme sestavit druhou řídící  
 kružnici  $g_2(F_2, 2a)$ , na níž leží všechny body souměrně sdružené s ohniskem  $F_1$  podle  
 tečen hyperboly (viz Věta 2); úsečky  $SP_1, SP_2$  jsou po řadě střední příčky trojúhelníků  
 $F_1F_2Q_1, F_1F_2Q_2$  a pro jejich délky tedy platí:  $|SP_1| = \frac{|F_1Q_1|}{2} = a = \frac{|F_2Q_2|}{2} = |SP_2|$ ;  
 obecně shrnuto, paty kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny leží na tzv.  
**vrcholové kružnici**  $v(S, a)$  (viz Věta 3)



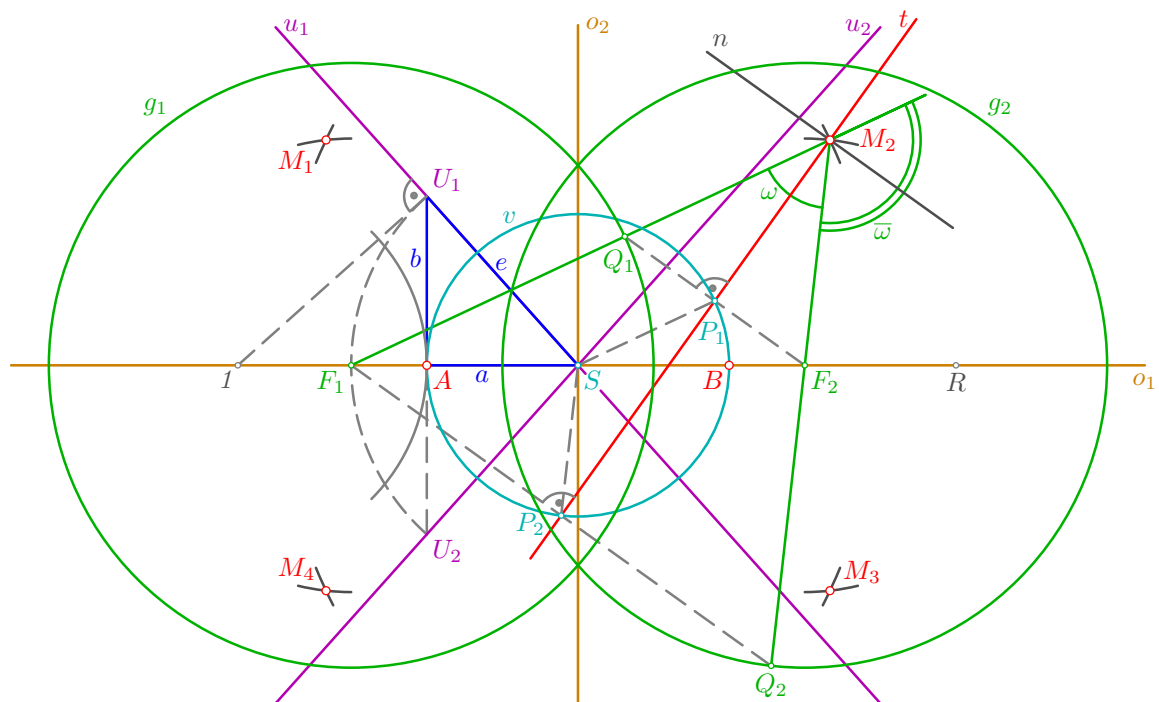
**Věta 2**

Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly podle jejich tečen je řídící kružnice hyperboly o středu ve druhém ohnisku a poloměru  $2a$ .

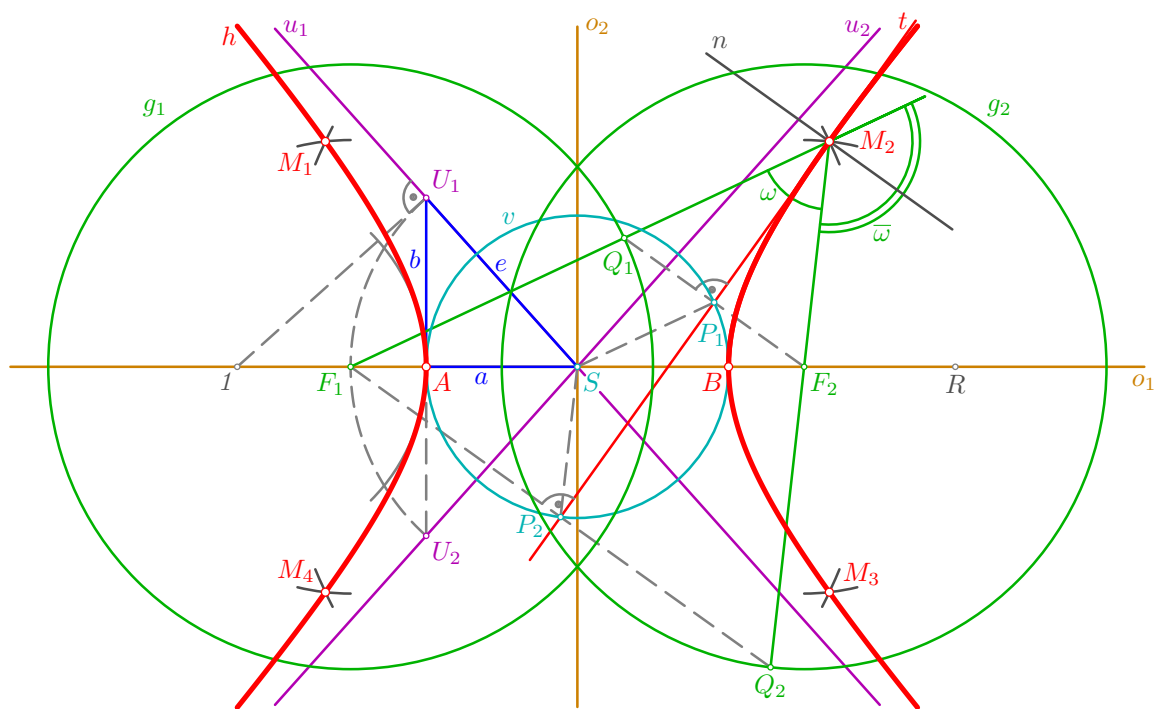
**Věta 3**

Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny je vrcholová kružnice hyperboly.

- pro jednodušší a pěknější vyrýsování hyperboly sestrojme v jejích vrcholech oblouky tzv. **hyperoskulačních kružnic**: stačí vést bodem  $U_1$  kolmicí k asymptotě  $u_1$  a určit její průsečík  $1$  s hlavní osou  $o_1$  hyperboly; bod  $1$  je pak středem oblouku hyperoskulační kružnice ve vrcholu  $A$  (oblouk ve vrcholu  $B$  doplníme souměrně podle středu  $S$ , konstrukce není v obrázku provedena); tyto oblouky přibližně nahrazují průběh hyperboly v blízkém okolí vrcholů, ale jejich konstrukce není tak užitečná jako u elipsy



- na závěr je vytažena hyperbola  $h$  (přesněji řečeno její část), což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka; při tom jsou důležitým vodítkem právě asymptoty, k nimž se směrem od vrcholů hyperbola stále přibližuje, ale dotkne se jich až v nekonečnu (v jejich nevlastních bodech); zkusme si představit hypotetickou cestu po hyperbole, např. na kole: vyjedeme z vrcholu  $A$  směrem k bodu  $M_1$ , projedeme jím a pokračujeme dále k asymptotě  $u_1$ ; dejme tomu, že se nám podaří dojet do jejího nevlastního bodu, kde se jí „konečně“ dotkneme, chvílku si odpočineme, přece jen to byla nekonečně dlouhá cesta, a vydáme se dál započatým směrem, tj. musíme se od asymptoty  $u_1$  začít vzdalovat, projedeme bodem  $M_3$ , vrcholem  $B$ , bodem  $M_2$ , v němž se dotkneme sestrojené tečny  $t$ , podruhé přijedeme do nekonečna, tentokrát do nevlastního bodu asymptoty  $u_2$ , jíž se v něm dotkneme, a přes bod  $M_4$  se vrátíme zpět do vrcholu  $A$ ; hyperbola je tedy také (podobně jako elipsa) uzavřená křivka, která se skládá ze dvou větví oddělených dvěma nevlastními body...



□

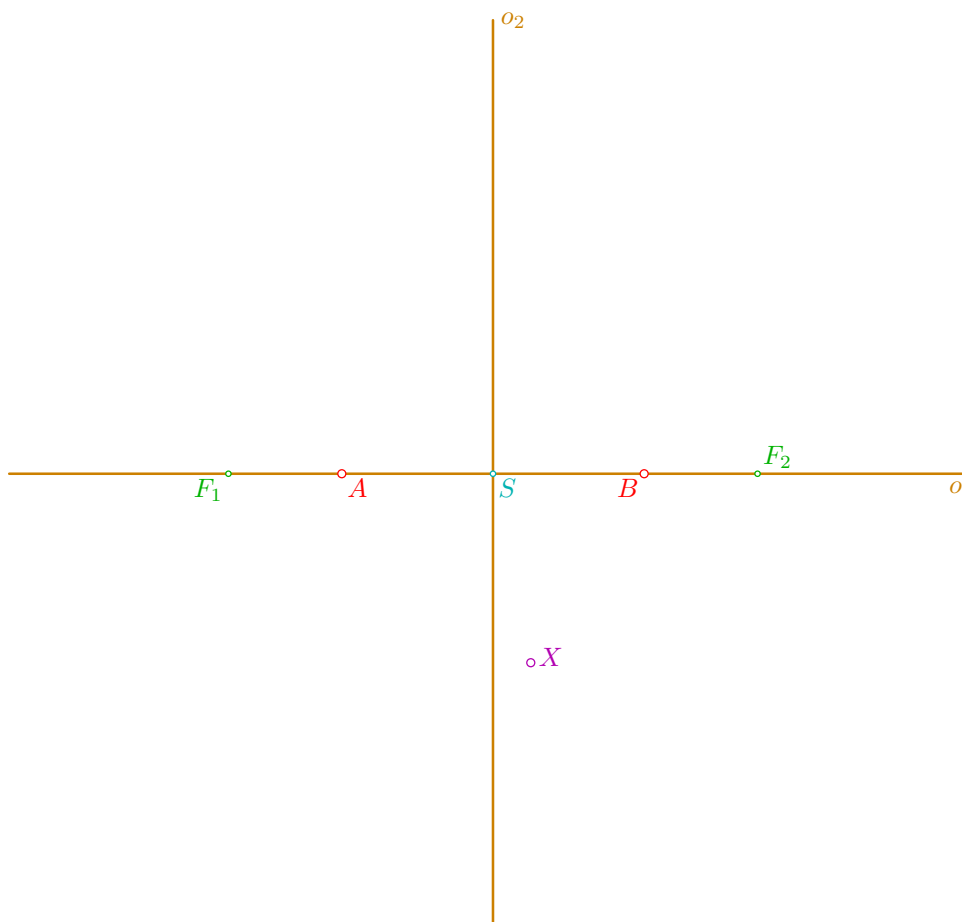


### Řešené úlohy

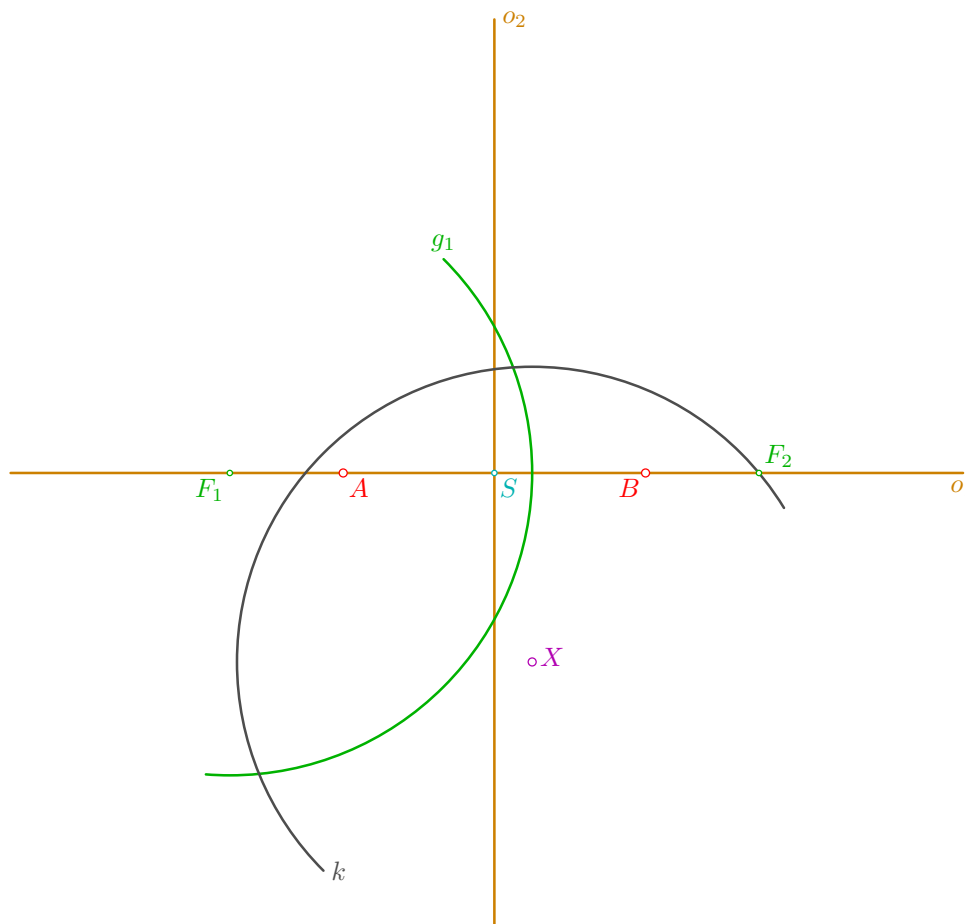
#### Tečny k hyperbole daným bodem

**Příklad:** Bodem  $X$  ved'te tečny k nenarýsované hyperbole  $h$ , která je dána svými vrcholy a ohnisky.

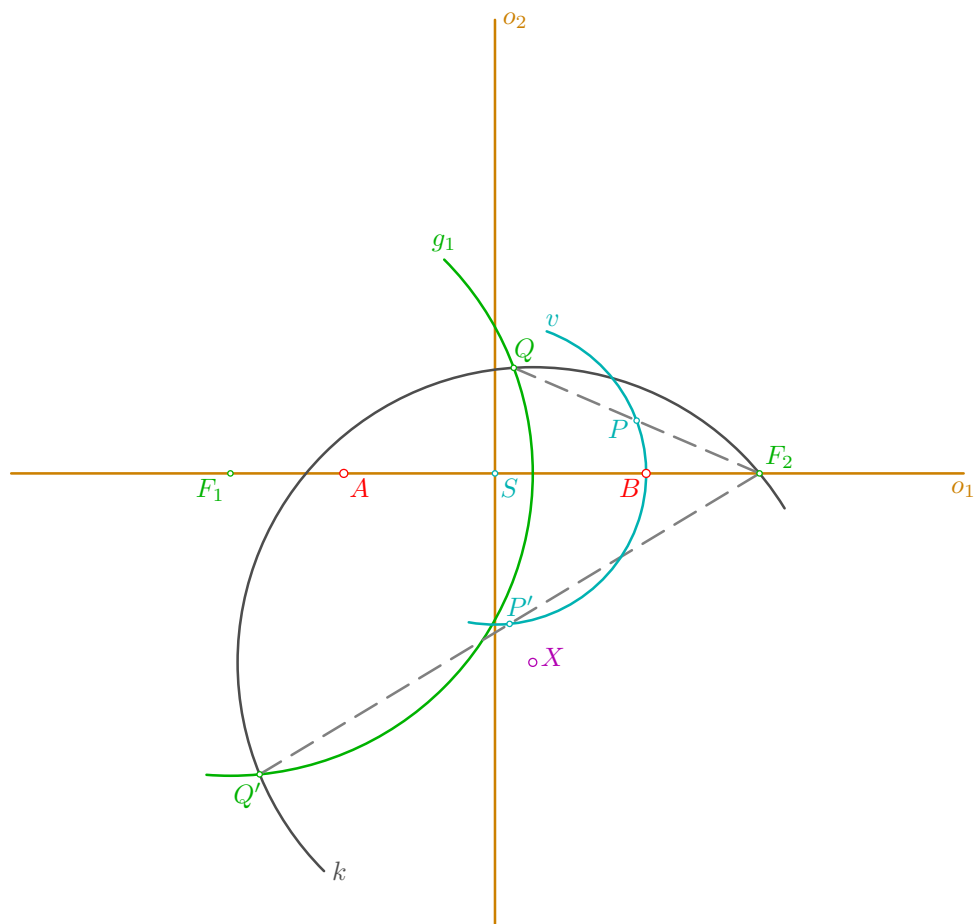
- zvolme střed  $S$  hyperboly, vodorovně hlavní osu  $o_1$ , na ní hlavní vrcholy  $A, B$  a ohniska  $F_1, F_2$ , svisle doplňme vedlejší osu  $o_2 \perp o_1, S \in o_2$ ; rovněž zvolme bod  $X$ , z něhož pomocí uvedených ohniskových vlastností povedeme tečny k zadané hyperbole



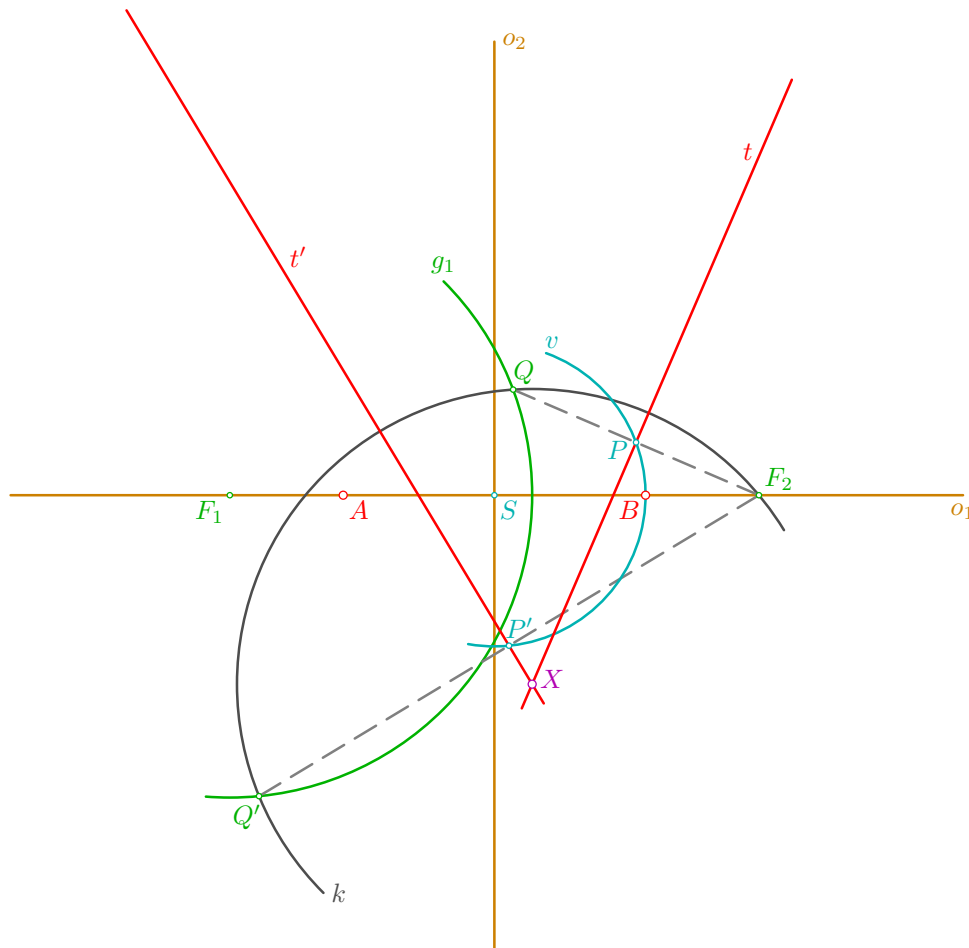
- podle **Věty 2** (na straně 211) leží body souměrně sdružené s ohniskem  $F_2$  podle hledaných tečen na řídicí kružnici  $g_1(F_1, 2a = |AB|)$ ; současně musí mít od bodu  $X$  vzdálenost  $|F_2X|$ , a musí tedy ležet také na kružnici  $k(X, |F_2X|)$ ; analogicky bychom mohli k řešení použít druhou řídicí kružnici  $g_2(F_2, 2a)$  a kružnici o poloměru  $|F_1X|$  opsanou kolem bodu  $X$  (tato varianta není v obrázku zakreslena a je přenechána čtenáři jako cvičení)



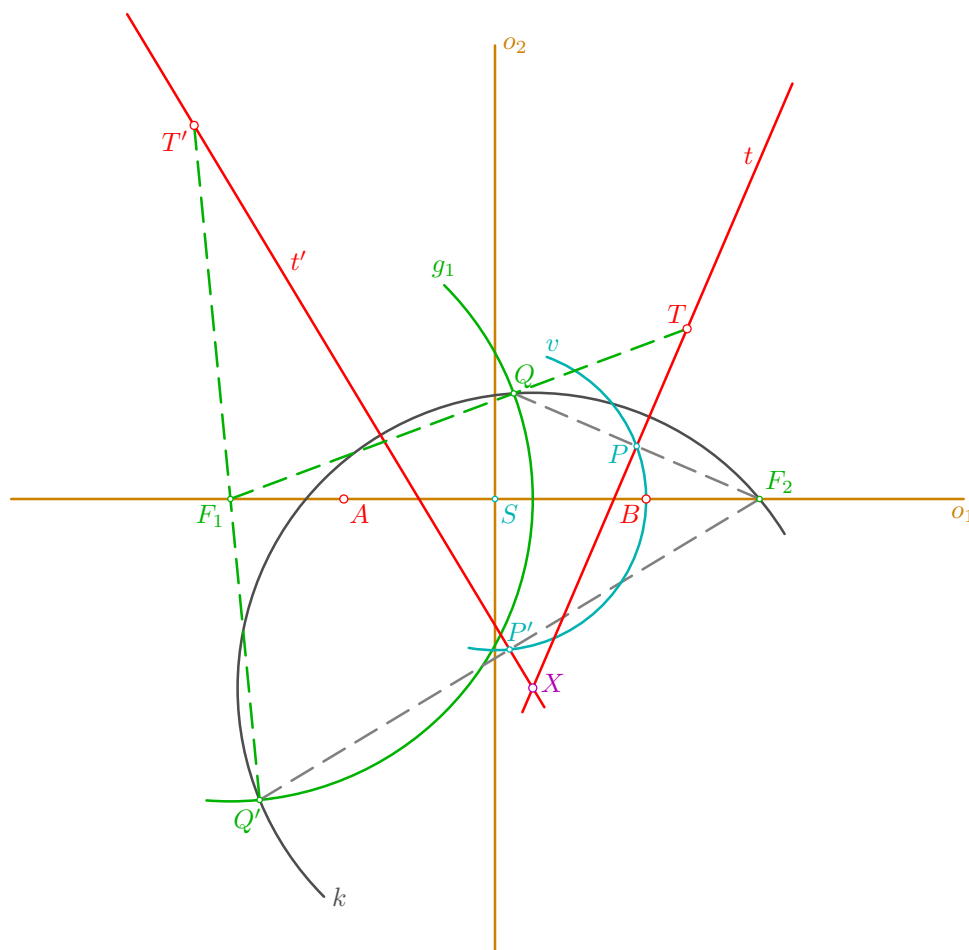
- kružnice  $g_1, k$  se protínají v bodech  $Q, Q'$ ; středy  $P, P'$  úseček  $F_2Q, F_2Q'$  jsou paty kolmic spuštěných z ohniska  $F_2$  na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 211) leží také na vrcholové kružnici  $v(S, a)$



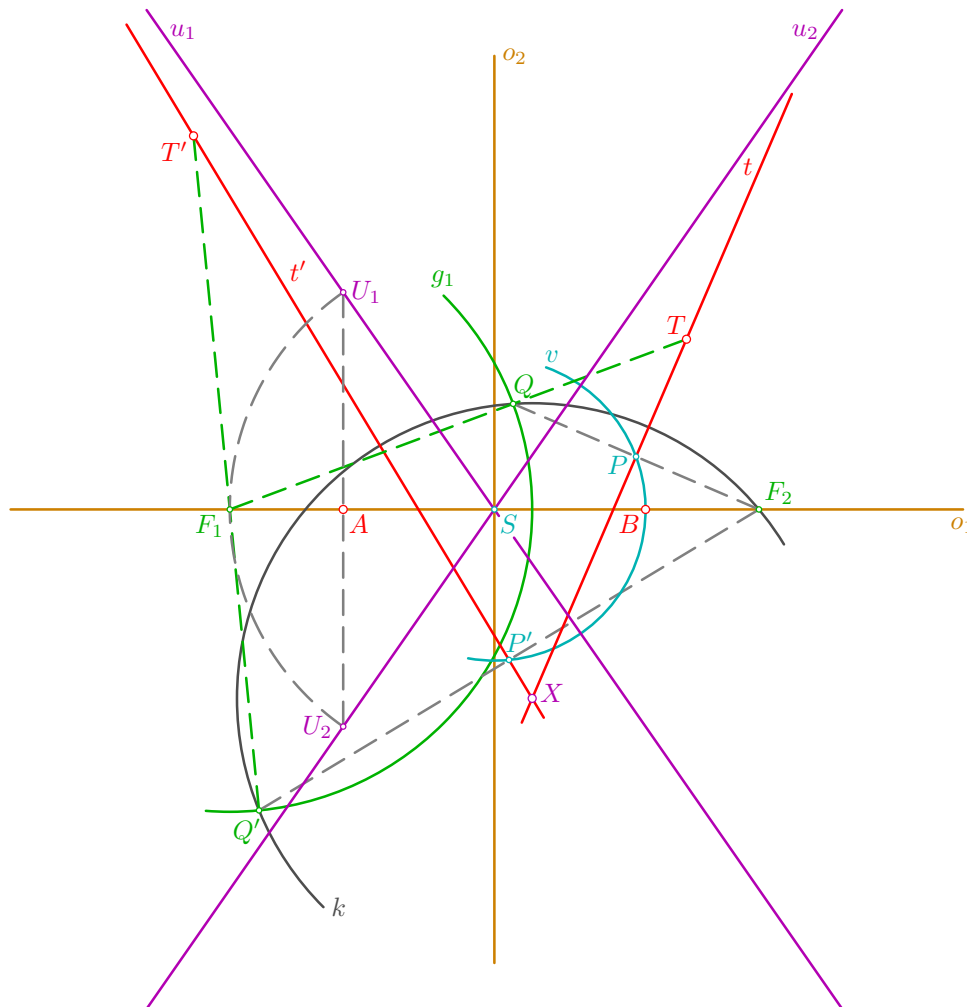
- nyní již můžeme sestrojít tečny  $t = XP, t' = XP'$ , pro něž platí:  $t \perp F_2Q, t' \perp F_2Q'$ ; z toho je vidět, že body  $P, P'$  musí ležet také na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem  $XF_2$ ; pro řešení úlohy lze tedy vystačit pouze se vztahy uvedenými ve **Větě 2** (na straně 211); tento alternativní postup je opět ponechán čtenáři jako procvičení ohniskových vlastností hyperboly



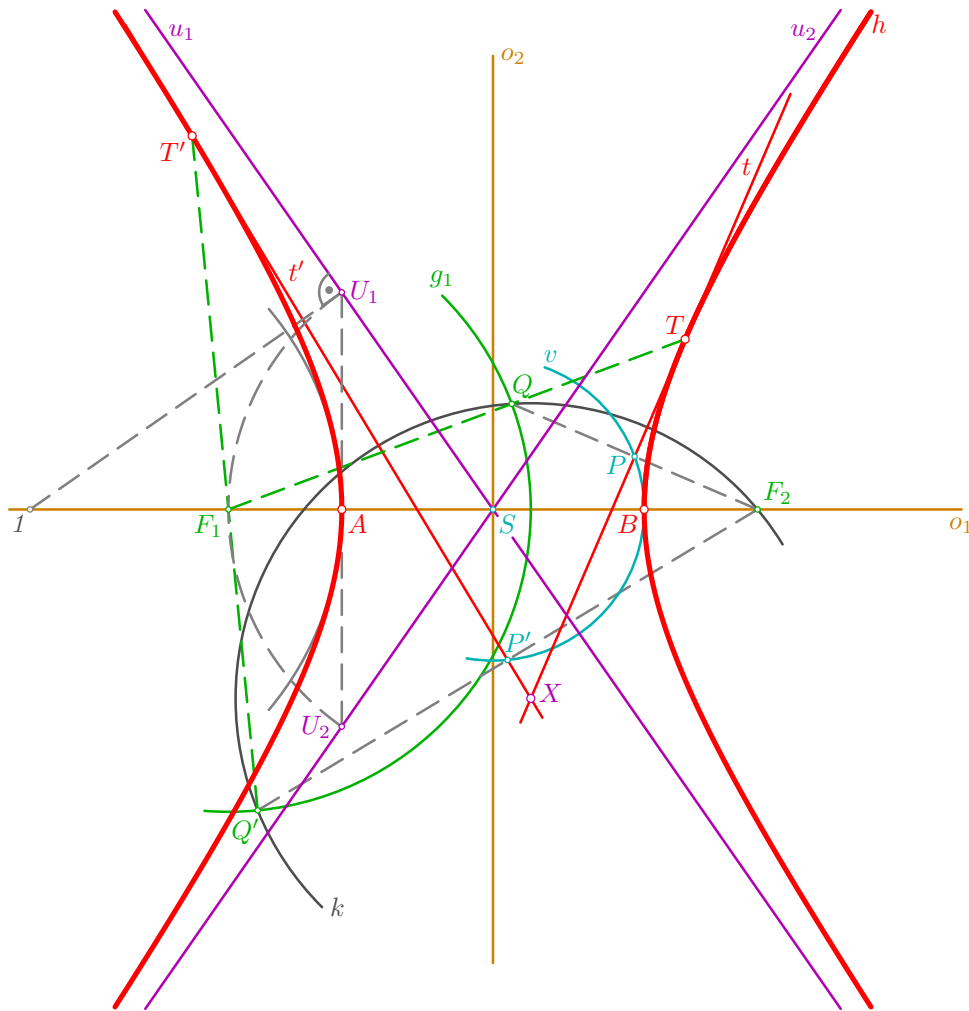
- pro body  $T, T'$  dotyku tečen  $t, t'$  s hyperbolou platí:  $T = t \cap F_1Q$ ,  $T' = t' \cap F_1Q'$ ; přímka  $F_1Q$ , resp. přímka  $F_1Q'$ , je vlastně jedním z průvodičů bodu  $T$ , resp. bodu  $T'$ ; navíc platí  $TF_1 \parallel SP$ , resp.  $T'F_1 \parallel SP'$ , a při konstrukci bodů  $T, T'$  dotyku tak vystačíme jen s body  $P, P'$ , které můžeme sestrojít alternativním způsobem naznačeným v předchozím kroku



- pro přesnější vyrýsování jsou doplněny asymptoty  $u_1 = SU_1, u_2 = SU_2$ , kde body  $U_1, U_2$  leží na kolmici k ose  $o_1$  vedené vrcholem  $A$  a na kružnici o poloměru  $|SF_1|$  opsané kolem středu  $S$



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat část hyperboly  $h$ , která se v bodech  $T, T'$  dotýká tečen  $t, t'$  vedených z daného bodu  $X$



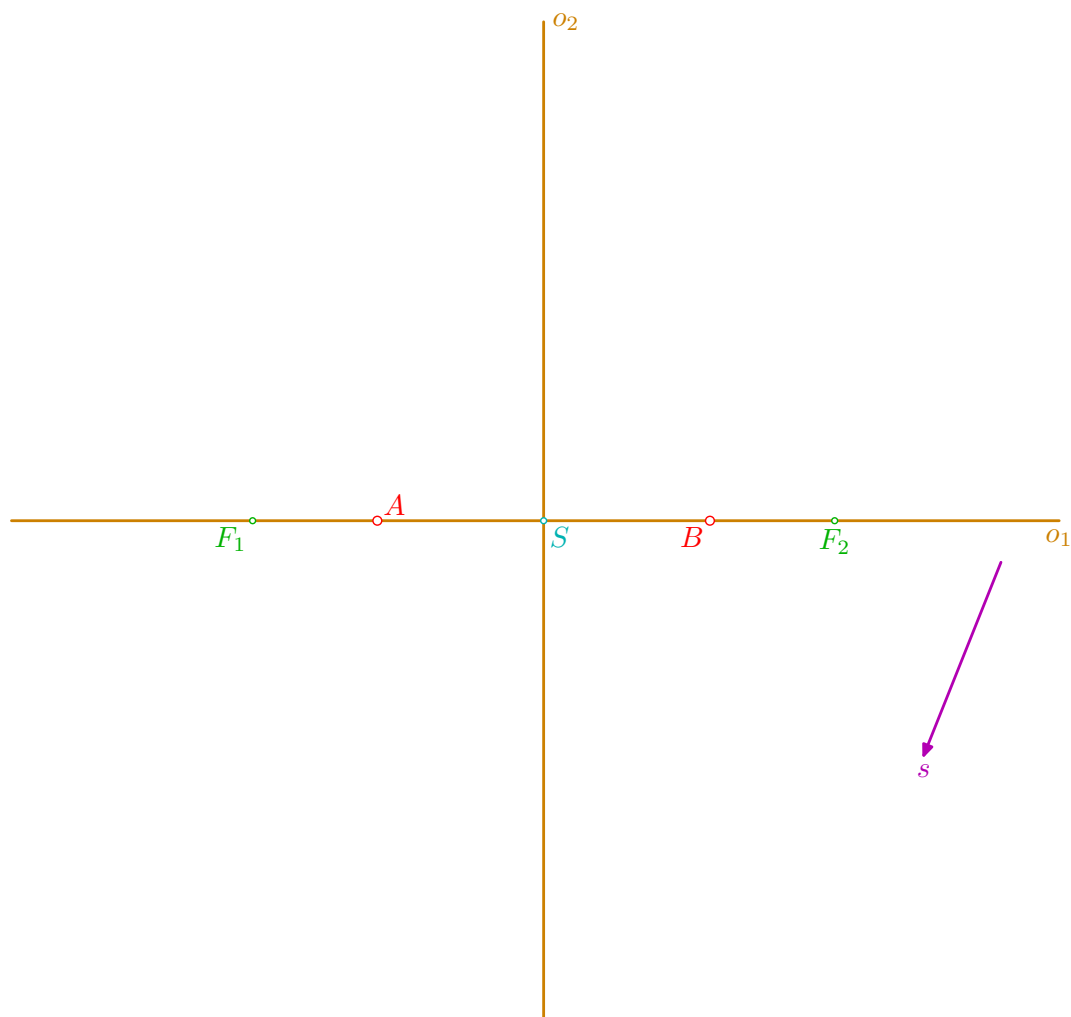
□

*Diskuze:* pokud se kružnice  $g_1(F_1, 2a), k(X, |XF_2|)$  (případně  $g_2(F_2, 2a), k(X, |XF_1|)$ ) protínají ve dvou bodech, resp. se dotýkají v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod  $X$  leží ve vnější oblasti hyperboly  $h$ , resp. bod  $X$  je bodem hyperboly  $h$ , resp. bod  $X$  leží ve vnitřní oblasti hyperboly  $h$ , a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané hyperbole  $h$ . Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové kružnice  $v(S, a)$  a Thaletovy kružnice nad průměrem  $F_2X$  nebo  $F_1X$ .

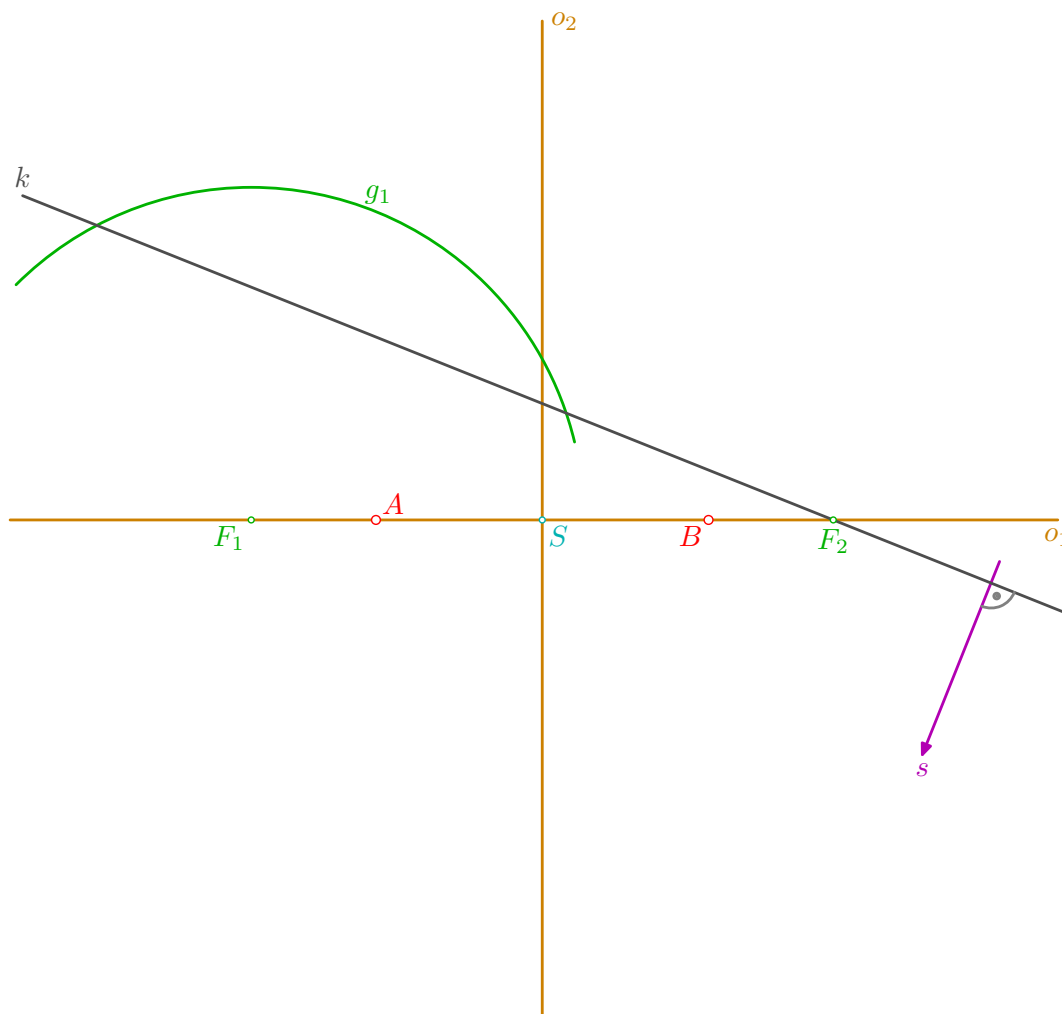
## Tečny k hyperbole daného směru

**Příklad:** K nenarýsované hyperbole  $h$ , která je dána svými vrcholy a ohnisky, veďte tečny směru  $s$  (tj. rovnoběžné s přímkou  $s$ ).

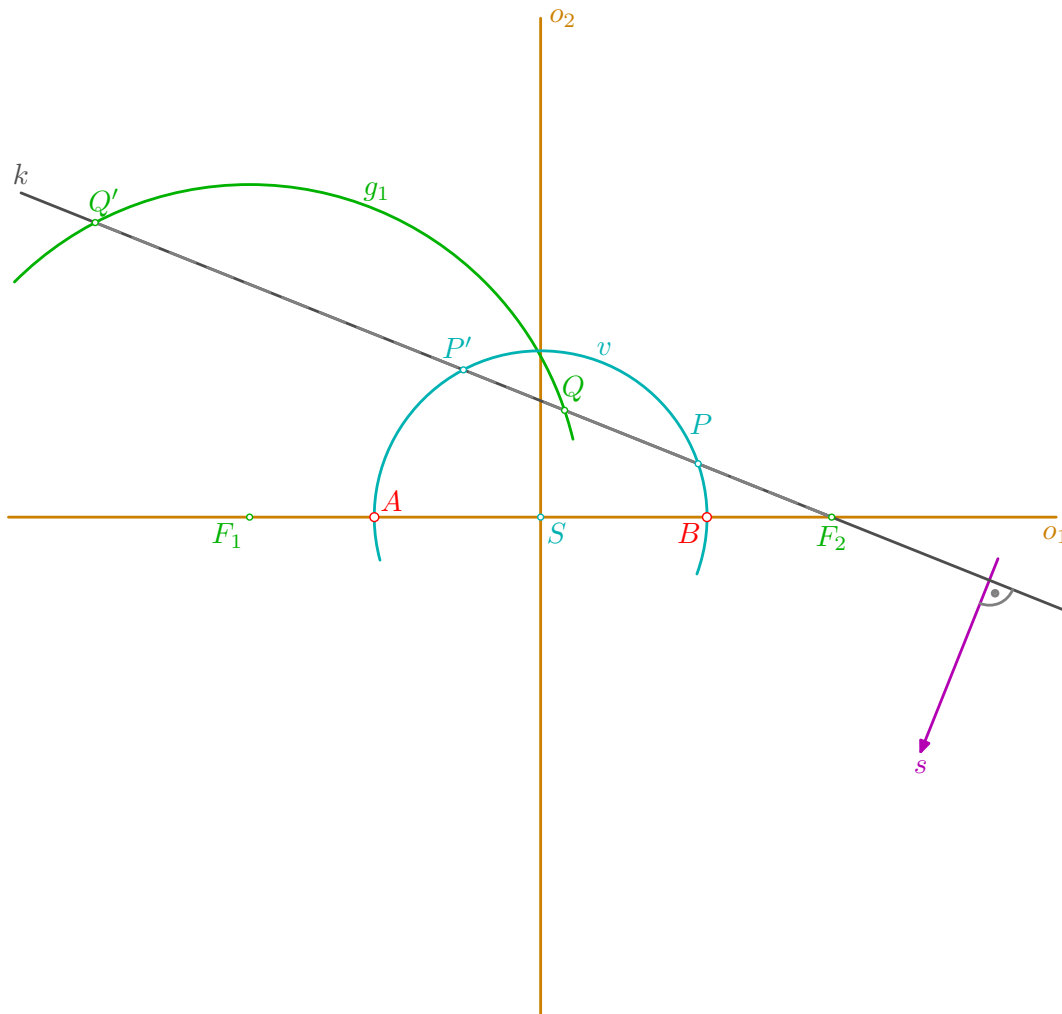
- zvolme střed  $S$  hyperboly, vodorovně hlavní osu  $o_1$ , na ní hlavní vrcholy  $A, B$  a ohniska  $F_1, F_2$ , svisle doplňme vedlejší osu  $o_2 \perp o_1, S \in o_2$ ; rovněž zvolme směr  $s$ , s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



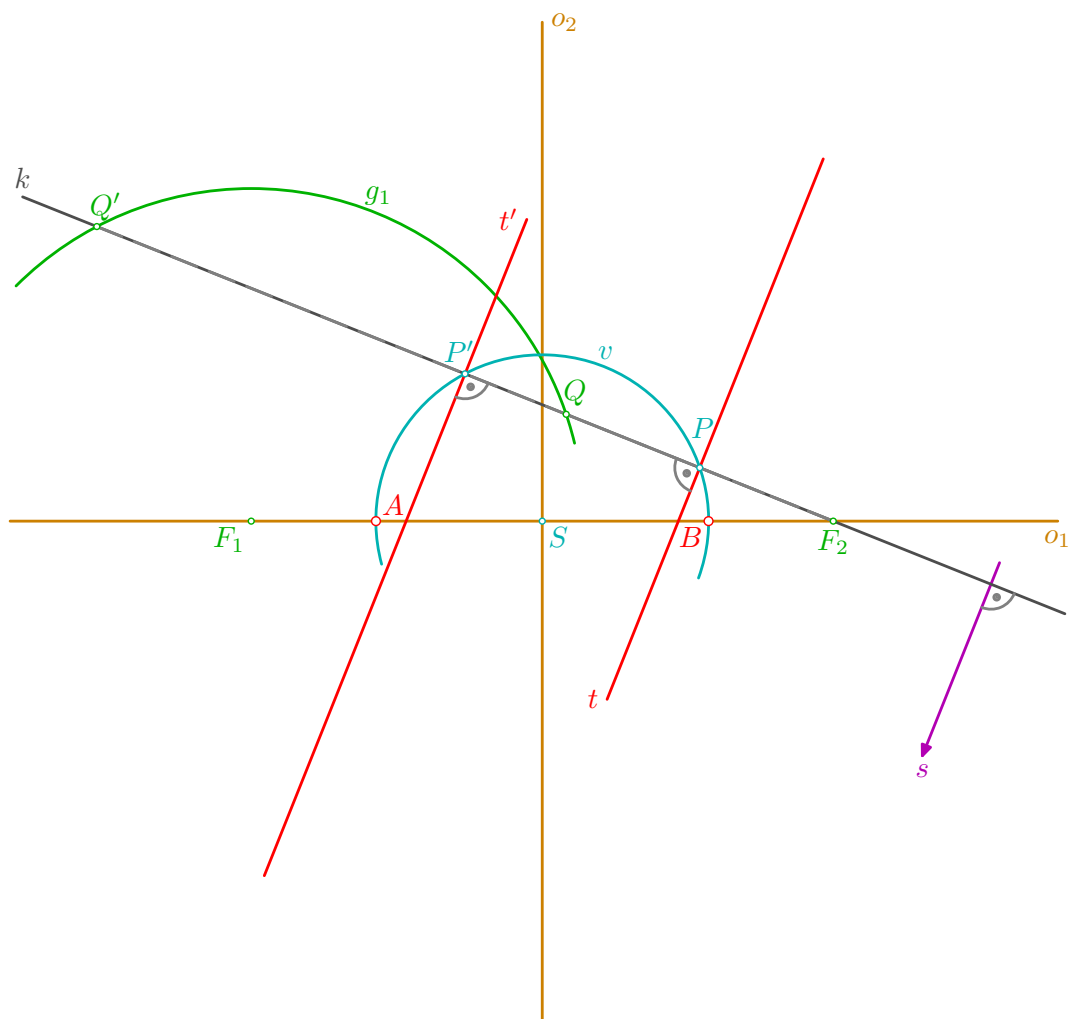
- podle **Věty 2** (na straně 211) leží body souměrně sdružené s ohniskem  $F_2$  podle hledaných tečen na řídicí kružnici  $g_1(F_1, 2a = |AB|)$ ; současně musí ležet na kolmici  $k$  vedené ohniskem  $F_2$  kolmo k danému směru  $s$ ; alternativně bychom mohli hledat body souměrně sdružené s ohniskem  $F_1$ , které musí ležet na řídicí kružnici  $g_2(F_2, 2a)$  a na přímce vedené tímto ohniskem kolmo ke směru  $s$



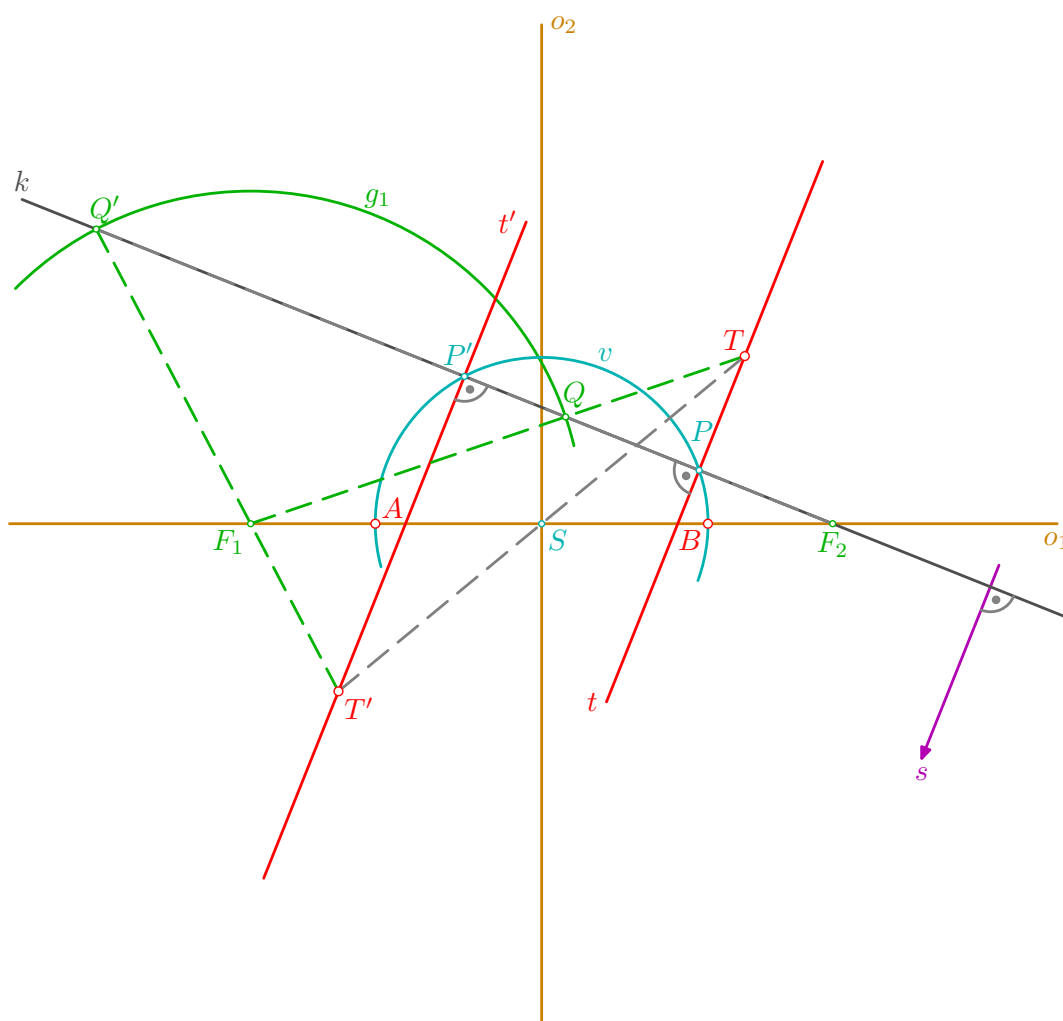
- přímka  $k$  protíná kružnici  $g_1$  v bodech  $Q, Q'$ ; středy  $P, P'$  úseček  $F_2Q, F_2Q'$  jsou paty kolmic spuštěných z ohniska  $F_2$  na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 211) leží také na vrcholové kružnici  $v(S, a)$ ; při řešení této úlohy bychom vystačili pouze s **Větou 3** a tedy s body  $P, P' = k \cap v$ ; to v případě, že některý z bodů  $Q, Q'$  vychází mimo nákresnu; my zde ovšem chceme demonstrovat také užití vlastností **Věty 2**



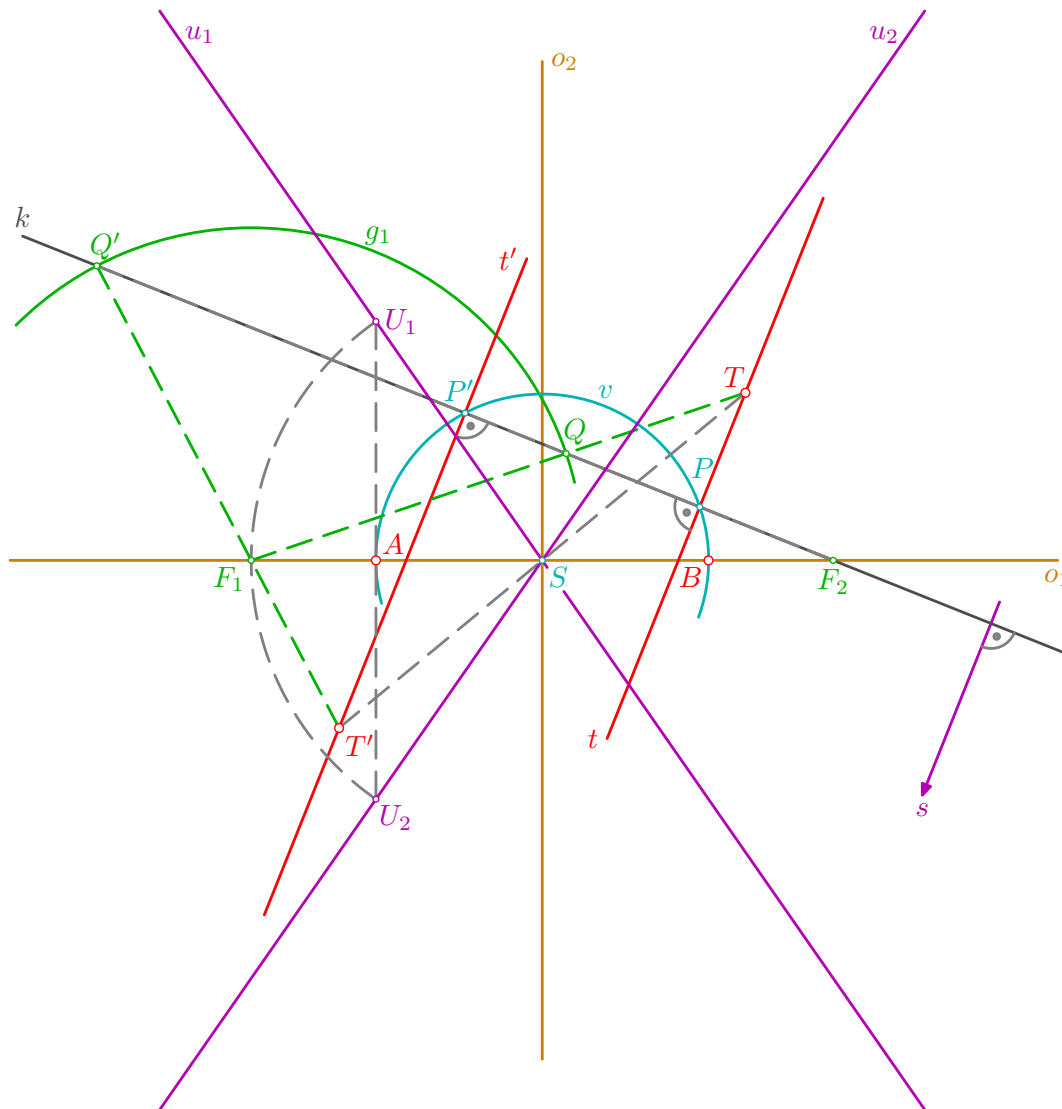
- nyní již můžeme sestrojít tečny  $t, t'$ , kde  $t \parallel t' \parallel s$  (tj.  $t \perp k, t' \perp k$ ) a  $P \in t, P' \in t'$ ; zvědavý čtenář si může do obrázku dokreslit alternativní variantu řešení: paty kolmice vedené ohniskem  $F_1$  kolmo ke směru  $s$  padnou na sestrojené tečny  $t, t'$  a současně na vrcholovou kružnici  $v(S, a)$



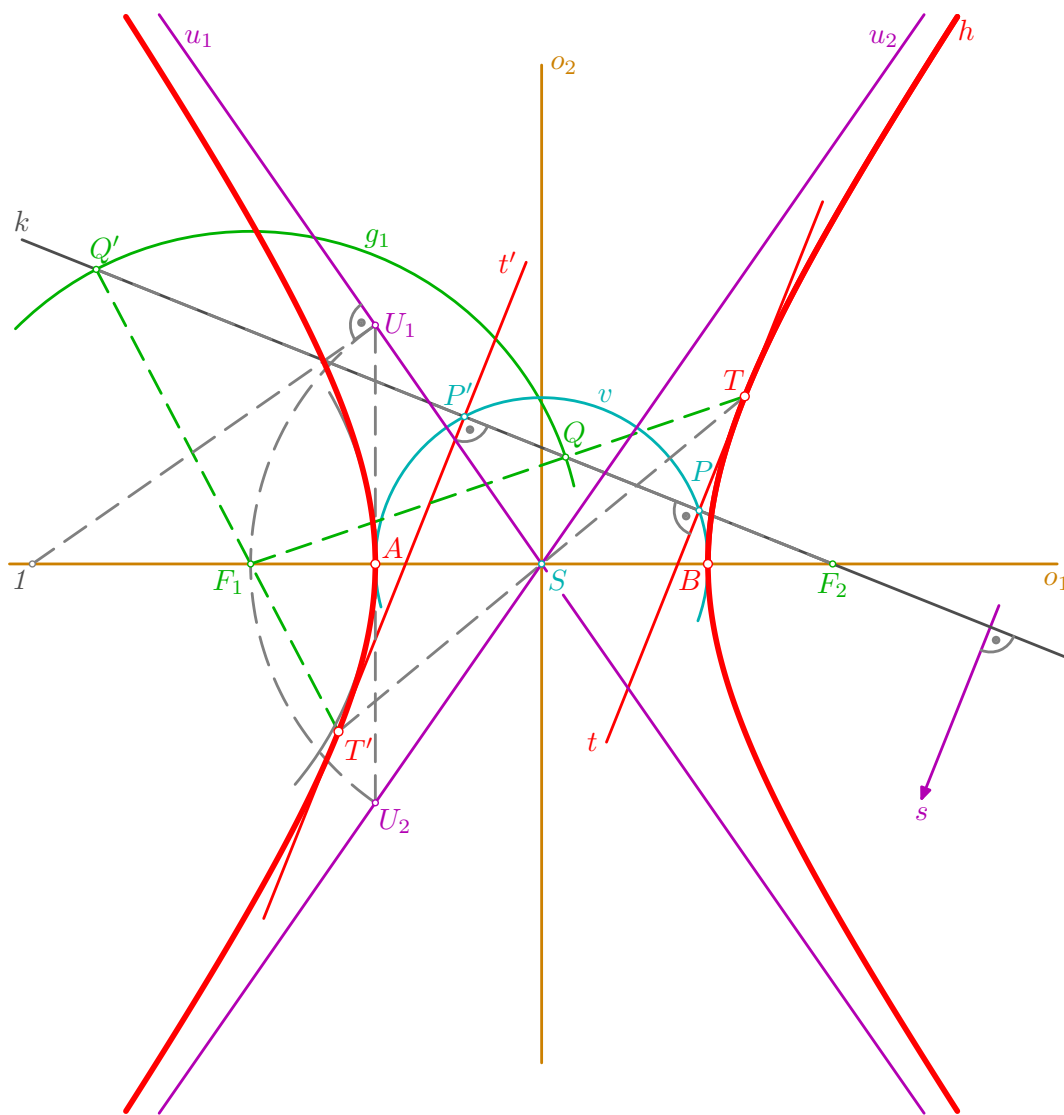
- pro body  $T, T'$  dotyku tečen  $t, t'$  s hyperbolou platí:  $T = t \cap F_1Q, T' = t' \cap F_1Q'$ ; přímka  $F_1Q$ , resp. přímka  $F_1Q'$ , je vlastně jedním z průvodičů bodu  $T$ , resp. bodu  $T'$ ; současně platí  $F_1T \parallel SP, F_1T' \parallel SP'$  a navíc jsou tečny  $t \parallel t'$  středově souměrné podle středu  $S$  hyperboly, z čehož vyplývá  $S \in TT'$ ; v této úloze je tedy možné sestrojít pouze jedno řešení na základě ohniskových vlastností a druhé lze snadno doplnit pomocí středové souměrnosti; konstrukce vztahující se k užití alternativního řešení pomocí druhého ohniska  $F_1$  jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- pro přesnější vyrýsování jsou doplněny asymptoty  $u_1 = SU_1$ ,  $u_2 = SU_2$ , kde body  $U_1, U_2$  leží na kolmici k ose  $o_1$  vedené vrcholem  $A$  a na kružnici o poloměru  $|SF_1|$  opsané kolem středu  $S$



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat část hyperboly  $h$ , která se v bodech  $T, T'$  dotýká tečen  $t, t'$  rovnoběžných s daným směrem  $s$



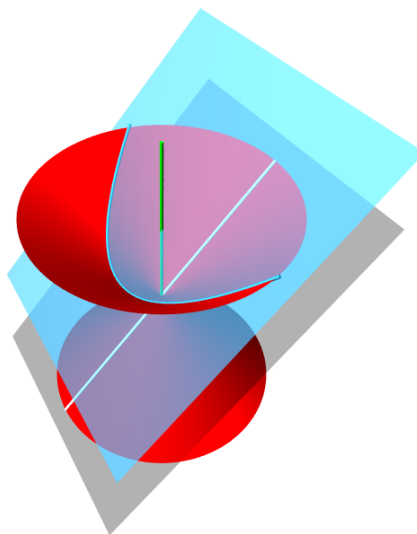
□

*Diskuze:* Je-li přímka  $k$ , vedená ohniskem  $F_2$  kolmo k danému směru  $s$ , sečnou, resp. tečnou, resp. nesečnou, řídicí kružnice  $g_1(F_1, 2a)$ , pak lze daným směrem vést dvě různé tečny, resp. jedinou tečnu (asymptotu), resp. žádnou tečnu, k dané hyperbole  $h$ ; k témuž závěru lze dojít při užití alternativních způsobů řešení – tj. pomocí druhé řídicí kružnice  $g_2$ , nebo pomocí vrcholové kružnice  $v$ .

## 1.4. Parabola



## Výklad



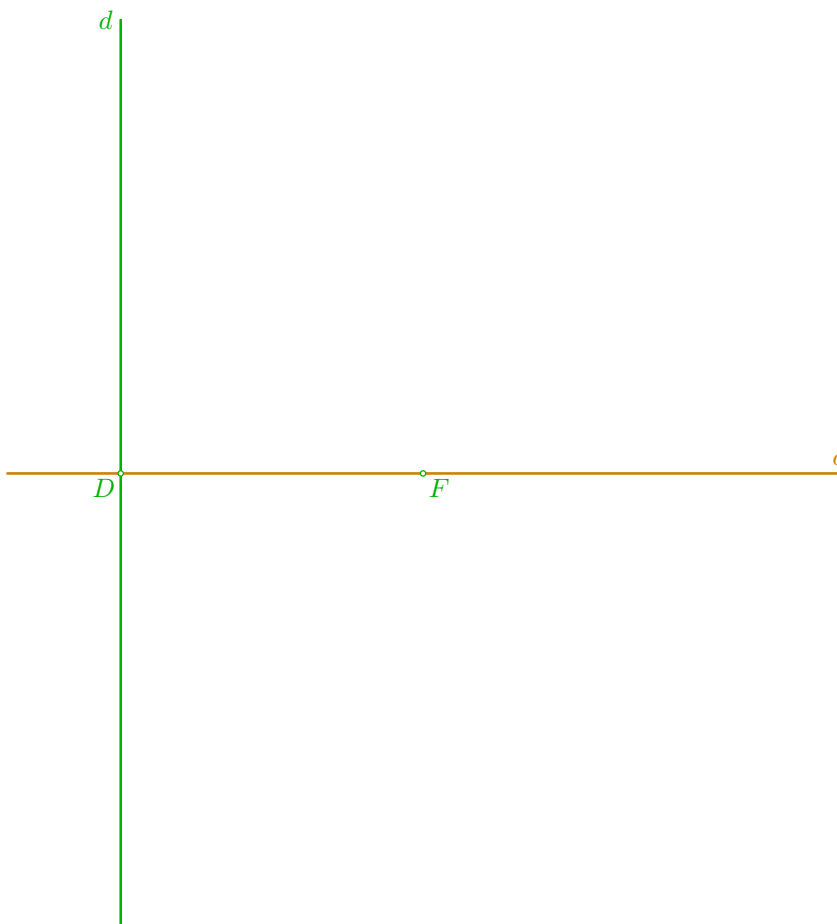
## 1.4.1. Definice a ohniskové vlastnosti

- *prostorová definice (viz obrázek nahoře): parabola* je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řzná rovina má takovou polohu, že rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem se dotýká kuželové plochy podél jedné její povrchové přímky (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je rovna odchylce povrchových přímek)
- *ohnisková definice: parabola*  $p$  je množinou všech bodů v dané rovině  $\rho$ , jež mají stejnou vzdálenost od dané přímky  $d$  a od daného bodu  $F$ , který na přímce  $d$  neleží; symbolicky zapsáno:

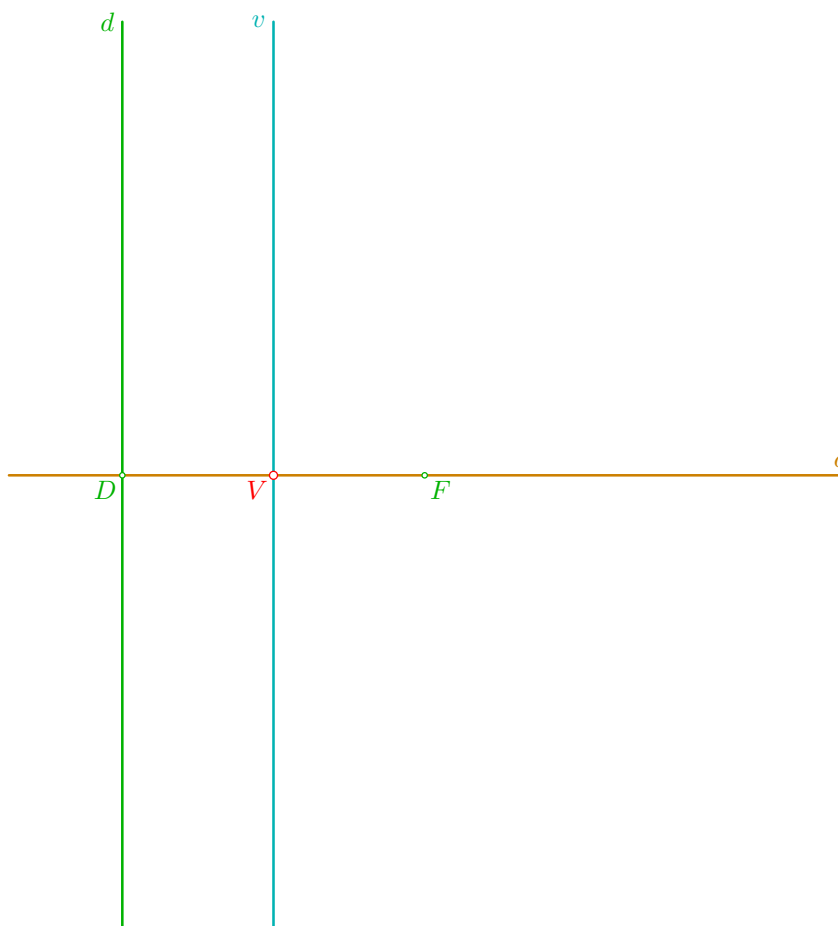
$$p = \{X \in \rho; |Xd| = |FX|, F \notin d\}$$

**Konstrukce a základní pojmy**

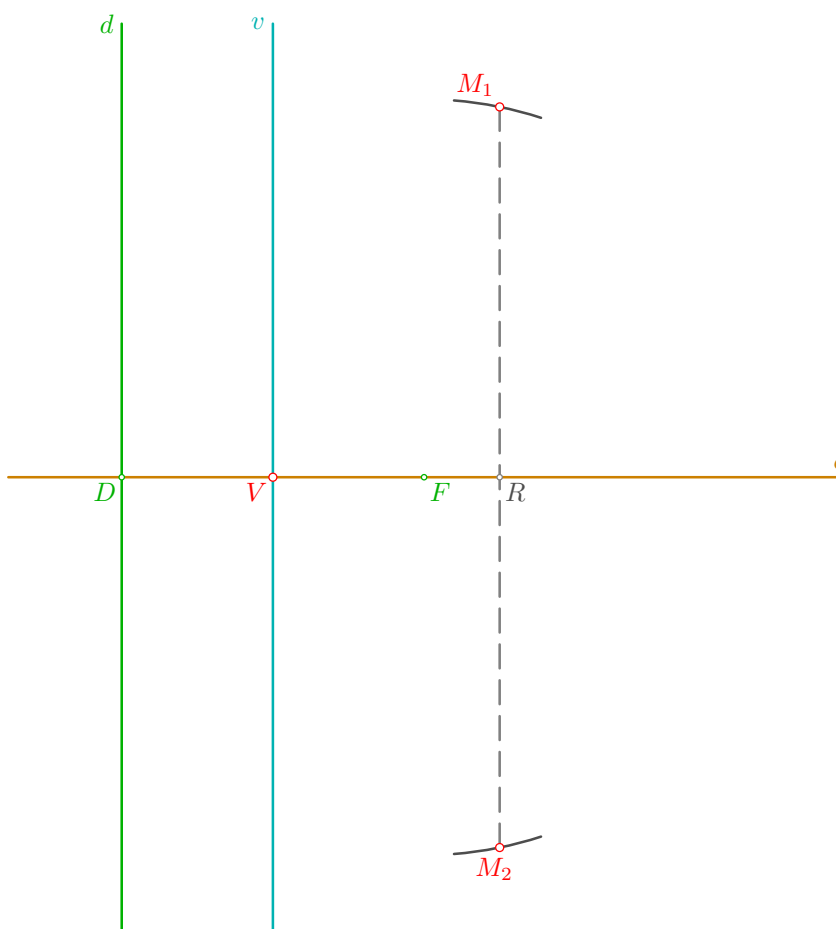
- na vodorovné přímce  $o$  zvolme dva různé body  $D, F$  a bodem  $D$  vedme svislou přímku  $d \perp o$ ; bod  $F$  nazveme **ohniskem** a přímka  $d$  je tzv. **řídící přímka** paraboly; přímka  $o = DF$  je **osa** paraboly a vzdálenost  $|Fd| = |FD|$  ohniska od řídící přímky je tzv. **parametr** paraboly



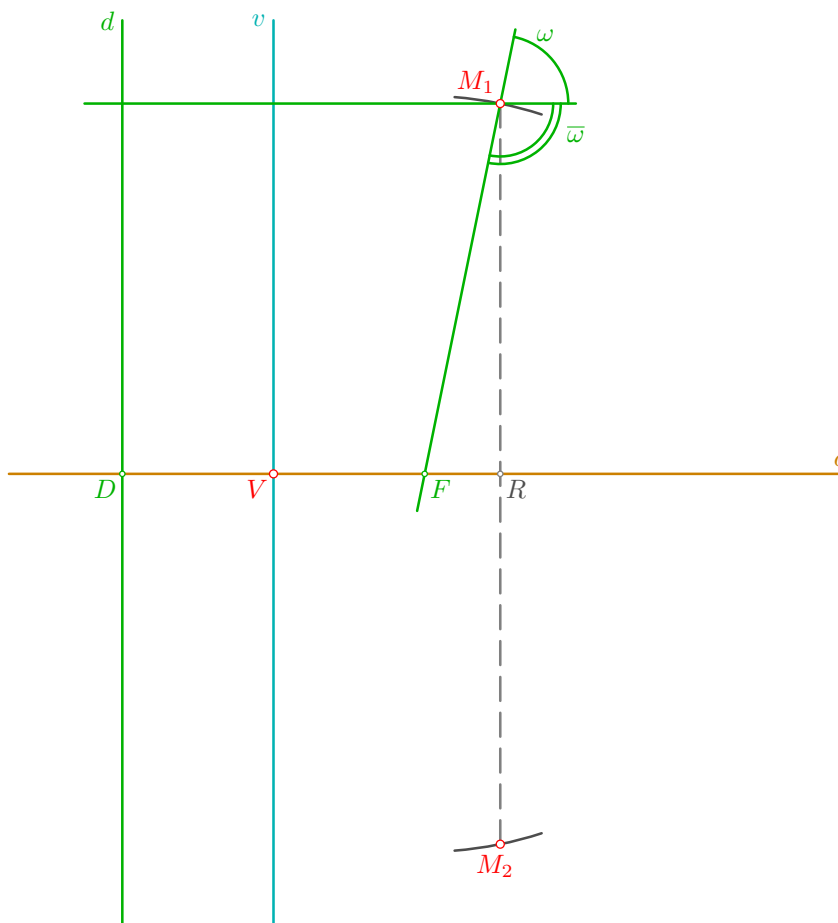
- sestrojme střed  $V$  úsečky  $FD$ ; platí pro něj  $|Vd| = |VD| = |VF|$  a podle ohniskové definice je to tedy bod paraboly, říkáme mu **vrchol**; dá se ukázat, že přímka  $v \parallel d$ ,  $V \in v$  je tečna paraboly v bodě  $V$ , tedy tzv. **vrcholová tečna**



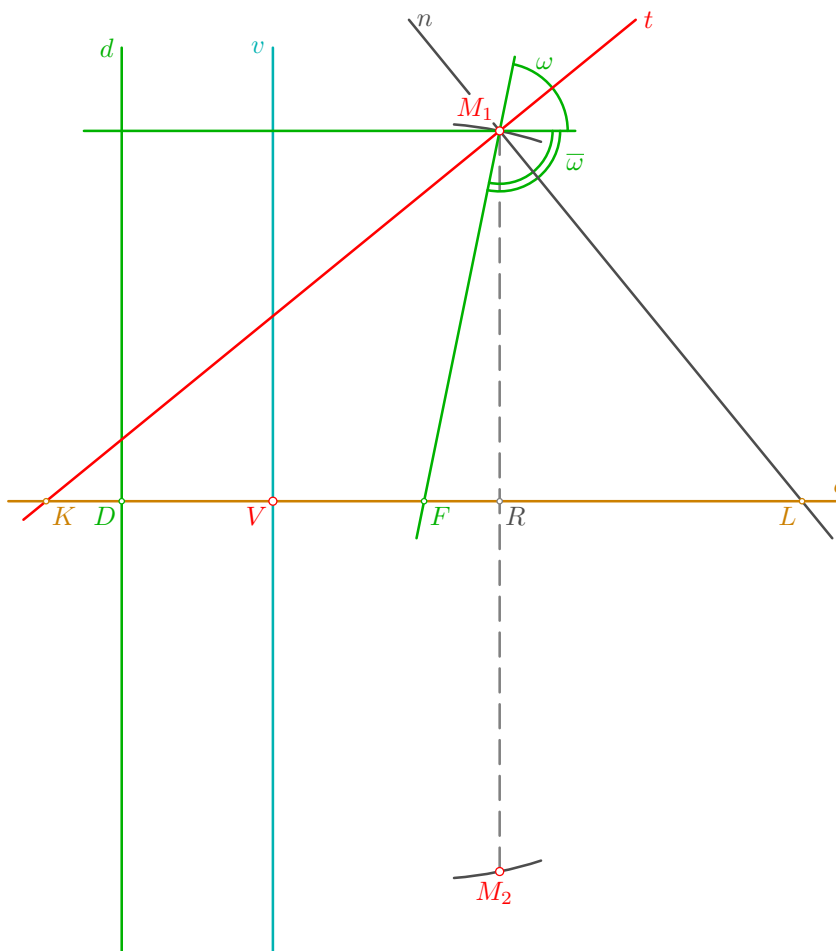
- sestrojme další **obecné body** paraboly: na polopřímce  $VF$  zvolme pomocný bod  $R$  a veďme jí rovnoběžku s řídicí přímkou  $d$ ; tuto pomocnou přímku protněme oblouky kružnice opsané kolem ohniska  $F$  poloměrem délky  $|RD|$ ; získáme tak dva body  $M_1, M_2$ , kde např. pro  $M_1$  platí  $|M_1d| = |RD| = |FM_1|$  (analogicky pro  $M_2$ ); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu  $R$  konstruovat další a další body paraboly  $p$ ; zvolíme-li bod  $R$  ve vnitřním bodě polopřímky  $VD$ , pak se pomocná rovnoběžka a kružnice neprotnou a nezískáme tak žádné další body paraboly; z uvedené konstrukce dále vyplývá, že se body paraboly směrem od vrcholu stále více vzdalují od osy  $o$



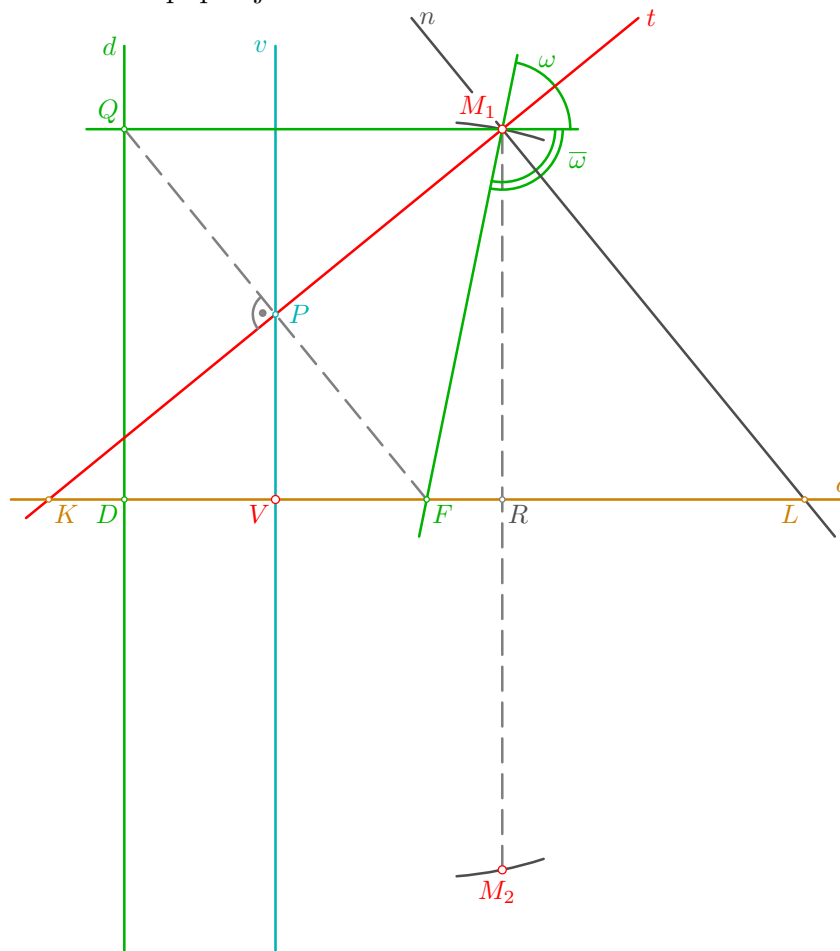
- pro další konstrukce vyberme např. bod  $M_1$ , veďme jím rovnoběžku s osou  $o$  a přímkou  $FM_1$ , což jsou tzv. **průvodiče bodu**  $M_1$ ; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží bod  $D$  (nebo úhel k němu vrcholový) označme  $\omega$  a nazvěme ho **vnější úhel průvodičů** bodu  $M_1$ ; některý z úhlů vedlejších k úhlu  $\omega$  označme  $\bar{\omega}$  a řijeme mu **vnitřní úhel průvodičů** bodu  $M_1$



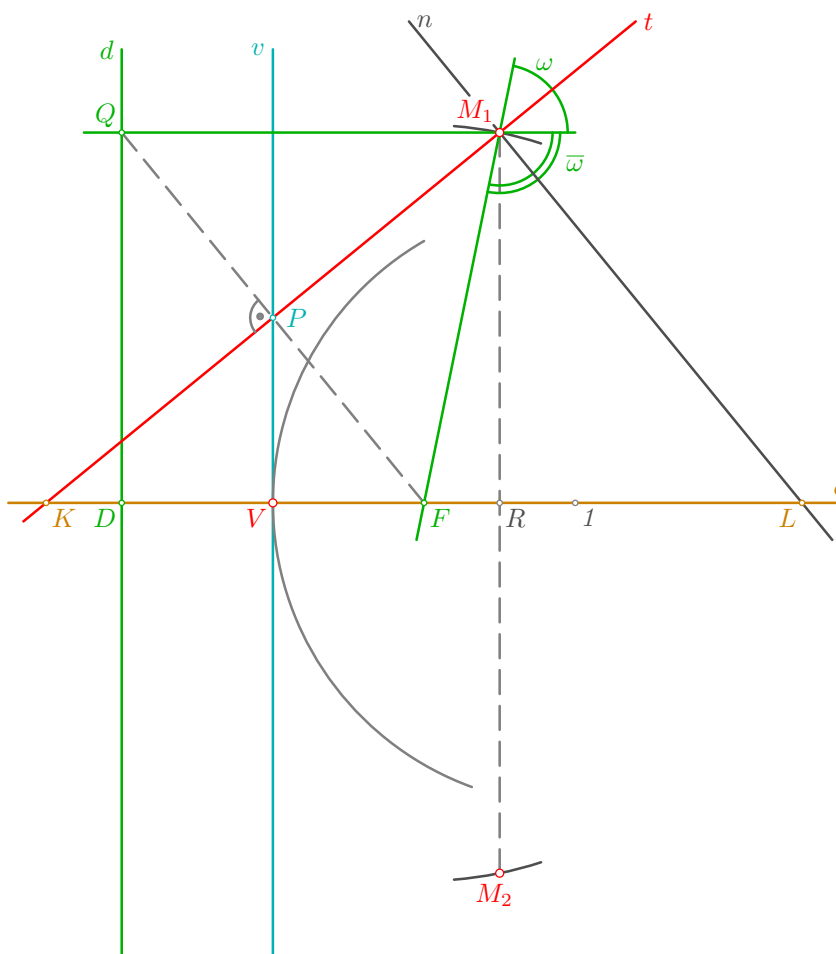
- dá se dokázat, že osa  $t$  vnějšího úhlu  $\omega$  průvodičů bodu  $M_1$  je současně **tečnou** paraboly v bodě  $M_1$ ; přímka  $n \perp t$  je pak **normálou** paraboly v bodě  $M_1$  a současně osou vnitřního úhlu  $\bar{\omega}$  průvodičů bodu  $M_1$ ; to platí v každém bodě paraboly a toto tvrzení je shrnuto v dále uvedené **Větě 1** (na straně 236); označme ještě body  $K$  a  $L$ , kde  $K = t \cap o$  a  $L = n \cap o$ ; potom úsečka  $KR$  je tzv. **subtangenta** bodu  $M_1$  a úsečka  $LR$  je jeho **subnormála**; tyto úsečky mají zajímavé vlastnosti, které budou popsány v následujícím kroku a obecně jsou shrnuty ve **Větech 4,5,6** (na straně 237)



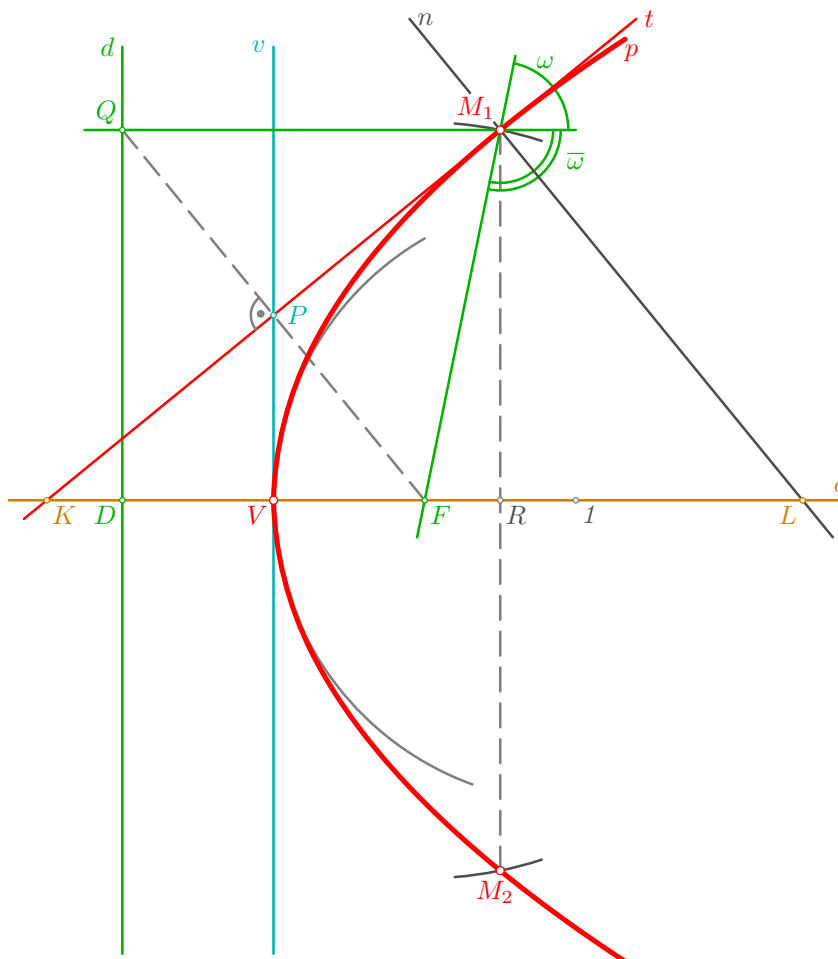
- na základě předchozího odvoďme další vlastnosti paraboly: ohniskem  $F$  veďme kolmici k sestrojené tečně  $t$ , označme její patu  $P$  a sestrojme bod  $Q$  souměrně sdružený s ohniskem  $F$  podle tečny  $t$ ; při přesném rýsování musí bod  $P$  současně ležet na vrcholové tečně  $v$  a bod  $Q$  padne na řídicí přímku  $d$  a na jeden z průvodičů bodu  $M_1$ ; totéž platí obecně v každém bodě paraboly (viz **Věty 2,3** na straně 236); dále lze odvodit, že bod  $P$  je také středem úsečky  $KM_1$ , a jestliže body  $P, M_1$  promítneme kolmo na osu  $o$ , dostaneme se do vrcholu  $V$  a do pomocného bodu  $R$ ; odtud je tedy vrchol  $V$  středem úsečky  $KR$  (tu jsme v předchozím kroku nazvali subtangentou bodu  $M_1$ ), což shrnuje dále uvedená **Věta 4**; analogicky se body  $P, M_1$  promítnou směrem normály  $n$  na osu  $o$  do bodů  $F, L$  a ohnisko  $F$  je tak středem úsečky  $KL$ , tj. součtu subtangenty a subnormály bodu  $M_1$ , obecně viz **Věta 5**; trojúhelníky  $DFQ, RLM_1$  jsou shodné, tudíž platí  $|LR| = |FD| = |Fd|$ , tj. délka subnormály bodu  $M_1$  je rovna parametru paraboly a tuto vlastnost obecně popisuje **Věta 6**



- pro jednodušší a pěknější vyrýsování paraboly sestrojíme v jejím vrcholu  $V$  oblouk tzv. **hyperoskulační kružnice**: její poloměr je roven parametru  $|Fd|$  paraboly a její střed  $I$  tedy sestrojíme na polopřímce  $VF$  tak, že platí  $|IV| = |FD| = |Fd|$ ; oblouk hyperoskulační kružnice přibližně nahrazuje průběh paraboly v blízkém okolí vrcholu  $V$ , ale podobně jako u hyperboly není jeho konstrukce tak významná jako u elipsy



- na závěr je vytažena parabola  $p$ , což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka; parabola je také, stejně jako elipsa a hyperbola, uzavřená křivka, která se v nevlastním bodě osy  $o$  dotýká nekonečna, tj. nevlastní přímky dané roviny  $\rho$ , v níž leží. . .



□

**Věta 1**

Tečna (normála) v bodě paraboly pólí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

**Věta 2**

Množina všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle jejich tečen je řídicí přímka paraboly.

**Věta 3**

Množina všech pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny je vrcholová tečna paraboly.

**Věta 4**

Subtangenta bodu paraboly (vyjma vrcholu) je půlena jejím vrcholem.

**Věta 5**

Součet subtangenty a subnormály bodu paraboly (vyjma vrcholu) je půlen jejím ohniskem.

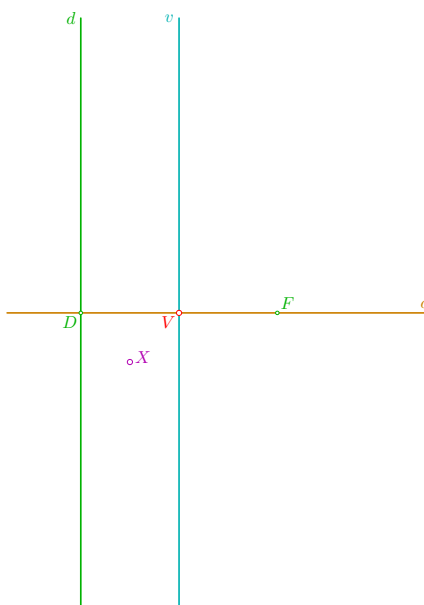
**Věta 6**

Délka subnormály libovolného bodu paraboly (vyjma jejího vrcholu) je rovna parametru paraboly.

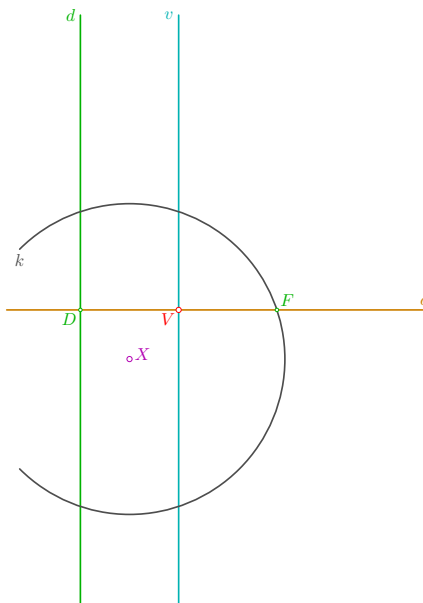
**Řešené úlohy****Tečny k parabole daným bodem**

**Příklad:** Bodem  $X$  ved'te tečny k nenarýsované parabole  $p$ , která je dána ohniskem a řídicí přímkou.

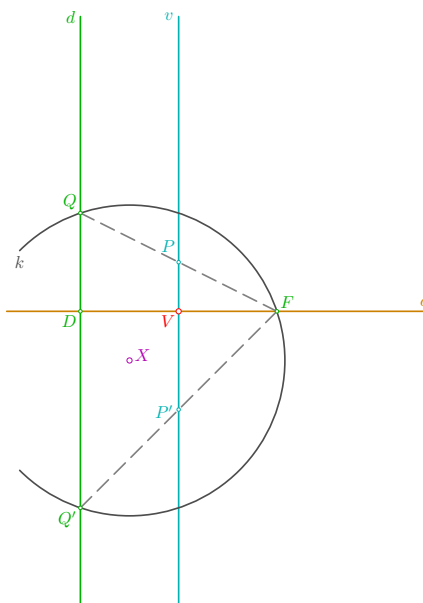
- vodorovně zvolme osu  $o$ , na ní ohnisko  $F$  a pomocný bod  $D$ , kterým jde svisle řídicí přímka  $d \perp o$ ; doplníme vrchol  $V$  jako střed úsečky  $FD$  a v něm sestrojme vrcholovou tečnu  $v \parallel d$ ; rovněž zvolme bod  $X$ , z něhož pomocí výše uvedených vět povedeme tečny k zadané parabole



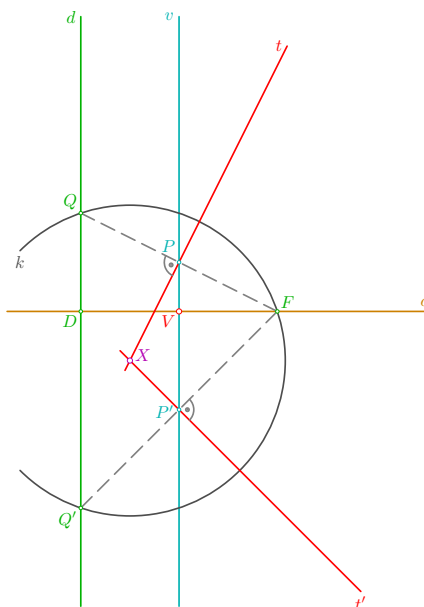
- podle **Věty 2** (na straně 236) leží body souměrně sdružené s ohniskem  $F$  podle hledaných tečen na řídicí přímce  $d$  a současně musí mít od bodu  $X$  vzdálenost  $|FX|$ , tj. leží také na kružnici  $k(X, |FX|)$



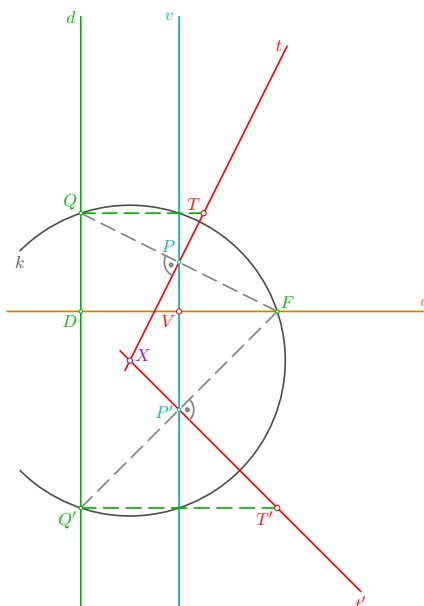
- kružnice  $k$  protíná řídicí přímku  $d$  v bodech  $Q, Q'$ ; středy  $P, P'$  úseček  $FQ, FQ'$  jsou paty kolmic spuštěných z ohniska  $F$  na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 237) leží také na vrcholové tečně  $v$



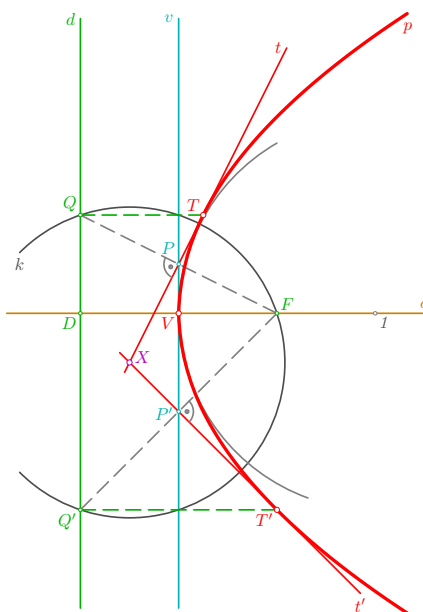
- nyní již můžeme sestrojít tečny  $t = XP, t' = XP'$ , pro které platí:  $t \perp FQ, t' \perp FQ'$ ; za povšimnutí stojí skutečnost, že body  $P, P'$  musí ležet také na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem  $XF$ , čehož lze využít k alternativnímu postupu řešení (konstrukce není v obrázku provedena a je přenechána čtenáři jako cvičení)



- pro body  $T, T'$  dotyku tečen  $t, t'$  s parabolou platí:  $T \in t, TQ \parallel o$  a  $T' \in t', T'Q' \parallel o$ ; přímka  $TQ$ , resp. přímka  $T'Q'$ , je vlastně jedním z průvodičů bodu  $T$ , resp. bodu  $T'$ ; při alternativním způsobu řešení můžeme pro konstrukci bodů  $T, T'$  dotyku využít také vlastnosti příslušné subtangenty nebo subnormály, tj. **Věty 4,5,6** (na straně 237) – konkrétně necht' si to čtenář promyslí a případně provede jako cvičení. . .



- nyní již můžeme doplnit oblouk hyperoskulační kružnice ve vrcholu  $V$  a vyrýsovat parabolu  $p$ , která se v bodech  $T, T'$  dotýká tečen  $t, t'$  vedených z daného bodu  $X$



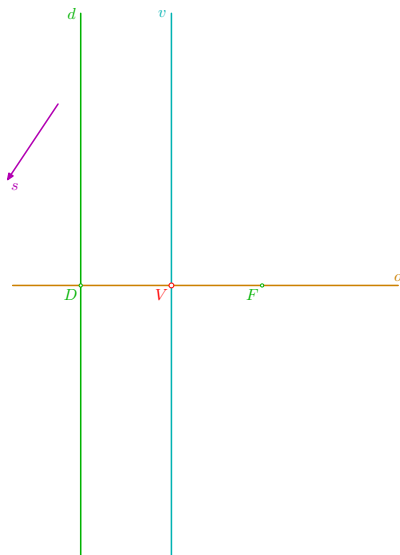
□

*Diskuze:* pokud kružnice  $k(X, |XF|)$  protíná řídicí přímku  $d$  ve dvou bodech, resp. se jí dotýká v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod  $X$  leží ve vnější oblasti paraboly  $p$ , resp. bod  $X$  je bodem paraboly  $p$ , resp. bod  $X$  leží ve vnitřní oblasti paraboly  $p$ , a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané parabole  $p$ . Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové tečny  $v$  a Thaletovy kružnice nad průměrem  $FX$ .

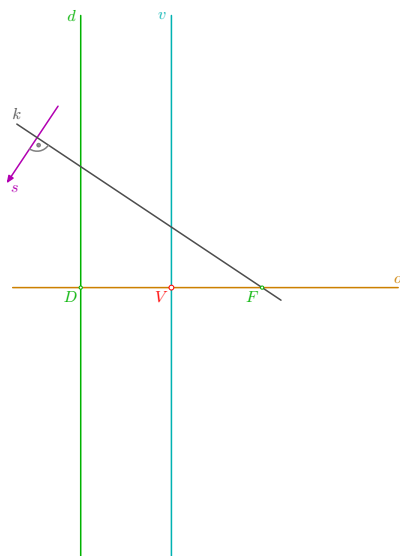
### Tečny k parabole daného směru

**Příklad:** K nenarýsované parabole  $p$ , která je dána ohniskem a řídicí přímkou, veďte tečny směru  $s$  (tj. rovnoběžné s přímkou  $s$ ).

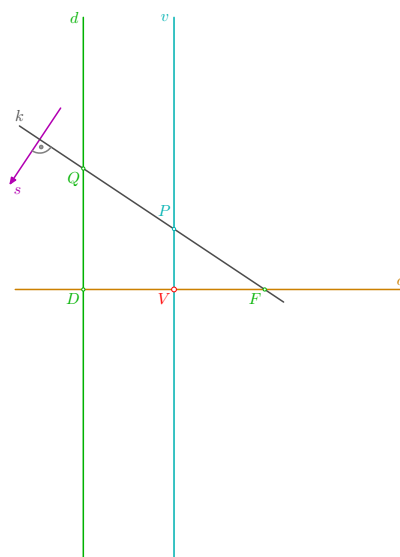
- vodorovně zvolme osu  $o$ , na ní ohnisko  $F$  a pomocný bod  $D$ , kterým jde svisle řídicí přímka  $d \perp o$ ; doplníme vrchol  $V$  jako střed úsečky  $FD$  a v něm sestrojme vrcholovou tečnu  $v \parallel d$ ; rovněž zvolme směr  $s$ , s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



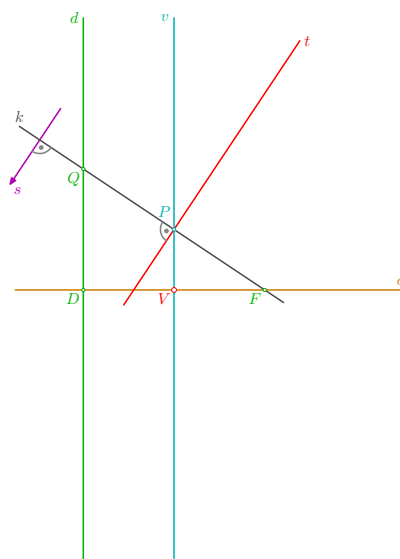
- podle **Věty 2** (na straně 236) leží body souměrně sdružené s ohniskem  $F$  podle hledaných tečen na řídicí přímce  $d$  a současně musí ležet na kolmici  $k$  vedené ohniskem  $F$  kolmo k danému směru  $s$



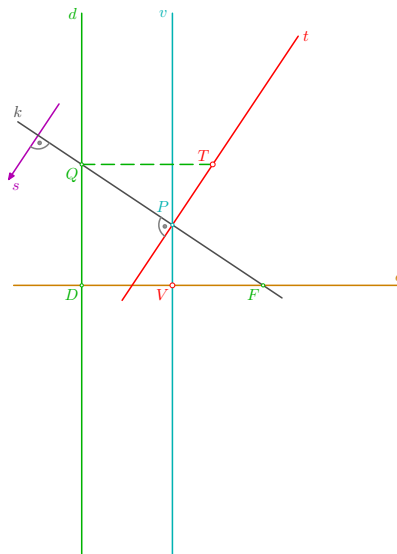
- přímky  $k, d$  se protínají v bodě  $Q$ ; střed  $P$  úsečky  $FQ$  je pata kolmice spuštěné z ohniska  $F$  na hledanou tečnu a podle **Věty 3** (na straně 237) leží také na vrcholové tečně  $v$



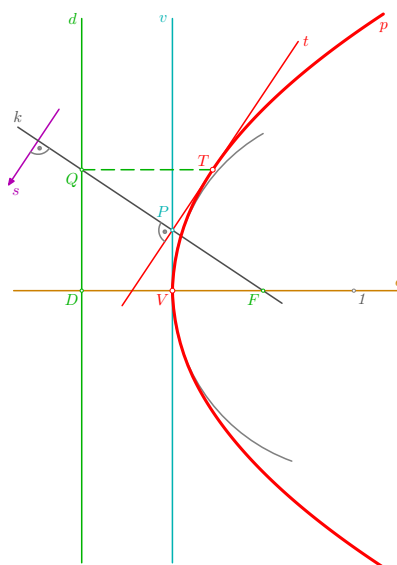
- nyní již můžeme sestavit hledanou tečnu  $t$ , kde  $t \parallel s$  (tj.  $t \perp k$ ) a  $P \in t$



- pro bod  $T$  dotyku tečny  $t$  s parabolou platí:  $T \in t, TQ \parallel o$ ; přímka  $TQ$  je vlastně jedním z průvodičů bodu  $T$ ; alternativní způsob konstrukce bodu  $T$  pomocí vlastností jeho subtangenty nebo subnormály (viz **Věty 4,5,6** na straně 237) jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- nyní již můžeme doplnit oblouk hyperoskulační kružnice ve vrcholu  $V$  a vyrýsovat parabolou  $p$ , která se v bodě  $T$  dotýká tečny  $t$  rovnoběžné s daným směrem  $s$



□

*Diskuze:* Jsou-li řídicí přímka  $d$  a přímka  $k$  vedená ohniskem  $F$  kolmo k danému směru  $s$  různoběžné (tj. směr  $s$  je různoběžný s osou  $o$ ), resp. rovnoběžné (tj.  $s \parallel o$ ), pak lze sestrojít právě jednu tečnu, resp. nelze sestrojít žádnou tečnu paraboly  $p$  daného směru  $s$ .

## Další užitečná konstrukce paraboly

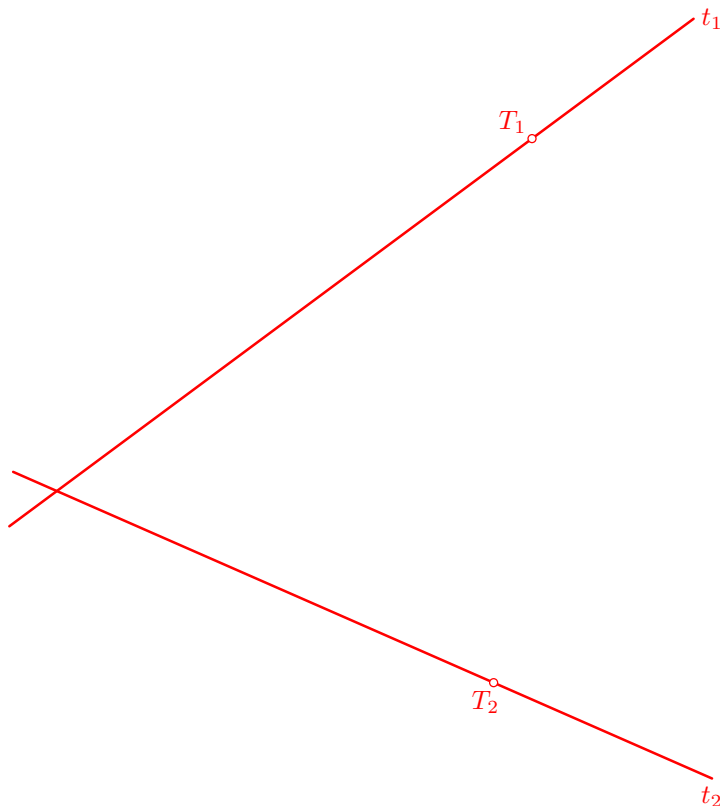


## Řešené úlohy

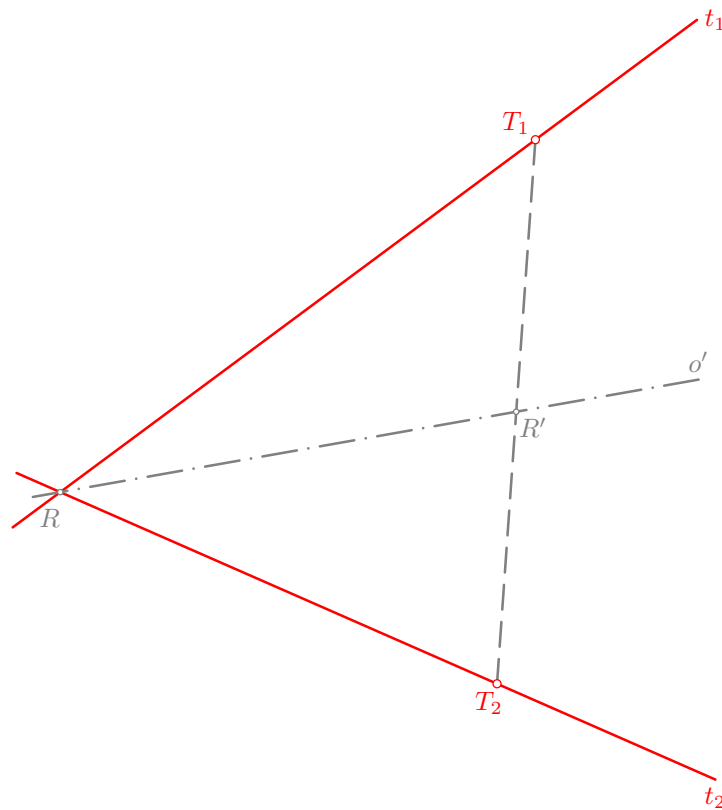
## Konstrukce paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku

**Příklad:** Sestrojte parabolu  $p$ , jsou-li dány její tečny  $t_1, t_2$  s body  $T_1, T_2$  dotyku.

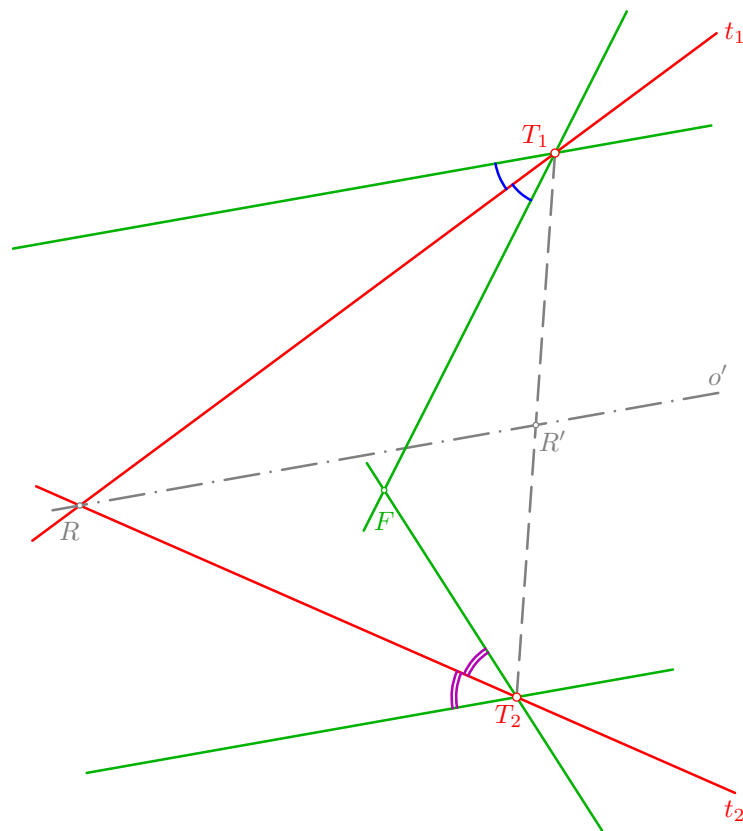
- zvolme dvě různoběžné přímky  $t_1, t_2$  a na každé z nich jeden bod, označme je  $T_1 \in t_1$  a  $T_2 \in t_2$ ; žádný z nich nechť přitom neleží v průsečíku zvolených tečen; dá se dokázat, že tímto způsobem je parabola dána jednoznačně, jejím pátým určujícím elementem je nevlastní přímka roviny – tečna hledané paraboly v nekonečnu. . .



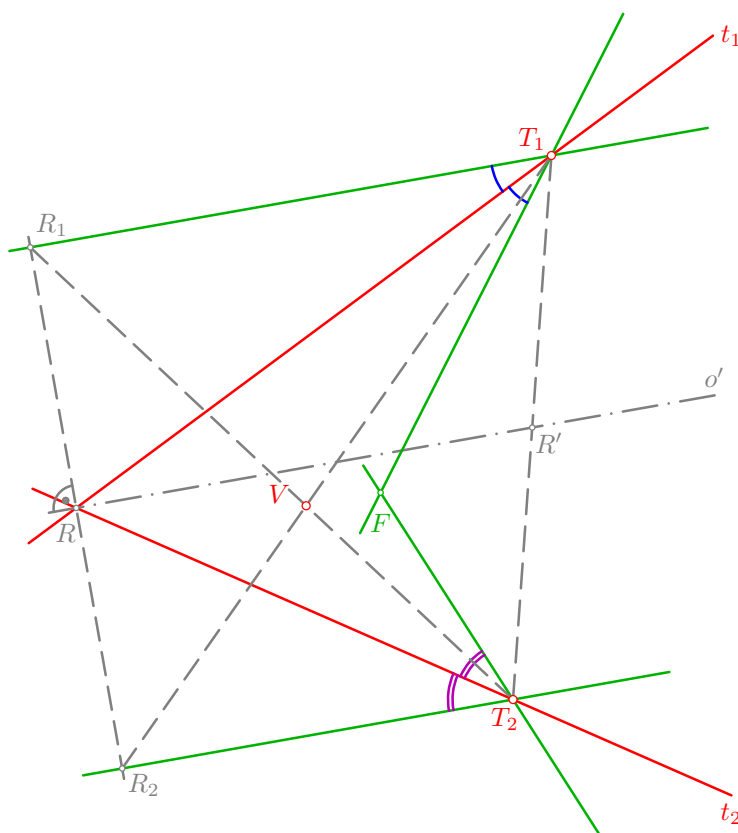
- dá se ukázat, že přímka  $o' = RR'$ , kde  $R = t_1 \cap t_2$  a bod  $R'$  je střed úsečky  $T_1T_2$ , udává směr osy  $o$  hledané paraboly  $p$  (vyplývá to z tzv. projektivních nebo polárních vlastností paraboly); jestliže navíc budou body  $T_1, T_2$  ve stejné vzdálenosti od průsečíku  $R = t_1 \cap t_2$ , tj. bude-li platit  $|T_1R| = |T_2R|$ , potom přímka  $o' = RR'$  bude přímo osou  $o = o'$  hledané paraboly a střed úsečky  $RR'$  by podle **Věty 4** (na straně 237) o subtangentě udával její vrchol; pro tuto variantu zadání nechť si čtenář ve volném místě na stránce laskavě načrtne nebo narýsuje samostatný obrázek jako cvičení. . .



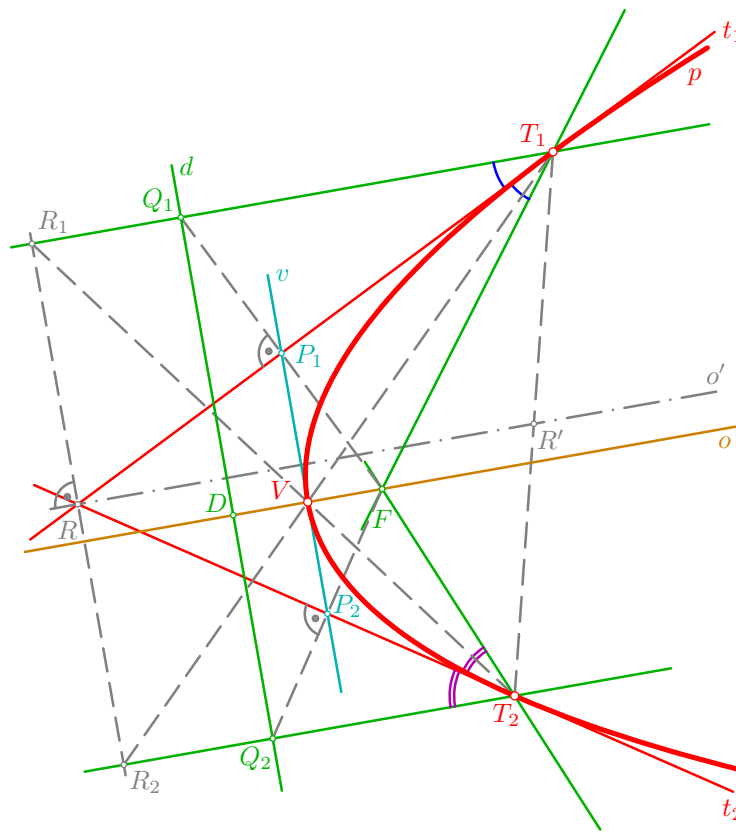
- jeden průvodič bodu  $T_1$  je rovnoběžný s osou  $o$  a tedy také s přímkou  $o'$ , druhý je podle **Věty 1** (na straně 236) s prvním osově souměrný podle tečny  $t_1$ ; analogicky můžeme sestrojít také oba průvodiče bodu  $T_2$  a určit ohnisko  $F$  jako průsečík těch průvodičů bodů  $T_1, T_2$ , které nejsou rovnoběžné s přímkou  $o'$ ; poznamenejme ještě, že tato konstrukce je při ručním rýsování dosti nepřesná (zejména při přenášení úhlů) a navíc nefunguje v případě, kdy  $t_1 \perp t_2$  (necht' si čtenář pro zajímavost tuto variantu opět raději narýsuje do volného místa): při takovém zadání totiž splynou souměrné průvodiče bodů  $T_1, T_2$  s přímkou  $T_1T_2$  a nelze tedy nalézt ohnisko  $F$  jako jejich průsečík; dá se ovšem dokázat, že v tomto případě je ohnisko  $F$  patou kolmice spuštěné z průsečíku  $R = t_1 \cap t_2$  na přímkou  $T_1T_2$



- známe-li ohnisko  $F$  paraboly, můžeme již doplnit osu  $o$  a pomocí **Vět 2,3** (na straně 236) také vrcholovou tečnu  $v$  a řídicí přímku  $d$ ; než to provedeme, ukažme ještě jiný alternativní způsob řešení zadané úlohy: označme  $R_1, R_2$  průsečíky průvodičů bodů  $T_1, T_2$  rovnoběžných se směrem  $o'$  a kolmice k přímce  $o'$  vedené bodem  $R = t_1 \cap t_2$ ; pak se dá ukázat, že průsečík úhlopříček  $R_1T_2, R_2T_1$  ve vzniklém pravoúhlém lichoběžníku  $R_1R_2T_2T_1$  je vrcholem  $V$  hledané paraboly  $p$  (opět to vyplývá z projektivních vlastností paraboly); tento způsob řešení funguje bez omezení, tj. je lhostejno, zda jsou zadané tečny  $t_1, t_2$  navzájem kolmé či nikoliv



- ať už máme ohnisko  $F$  nebo vrchol  $V$ , snadno sestrojíme osu  $o \parallel o'$  hledané paraboly  $p$ ; dále můžeme z ohniska  $F$  vést kolmici k tečně  $t_1$ , najít její patu  $P_1$ , sestrojít bod  $Q_1$  souměrně sdružený a vést jimi vrcholovou tečnu  $v \perp o, P_1 \in v$ , řídicí přímku  $d \perp o, Q_1 \in d$ , a následně doplnit vrchol  $V$  (totéž lze zřejmě provést vzhledem k druhé dané tečně  $t_2$ ); nebo při alternativním způsobu řešení vyjdeme od sestrojeného vrcholu  $V$ , vedeme jím vrcholovou tečnu  $v \perp o$ , ta protne dané tečny  $t_1, t_2$  v bodech  $P_1, P_2$ , jimi vedené kolmice k příslušným tečnám se musí protnout na ose  $o$  v ohnisku  $F$  a body  $Q_1, Q_2$  souměrně sdružené s ohniskem  $F$  podle tečen  $t_1, t_2$  určí řídicí přímku  $d$ ; rovněž lze využít vlastností subtangenty nebo subnormály některého z bodů  $T_1, T_2$  – prostě možností dořešení úlohy je zde několik...



□

*Diskuze:* úloha nemá žádné řešení, jsou-li tečny  $t_1, t_2$  navzájem rovnoběžné, nebo některý z bodů  $T_1, T_2$  dotyku splývá s průsečíkem přímek  $t_1, t_2$ ; jinak má daná úloha vždy právě jedno řešení.

## 1.5. Řešené úlohy na ohniskové vlastnosti kuželoseček

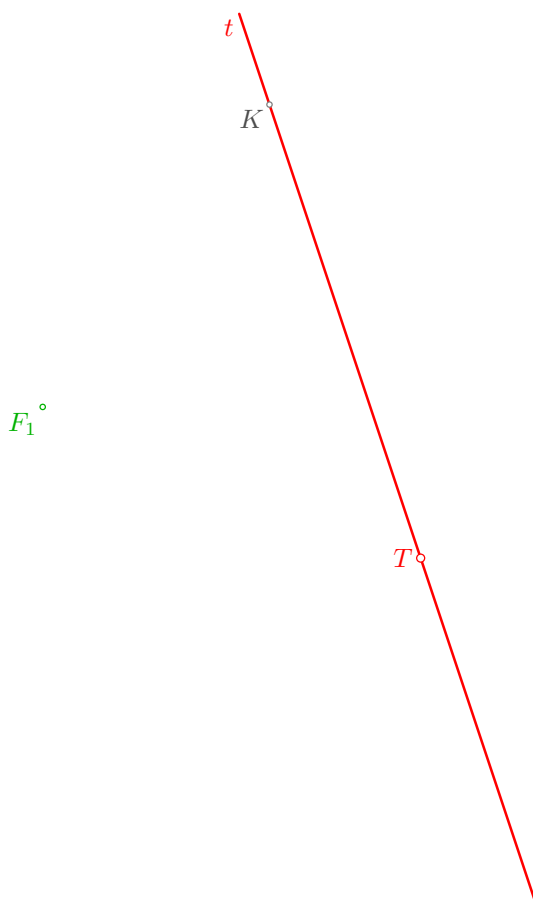
## Řešené úlohy



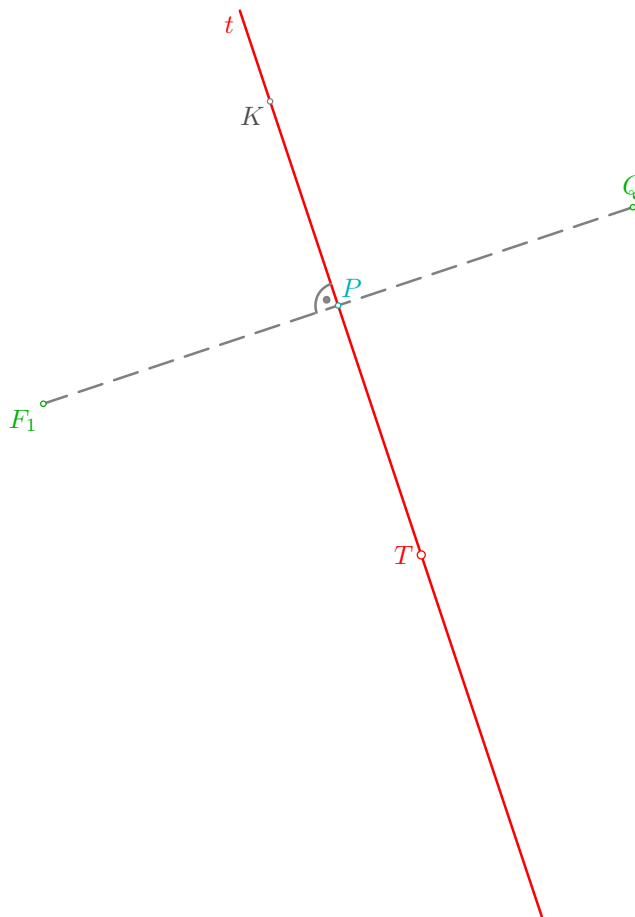
## 1.5.1. Konstrukce kuželosečky z daných podmínek

**Příklad:** Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko  $F_1$ , tečna  $t = TK$  s bodem  $T$  dotyku a excentricita  $e$ ;  $F_1[0; 0], T[5; 2], K[3; -4], e = 3$ .

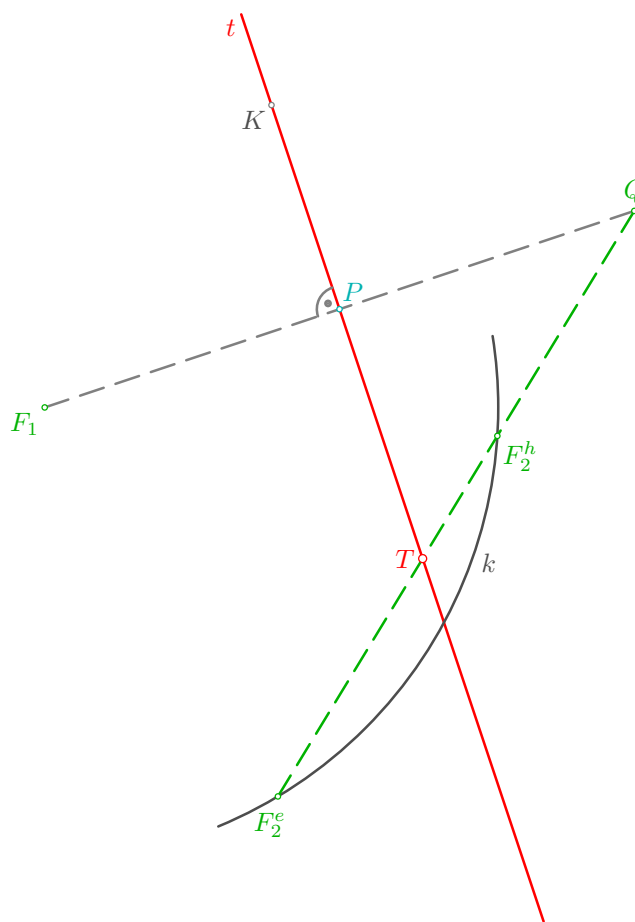
- podle zadání sestrojíme ohnisko  $F_1$  a tečnu  $t = TK$ ; v obrázku jsou pro větší přehlednost následujících konstrukcí vynechány souřadnicové osy; přitom předpokládáme osu  $x$  vodorovnou s kladným směrem zleva doprava a osu  $y$  svislou s kladným směrem shora dolů; nanese-li tedy od ohniska  $F_1$ , které je v počátku, 5 jednotek vodorovně doprava a odtud 2 jednotky svisle dolů, dostaneme se do bodu  $T[5; 2]$ , analogicky pro bod  $K$



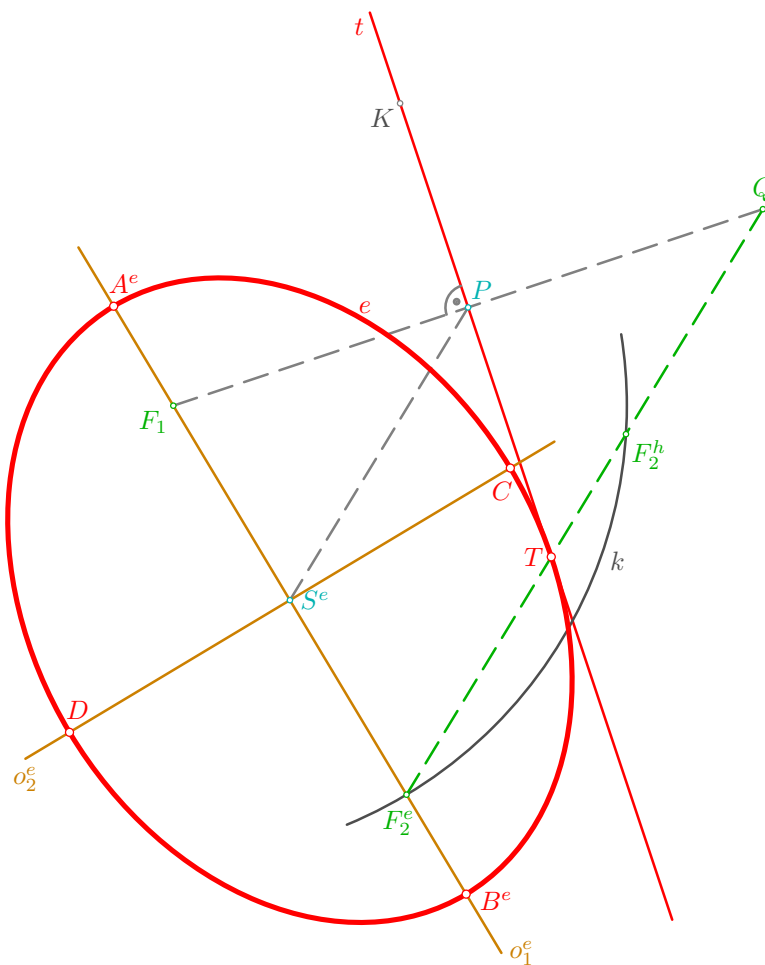
- ze zadání vyplývá, že hledaná kuželosečka je elipsa nebo hyperbola (parabola nemá excentricitu); pokusme se najít její druhé ohnisko  $F_2$ ; nejprve veďme ohniskem  $F_1$  kolmici na tečnu  $t$ , sestrojme její patu  $P \in t$  a bod  $Q$  souměrně sdružený s ohniskem  $F_1$  podle přímky  $t$ ; k čemu se nám budou body  $P, Q$  hodit, uvidíme v dalších krocích



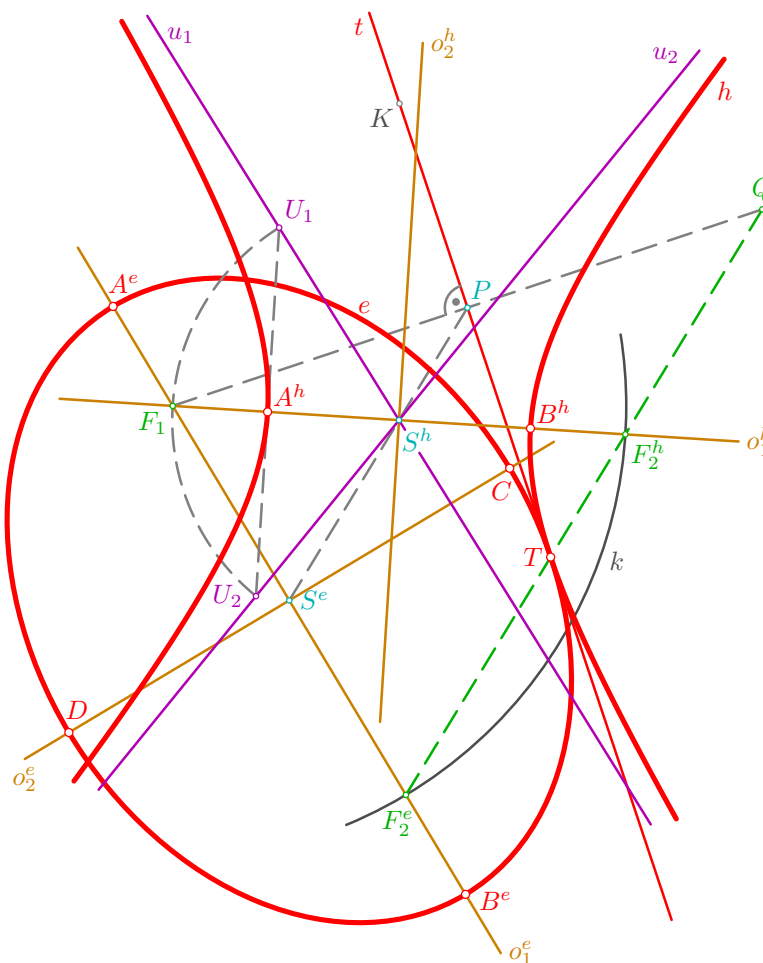
- vzdálenost ohnisek je rovna  $2e = 6$ , a druhé ohnisko musí tudíž ležet na kružnici  $k(F_1, 2e)$ ; přímka  $F_1T$  (na obrázku není vytažena) je jedním průvodičem bodu  $T$ , druhý průvodič je podle Věty 1 s prvním osově souměrný podle tečny  $t$ , tj. druhým průvodičem bodu  $T$  je přímka  $QT$ ; druhé ohnisko hledané kuželosečky musí tedy ležet také na přímce  $QT$ ; průvodič  $QT$  protíná pomocnou kružnici  $k$  ve dvou bodech, z nichž ten, který leží v polorovině určené tečnou  $t$  a ohniskem  $F_1$ , označme  $F_2^e$  a ten, který leží v opačné polorovině, označme  $F_2^h$ ; při tomto konkrétním zadání bude mít tedy úloha dvě různá řešení: elipsu s ohnisky  $F_1, F_2^e$  (daná tečna  $t$  je neodděluje) a hyperbolu s ohnisky  $F_1, F_2^h$  (tečna  $t$  je odděluje)



- nejprve doplníme elipsu  $e$ : přímka  $o_1^e = F_1F_2^e$  je její hlavní osa, střed  $S^e$  úsečky  $F_1F_2^e$  je její střed, kterým prochází vedlejší osa  $o_2^e \perp o_1^e$ ; pro délku hlavní poloosy  $a^e$  platí  $a^e = \frac{|F_2^eQ|}{2} = |S^eP|$  a můžeme tak na hlavní ose  $o_1^e$  sestrojít hlavní vrcholy  $A^e, B^e$ , kde  $|A^eS^e| = |B^eS^e| = a^e$ ; pro vedlejší vrcholy  $C, D$  ležící na vedlejší ose  $o_2^e$  pak platí  $|CF_1| = |DF_1| = a^e$ ; na závěr je vhodné doplnit hyperoskulační kružnice ve vrcholech (v obrázku není provedeno) a vytáhnout výslednou elipsu  $e$ , která má jedno ohnisko v daném bodě  $F_1$ , dotýká se dané přímky  $t = TK$  v jejím daném bodě  $T$  a má danou excentricitu  $e = 3$



- sestrojme druhé řešení – hyperbolu  $h$ : přímka  $o_1^h = F_1F_2^h$  je její hlavní osa, střed  $S^h$  úsečky  $F_1F_2^h$  je její střed, kterým prochází vedlejší osa  $o_2^h \perp o_1^h$ ; pro délku hlavní poloosy  $a^h$  platí  $a^h = \frac{|F_2^hQ|}{2} = |S^hP|$  a můžeme tak na hlavní ose  $o_1^h$  sestrojít vrcholy  $A^h, B^h$ , kde  $|A^hS^h| = |B^hS^h| = a^h$ ; na závěr je vhodné doplnit asymptoty  $u_1 = S^hU_1, u_2 = S^hU_2$  (konstrukce bodů  $U_1, U_2$  je patrná z obrázku) a vytáhnout výslednou hyperbolu  $h$ , která má jedno ohnisko v daném bodě  $F_1$ , dotýká se dané přímky  $t = TK$  v jejím daném bodě  $T$  a má danou excentricitu  $e = 3$

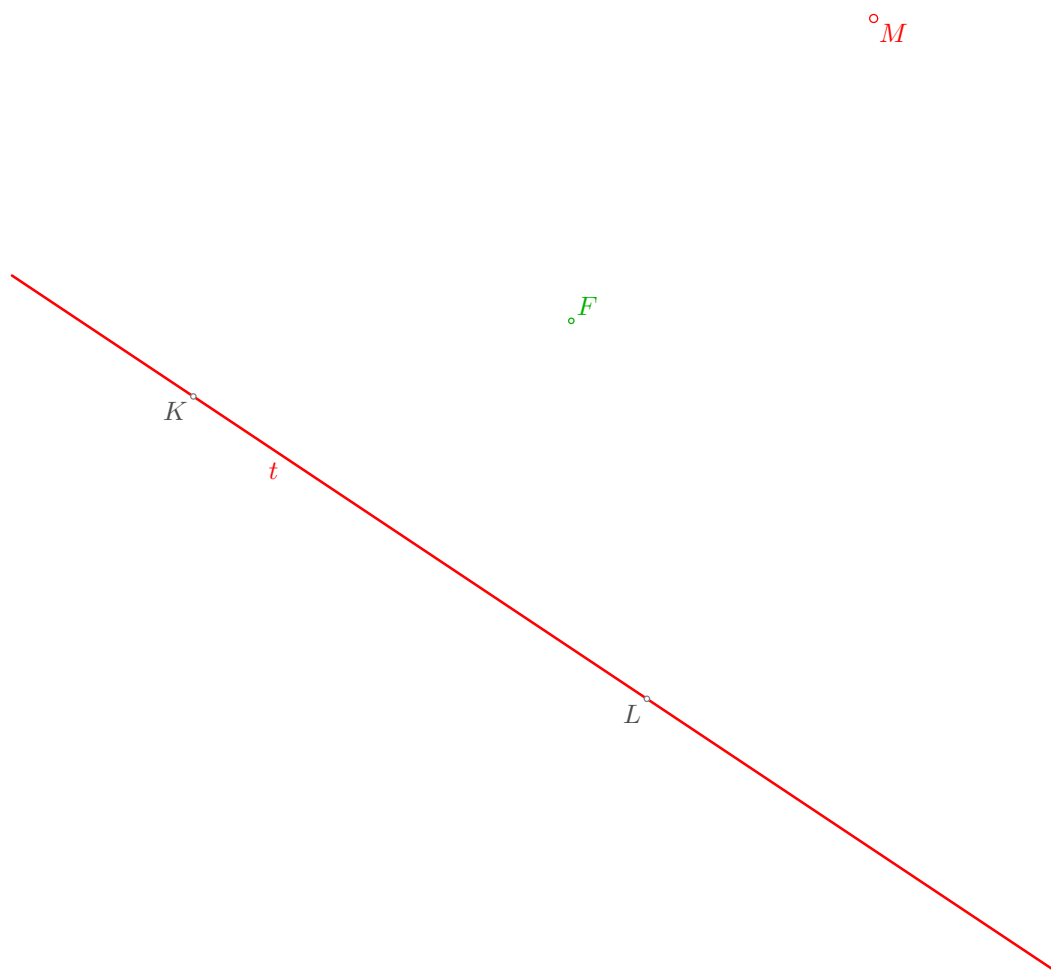


□

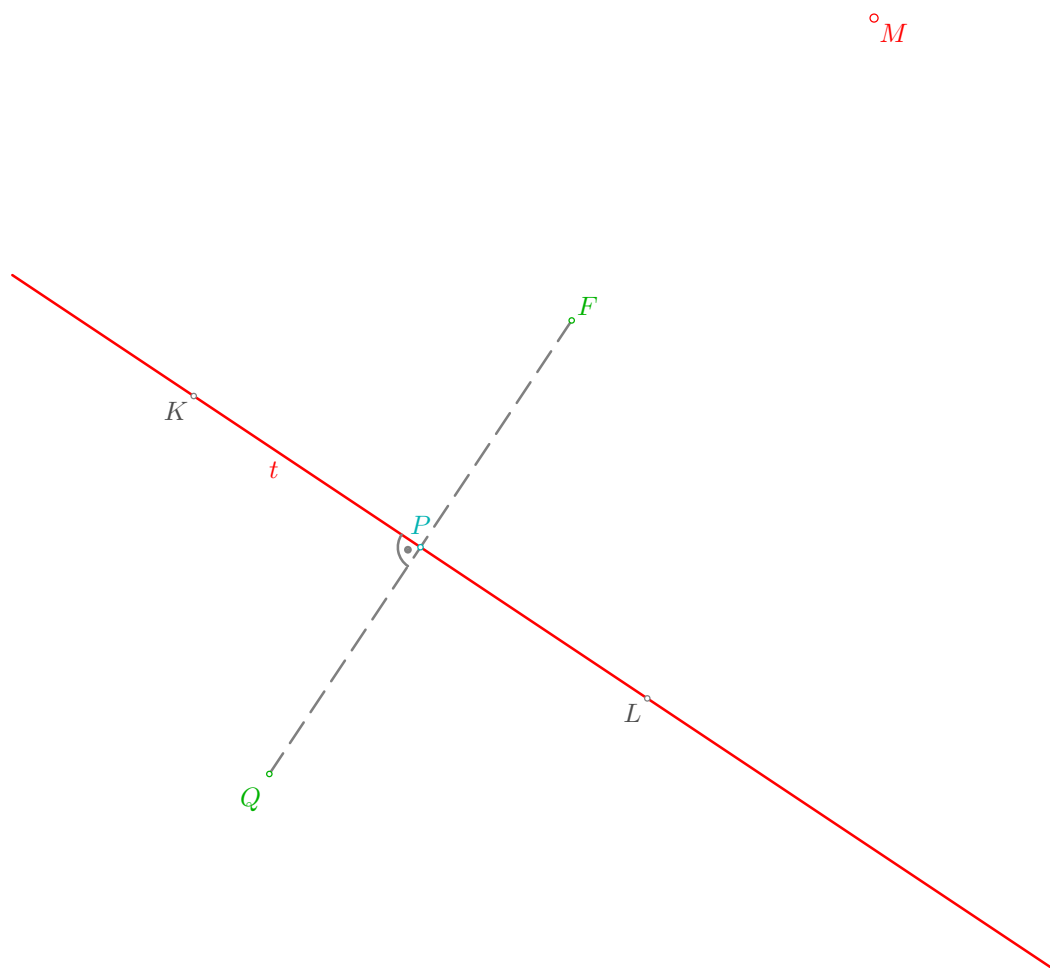
## 1.5.2. Konstrukce paraboly z daných podmínek

**Příklad:** Sestrojte parabolu, je-li dáno její ohnisko  $F$ , bod  $M$  a tečna  $t = KL$ ;  $F[0; 0]$ ,  $M[4; -4]$ ,  $K[-5; 1]$ ,  $L[1; 5]$ .

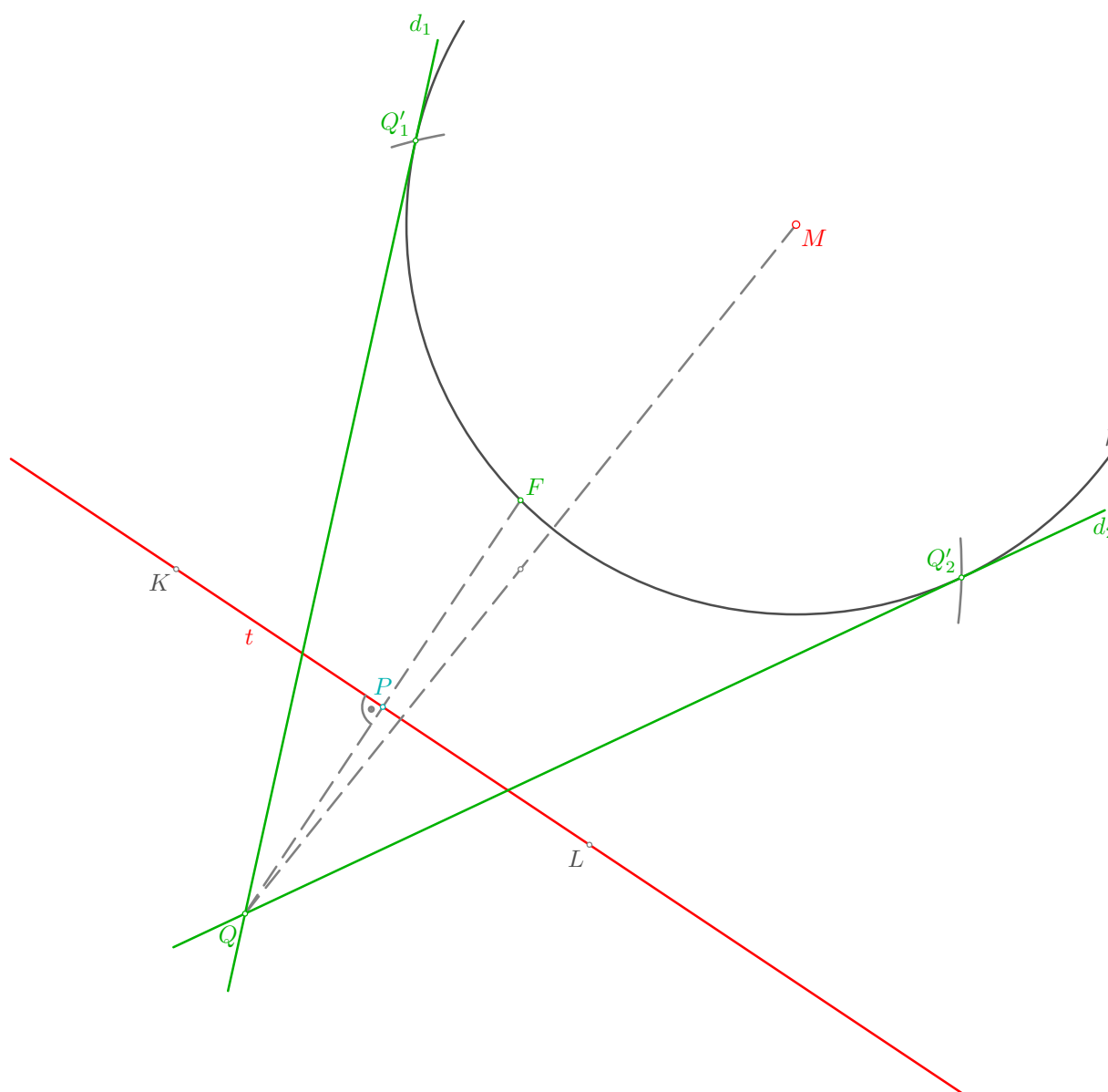
- podle zadání sestrojíme ohnisko  $F$ , bod  $M$  a tečnu  $t = KL$ ; body jsou vyneseny podle zadaných souřadnic stejným způsobem jako v předchozím příkladě



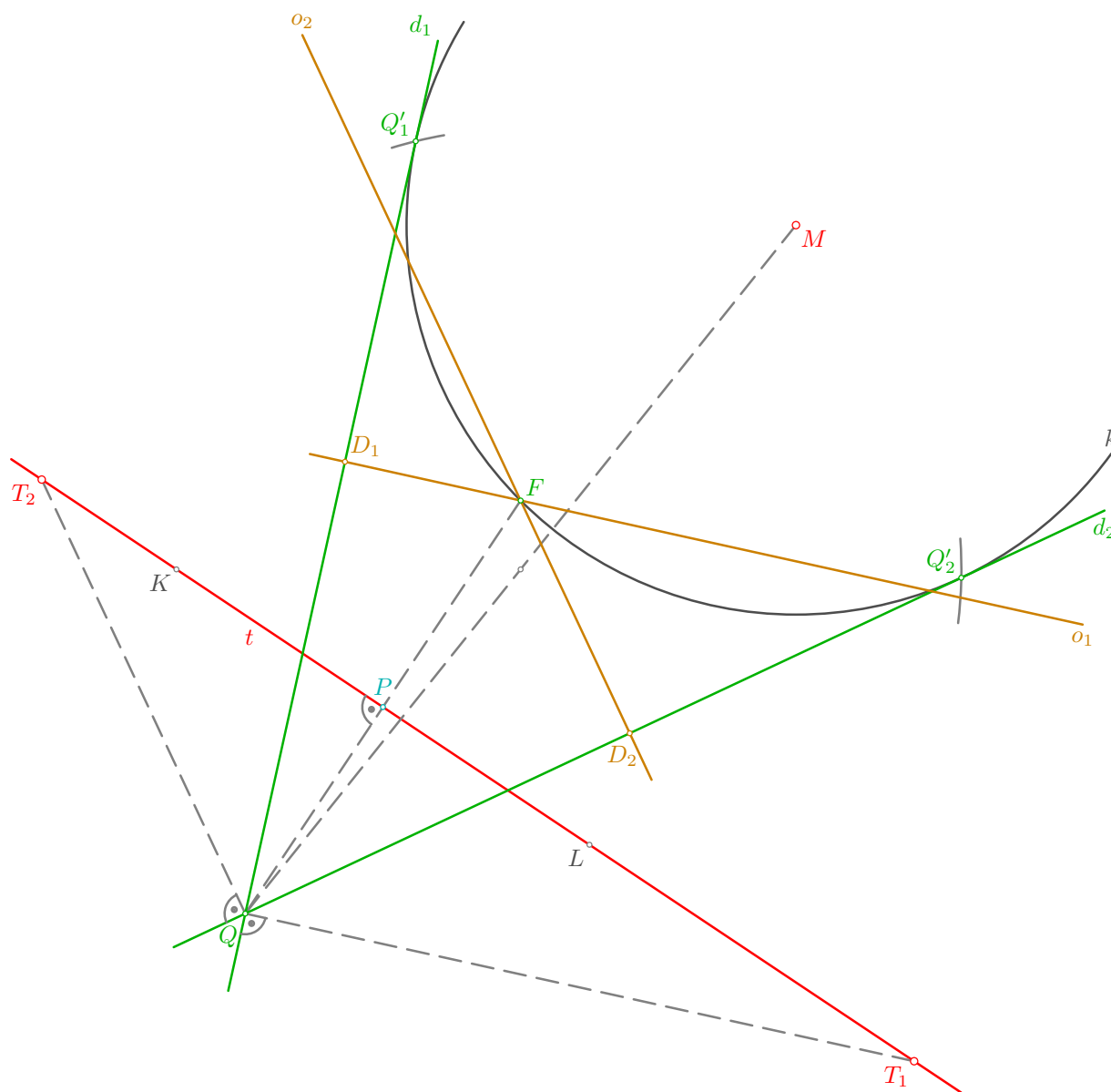
- nejprve ved'me ohniskem  $F$  kolmici na tečnu  $t$ , sestrojme její patu  $P \in t$  a bod  $Q$  souměrně sdružený s ohniskem  $F$  podle přímky  $t$



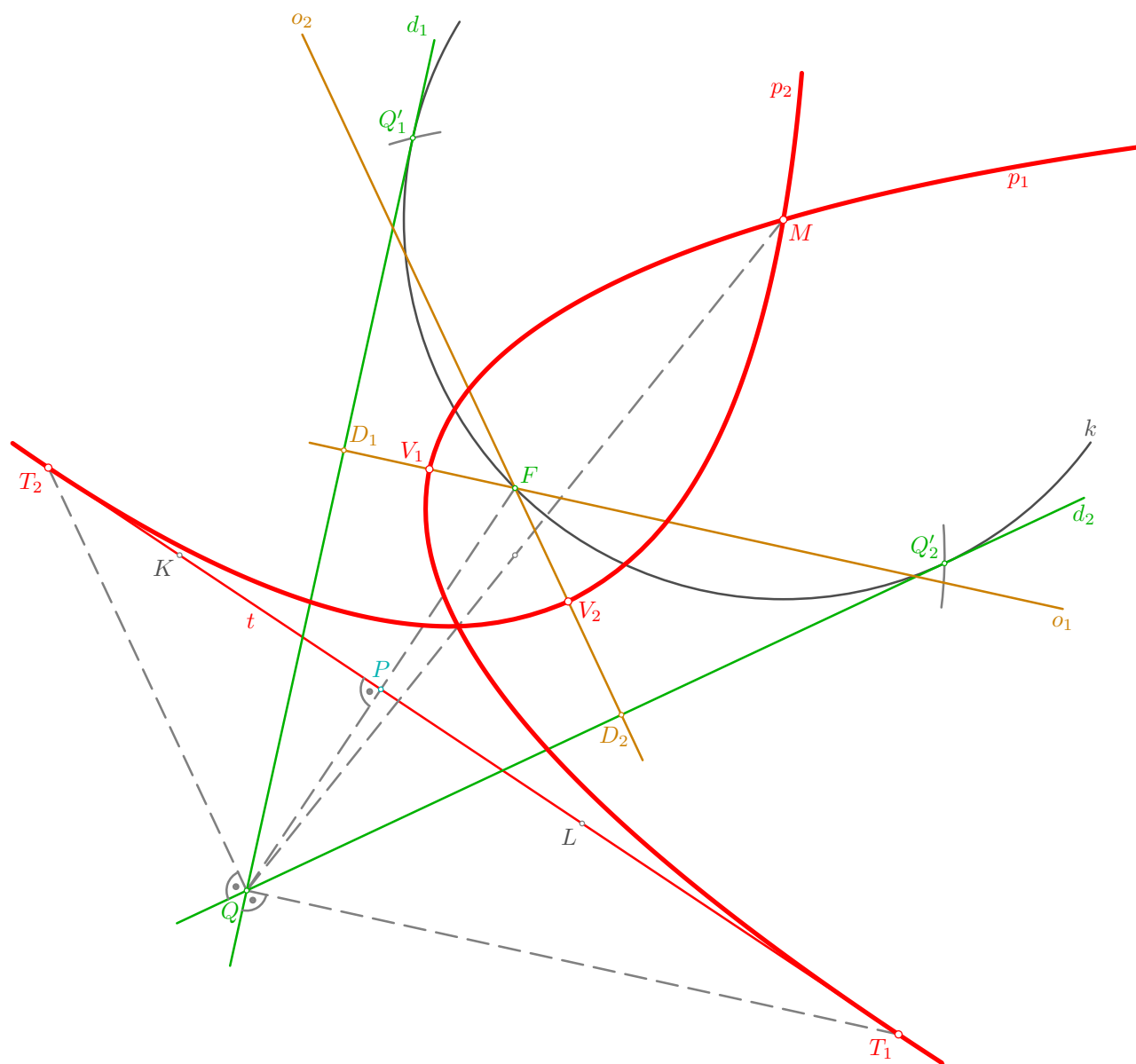
- podle **Věty 2** (na straně 236) o parabole musí řídicí přímka  $d$  hledané paraboly procházet bodem  $Q$ ; současně musí pro bod  $M$  podle definice paraboly platit  $|FM| = |Md|$  a řídicí přímka  $d$  musí tedy být tečnou pomocné kružnice  $k(M, |FM|)$ ; z bodu  $Q$  lze takové tečny ke kružnici  $k$  vést dvě, označme je  $d_1$  a  $d_2$ , příslušné body dotyku označme  $Q'_1$  a  $Q'_2$  (sestrojíme je pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem  $QM$ ); úloha bude tedy při tomto zadání mít dvě řešení – paraboly  $p_1, p_2$  dané společným ohniskem  $F$  a řídicími přímkami  $d_1, d_2$



- ohniskem  $F$  vedeme osu  $o_1 \perp d_1$  paraboly  $p_1$  a označme její patu  $D_1 = o_1 \cap d_1$ ; rovnoběžka s osou  $o_1$  vedená bodem  $Q$  protíná tečnu  $t$  v bodě  $T_1$ , který je bodem dotyku hledané paraboly  $p_1$  s danou tečnou  $t = KL$ ; přímka  $QT_1 \perp d_1$  je vlastně jedním z průvodičů bodu  $T_1$ ; analogicky pro parabolu  $p_2$ : pro její osu  $o_2$  je  $o_2 \perp d_2$ ,  $F \in o_2$  a bod  $T_2$  dotyku s tečnou  $t$  leží na průvodiči vedeném bodem  $Q$  kolmo k řídicí přímce  $d_2$  (tj. rovnoběžně s osou  $o_2$ )



- na závěr sestrojme vrcholy  $V_1, V_2$  parabol  $p_1, p_2$  jako středy úseček  $FD_1, FD_2$  a vytáhněme paraboly  $p_1, p_2$ , které mají společné ohnisko dané v bodě  $F$ , procházejí daným bodem  $M$  a dotýkají se dané přímky  $t = KL$ ; pro zajímavost si může zvědavý čtenář doplnit vrcholové tečny obou řešení, které by se měly protnout v sestrojeném bodě  $P$ ...



□

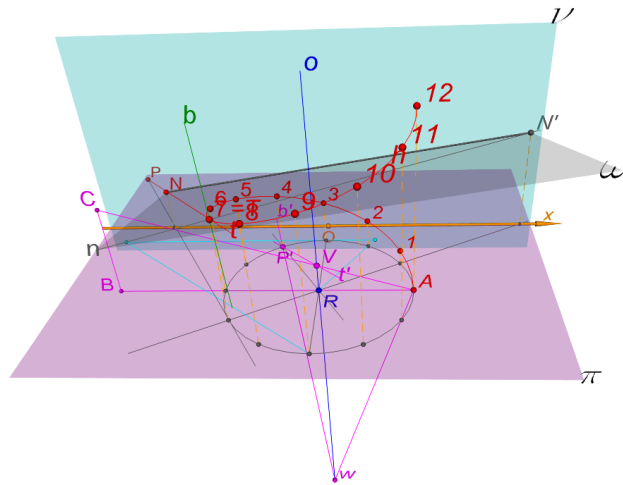
## 2. Šroubovice

### Výklad



- šroubovice patří mezi významné technické křivky (prostorové)
- jeden její závit můžeme jednoduše vymodelovat srolováním pravoúhlého trojúhelníka do válce, jehož osa je rovnoběžná s jednou z odvěsen
- osa  $o$ , poloměr  $r$  a výška  $v$  takového válce je současně **osou**, **poloměrem** a tzv. **výškou závitu** sestrojené šroubovice, kterou vytváří stočená přepona použitého tzv. **charakteristického** trojúhelníka
- přitom lze stočení provést na dvě různé strany a vytvořit tak **pravotočivou** nebo **levotočivou** šroubovici
- pravotočivá se pozná například takto: jestliže na ni nasedneme, budeme mít při jízdě shora dolů osu po pravé ruce; je zajímavé, že toto pravidlo platí bez ohledu na to, který směr osy prohlásíme za směr shora dolů
- v zadání a při konstrukcích ještě narazíme na jeden pojem – tzv. **redukovanou výšku**  $v_0$  **závitu**, pro niž platí:  $v_0 = \frac{v}{2\pi}$
- v libovolném bodě šroubovice lze sestrojít tzv. **doprovodný trojhran**, který tvoří trojice po dvou navzájem kolmých přímk – **tečna**, **hlavní normála** a **binormála**
- tečna a hlavní normála určují tzv. **oskulační rovinu**, **normálová rovina** je určena hlavní normálou a binormálou, a konečně tečna spolu s binormálou určují tzv. **rektifikační rovinu** v daném bodě šroubovice
- tečnu můžeme získat zpětným rozvinutím smotaného trojúhelníka v konkrétním bodě, tj. její odchylka (a tím také spád) od libovolné roviny kolmé k ose je konstantní – proto také patří šroubovice mezi **křivky konstantního spádu**; hlavní normála je současně normálou válce, na který je šroubovice navinuta, tzn. že protíná osu šroubovice; a konečně binormála v každém bodě je kolmá k příslušné oskulační rovině

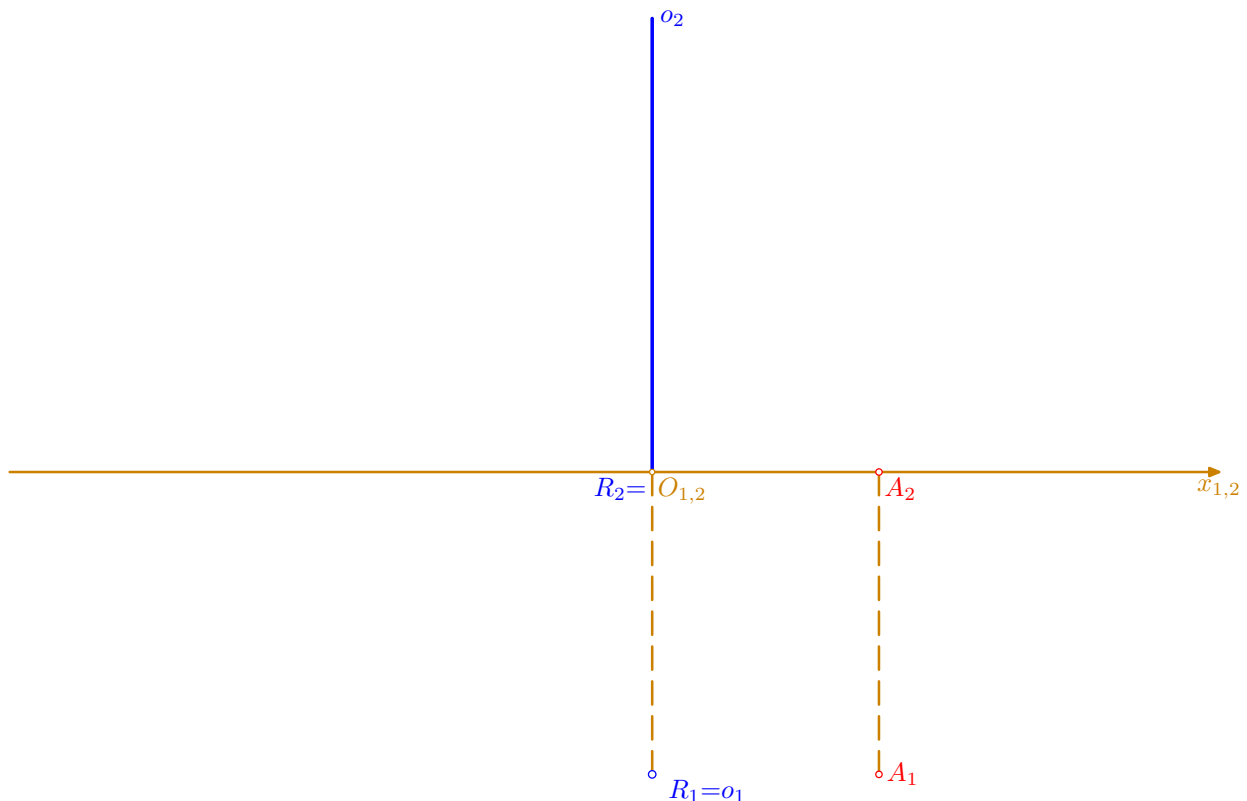
## 2.1. Šroubovice v Mongeově promítání



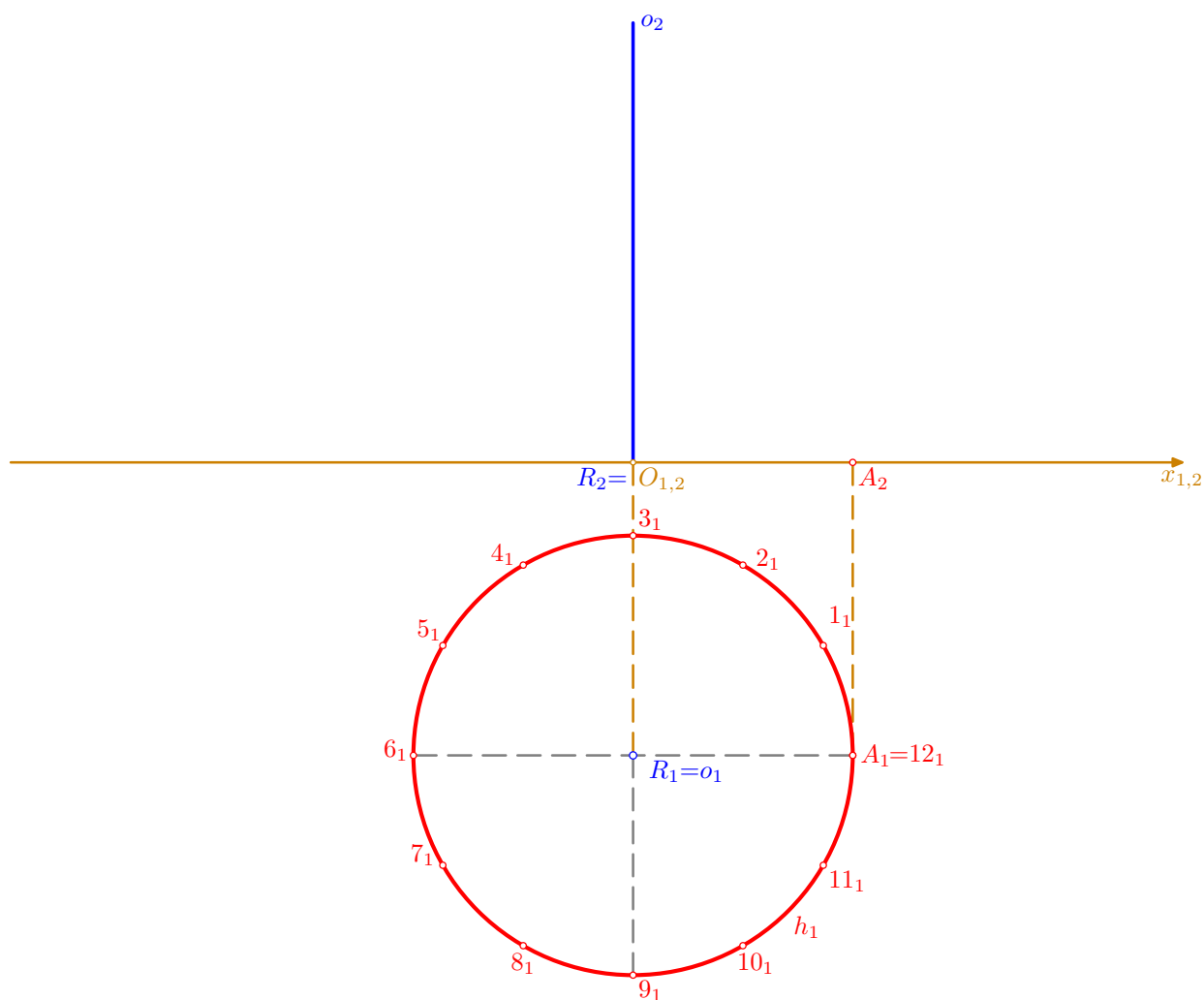
## Řešené úlohy

**Příklad:** V Mongeově promítání zobrazte jeden závit pravotočivé šroubovice  $h$ , která má osu  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$ , výšku  $v$  závitů a prochází bodem  $A \in h$ ; v bodě  $T$  šroubovice doplňte doprovodný trojhran;  $R[0; 4; 0]$ ,  $v = 6$ ,  $A[3; 4; 0]$ ,  $T[?; ?; 3,5]$ .

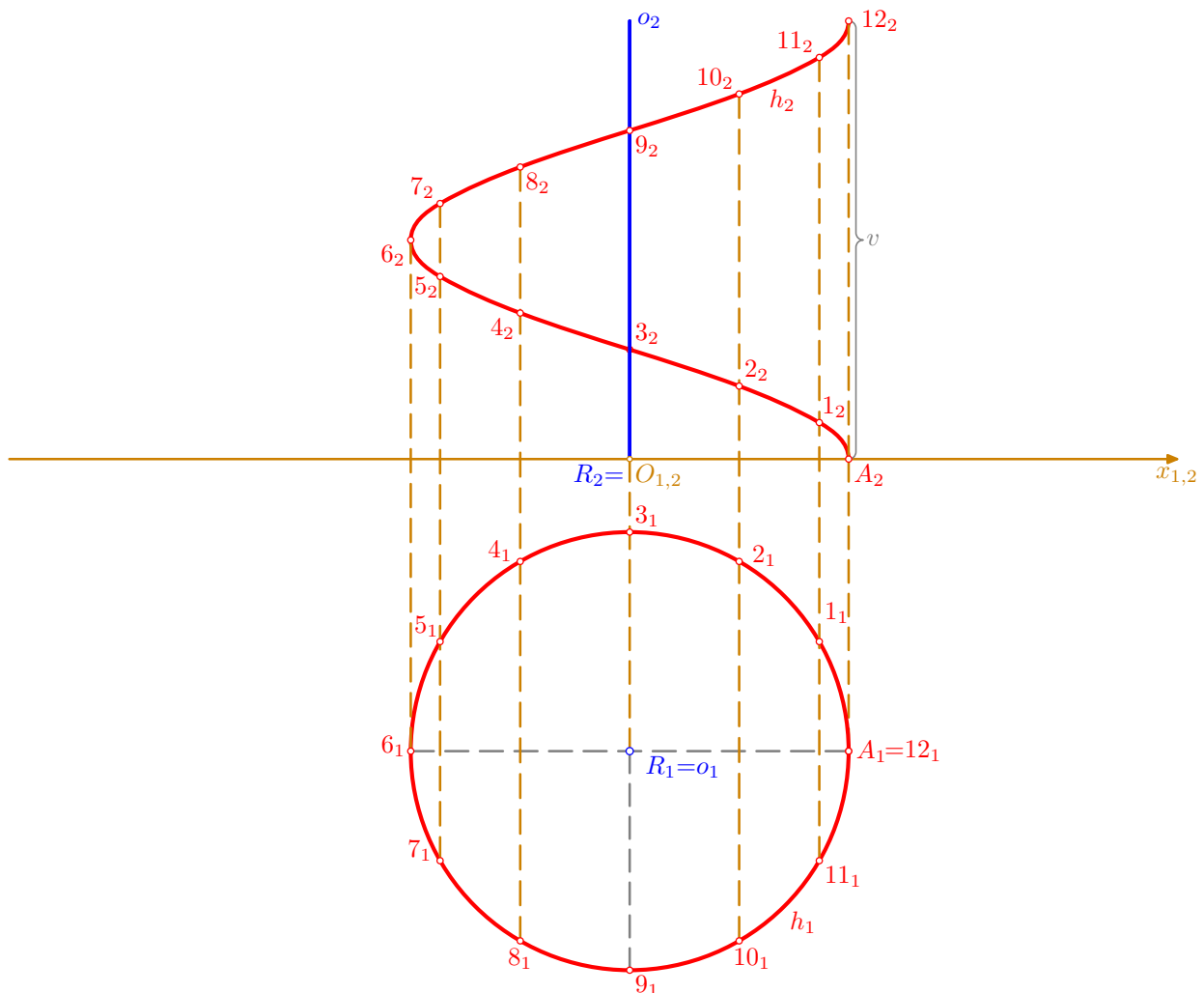
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2$  a  $R_1, R_2$  (kde  $R_2 = O_{1,2}$ ) bodů  $A, R$ ; půdorysem osy  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$ , je bod  $o_1 = R_1$ , pro její narys  $o_2$  platí  $o_2 \perp x_{1,2}$  a  $R_2 \in o_2$



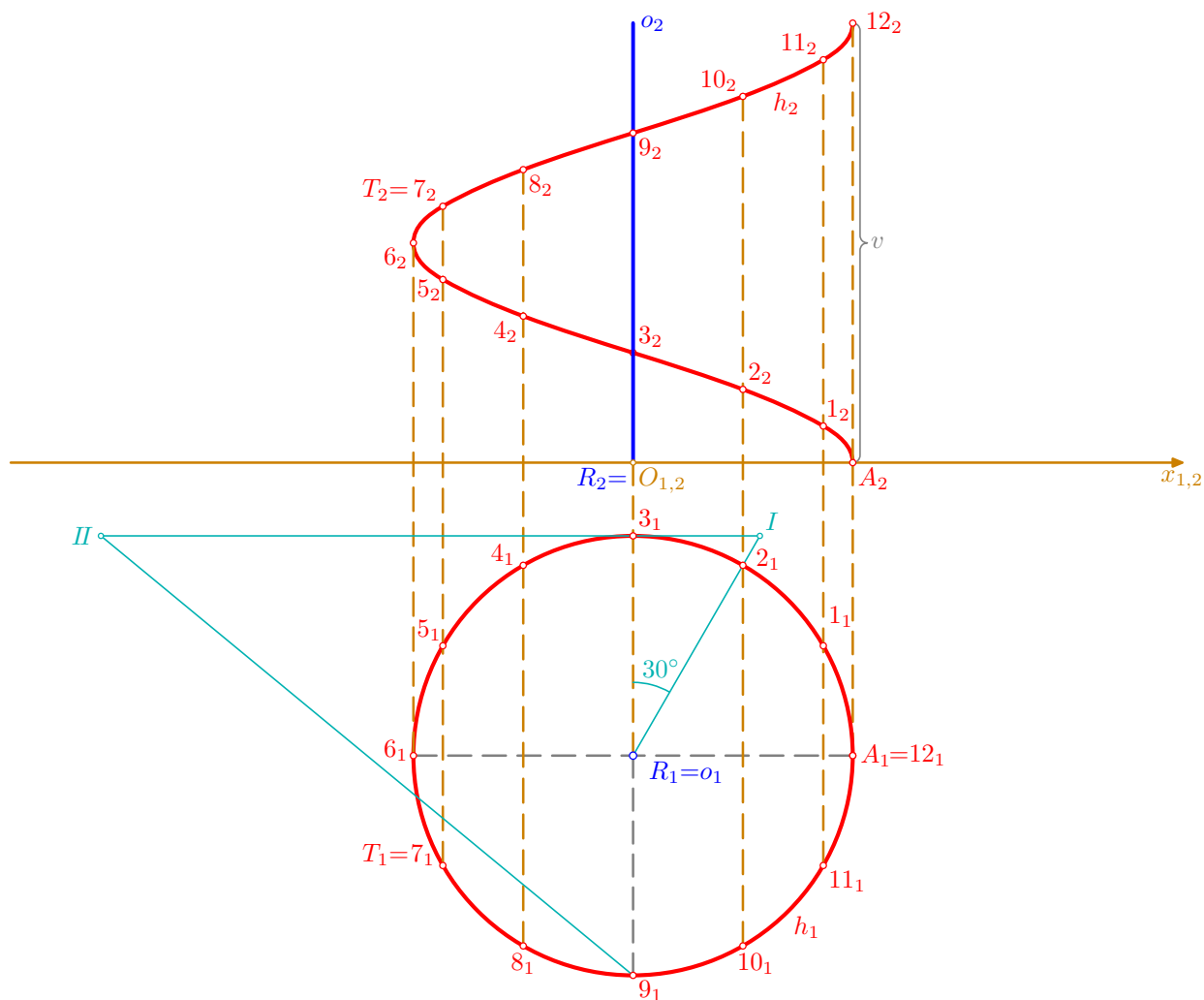
- půdorysem konstruované šroubovice  $h$  je kružnice  $h_1(R_1, r = |R_1A_1| = 3)$ ; abychom mohli v dalším kroku sestrojit nárys  $h_2$ , rozdělme kružnici  $h_1$  od bodu  $A_1$  na 12 stejných dílů, tj. po  $30^\circ$ , a jednotlivé dělicí body očísľujme  $1_1, 2_1, \dots, 12_1$  (kde  $12_1 = A_1$ ) v kladném smyslu, neboť podle zadání má být šroubovice  $h$  pravotočivá, a bude tedy stoupat proti směru hodinových ručiček; dělení provedeme nejlépe takto: nejprve sestrojíme kolmé průměry  $A_16_1$  a  $3_19_1$  a poté postupně zapícheme kružítko do bodů  $A_1, 3_1, 6_1, 9_1$  a kružnici  $h_1$  protneme jejím poloměrem  $r = |R_1A_1|$  vždy v dalších dvou dělicích bodech; tím sestrojíme všech dvanáct dělicích bodů



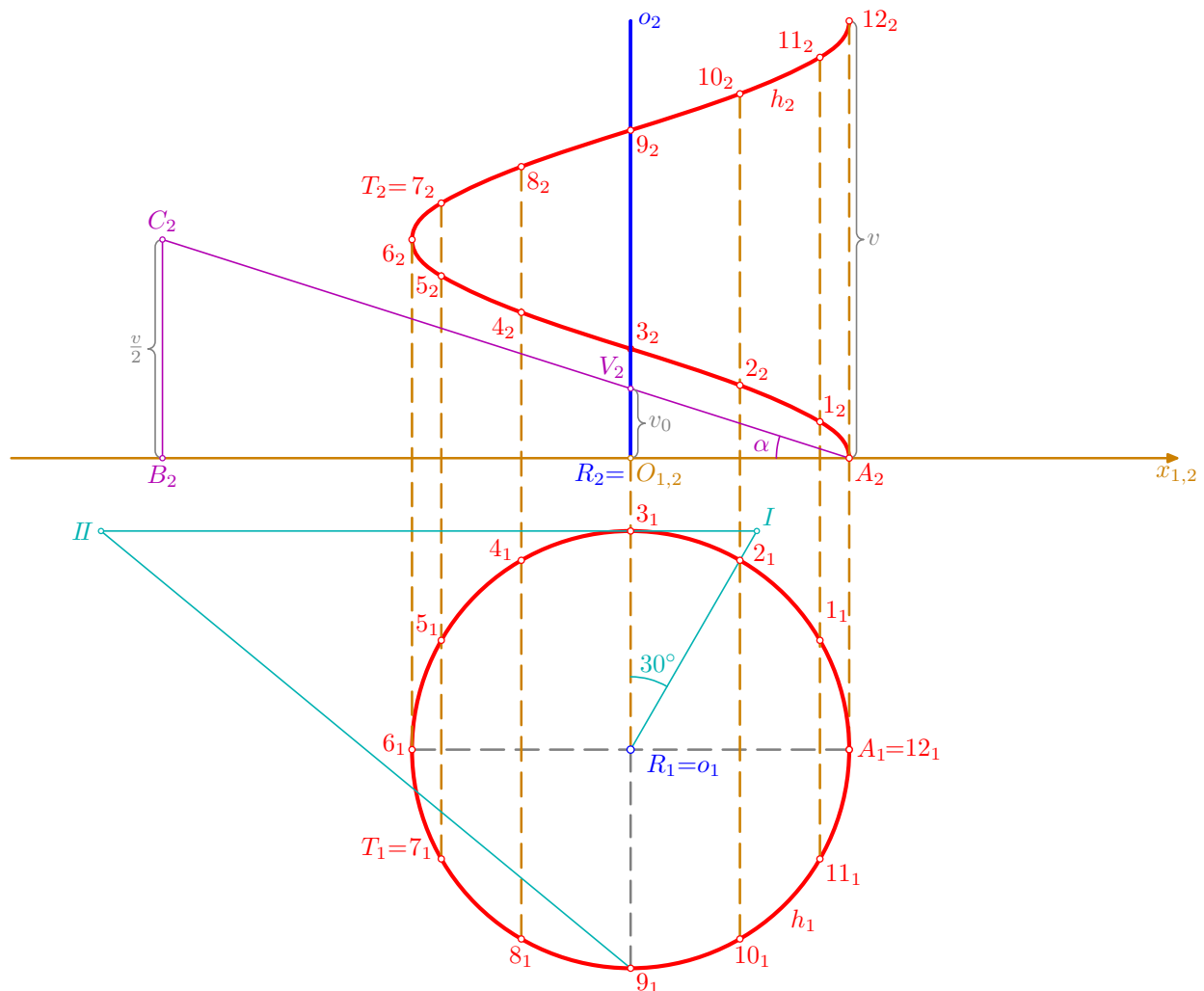
- bod 12 leží ve výšce  $v = 6$  závitů nad bodem  $A$  a jeho nárys  $12_2$  sestrojíme na příslušné ordinále tak, aby bylo  $|A_2 12_2| = v$ ; podobně doplníme nárysy dalších dělicích bodů šroubovice – na příslušných ordinálách a v příslušné dvanáctině výšky  $v$  závitů; zde je vidět smysl užitého číslování: bod 1 leží ve výšce  $\frac{1v}{12} = 0,5$  nad půdorysnou  $\pi$ , bod 2 ve výšce  $\frac{2v}{12} = 1$ , atd., tytéž délky nanášíme v náryse od osy  $x_{1,2}$ ; na závěr tohoto kroku spojíme sestrojené nárysy spojitou křivkou  $h_2$  (jde o jednu periodu zobecněné sinusoidy); přitom můžeme v náryse alespoň naznačit viditelnost šroubovice  $h$  vzhledem k ose  $o$ : z půdorysu je vidět, že bod 3 leží vzadu za osou  $o$  a jeho nárys  $3_2$  proto není zvýrazněn, naopak pro bod 9 a jeho nárys  $9_2$ ...



- podle zadání má bod  $T$  ležet ve výšce  $z_T = 3,5$  a splývá tedy s bodem 7 šroubovice  $h$ ,  $T_1 = 7_1, T_2 = 7_2$ ; abychom mohli sestavit tečnu  $t$  v bodě  $T$  pomocí tzv. **kuželové plochy tečen**, provedeme nejprve několik pomocných konstrukcí; první z nich je Kochaňského rektifikace kružnice  $h_1$ : např. v bodě  $3_1$  sestrojme tečnu kružnice  $h_1$  a na ní bod  $I$  tak, aby velikost úhlu  $IR_13_1$  u vrcholu  $R_1$  byla  $30^\circ$ ; na polopřímce  $I3_1$  doplníme bod  $II$  tak, aby bylo  $|III| = 3r = 3|R_13_1| = 9$ ; potom platí  $|II9_1| \doteq \pi r$ , tj. délka úsečky  $II9_1$  je skoro přesně rovna polovině délky kružnice  $h_1$

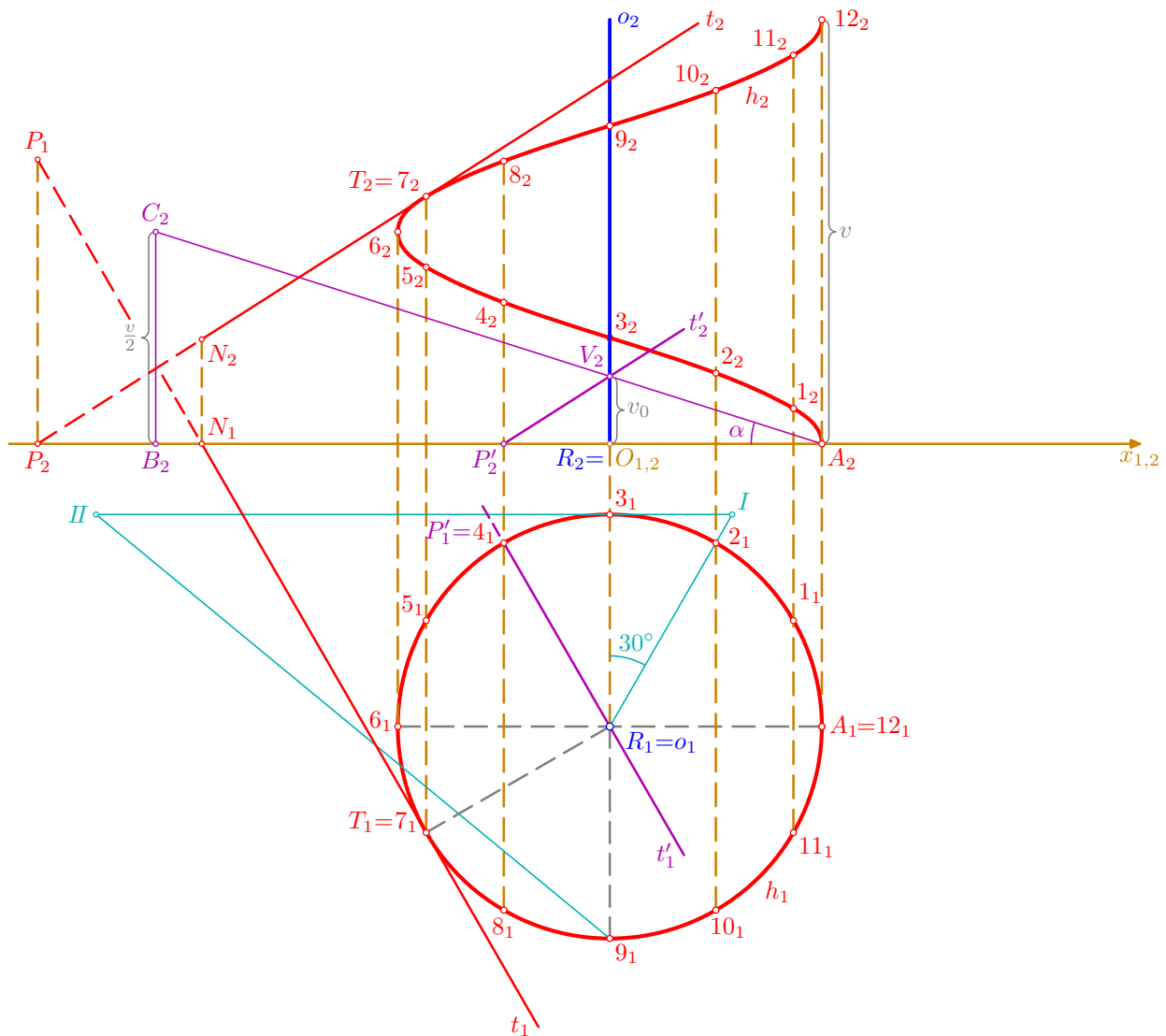


- v rovině určené osou  $o$  a bodem  $A$  sestrojme charakteristický trojúhelník  $ABC$  šroubovice  $h$ , který se v náryse zobrazí ve skutečné velikosti; na ose  $x_{1,2}$  nanesme od bodu  $A_2$  směrem doleva zjištěnou délku  $|II9_1| \doteq \pi r$ , koncový bod označme  $B_2$  a od něj svisle nahoru sestrojme úsečku  $B_2C_2$  délky  $|B_2C_2| = \frac{v}{2} = 3$ ; tím získáme nárys  $A_2B_2C_2$  zmíněného charakteristického trojúhelníka, jehož přepona  $AC$  (nebo její nárys  $A_2C_2$ ) představuje polovinu závitu rozvinuté šroubovice  $h$  a sklon  $\alpha$  této přepony je tedy také sklonem sestrojené šroubovice; dále jsme získali nárys  $V_2 = o_2 \cap A_2C_2$  vrcholu  $V$  příslušné kuželové plochy tečen, který leží v tzv. redukované výšce  $v_0 = |V_2R_2|$  závitu nad půdorysnou  $\pi$



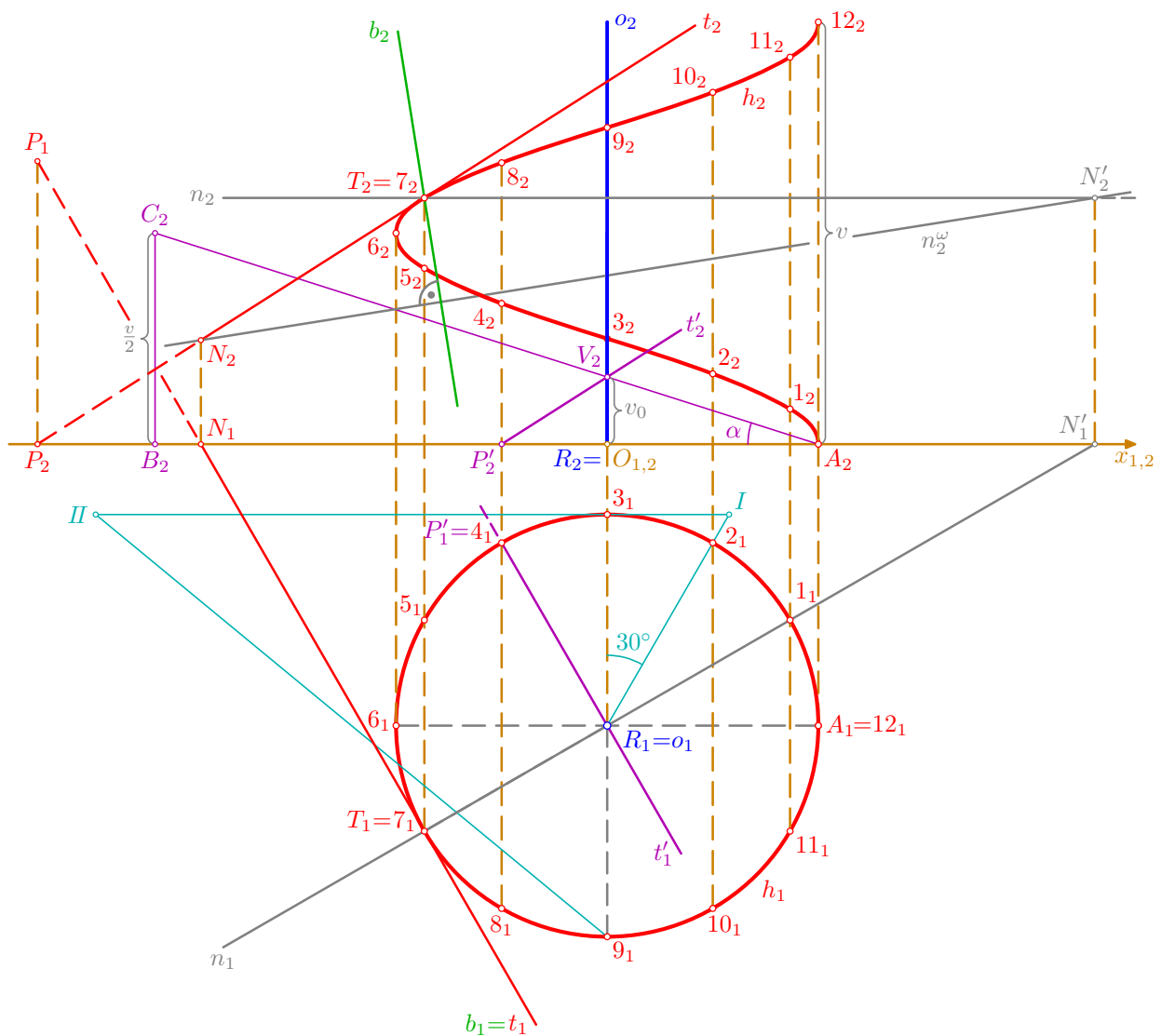


- nárys  $P'_2$  bodu  $P'$  doplníme na ordinále a na ose  $x_{1,2}$ ; nyní můžeme sestrojít nárys  $t'_2 = P'_2V_2$  přímky  $t'$  a následně také nárys  $t_2$  hledané tečny  $t$ , pro který je  $t_2 \parallel t'_2, T_2 \in t_2$ , a který se v bodě  $T_2$  dotýká sestrojené křivky  $h_2$ ; pro lepší představu jsou doplněny také sdružené průměty obou stopníků přímky  $t$ : půdorys  $N_1$  nárysného stopníku  $N$  leží na  $t_1$  a na ose  $x_{1,2}$ , nárys  $N_2$  najdeme na ordinále a na přímce  $t_2$ ; podobně je  $P_2 = t_2 \cap x_{1,2}$  a půdorys  $P_1$  leží na ordinále a na přímce  $t_1$

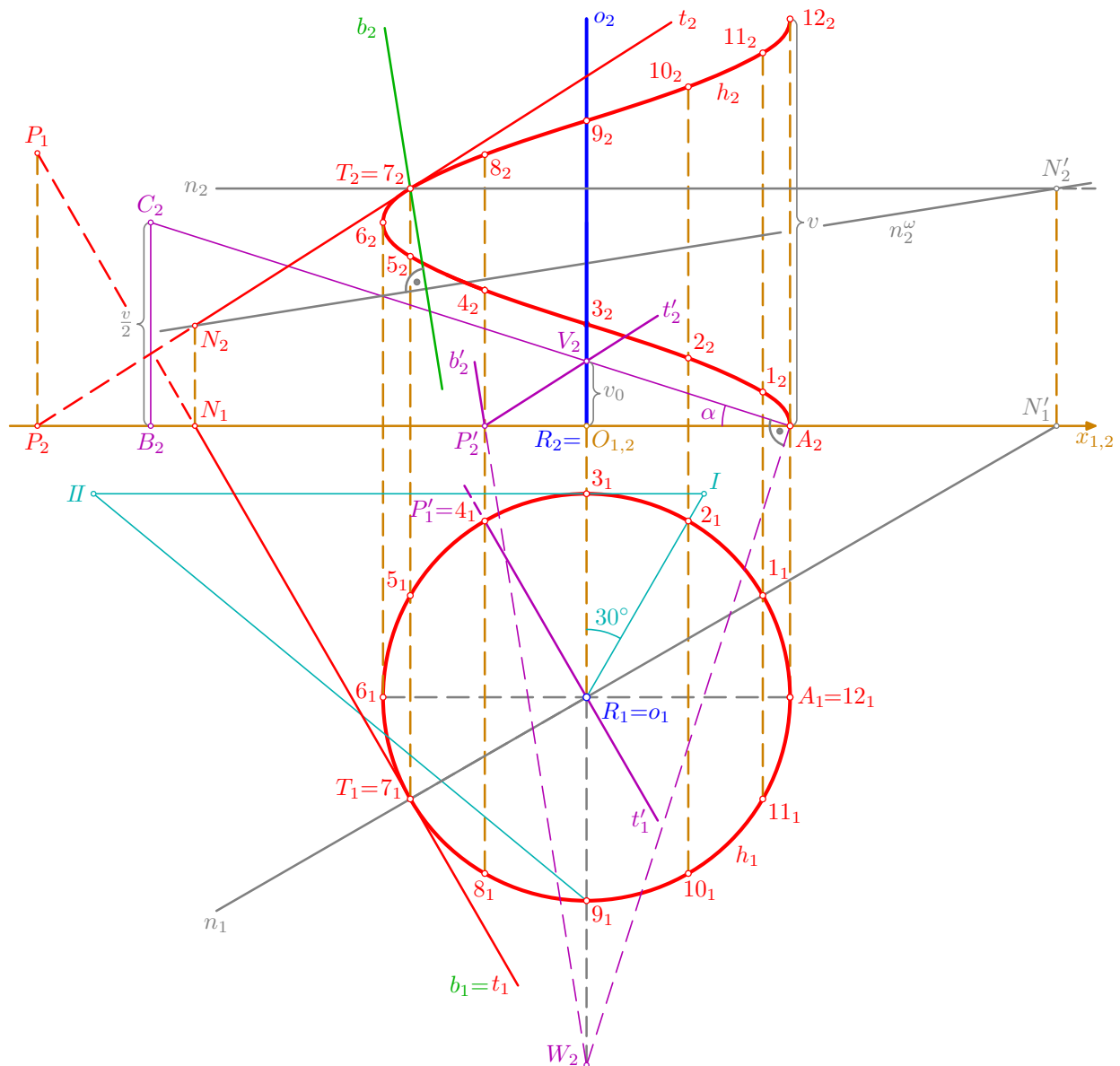




- binormála  $b$  šroubovice  $h$  v bodě  $T$  určuje spolu s tečnou  $t$  tzv. rektifikační rovinu  $\rho = tb$ , která je současně tečnou rovinou válcové plochy, na níž je šroubovice navinuta, podél přímky  $TT_1$ ; z toho vyplývá, že půdorysy  $b_1, t_1$  přímek  $b, t$  splývají,  $b_1 = t_1$ ; nárys  $b_2$  můžeme sestavit dvojím způsobem: binormála  $b$  je kolmá k tzv. oskulační rovině  $\omega = tn$  šroubovice  $h$  v bodě  $T$ , a pro její nárys  $b_2$  tudíž platí  $b_2 \perp n_2^\omega, T_2 \in b_2$ , kde  $n_2^\omega = N_2N'_2$  je nárysnou stopou roviny  $\omega$  (zde je tedy vidět pravý důvod užitečnosti konstrukce nárysných stopníků  $N, N'$  přímek  $t, n$ ); druhý způsob konstrukce nárysu  $b_2$  binormály  $b$  objasníme v následujícím kroku



- binormála  $b$  je rovnoběžná s přímkou  $b' = P'W$ , kde bod  $W$  je vrchol kuželové plochy binormál šroubovice  $h$ , pro který platí  $W \in o$  a  $WA \perp AC$ ; to vše se zachová v naryse, kde je tedy  $W_2 \in o_2$  a  $W_2A_2 \perp A_2C_2$ , dále  $b'_2 = P'_2W_2$  a konečně  $b_2 \parallel b'_2, T_2 \in b_2$ ; tím je v bodě  $T$  šroubovice  $h$  sestrojen kompletní doprovodný trojhran, tvořený tečnou  $t$ , hlavní normálou  $n$  a binormálou  $b$



□

### 3. Úlohy k samostatnému řešení

#### Kuželosečky

1. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko  $F_1$ , tečna  $t = TK$  s bodem dotyku  $T$  a délka  $a$  hlavní poloosy.

$$F_1[0; 0], T[-3; 2], K[3; -1], a = 4$$

2. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko  $F_1$ , tečny  $t_1 = K_1L_1, t_2 = K_2L_2$  a délka  $a$  hlavní poloosy.

$$F_1[-4; 0], K_1[4; 2], L_1[-1; -4], K_2[-5; 2], L_2[5; -4], a = 4$$

3. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko  $F_1$ , tečny  $t_1 = K_1L_1, t_2 = K_2L_2$  a excentricita  $e$ .

$$F_1[0; 0], K_1[6; 2], L_1[3; -4], K_2[-1; 6], L_2[8; -2], e = 3$$

4. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko  $F_1$  a tečny  $t_1 = K_1L_1, t_2 = K_2L_2, t_3 = K_3L_3$ .

$$a) F_1[0; 2], K_1[8; 2], L_1[3; -4], K_2[-1; 6], L_2[9; -4], K_3[-4; -7], L_3[-5; 8]$$

$$b) F_1[0; 2], K_1[5; 2], L_1[3; -4], K_2[-2; 5], L_2[9; -4], K_3[-4; -7], L_3[5; 8]$$

5. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko  $F_1$ , tečna  $t_1 = T_1R$  s bodem dotyku  $T_1$  a tečna  $t_2 = KL$ .

$$a) F_1[0; 0], T_1[4; 5], R[1; -4], K[-8; -3], L[-4; 2]$$

$$b) F_1[0; 0], T_1[4; 5], R[1; -4], K[-3; 2], L[9; -3]$$

6. Sestrojte hyperbolu, je-li dáno její ohnisko  $F_1$ , tečna  $t = KL$  a asymptota  $u = XY$ .

$$F_1[2; 0], K[-5; -2], L[3; 7], X[2; -8], Y[-4; 8]$$

7. Sestrojte kuželosečku, je-li dán její střed  $S$ , tečna  $t = KL$ , délka  $a$  hlavní poloosy a excentricita  $e$ .

$$a) S[0; 0], K[8; 2], L[3; -4], a = 6, e = 5$$

$$b) S[0; 0], K[8; 2], L[3; -4], a = 6, e = 7$$

8. Sestrojte kuželosečku, je-li dán její střed  $S$ , tečny  $t_1 = K_1L_1, t_2 = K_2L_2$  a délka  $a$  hlavní poloosy.

$$a) S[0; 0], K_1[7; 0], L_1[-2; -7], K_2[-2; 7], L_2[8; -2], a = 5$$

$$b) S[0; 0], K_1[4; 1], L_1[-3; -3], K_2[-5; 6], L_2[5; -3], a = 3$$

9. Sestrojte parabolu, která má řídicí přímku  $d = KL$ , parametr  $p$  a prochází bodem  $M$ .

$$M[0; 0], p = 3, K[-6; -4], L[-5; 4]$$

10. Sestrojte parabolu, která má ohnisko  $F$  a prochází body  $M_1, M_2$ .

$$F[0; 0], M_1[4; -3], M_2[1; 3]$$

## Šroubovice

1. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit levotočivé šroubovice, která má osu  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$ , výšku  $v$  závitu a prochází bodem  $A$ . V bodě  $T$  doplňte oskulační rovinu.

$$A[-4; 5; 0], R[0; 5; 0], v = 12, T[?; ?; 7]$$

2. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit pravotočivé šroubovice, která má osu  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$ , redukovanou výšku  $v_0$  závitu a prochází bodem  $A$ . V bodě  $A$  doplňte tečnu.

$$A[3; 7; 4], R[0; 6; 0], v_0 = 1,6$$

3. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit levotočivé šroubovice, která má osu  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$ , sklon  $\alpha$  a prochází bodem  $A$ .

$$A[2; 6; 0], R[0; 4; 0], \alpha = 30^\circ$$

4. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit šroubovice, je-li dána její osa  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$ , a tečna  $t = PN$ . V bodě dotyku doplňte oskulační rovinu.

$$R[0; 5; 0], P[2; 10; 0], N[7; 0; 4]$$

5. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit šroubovice, která má osu  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$ , a oskulační rovinu  $\omega$  v bodě  $T$ . V bodě  $T$  doplňte binormálu.

$$R[0; 4; 0], \omega(8; 9; 4), T[2; ?; ?]$$

6. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit šroubovice, která má osu  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$ , redukovanou výšku  $v_0$  závitu a oskulační rovinu  $\omega$ .

$$R[-4; 4; 0], \omega(8; 9; 4), v_0 = 1,5$$

# Plochy

## Tematický obsah

- Šroubové plochy
  - Schodová plocha v Mongeově promítání
  - Vývrtková plocha v Mongeově promítání
  - Rozvinutelná šroubová plocha v Mongeově promítání
- Rotační plochy
  - Anuloid v Mongeově promítání
  - Rotační kvadriky
    - \* Rotační paraboloid v kolmém promítání na nárysnu, Rotační jednodílný (zborcený) hyperboloid v Mongeově promítání
- Průniky ploch a těles
  - Rovinné řezy ploch a těles
    - \* Řez kosého čtyřbokého hranolu, Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu, Řez rotačního válce (vše v pravoúhlé axonometrii)
    - \* Řez zploštělého elipsoidu v Mongeově promítání
  - Průnik přímky s plochou či tělesem
    - \* Průnik přímky s kosým kruhovým kuzelem, Průnik přímky s kosým kruhovým válcem (vše v pravoúhlé axonometrii)
  - Průniky rotačních ploch
    - \* Průnik vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta s rovnoběžnými osami – metoda rovnoběžných rovin)
    - \* Průnik vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta s různoběžnými osami – metoda soustředných kulových ploch)
- Úlohy k samostatnému řešení

# 1. Šroubové plochy



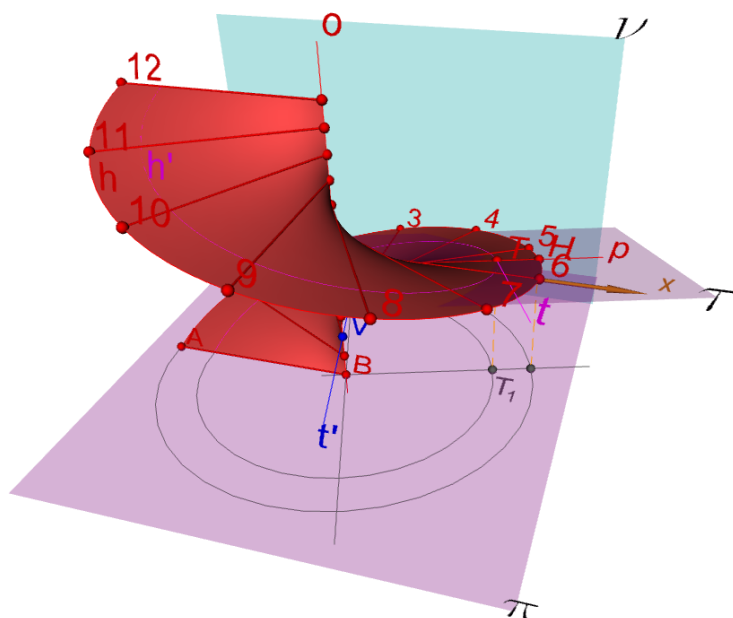
## Výklad

- **šroubová plocha** vznikne **šroubovým pohybem** nějaké tzv. tvořící **křivky** (rovinné nebo prostorové)
- **šroubovým pohybem** rozumíme složení rotace kolem pevné osy  $o$  a posunu ve směru této osy, přičemž oba pohyby jsou na sobě přímo úměrně (jinak řečeno lineárně) závislé; tj. např. dvojnásobnému otočení odpovídá dvojnásobné posunutí apod.
- šroubovým pohybem  **bodu**  vznikne **šroubovice**
- pro zadání šroubového pohybu budeme obvykle potřebovat tyto tři údaje: osu  $o$  šroubového pohybu, jeho orientaci (pravotočivou nebo levotočivou) a výšku  $v$  jednoho závitu, případně alternativně redukovanou výšku  $v_0$  závitu
- šroubováním libovolného bodu dané tvořící křivky vzniká tzv. **rovnoběžková šroubovice** příslušné šroubové plochy
- tečná rovina v obecném bodě  $M$  šroubové plochy je určena podle obecného principu tečnami ke dvěma křivkám, které leží na dané ploše a procházejí daným bodem  $M$ ; u šroubové plochy je jednou z těchto křivek obvykle daná tvořící křivka vyšroubovaná tak, aby procházela bodem  $M$ , a druhou je příslušná rovnoběžková šroubovice jdoucí bodem  $M$
- rovina kolmá k ose šroubového pohybu protíná danou šroubovou plochu v tzv. **normálovém řezu**
- protíná-li šroubovaná křivka osu šroubového pohybu, pak se vzniklá plocha nazývá **uzavřená**, v opačném případě je **otevřená**
- v praxi se nejčastěji vyskytují **přímkové** šroubové plochy, které vznikají šroubováním přímky nebo její části, a **cyklické** šroubové plochy, u nichž je šroubovanou křivkou kružnice nebo její část

## 1.1. Schodová plocha v Mongeově promítání

### Výklad

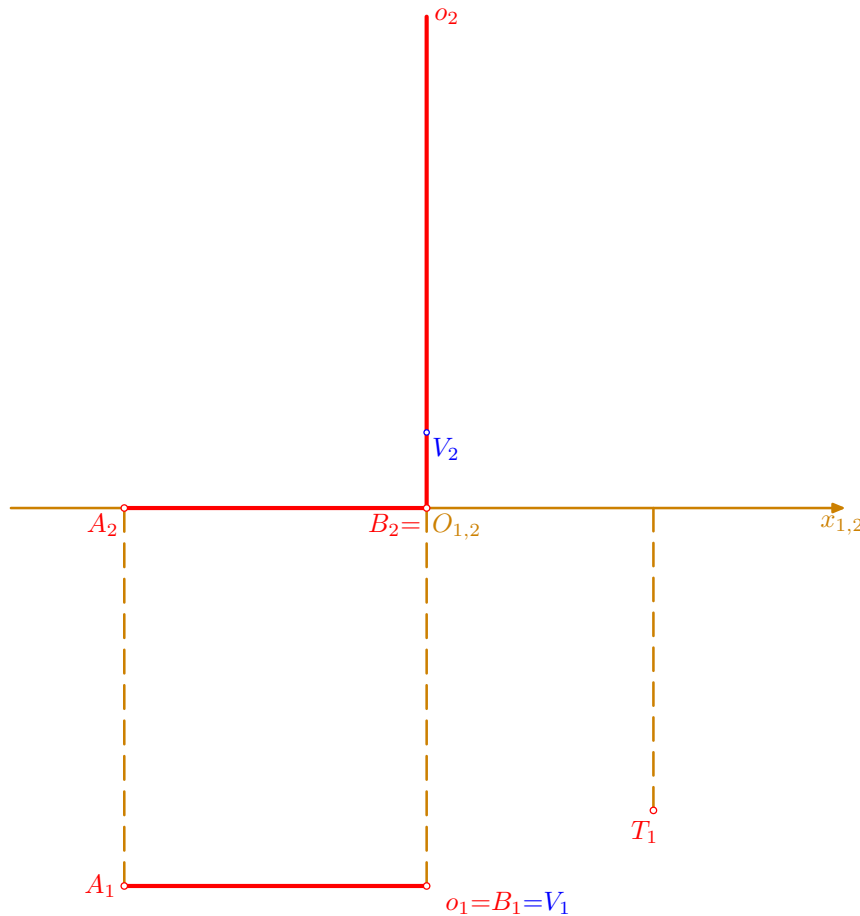
- schodová plocha vznikne šroubováním přímky (nebo její části), která je kolmá k ose šroubového pohybu a protíná ji, proto ji lze nazvat také **pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha**
- tato plocha patří také mezi tzv. zborčené plochy, a můžeme ji najít i pod názvem **přímý šroubový konoid** nebo zkráceně **helikoid**
- různé varianty schodové plochy nacházejí uplatnění především ve stavebnictví (spodní strana točitých schodišť), v architektuře i ve strojní praxi (různé druhy šroubů apod.)



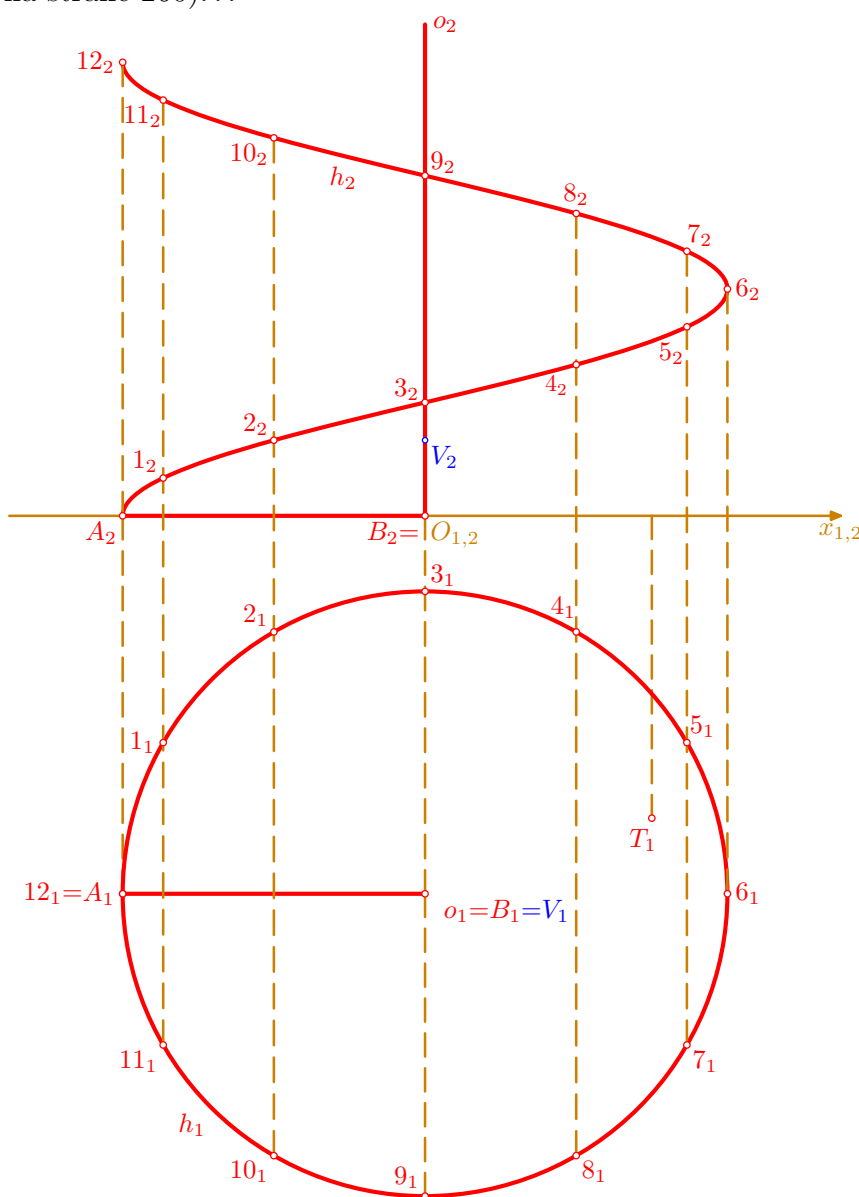
### Řešené úlohy

**Příklad:** V Mongeově promítání zobrazte jeden závit schodové plochy, která vznikne šroubováním úsečky  $AB$  ve šroubovém pohybu, jenž má osu  $o \perp \pi$ ,  $B \in o$ , redukovanou výšku  $v_0$  závitu a levotočivou orientaci; v bodě  $T$  plochy doplňte tečnou rovinu  $\tau$ ;  $A[-4; 5; 0]$ ,  $B[0; 5; 0]$ ,  $v_0 = 1$ ,  $T[3; 4; ?]$ .

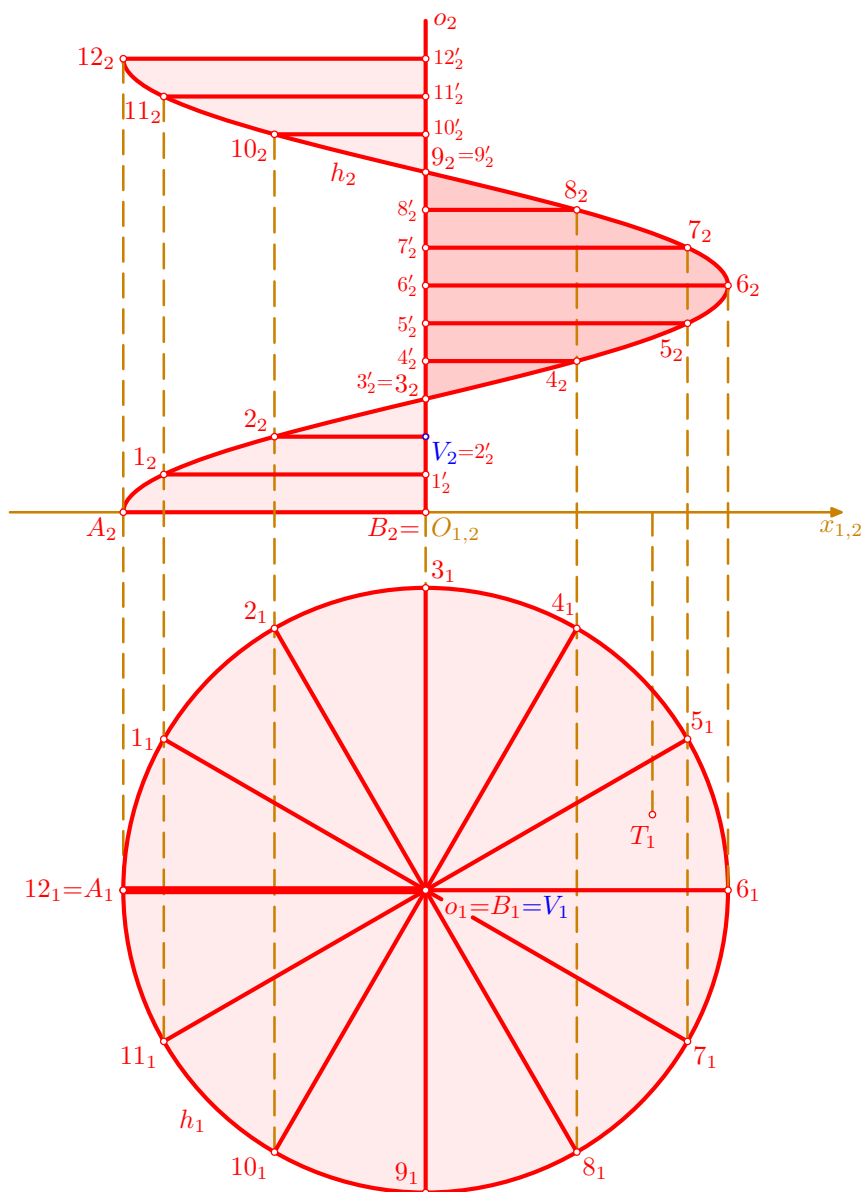
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2$  a  $B_1, B_2$  (kde  $B_2 = O_{1,2}$ ) krajních bodů úsečky  $AB$ , vytáhněme silněji její půdorys  $A_1B_1$  i nárys  $A_2B_2$ ; půdorysem osy  $o \perp \pi, B \in o$ , je bod  $o_1 = B_1$ , pro její nárys  $o_2$  platí  $o_2 \perp x_{1,2}$  a  $B_2 \in o_2$ ; dále doplňme sdružené průměty  $V_1, V_2$  vrcholu  $V \in o, |V\pi| = v_0$ , kuželové plochy tečen daného šroubového pohybu, pro jehož půdorys platí  $V_1 = B_1 = o_1$  a pro nárys je  $V_2 \in o_2, |V_2x_{1,2}| = v_0 = 1$ ; nakonec k zadání patří ještě půdorys  $T_1$  bodu  $T$



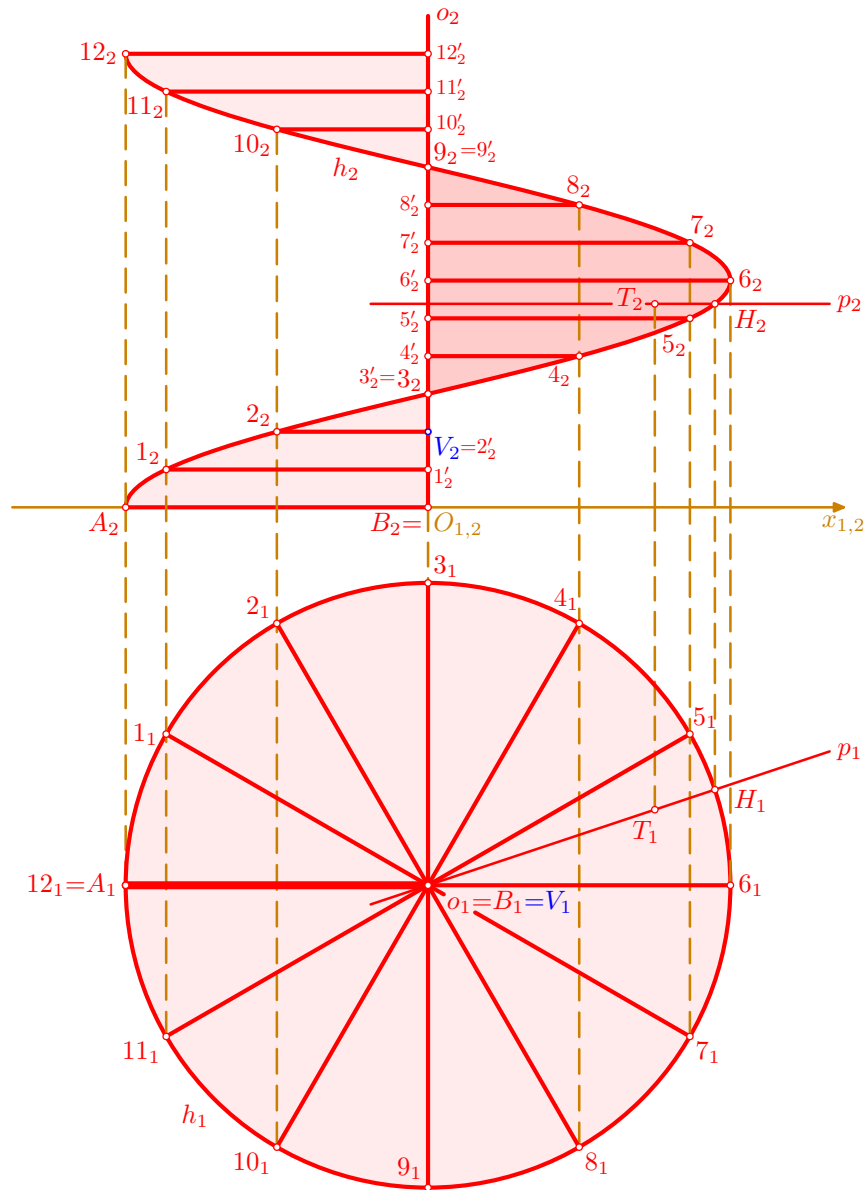
- nejprve sestrojme sdružené průměty  $h_1, h_2$  levotočivé šroubovice  $h$ , která vznikne šroubováním bodu  $A$  v daném šroubovém pohybu; půdorysem této šroubovice  $h$  je kružnice  $h_1(B_1, r = |B_1A_1|)$ , nárys  $h_2$  sestrojíme pomocí nárysů  $1_2, 2_2, \dots, 12_2$  dělicích bodů  $1, 2, \dots, 12$  šroubovice  $h$  ležících v příslušných dvanáctinách výšky  $v$  závitu; tuto výšku  $v$  určíme pouze přibližně ze vztahu  $v = 2\pi v_0$  dosti hrubým zaokrouhlením  $\pi \doteq 3$ , a tedy  $v \doteq 6v_0 = 6$ ; dopustíme se tím jisté nepřesnosti, což se ale na výsledku znatelně neprojeví; jinak bychom mohli výšku  $v$  závitu sestrojít z charakteristického trojúhelníka šroubovice  $h$ , analogicky, jako je to provedeno v příkladě **Šroubovice v Mongeově promítání** (viz na straně 260)...



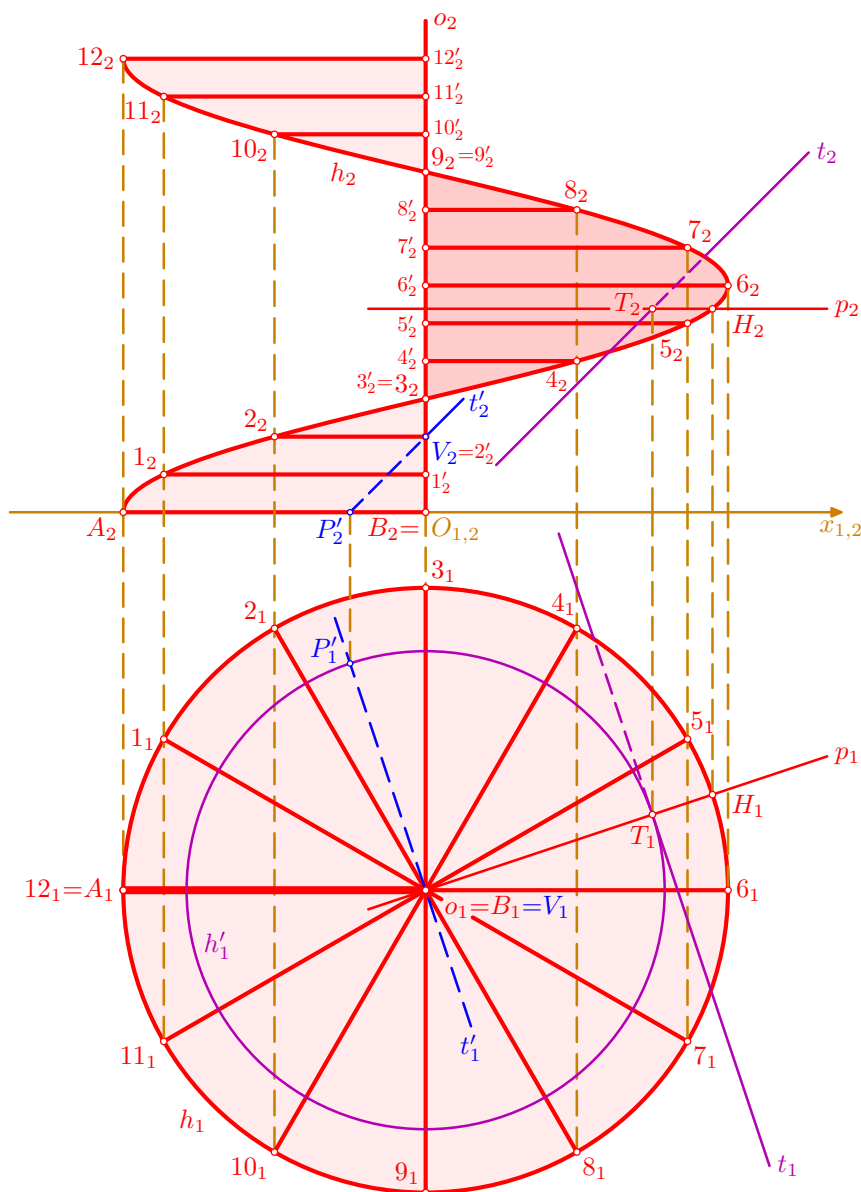
- protože bod  $B$  leží na ose  $o$ , redukuje se jeho šroubování pouze na posun ve svislém směru; sestrojme tedy na přímce  $o_2$  nárysy  $1'_2, 2'_2, \dots, 12'_2$  bodů  $1', 2', \dots, 12' \in o$  (jejich půdorysy splývají s bodem  $o_1$  a v obrázku nejsou popsány), které leží v odpovídajících výškách jako body  $1, 2, \dots, 12$  šroubovice  $h$ ; tím dostáváme sdružené průměty dalších dvanácti poloh  $11', 22', \dots, 12 12'$  vyšroubované dané úsečky  $AB$ ; v půdoryse jsou to jednotlivé poloměry kružnice  $h_1$ , v náryse pak rovnoběžky s osou  $x_{1,2}$ , ovšem s výjimkou nárysů úseček  $33', 99'$  – ty jsou kolmé k nárysně  $\nu$  a zobrazí se jako body  $3_2 = 3'_2, 9_2 = 9'_2$ ; světlejším odstínem výplně je naznačena viditelnost horní strany plochy, tmavší odstín vyplňuje tu část nárysu, kde je vidět spodní strana plochy



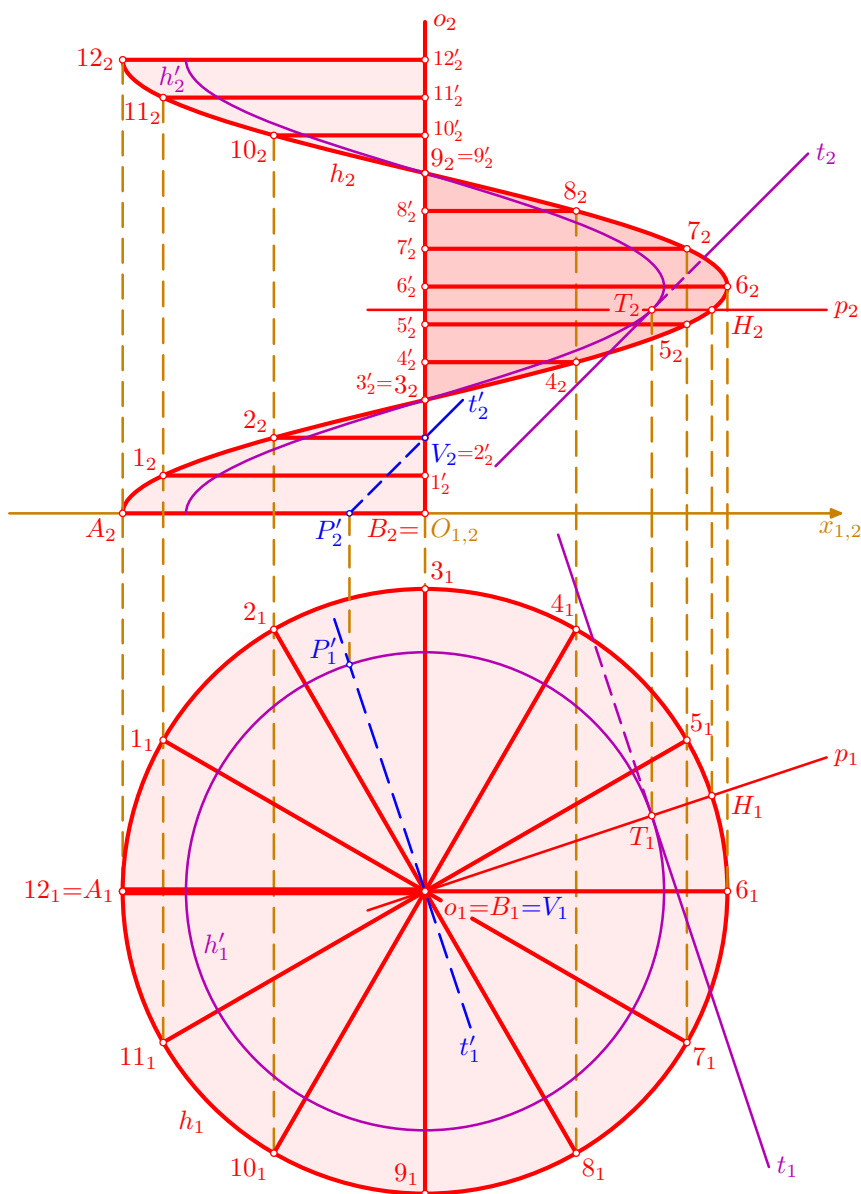
- určíme bod  $T$  na ploše, tj. sestrojme jeho nárys  $T_2$ : přímka  $p_1 = B_1T_1$  je půdorysem tvořící přímky  $p$ , která leží na uvažované schodové ploše; polopřímka  $B_1T_1$  protíná kružnici  $h_1$  v bodě  $H_1$ , jenž je půdorysem bodu  $H$  ležícího na sestrojené šroubovici  $h$ ; příslušný nárys  $H_2$  najdeme na ordinále a na zobecněné sinusoidě  $h_2$  (mezi  $5_2$  a  $6_2$ , což odečteme z půdorysu); nyní již můžeme doplnit nárys  $p_2 \parallel x_{1,2}, H_2 \in p_2$ , přímky  $p$  a na něm pomocí příslušné ordinály nárys  $T_2 \in p_2$  bodu  $T \in p$



- tečná rovina  $\tau$  v bodě  $T$  plochy musí procházet přímkou  $p$  a dourčíme ji pomocí tečny  $t$  sestrojené v bodě  $T$  ke šroubovici  $h'$ , která vznikne šroubováním bodu  $T$  v daném šroubovém pohybu: půdorysem této šroubovice  $h'$  je kružnice  $h'_1(B_1, r' = |B_1T_1|)$ , půdorysem tečny  $t$  je tečna  $t_1$  ke kružnici  $h'_1$  v bodě  $T_1$ ; otočíme bod  $T_1$  po kružnici  $h'_1$  o  $90^\circ$  proti směru stoupání daného šroubového pohybu do bodu  $P'_1$  a sestrojíme půdorys  $t'_1 = P'_1V_1$  přímky  $t' = P'V$ , která leží na příslušné kuželové ploše tečen a je tedy rovnoběžná s hledanou přímkou  $t$ ; nárys  $P'_2$  najdeme na ordinále a na ose  $x_{1,2}$ , sestrojíme přímku  $t'_2 = P'_2V_2$  a následně nárys  $t_2$  tečny  $t$ , kde  $t_2 \parallel t'_2, T_2 \in t_2$ ; takto je tečná rovina  $\tau = pt$  jednoznačně určena, její stopy nebudeme sestrojovat



- na závěr můžeme doplnit nárys  $h'_2$  šroubovice  $h'$  (pro samotné řešení úlohy to ovšem není nezbytně nutné): konstrukci provedeme snadno pomocí ordinál vedených z průsečíků úseček  $A_1B_1, 1_1B_1, 2_1B_1, \dots, 12_1B_1$  s kružnicí  $h'_1$  na příslušné úsečky  $A_2B_2, 1_21'_2, 2_22'_2, \dots, 12_212'_2$  v náryse – pro větší přehlednost nejsou tyto ordinály v obrázku narýsovány, čtenář si je může zkusit doplnit sám; poznamenejme ještě, že sestrojená tvořící přímka  $p = HT$  schodové plochy je současně hlavní normálou šroubovice  $h'$  v jejím bodě  $T$  a tečná rovina  $\tau = pt$  je tedy oskulační rovinou zmíněné šroubovice  $h'$  v tomto bodě



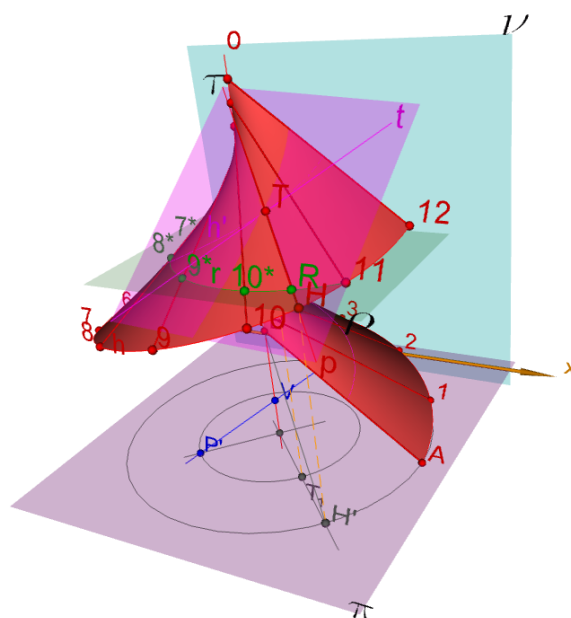
□

## 1.2. Vývrtková plocha v Mongeově promítání



### Výklad

- vývrtková plocha vznikne šroubováním přímky (nebo její části), která protíná osu šroubového pohybu a není k ní kolmá, proto ji lze nazvat také **kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha**
- různé varianty vývrtkové plochy nacházejí uplatnění ve strojní praxi (různé druhy šroubů apod.), ve stavebnictví i v architektuře

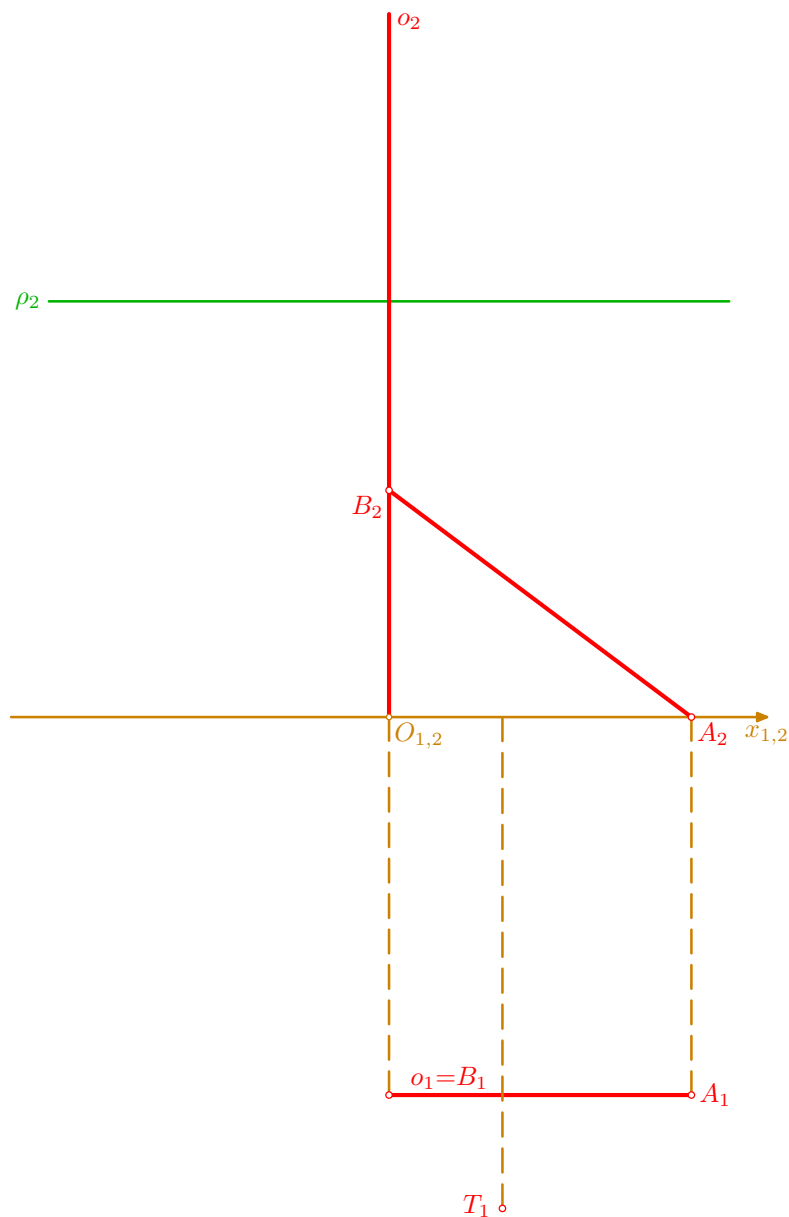


### Řešené úlohy

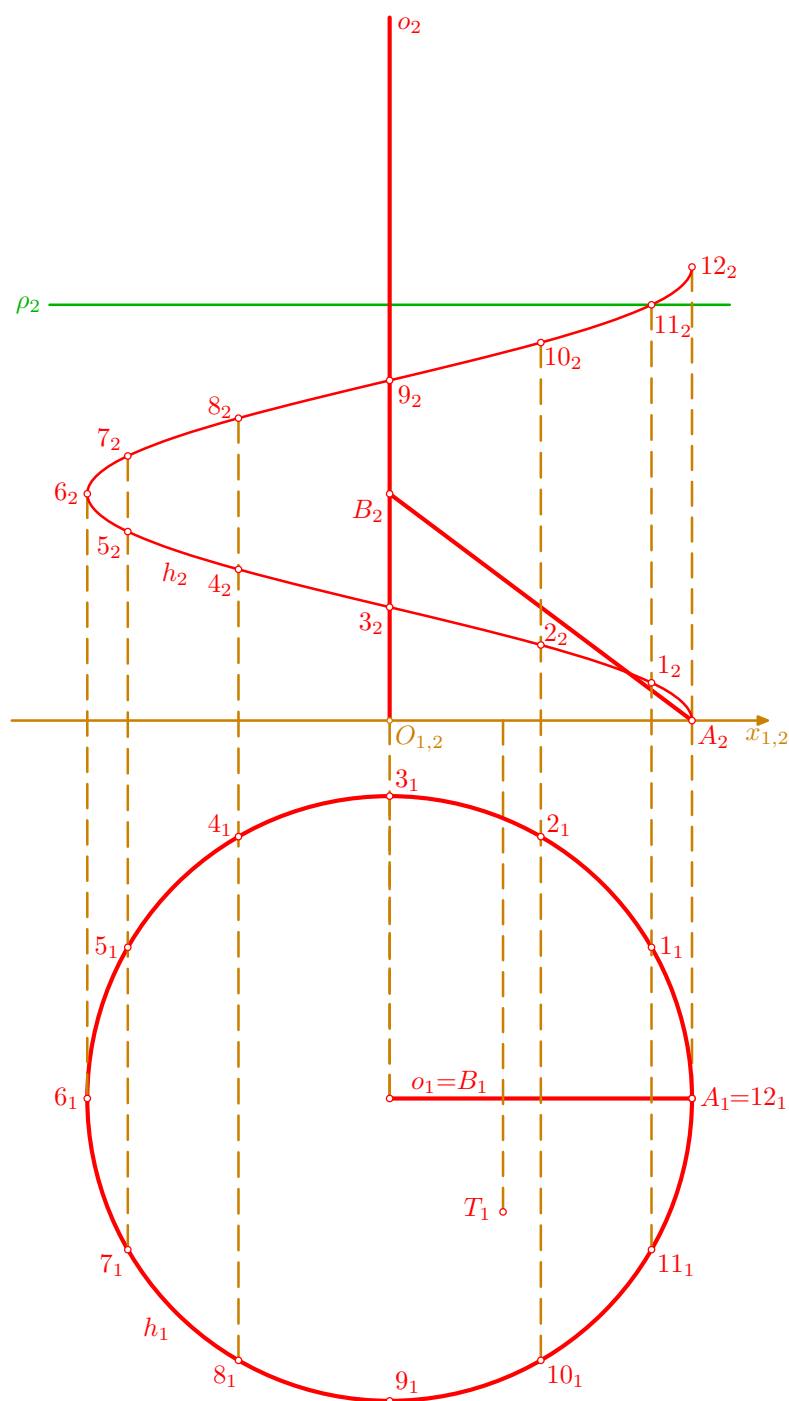
**Příklad:** V Mongeově promítání zobrazte jeden závit vývrtkové plochy, která vznikne šroubováním úsečky  $AB$  ve šroubovém pohybu, jenž má osu  $o \perp \pi$ ,  $B \in o$ , výšku  $v$  závitu a pravotočivou orientaci; v bodě  $T$  plochy doplňte tečnou rovinu  $\tau$  a sestrojte normálový řez plochy rovinou  $\rho$ ;  $A[4; 5; 0]$ ,  $B[0; 5; 3]$ ,  $v = 6$ ,  $T[1; 5; 6; 5; ?]$ ,  $\rho(\infty; \infty; 5; 5)$ .

Řada konstrukčních kroků je v tomto příkladě stejných nebo velmi podobných jako v předchozích příkladech **Šchodová plocha v Mongeově promítání** (viz stranu 275) a **Šroubovice v Mongeově promítání** (viz stranu 260), kde jsou tyto podrobně popsány; díky tomu (a také z důvodu úspory místa) jsou následující konstrukce vysvětleny poněkud stručněji. . .

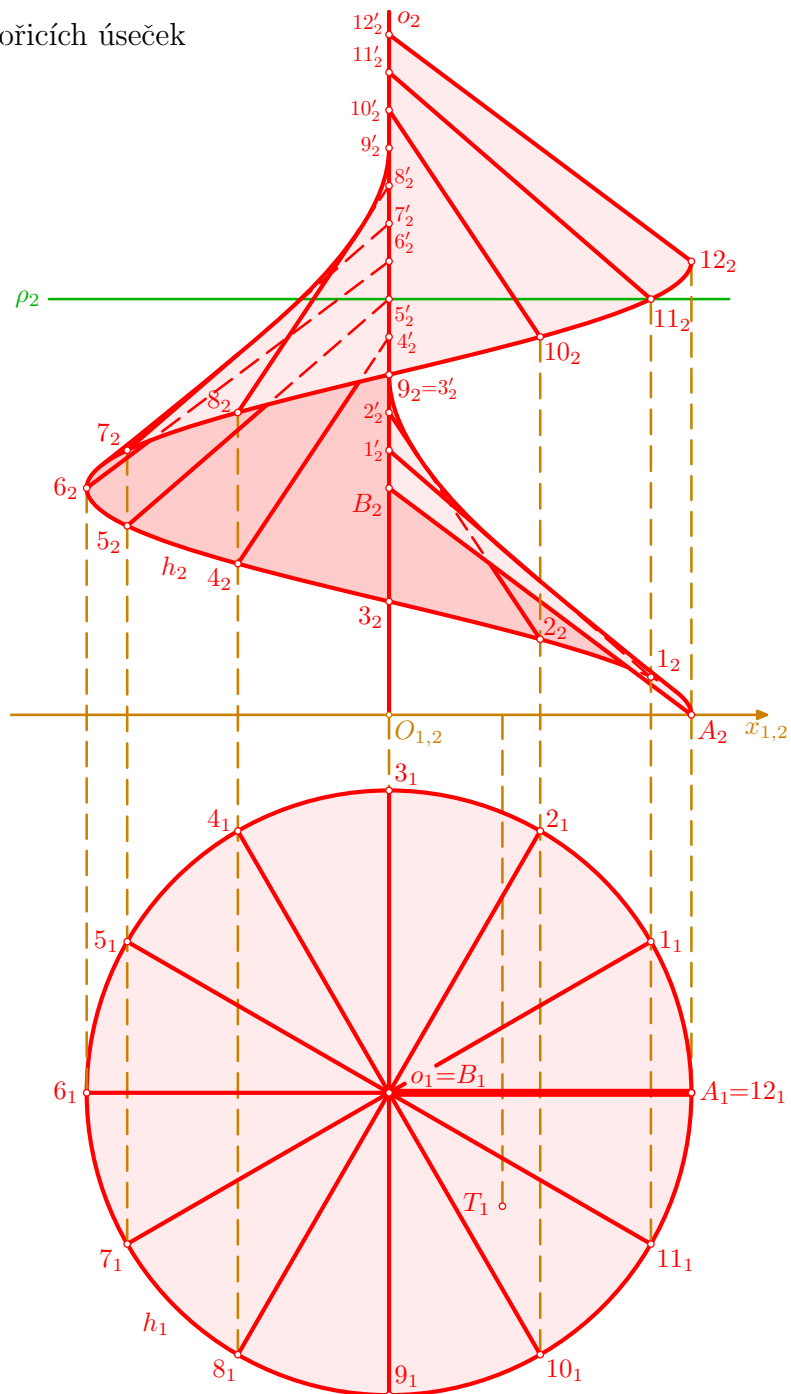
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1B_1$  a  $A_2B_2$  úsečky  $AB$ ; půdorysem osy  $o \perp \pi, B \in o$ , je bod  $o_1 = B_1$ , pro její nárys  $o_2$  platí  $o_2 \perp x_{1,2}$  a  $B_2 \in o_2$ ; dále doplníme půdorys  $T_1$  bodu  $T$  a nárys  $\rho_2 \parallel x_{1,2}$  roviny  $\rho$  normálového řezu sestrojované vývrtkové plochy



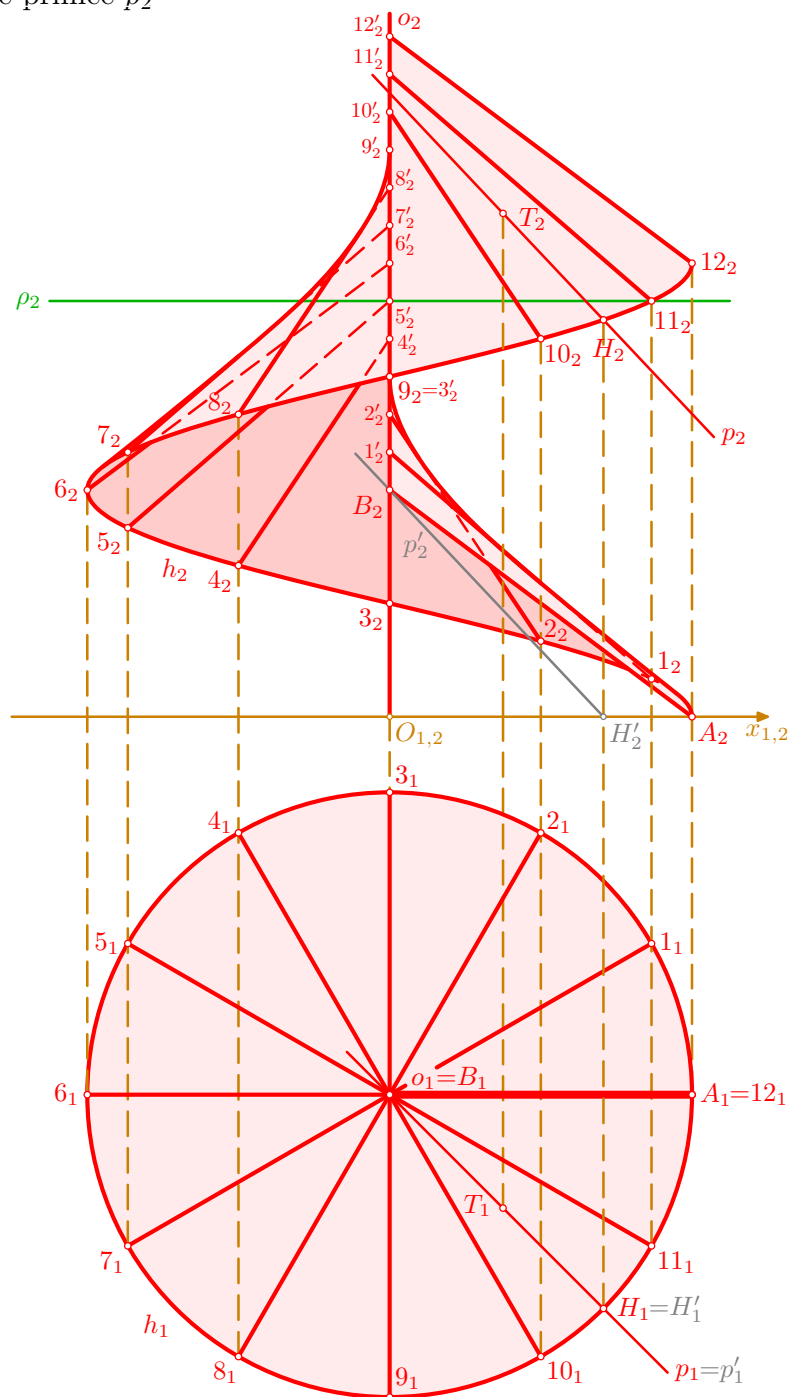
- nejprve sestrojme sdružené průměty  $h_1, h_2$  pravotočivé šroubovice  $h$ , která vznikne šroubováním bodu  $A$  v daném šroubovém pohybu; půdorysem této šroubovice  $h$  je kružnice  $h_1(B_1, r = |B_1A_1|)$ , nárys  $h_2$  (vytažen jen slabě kvůli viditelnosti v dalších krocích) sestrojíme pomocí nárysů  $1_2, 2_2, \dots, 12_2$  dělicích bodů  $1, 2, \dots, 12$  šroubovice  $h$  ležících v příslušných dvanáctinách výšky  $v$  závitu



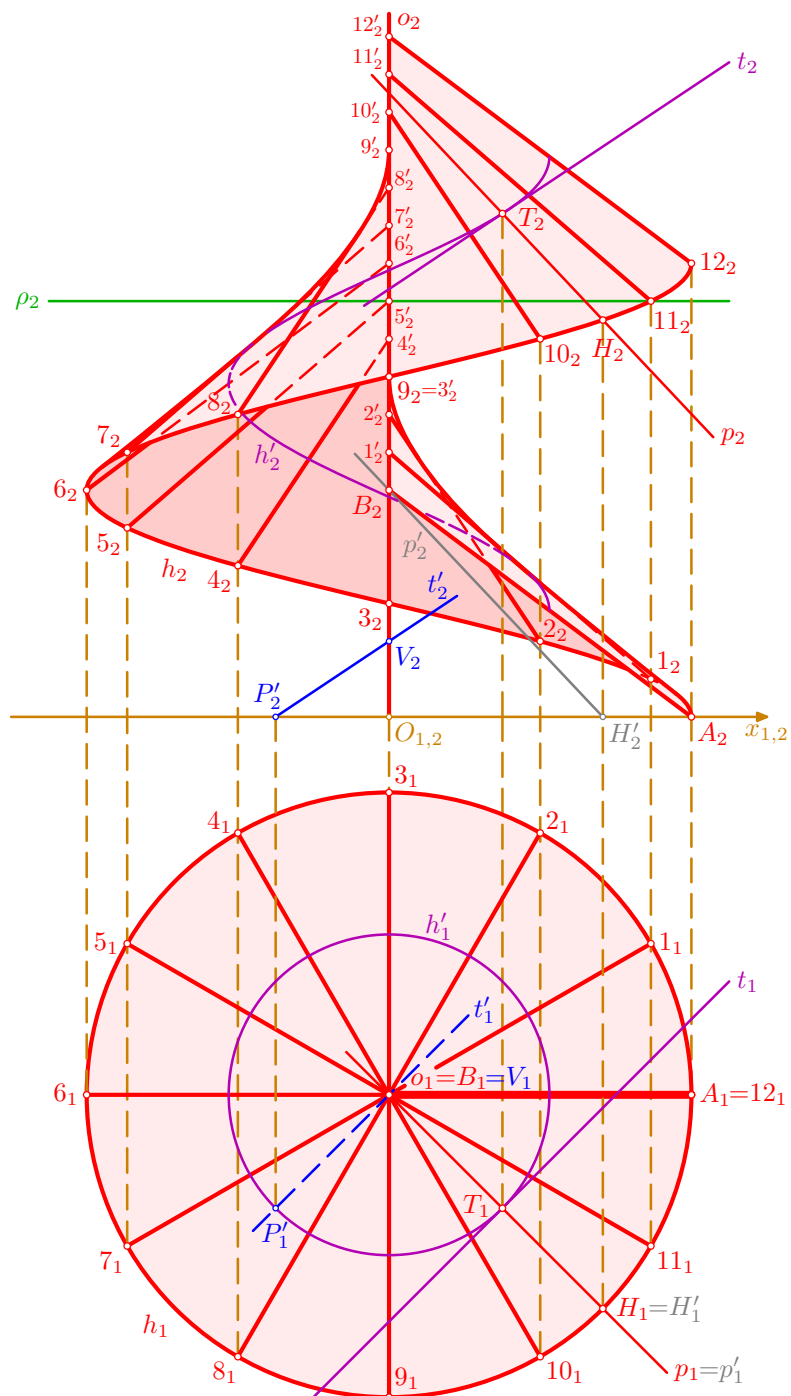
- šroubování bodu  $B$  se redukuje pouze na posun ve svislém směru, sestrojme nárysy  $1'_2, 2'_2, \dots, 12'_2$  bodů  $1', 2', \dots, 12' \in o$ , z nichž každý další je o  $\frac{v}{12} = 0,5$  výše než-li předchozí; tím dostáváme sdružené průměty dalších dvanácti poloh  $11'_2, 22'_2, \dots, 12_2 12'_2$  vyšroubované dané úsečky  $AB$ ; v náryse zkusme doplnit obrys: na pravé straně vychází z bodu  $3'_2$ , dotýká se úseček  $2_2 2'_2, 1_2 1'_2$  a hladce se napojuje na křivku  $h_2$  někde mezi body  $1_2, A_2$ , analogicky zleva; vzhledem k těmto křivkám je pak v náryse vytažena viditelnost příslušných tvořicích úseček



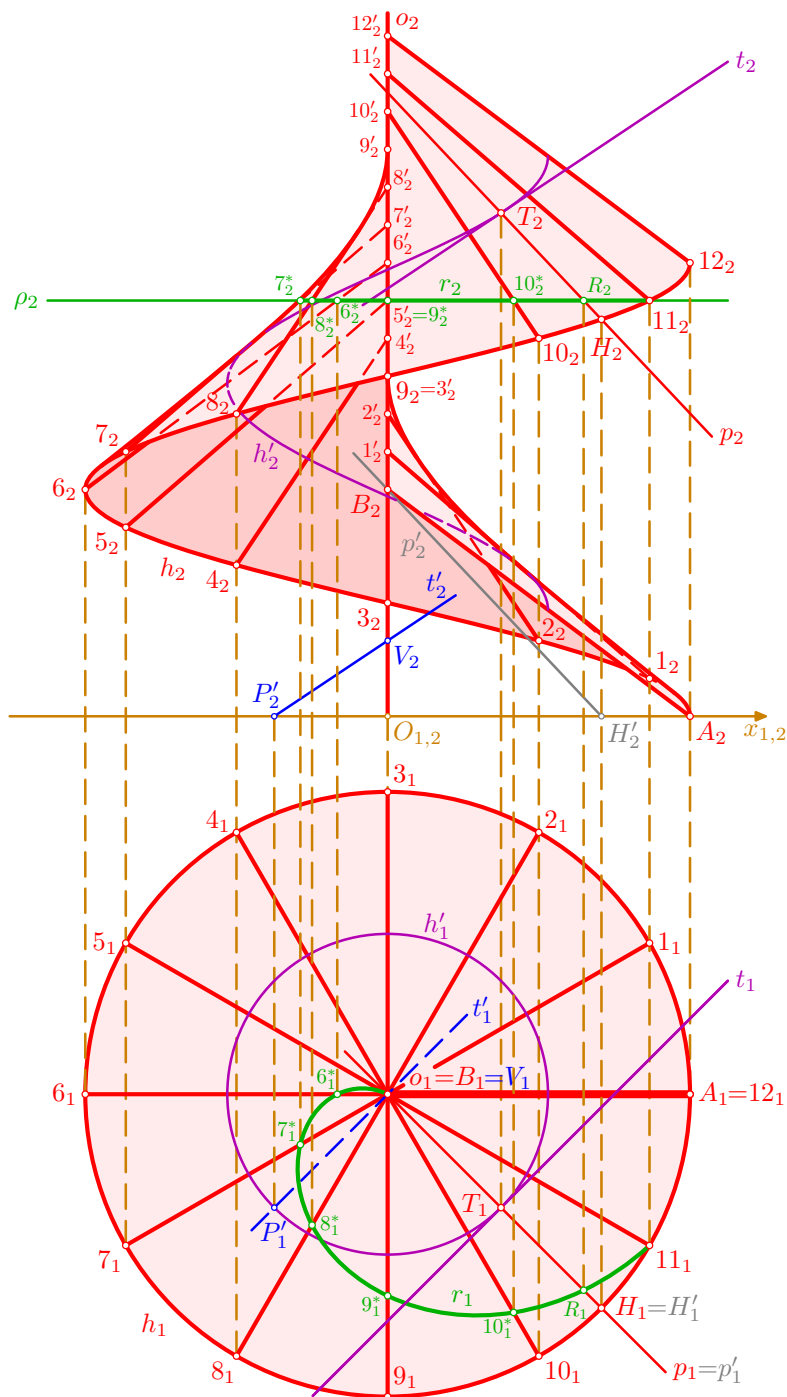
- přímka  $p_1 = B_1T_1$  je půdorysem tvořící přímky  $p$ , na níž bod  $T$  leží; polopřímka  $B_1T_1$  protíná kružnici  $h_1$  v bodě  $H_1$ , příslušný nárys  $H_2$  najdeme na ordinále a na křivce  $h_2$  (mezi body  $10_2, 11_2$ ); pro přímku  $p$  pak platí  $H \in p$  a  $p \parallel p'$ , kde  $p' = H'B$  ( $H' = H_1$ ), odtud v náryse  $H_2 \in p_2$  a  $p_2 \parallel p'_2$ , kde  $p'_2 = H'_2B_2$ ; nárys  $T_2$  bodu  $T$  doplníme na ordinále a na sestrojené přímce  $p_2$



- tečná rovina  $\tau$  v bodě  $T$  plochy musí procházet přímkou  $p$  a dourčíme ji pomocí tečny  $t$  sestrojené v bodě  $T$  šroubovice  $h'$ , která vznikne šroubováním bodu  $T$  v daném šroubovém pohybu; tečnu  $t$  sestrojíme standardně pomocí přímky  $t' = P'V$ , kde bod  $V$  leží na ose  $o$  v redukované výšce  $v_0$  závitů nad půdorysnou (pro konstrukci použijeme zaokrouhlenou hodnotu  $v_0 = \frac{v}{2\pi} \doteq \frac{v}{6} = 1$ ) a bod  $P'$  dostaneme otočením bodu  $T_1$  po kružnici  $h'_1$  o  $90^\circ$  proti směru stoupání daného šroubového pohybu



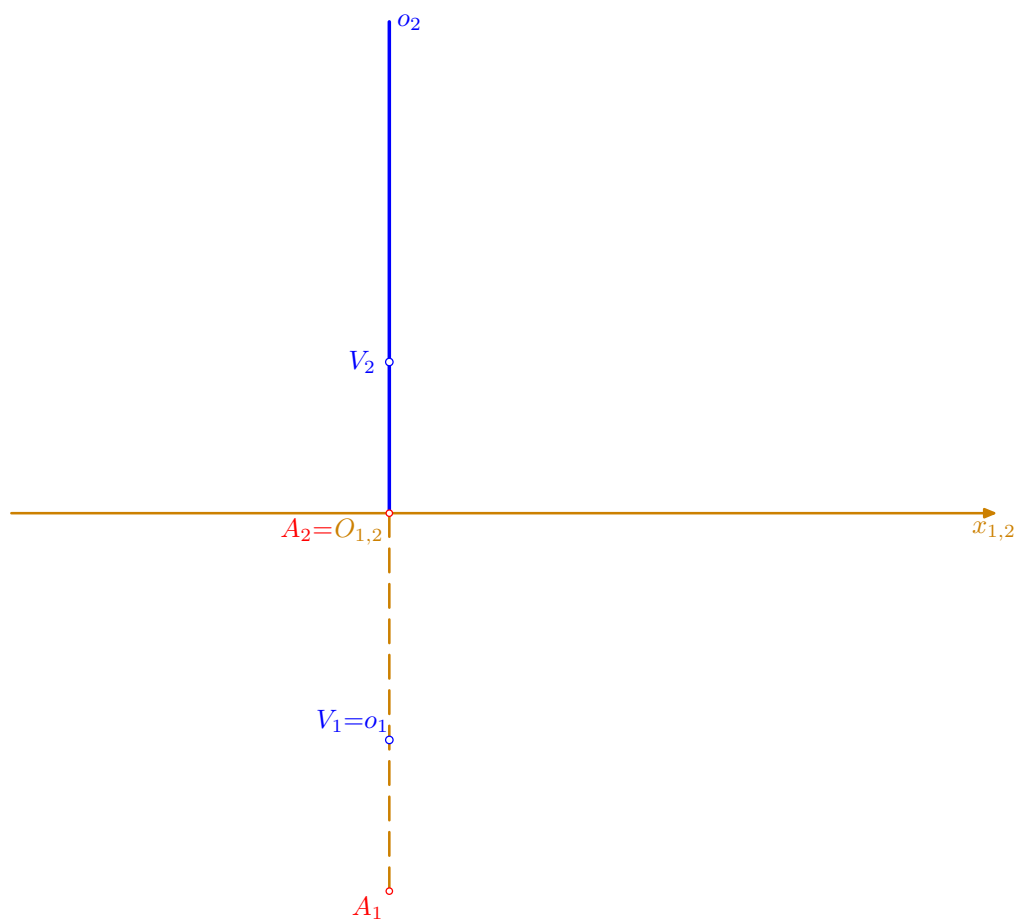
- na závěr sestrojíme bodově křivku  $r$  normálového řezu plochy danou rovinou  $\rho$ ; tvořící přímka  $p$  protíná rovinu  $\rho$  v bodě  $R$ : v náryse je  $R_2 = p_2 \cap \rho_2$ , půdorys  $R_1 \in p_1$  doplníme na ordinále; analogicky sestrojíme sdružené průměty průsečíků  $6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*$  dalších tvořících úseček  $66', 77', 88', 99', 10 10'$  s rovinou  $\rho$ ; dá se ukázat, že řezná křivka  $r$ , jejímž jedním krajním bodem je průsečík  $5' = o \cap \rho$  a druhým bod  $11 \in h$ , je tzv. **Archimedova spirála**



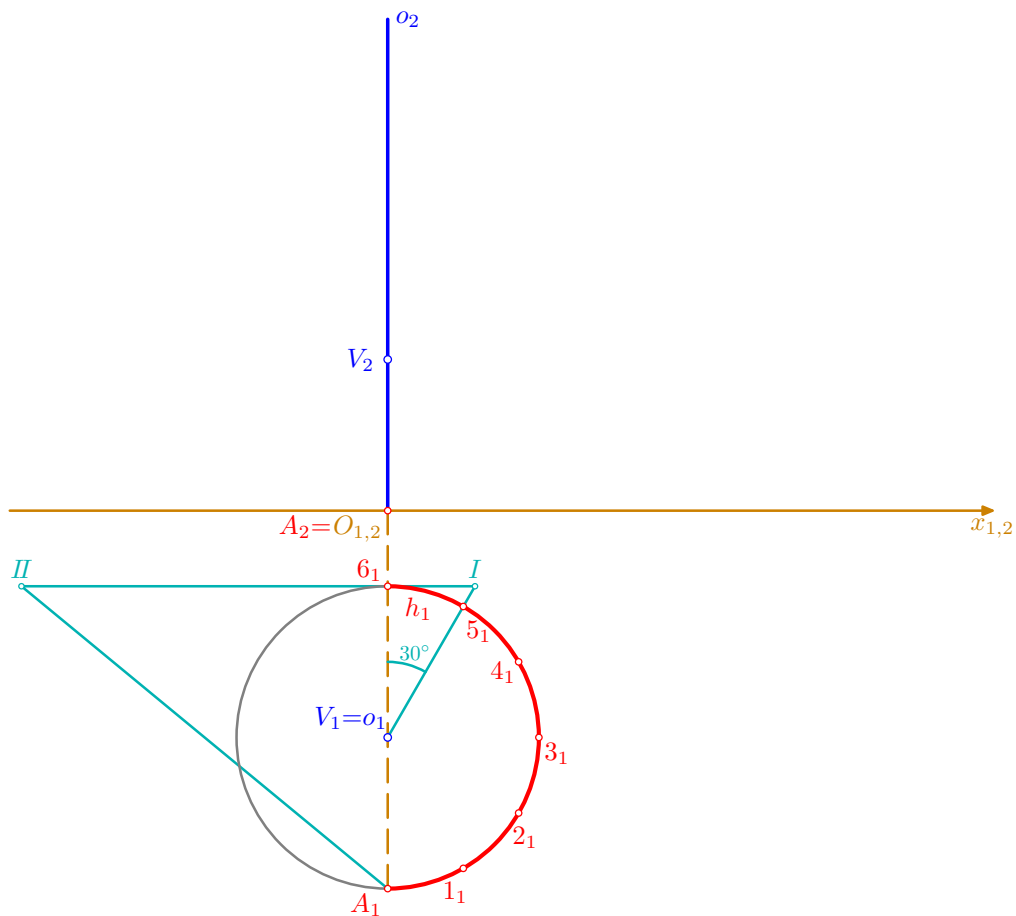
□



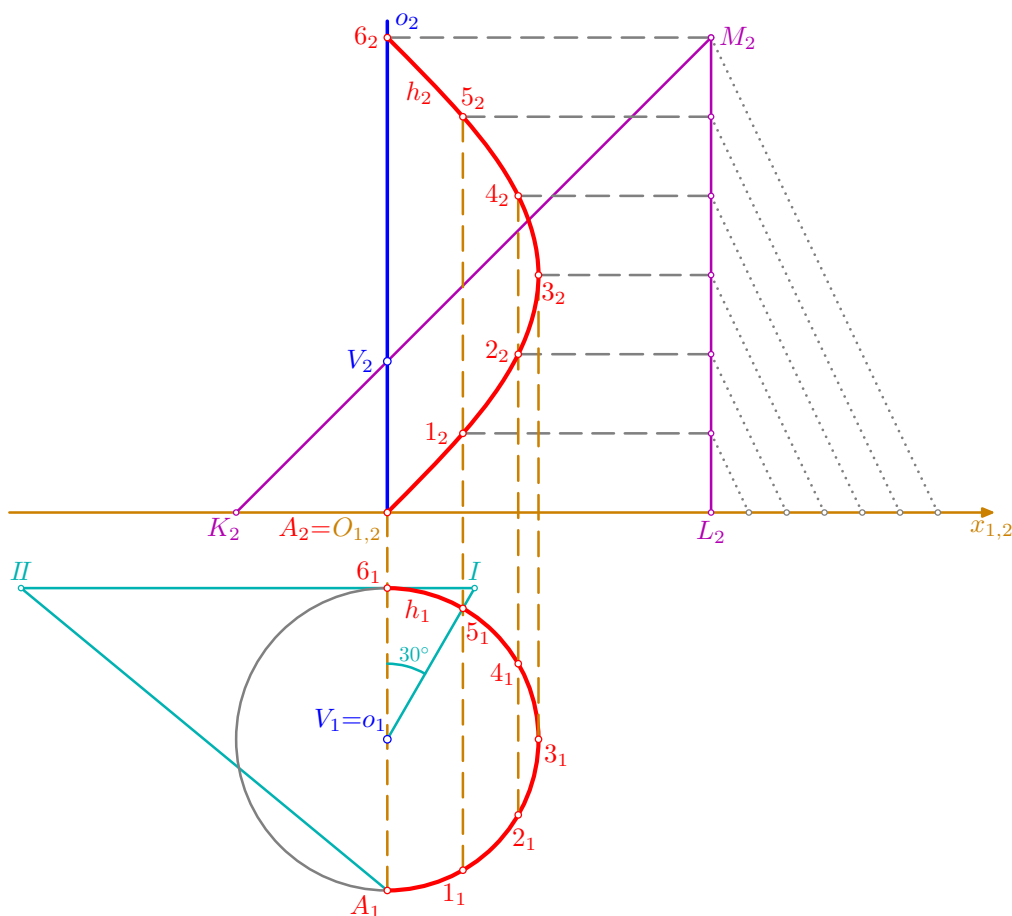
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $A_1, A_2$  (kde  $A_2 = O_{1,2}$ ) a  $V_1, V_2$  daných bodů  $A, V$ ; půdorysem osy  $o \perp \pi, V \in o$ , je bod  $o_1 = V_1$ , jejím nárysem je přímka  $o_2 = A_2V_2$



- hranou vratu plochy je pravotočivá šroubovice  $h$ , která vznikne šroubováním bodu  $A$  kolem osy  $o$  při redukované výšce  $v_0 = z_V = 2$  závitů; půdorysem šroubovice  $h$  je kružnice  $h_1(V_1, r = |V_1A_1|)$ , na níž můžeme sestrojít půdorysy  $1_1, 2_1, \dots, 6_1$  (od bodu  $A_1$  po  $30^\circ$  proti směru hodinových ručiček) dalších šesti bodů  $1, 2, \dots, 6$ , které leží na konstruované polovině závitů šroubovice  $h$ ; abychom mohli v následujícím kroku zjistit délku poloviny výšky  $v$  závitu, nachystejme si ještě v půdoryse délku poloviny kružnice  $h_1$ : podle Kochaňského rektifikace sestrojme na tečně kružnice  $h_1$  v bodě  $6_1$  pomocné body  $I, II$ , kde  $|III| = 3r$ , a získáme tak, s malou chybou, hledanou délku  $\pi r \doteq |IIA_1|$

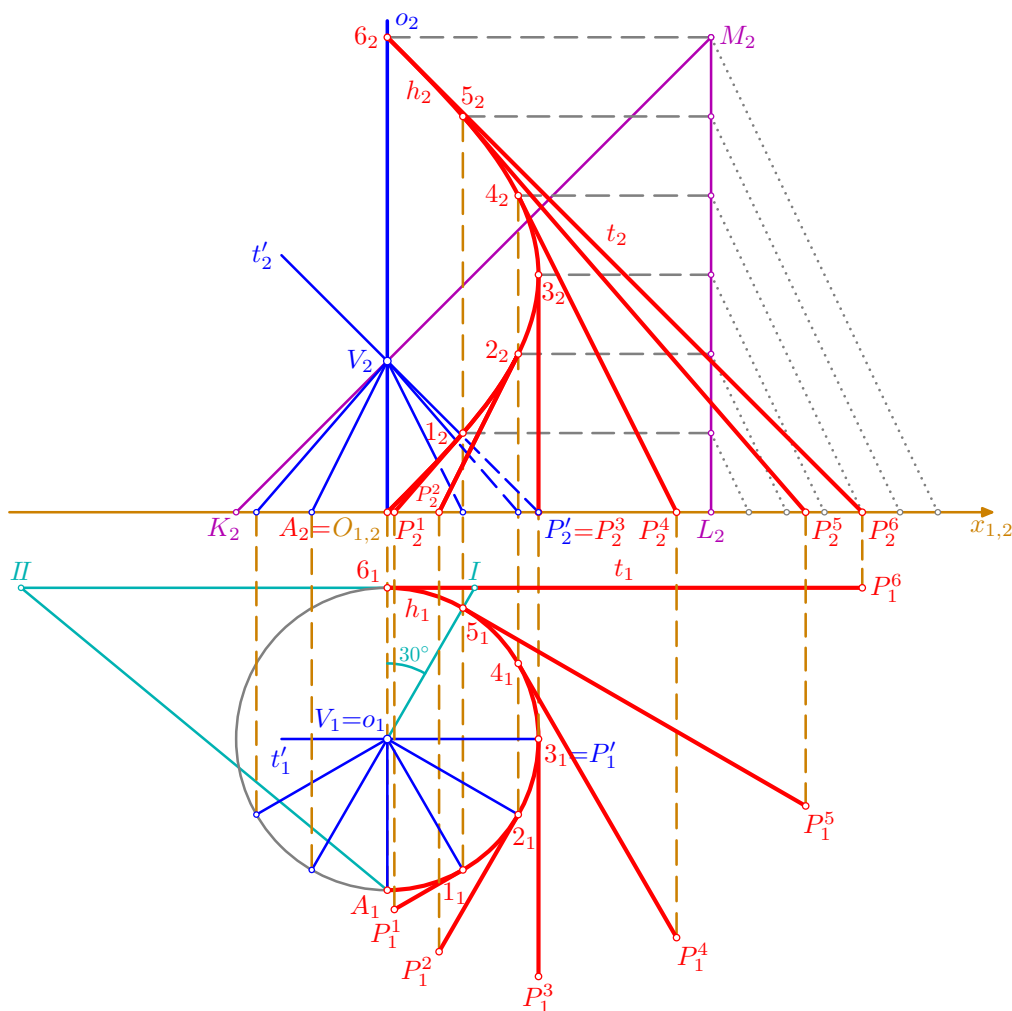


- nejprve určíme polovinu a následně dvanáctinu výšky  $v$  závitu, a to pomocí charakteristického trojúhelníka  $KLM$  šroubovice  $h$ ; na ose  $x_{1,2}$  nanese délku  $r = |V_1A_1| = 2$  doleva od bodu  $A_2$  a takto získaný koncový bod označme  $K_2$ ; od něj směrem doprava (opět na ose  $x_{1,2}$ ) nanese délku  $|IIA_1| \doteq \pi r$  (zjištěnou v předchozím kroku) a krajní bod označme  $L_2$ ; třetí vrchol  $M_2$  nárysu trojúhelníka  $KLM$  pak musí ležet na přeponě  $K_2V_2$  a na kolmici k ose  $x_{1,2}$  vedené bodem  $L_2$ ; délka odvěsny  $L_2M_2$  udává polovinu výšky  $v$  závitu, tj.  $\frac{v}{2} = |L_2M_2|$ ; tuto délku rozdělíme na šest stejných dílů a získáme tak výšky bodů  $1, 2, \dots, 6$  šroubovice  $h$ , jejichž příslušné nárysy doplníme snadno pomocí ordinál (příslušné konstrukce jsou zřejmé z obrázku); tím máme sestrojeny sdružené průměty  $h_1, h_2$  poloviny závitu šroubovice  $h$  – hrany vratu dané rozvinutelné šroubové plochy

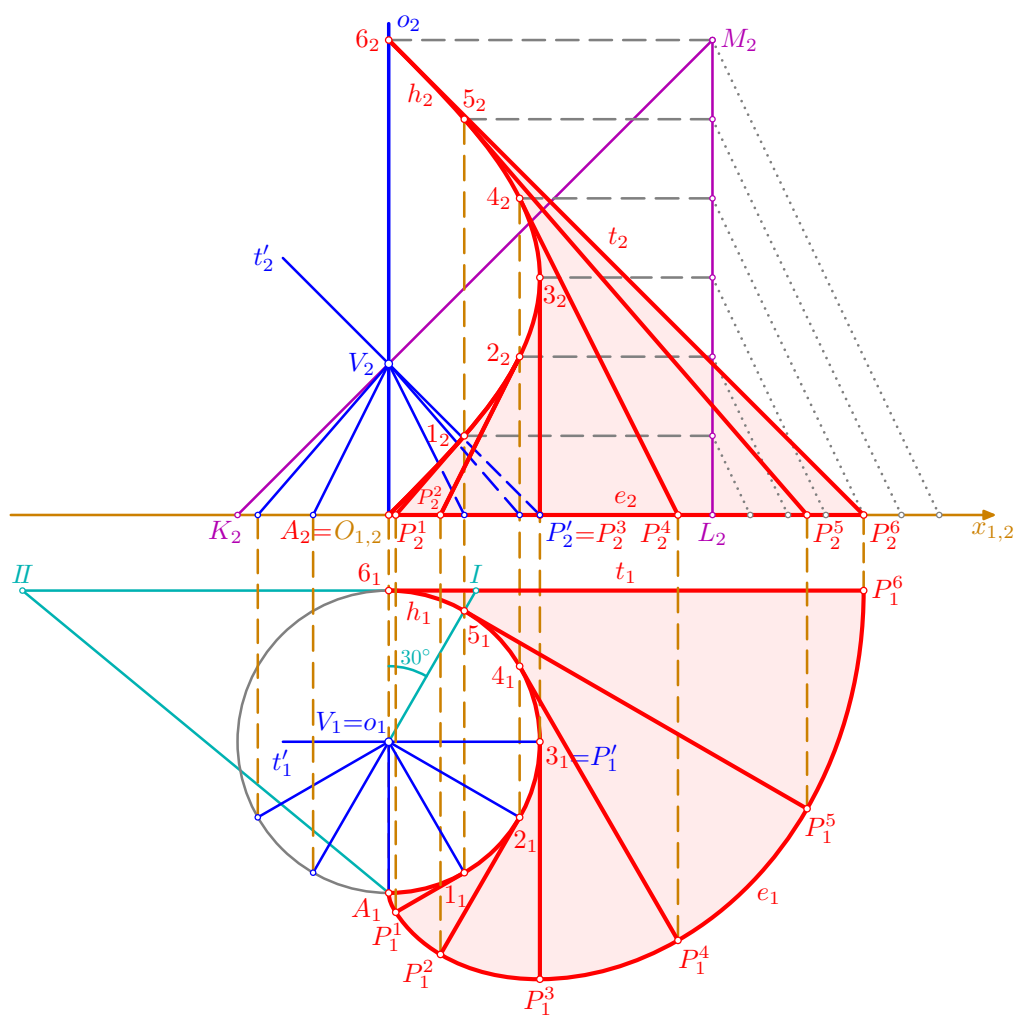




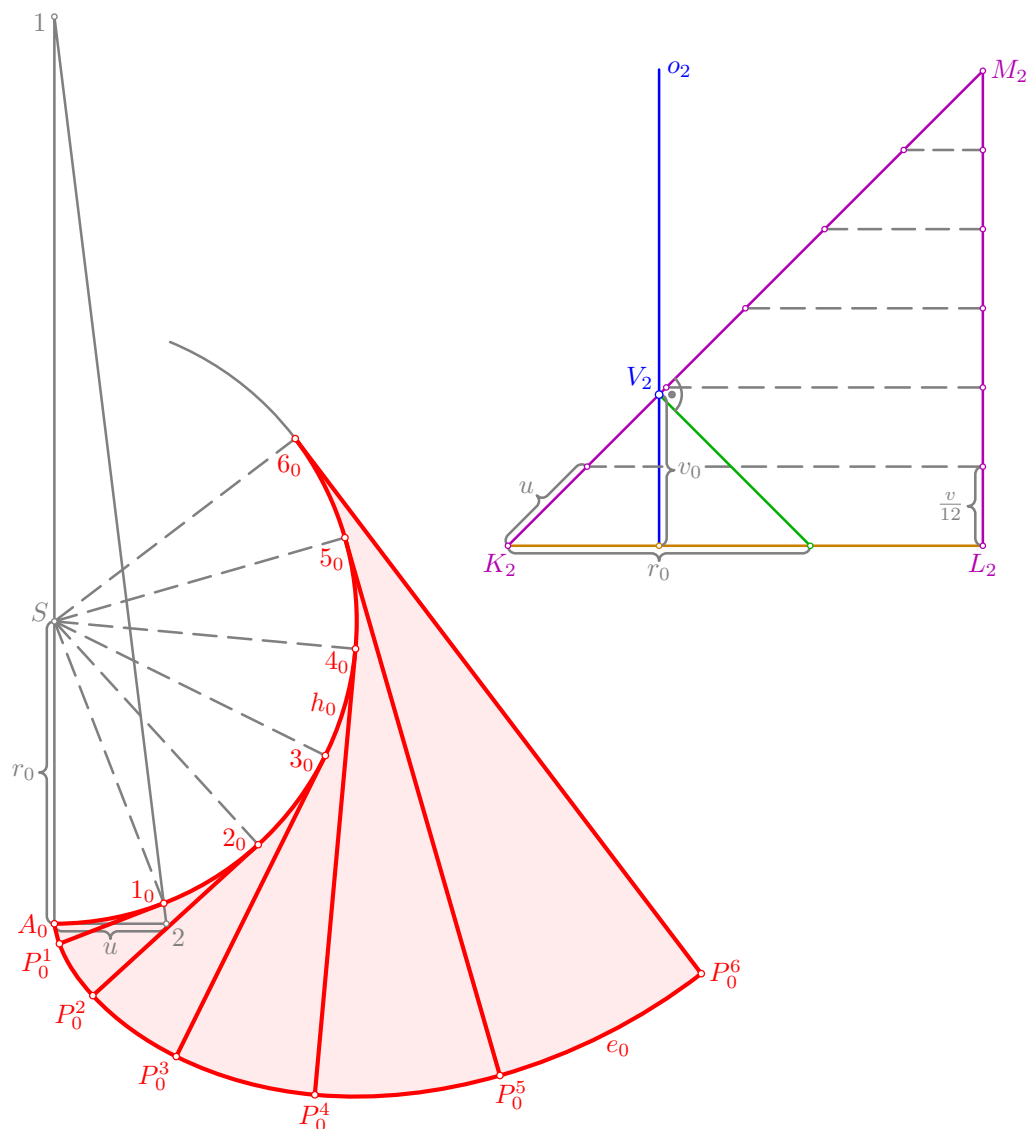
- stejným způsobem jako v předchozím kroku sestrojme sdružené průměty tečen šroubovice  $h$  i v jejích zbývajících bodech  $1, 2, \dots, 5$  a opět doplníme nárysy a následně na ordinálách půdorysy příslušných půdorysných stopníků  $P^1, P^2, P^3, P^4, P^5$ ; půdorys  $P_1^3$  stopníku  $P^3$  ovšem nenajdeme tak snadno, neboť body  $3_2, P_2^3, 3_1$  leží na stejné ordinále; ze zadání vyplývá, že šroubovice  $h$  má sklon  $\varphi = 45^\circ$  (je totiž  $r = v_0$ ) a tentýž sklon vzhledem k půdorysně má tedy také každá její tečna; odtud již snadno odvodíme  $|P_1^3 3_1| = |P_2^3 3_2|$ ; při jiném zadání bychom mohli využít např. sklopení půdorysně promítací roviny tečny v bodě 3 do půdorysny, nebo bychom vzdálenost  $|P_1^3 3_1|$  mohli určit pomocí nárysu  $K_2 L_2 M_2$  charakteristického trojúhelníka šroubovice  $h$  (zkuste si to promyslet jako cvičení...)



- dá se dokázat, že pro délky kruhových oblouků na kružnici  $h_1$  platí  $|\widehat{A_1 1_1}| = |1_1 P_1^1|$ ,  $|\widehat{A_1 2_1}| = |2_1 P_1^2|$ ,  $\dots$ ,  $|\widehat{A_1 6_1}| = |6_1 P_1^6|$ , z čehož vyplývá, že půdorysné stopníky  $P^1, P^2, \dots, P^6$  sestrojených tečen leží na tzv. **evolventě**  $e$  kružnice  $h_1$ ; ta leží v půdorysně, a tudíž splývá se svým půdorysem  $e_1$ , jejím nárysem je úsečka  $e_2 = A_2 P_2^6$  na ose  $x_{1,2}$ ; tím je úloha v průmětech vyřešena



- pro rozvinutí sestrojené (a v předchozích krocích zobrazené) části plochy je užitečné překreslit si nárys  $K_2L_2M_2$  charakteristického trojúhelníka šroubovice  $h$  a označit v něm několik užitečných údajů: především si uvědomme, že délka přepony  $K_2M_2$  je současně délkou poloviny závitu šroubovice  $h$ , a tudíž platí  $u = \frac{1}{6}|K_2M_2| = |\widehat{A1}| = |\widehat{12}| = \dots = |\widehat{56}|$ , kde  $\widehat{A1}, \widehat{12}, \dots, \widehat{56}$  jsou jednotlivé oblouky šroubovice  $h$  mezi jejími sousedními dělicími body; dále se dá ukázat, že šroubovice  $h$  má v každém bodě stejný tzv. **poloměr  $r_0$  křivosti**, pro který platí  $r_0 = \frac{r^2+v_0^2}{r}$ , kde  $r = |K_2O_2| = 2$  je poloměr šroubovice  $h$  a  $v_0 = z_V = 2$  je její redukovaná výška závitu; délku  $r_0$  lze také snadno sestrojít v trojúhelníku  $K_2L_2M_2$ , stačí vést bodem  $V_2$  kolmici k přeponě  $K_2M_2$ , určit její průsečík s osou  $x_{1,2}$  a odměřit jeho vzdálenost od bodu  $K_2$  (z Pythagorovy věty je  $|K_2V_2| = \sqrt{r^2 + v_0^2}$  a podle Eukleidovy věty o odvěsně má tedy vskutku sestrojená přepona délku  $r_0 = \frac{r^2+v_0^2}{r}$ , při našem zadání vychází  $r_0 = 4$ , což je vidět z obrázku nebo to lze snadno spočítat); nyní již můžeme přistoupit k závěrečnému rozvinutí: v něm šroubovice  $h$  přejde do kružnice  $h_0(S, r_0)$  (její střed  $S$  zvolme libovolně); na kružnici  $h_0$  zvolme bod  $A_0$  a od něj na ni nanese délku  $u$  – to provedeme pomocí Sobotkovy rektifikační metody: na polopřímce  $A_0S$  sestrojme bod 1, kde  $|1A_0| = 3r_0$  (nebo  $|1S| = 2r_0$ ), na tečně ke kružnici  $h_0$  v bodě  $A_0$  sestrojme bod 2 tak, aby bylo  $|A_02| = u$ ; pak úsečka 12 protne kružnici  $h_0$  v bodě  $1_0$ , pro který je  $|\widehat{A_01_0}| \doteq u$ ; nyní již snadno doplníme další body  $2_0, 3_0, \dots, 6_0$  rozvinuté šroubovice  $h$ ; na závěr stačí v každém z těchto bodů sestrojít tečnu ke kružnici  $h_0$ , nanést na ni (v příslušném směru) odpovídající násobek délky  $u$ , tj. sestrojít body  $P_0^1, P_0^2, \dots, P_0^6$ , kde  $|1_0P_0^1| = u, |2_0P_0^2| = 2u, \dots, |6_0P_0^6| = 6u$  (tyto délky můžeme odměřit na přeponě  $K_2M_2$ ), a spojit tyto koncové body evolventou  $e_0$  kružnice  $h_0$ , do níž se rozvine evolventa  $e = e_1$  kružnice  $h_1$  z předchozího obrázku; tím je rozvinutí plochy do roviny provedeno, určitě si zkuste výsledek vystříhnout z papíru a „postavit“ nad sestrojený půdorys...



□

## 2. Rotační plochy

### Výklad

- rotační plocha vznikne rotací nějaké tzv. tvořící **křivky** (rovinné nebo prostorové) kolem dané osy  $o$  rotace; je to vlastně speciální případ šroubové plochy s nulovou výškou závitů
- kružnice, kterou vytvoří libovolný bod dané tvořící křivky při rotaci kolem dané osy, se nazývá **rovnoběžka** (nebo **rovnoběžková kružnice**) plochy

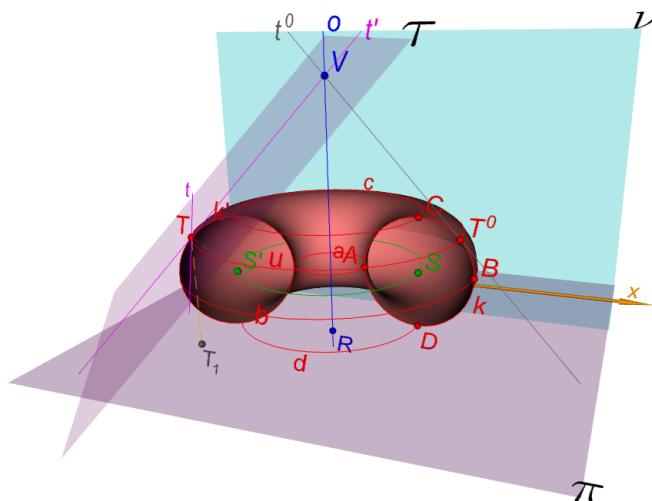
- každá rovina, která prochází osou rotace, protíná danou rotační plochu v tzv. **meridiánu** (někdy se mu říká i **poledník**); polovina meridiánu, ležící v jedné polorovině určené osou rotace, se nazývá **polomeridián**
- rotací libovolného meridiánu nebo polomeridiánu dané rotační plochy vznikne táž plocha
- meridián, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, se nazývá **hlavní meridián**
- rotací krajních bodů dané tvořící křivky, existují-li, dostaneme tzv. **hraniční rovnoběžky**; rotací bodu dané tvořící křivky, který je ve svém okolí minimálně, resp. maximálně, vzdálen od osy rotace, vznikne **hrdelní**, resp. **rovníková**, rovnoběžka plochy, zkráceně **hrdlo**, resp. **rovník**; a konečně bod, v němž je neasymptotická tečna dané tvořící křivky kolmá k ose rotace, vytváří tzv. **kráterovou rovnoběžku**, zkráceně **kráter**
- tečná rovina v bodě  $M$  rotační plochy je určena tečnami k rovnoběžce a k meridiánu, které procházejí bodem  $M$

## 2.1. Anuloid v Mongeově promítání



### Výklad

- rotační plocha zvaná **anuloid** (nebo také **torus** či **kruhový prstenec**) vznikne rotací kružnice  $k(S, r)$ , jejíž rovina prochází osou  $o$  rotace a současně  $S \notin o$ ; tvořící kružnice  $k$  je tedy polomeridiánem anuloidu

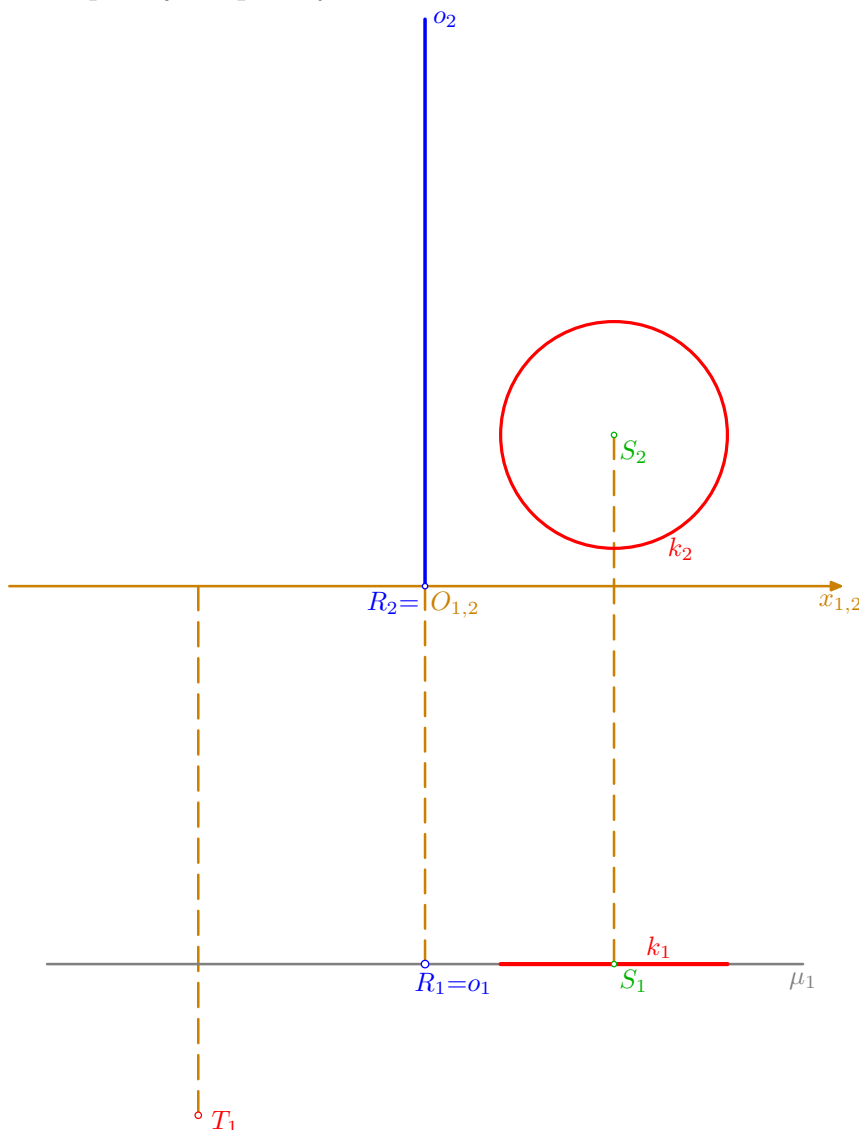




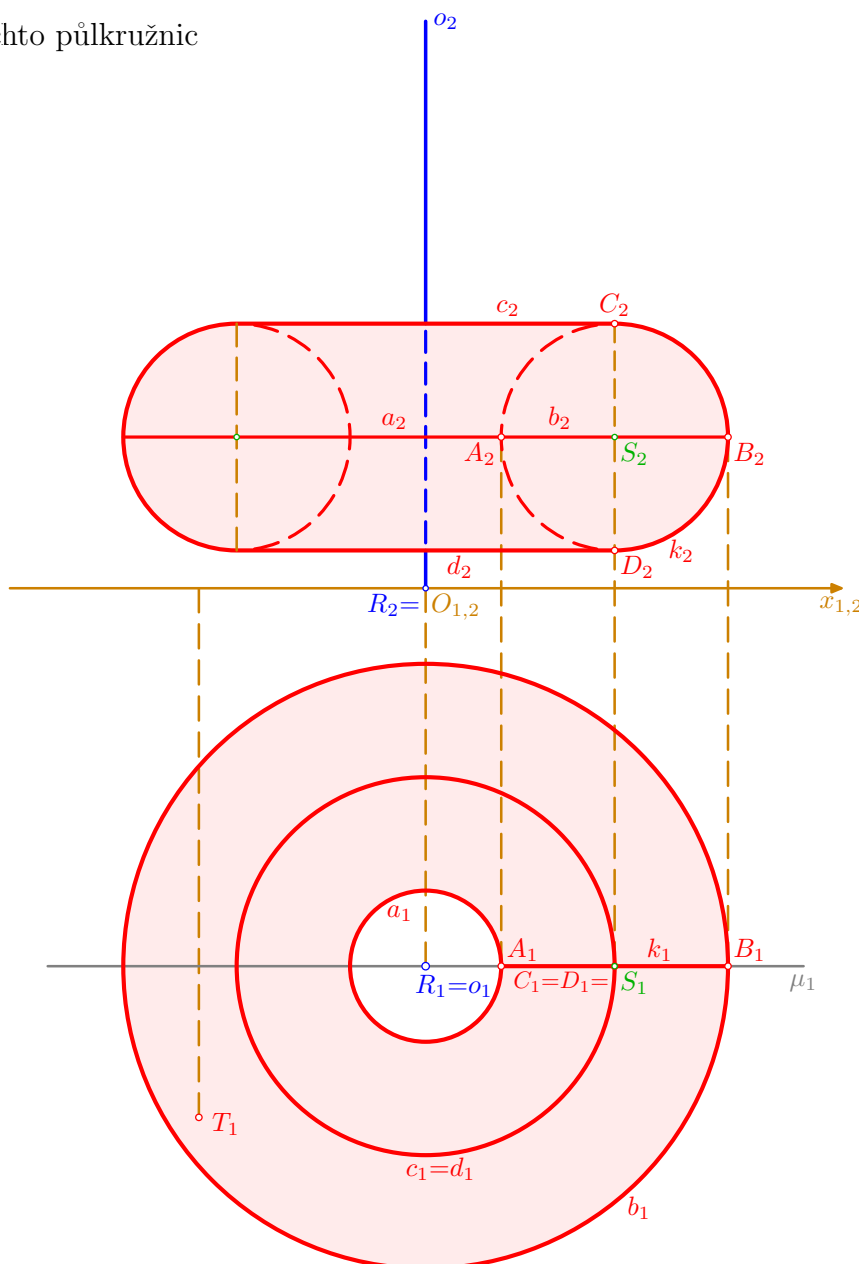
**Řešené úlohy**

**Příklad:** V Mongeově promítání sestrojte tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $T$  anuloidu, který má osu  $o \perp \pi, R \in o$ , a jehož polomeridiánem je kružnice  $k(S; r); R[0; 5; 0], S[2; 5; 5; 2], r = 1,5; T[-3; 7; z_T > z_S]$ .

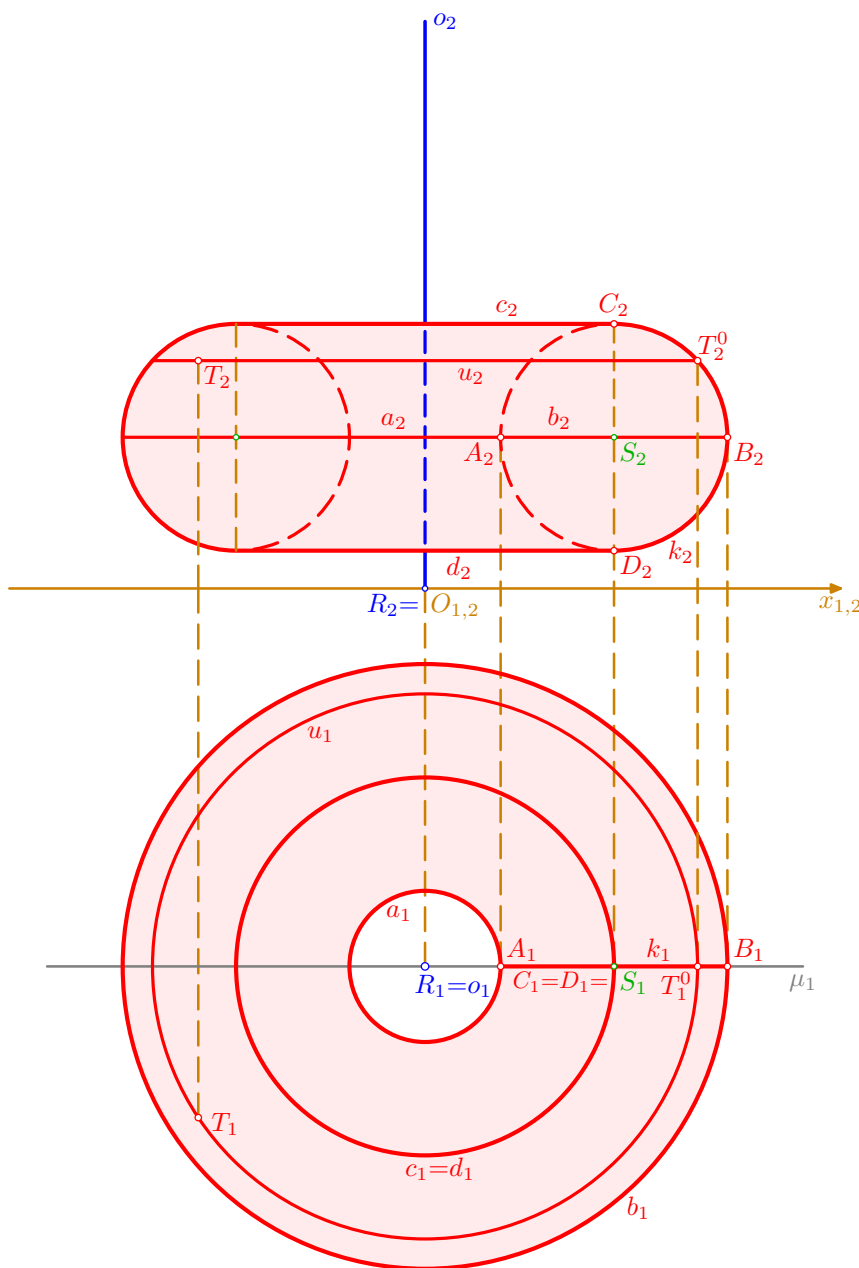
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $S_1, S_2$  a  $R_1, R_2$  (kde  $R_2 = O_{1,2}$ ) daných bodů  $S, R$ ; půdorysem osy  $o \perp \pi, R \in o$ , je bod  $o_1 = R_1$ , pro její nárýs  $o_2$  platí  $o_2 \perp x_{1,2}$  a  $R_2 \in o_2$ ; přímka  $\mu_1 \parallel x_{1,2}, R_1 \in \mu_1$ , je půdorysem roviny  $\mu = oS$  hlavního meridiánu, v níž leží zadaná kružnice  $k(S, r)$ ; půdorysem této kružnice je tedy úsečka  $k_1$ , která leží na přímce  $\mu_1$ , má střed  $S_1$  a délku  $2r = 3$ ; nárýsem je pak kružnice  $k_2(S_2, r = 3)$ ; nakonec k zadání patří ještě půdorys  $T_1$  bodu  $T$



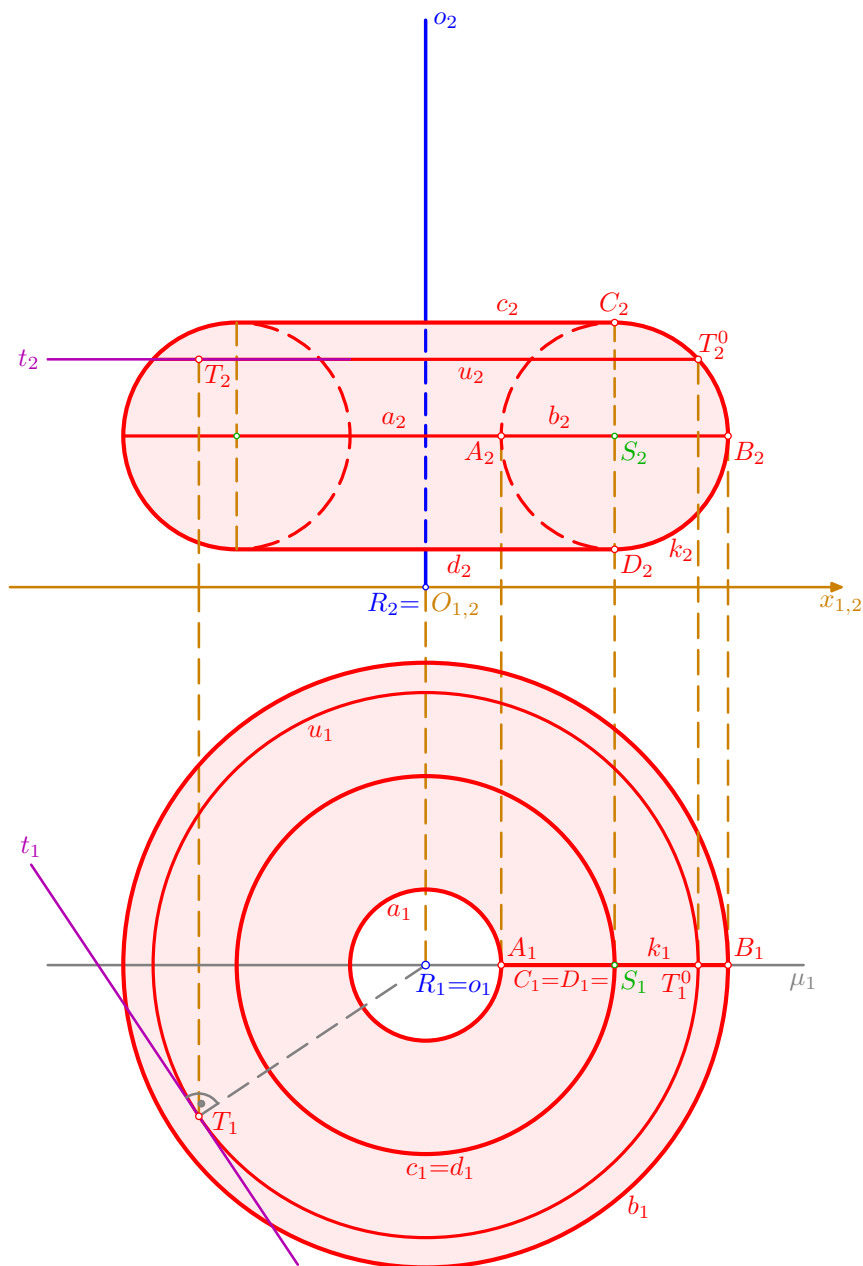
- na kružnici  $k$  zvolme dva kolmé průměry  $AB, CD$ , kde  $AB \parallel \pi$  a  $CD \perp \pi$ ; bod  $A$ , resp. bod  $B$ , má ve svém okolí nejmenší, resp. největší, vzdálenost od osy  $o$ , a jeho rotací tudíž vznikne **hrdelní rovnoběžka** (hrdlo)  $a$ , resp. **rovníková rovnoběžka** (rovník)  $b$ ; v bodech  $C, D$  jsou tečny kružnice  $k$  kolmé k ose  $o$ , a rotací těchto bodů tedy vznikají tzv. **kráterové rovnoběžky**  $c, d$ ; v půdoryse se rovnoběžky  $a, b, c, d$  zobrazí jako soustředné kružnice  $a_1, b_1, c_1 = d_1$ , jejich nárysy jsou úsečky  $a_2, b_2, c_2, d_2$ , které jsou souměrné podle příčky  $o_2$ ; půdorysem plochy je mezikruží ohraničené kružnicemi  $a_1, b_1$ , nárys plochy ohraničují dvě souměrné půlkružnice a úsečky  $c_2, d_2$ , které jsou společnými tečnami těchto půlkružnic



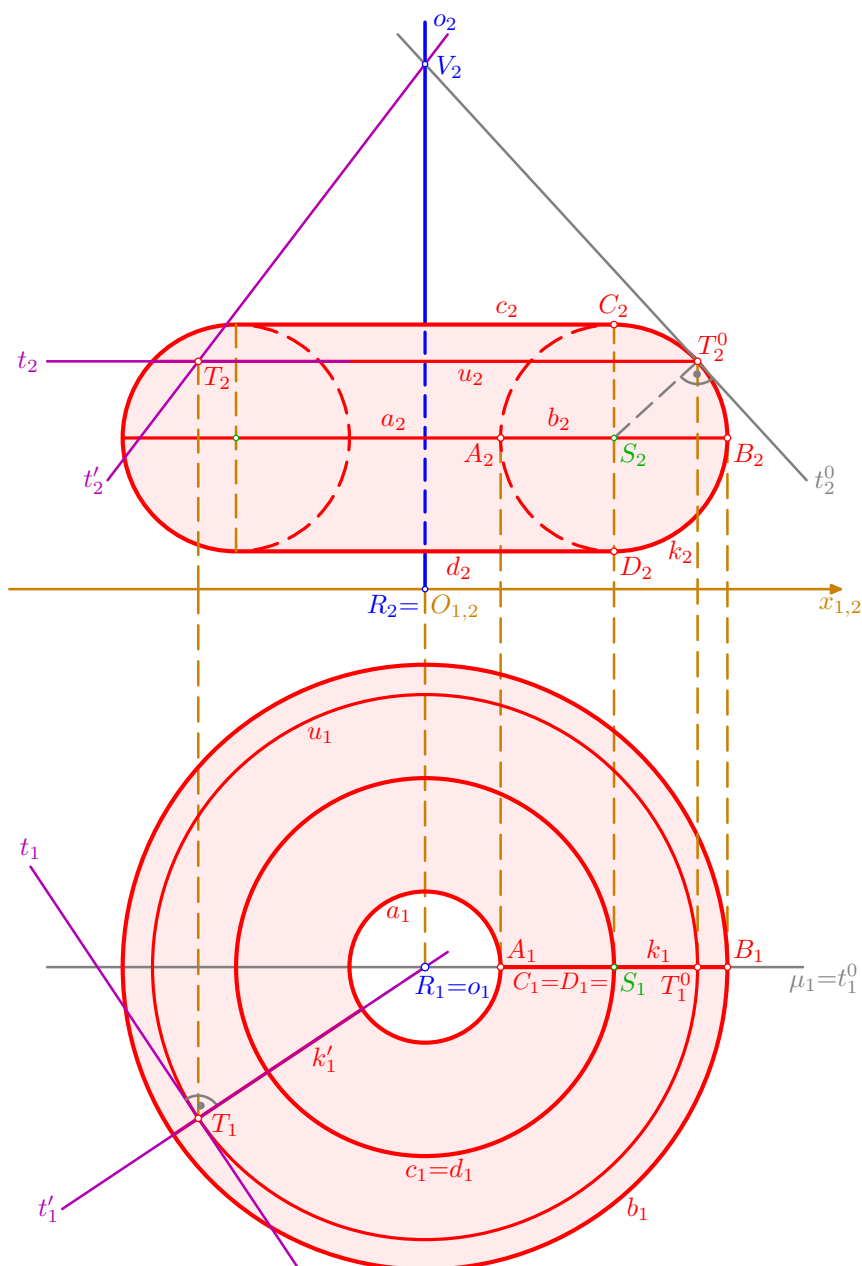
- abychom našli bod  $T$  na ploše, použijeme typickou konstrukci – otočení kolem osy  $o$  do roviny  $\mu$  hlavního meridiánu: rotací bodu  $T$  vznikne rovnoběžková kružnice  $u$  plochy, která se v půdoryse jeví jako kružnice  $u_1(R_1, |R_1T_1|)$ ; rovnoběžka  $u$  protíná danou polomeridiánovou kružnici  $k$  v bodě  $T^0$ , pro jehož půdorys je  $T_1^0 = u_1 \cap k_1$  a nárys  $T_2^0$  najdeme na ordinále a na kružnici  $k_2$  (podle zadání volíme tu ze dvou možností, pro kterou je  $z_{T^0} = z_T > z_S$ ); můžeme tak doplnit úsečku  $u_2$ , která je nárysem kružnice  $u$ , a na příslušné ordinále konečně také nárys  $T_2 \in u_2$  bodu  $T$



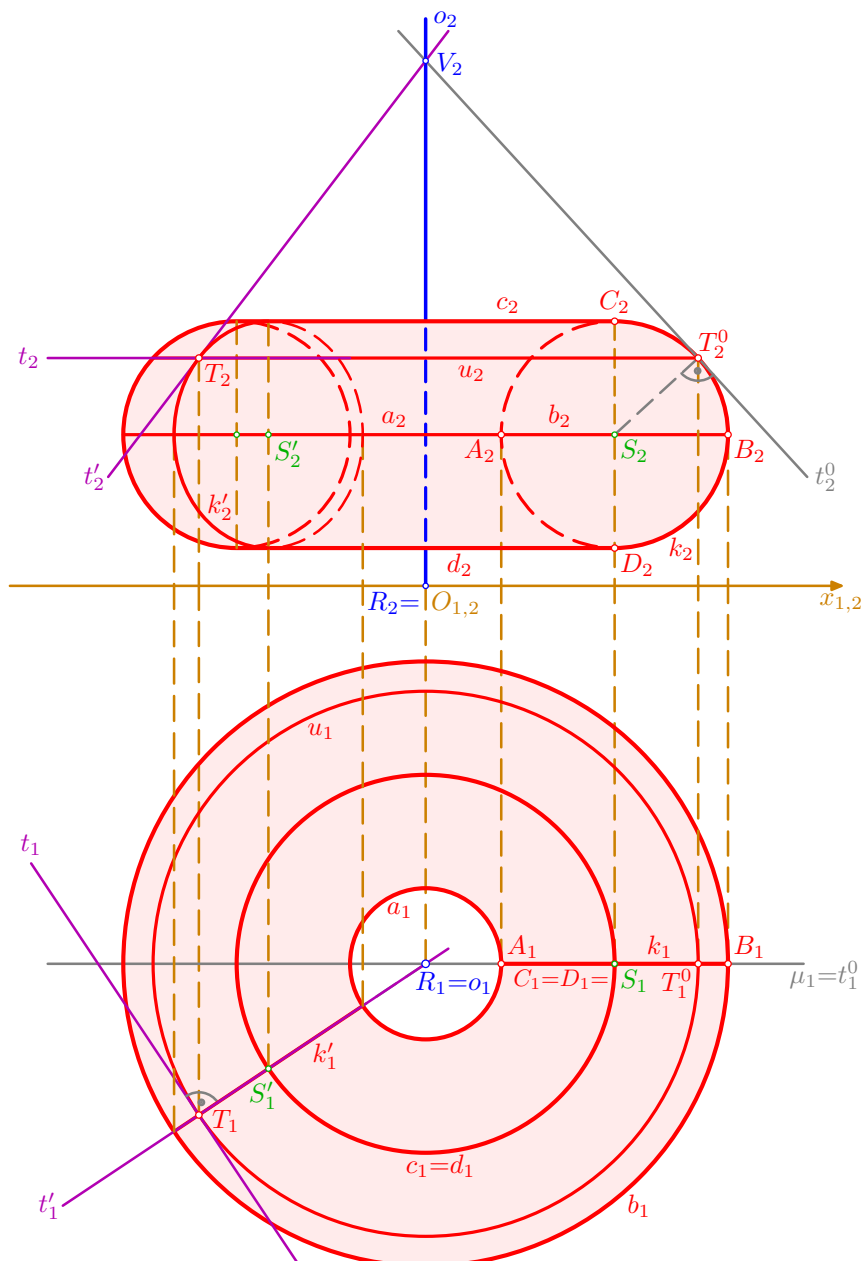
- tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $T$  plochy určíme podle obecného principu – pomocí dvou tečen vedených bodem  $T$  ke dvěma křivkám, které leží na daném anuloidu; jako první křivku zvolme přirozeně rovnoběžkovou kružnici  $u$  a v bodě  $T$  k ní sestrojme tečnu  $t$ : pro její půdorys  $t_1$  zřejmě platí  $t_1 \perp T_1 R_1, T_1 \in t_1$ , v náryse je  $t_2 \parallel x_{1,2}, T_2 \in t_2$



- polorovina určená osou  $o$  a bodem  $T$  protíná plochu v polomeridiánové kružnici  $k'$ ; sestrojíme sdužené průměty tečny  $t'$  v bodě  $T$  uvažované kružnice  $k'$ : půdorysem kružnice  $k'$ , resp. tečny  $t'$ , je úsečka  $k'_1$ , resp. přímka  $t'_1 = T_1R_1$ ; pro sestrojení nárysu  $t'_2$  využijeme opět otočení kolem osy  $o$  do roviny  $\mu$  hlavního meridiánu – kružnice  $k'$  s bodem  $T$  se otočí do kružnice  $k$  s bodem  $T^0$ ; v bodě  $T^0$  sestrojíme tečnu  $t^0$  ke kružnici  $k$ , v půdoryse je  $t^0_1 = \mu_1$ , v náryse se zachová  $t^0_2 \perp S_2T_2, T_2 \in t^0_2$ ; dále využijeme průsečík  $V = t^0 \cap o$ , v půdoryse není označen (platí zde  $V_1 = R_1 = o_1$ ), v náryse je  $V_2 = t^0_2 \cap o_2$ ; bod  $V$  zůstává při rotaci na místě a hledaná tečna je tedy přímka  $t' = TV$ , tj. v náryse platí  $t'_2 = T_2V_2$



- sestrojenými tečnami  $t, t'$  ke křivkám  $u, k'$  je určena hledaná tečná rovina  $\tau$  v bodě  $T$  anuloidu; na závěr můžeme pro zajímavost doplnit nárys kružnice  $k'(S', r)$ , pro samotné řešení úlohy to ovšem není nezbytně nutné; kružnice  $k'$  se v náryse zobrazí jako elipsa  $k'_2$ , která má střed v bodě  $S'_2$ , hlavní vrcholy leží na ordinále bodu  $S'$  a na úsečkách  $c_2$  a  $d_2$ , vedlejší vrcholy odvodíme z půdorysu pomocí ordinál na úsečku  $b_2$  – konstrukce je patrná z obrázku; elipsa  $k'_2$  se navíc musí v bodě  $T_2$  dotknout přímky  $t'_2$



□

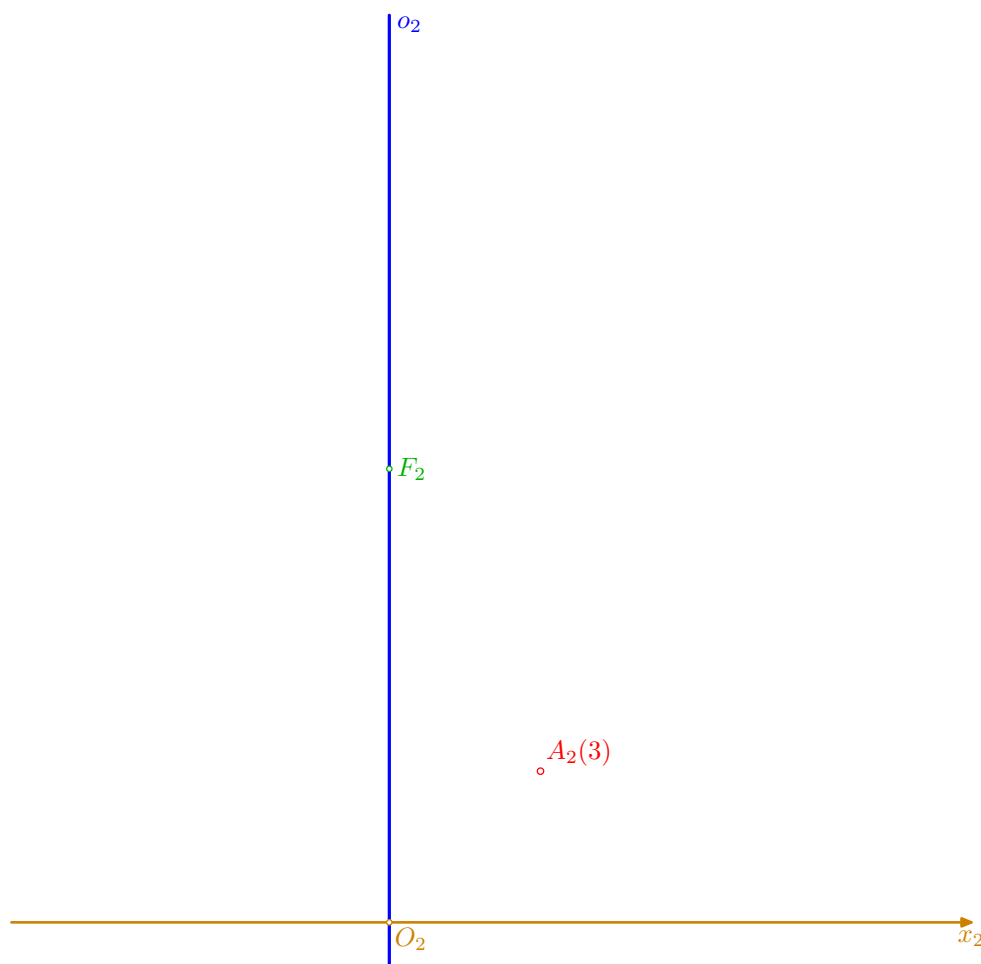


## Řešené úlohy

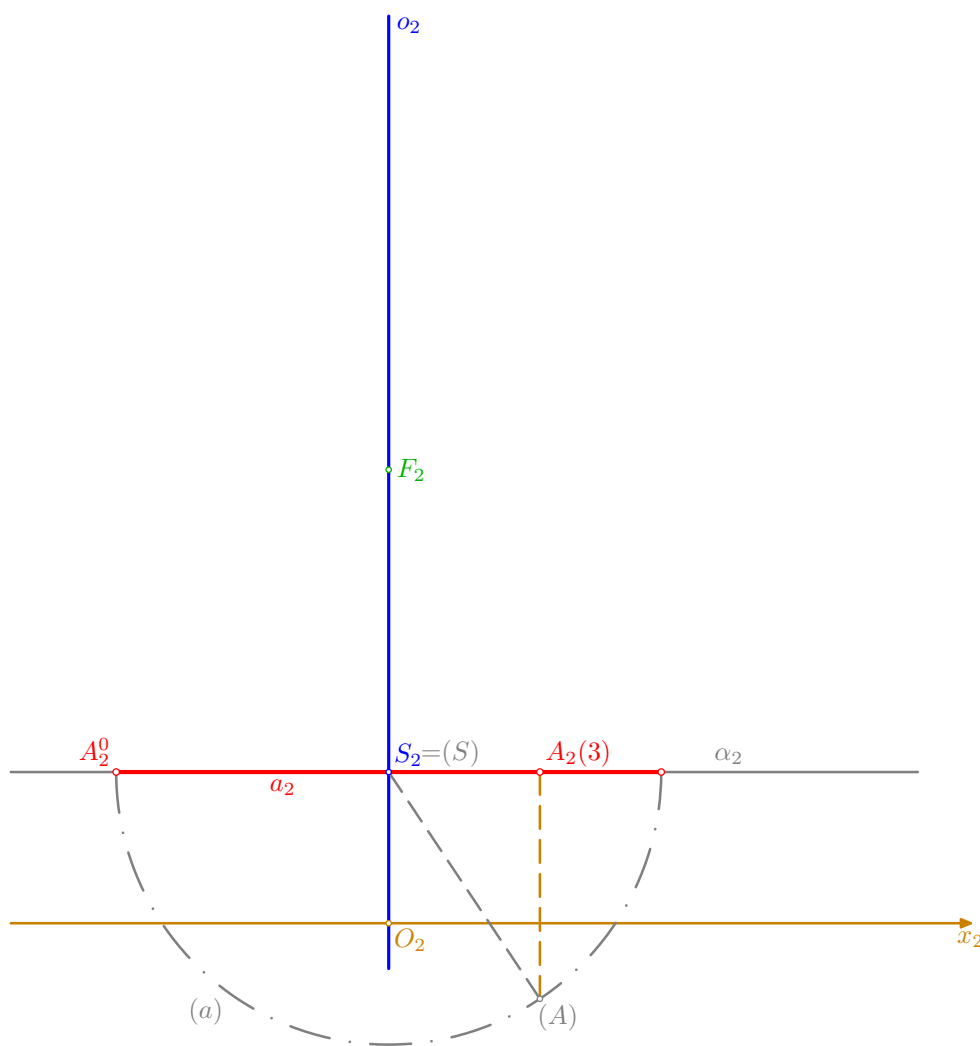


**Příklad:** V kolmém promítání na nárysnu sestrojte tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $A$  rotačního paraboloidu, který má ohnisko  $F$  a svislou osu  $o$ ,  $F \in o$ , rotace;  $F[0; 0; 6]$ ,  $A[2; 3; 2]$ .

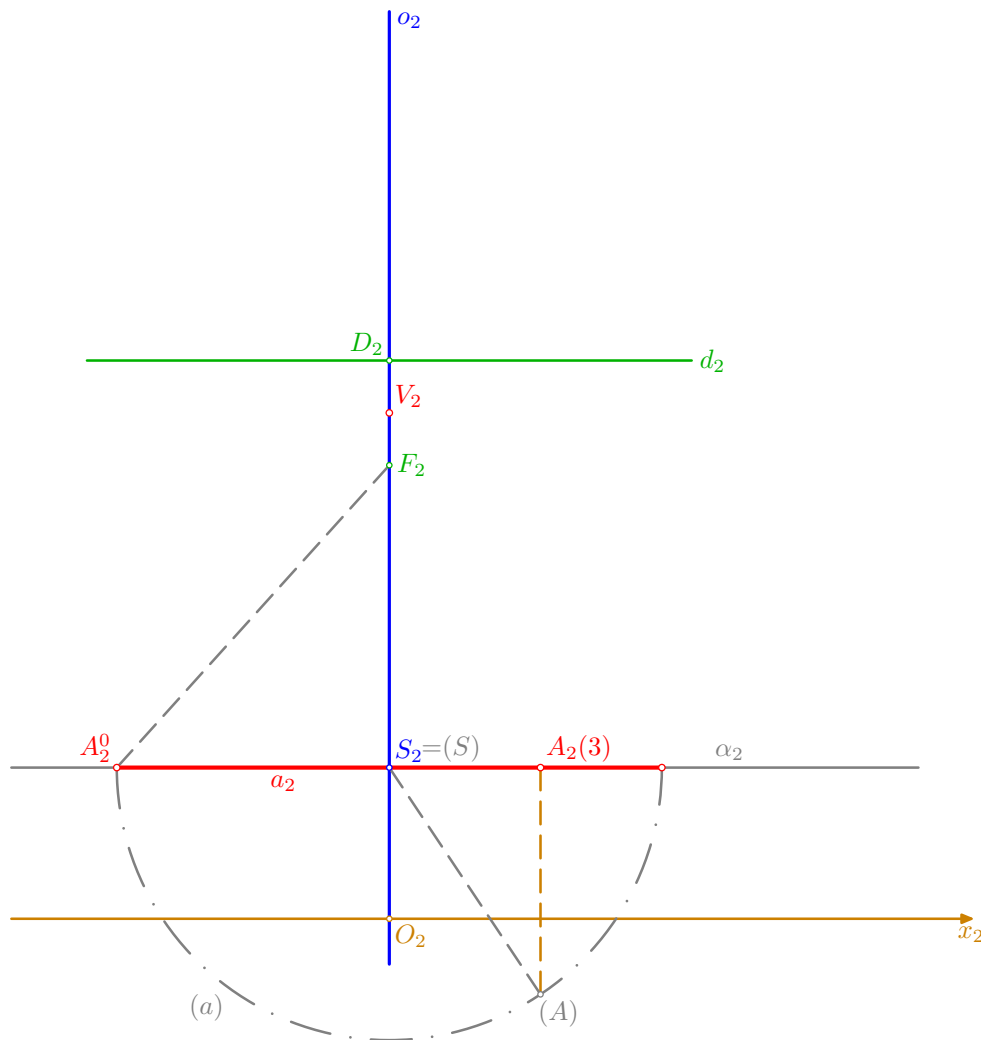
- podle zadání sestrojme nárysy  $F_2$ ,  $o_2$  ohniska  $F$  a osy  $o$ ; ohnisko  $F$  leží v nárysně, splývá tedy se svým nárysem  $F_2 = F$  a má nulovou kótu  $y_F = 0$ ; podle výše uvedené úmluvy mu ponechme pouze označení  $F_2$ ; pro nárys svislé osy  $o$  rotace je  $o_2 \perp x_2$ ,  $F_2 \in o_2$ ; jako poslední zadaný objekt doplňme kótovaný nárys  $A_2(3)$  (dle zadání je totiž  $y_A = 3$ ) bodu  $A$ , jímž má konstruovaný rotační paraboloid procházet



- rotací bodu  $A$  kolem osy  $o$  vznikne rovnoběžková kružnice  $a$ , která leží v rovině  $\alpha \perp o$ ,  $A \in \alpha$ , má střed  $S = o \perp \alpha$  a poloměr délky  $|SA|$ ; nárysem roviny  $\alpha$  je přímka  $\alpha_2 \perp o_2$ ,  $A_2 \in \alpha_2$ , která protíná přímku  $o_2$  v bodě  $S_2$ ; poloměr kružnice  $a$  zjistíme ve sklopení roviny  $\alpha$  do nárysny: sestrojme sklopenou polohu  $(A)$  bodu  $A$ , kde  $(A)A_2 \perp \alpha_2$  a  $|{(A)A_2}| = y_A = 3$ , bod  $S \in o$  zůstává při sklápění na místě, je tedy  $S = S_2 = (S)$ , a ve sklopení můžeme sestrojit část sklopené polohy  $(a)$  kružnice  $a$ ; rovnoběžka  $a$  protíná nárysnu ve dvou bodech, jeden z nich označme  $A^0$ , v průmětu je  $A_2^0 = (a) \cap \alpha_2$ ; nárysem kružnice  $a$  je tedy úsečka  $a_2$ , která leží na přímce  $\alpha_2$ , má střed  $S_2$  a jeden krajní bod  $A_2^0$



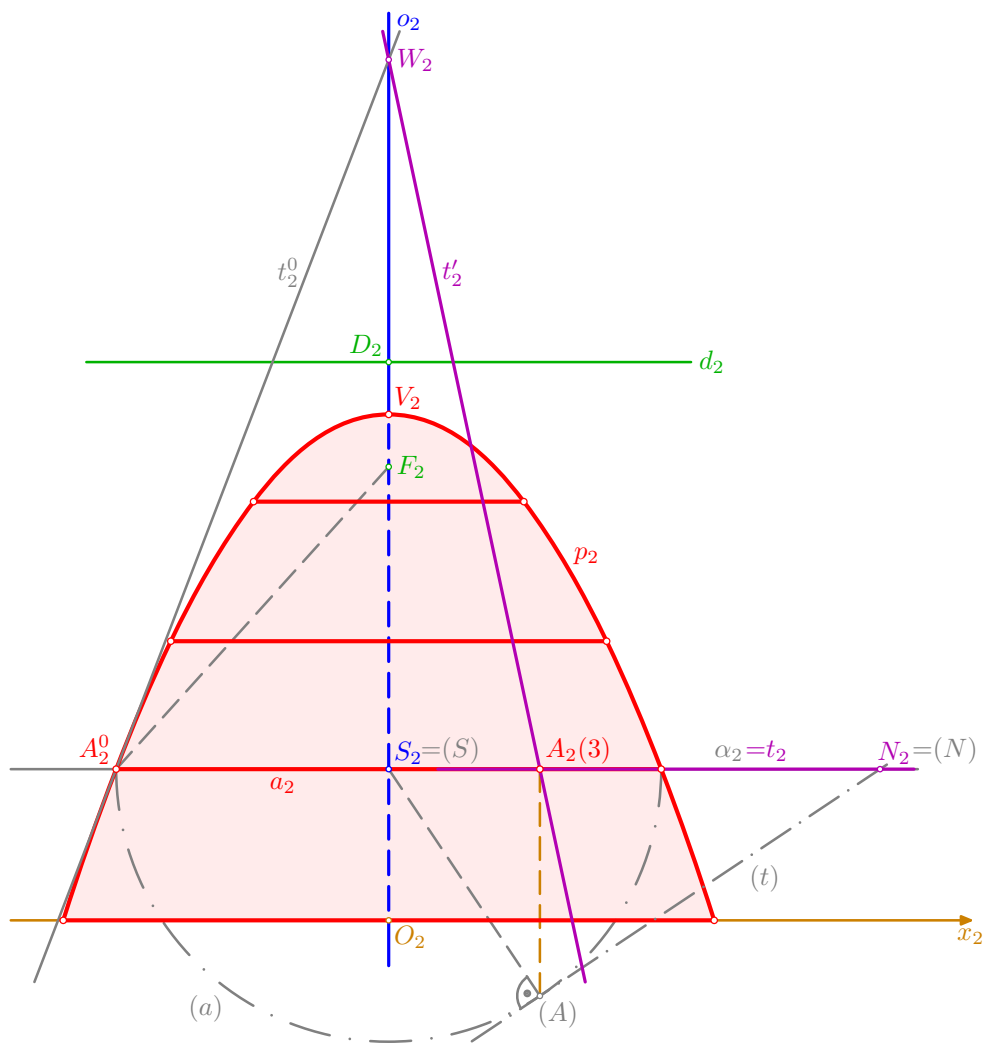
- nárysna protne daný paraboloid v parabole  $p$ , která je hlavním meridiánem plochy, má ohnisko  $F$ , osu  $o$  a prochází bodem  $A^0$  (sestrojíme ji v dalším kroku); prozatím pouze dourčíme její řídicí přímku  $d = d_2$  a vrchol  $V = V_2$ : podle **ohniskové definice paraboly** (viz stranu 228) platí  $|F_2A_2^0| = |A_2^0d_2|$ , odtud sestrojíme na ose  $o_2$  pomocný bod  $D_2$ , kde  $|D_2S_2| = |F_2A_2^0|$  (ze dvou možností vybereme tu, pro niž bude paraboloid otevřený směrem dolů), a vedeme jím řídicí přímku  $d_2 \perp o_2, D_2 \in d_2$ ; vrchol  $V_2$  paraboly  $p_2 = p$  je pak středem úsečky  $F_2D_2$







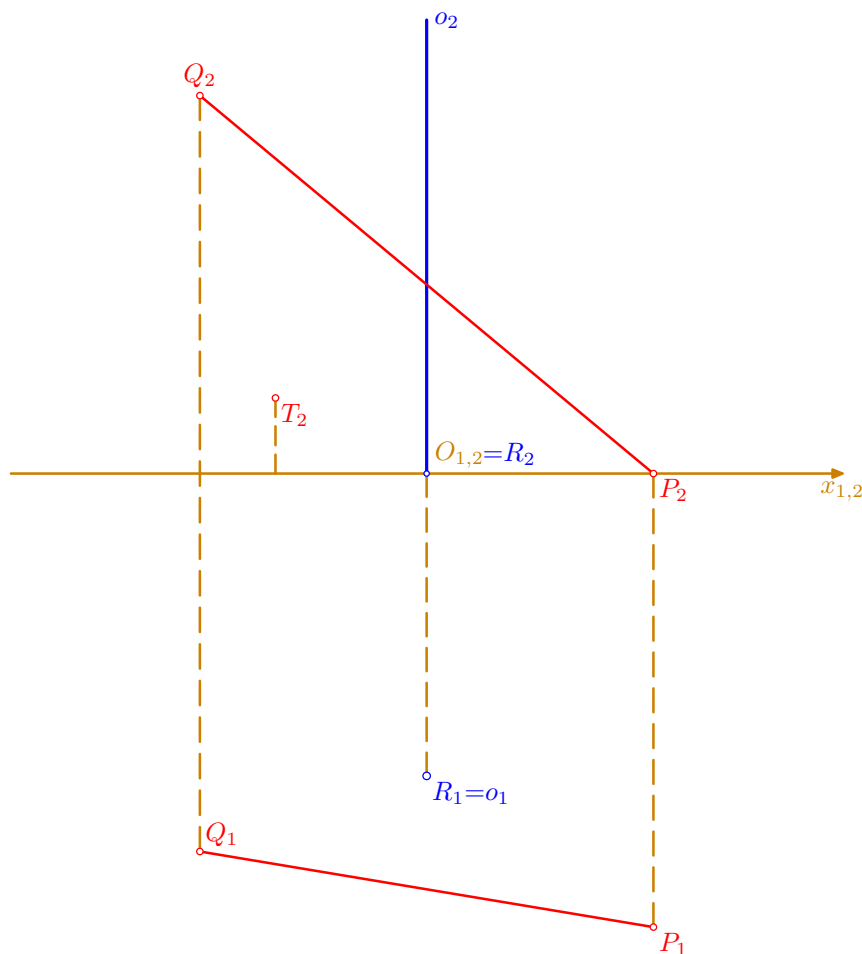
- rovina určená osou  $o$  a bodem  $A$  protíná plochu v meridiánové parabole  $m$  (konstrukci jejího nárysu naznačíme v následujícím závěrečném kroku postupu řešení); sestrojíme nárys tečny  $t'$  v bodě  $A$  uvažované paraboly  $m$ : při tom využijeme otočení kolem osy  $o$  do roviny hlavního meridiánu – parabola  $m$  s bodem  $A$  se otočí do paraboly  $p$  s bodem  $A^0$ ; v bodě  $A_2^0$  tedy sestrojíme tečnu  $t_2^0 = A_2^0W_2$  k parabole  $p_2$ , kde bod  $W_2$  je souměrný s bodem  $S_2$  podle vrcholu  $V_2$  (úsečka  $S_2W_2$  je subtangentou bodu  $A_2^0$  a ta je podle **Věty 4** z kapitoly o parabole půlena vrcholem  $V_2$  – viz stranu 237); bod  $W \in o$  zůstává při rotaci na místě a hledaná tečna je tedy přímka  $t' = AW$ , tj. v náryse platí  $t'_2 = A_2W_2$ ; bod  $W = W_2$  leží v nárysně, a je to tudíž také nárysný stopník přímky  $t'$







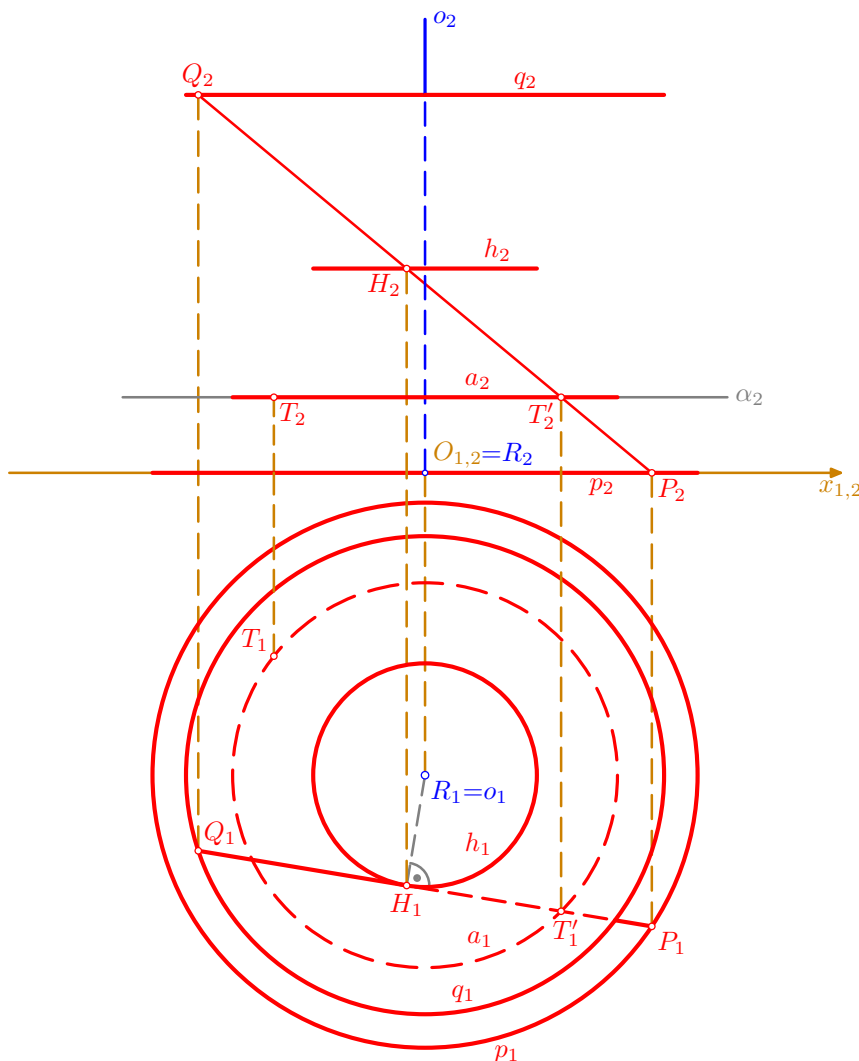
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  a  $R_1, R_2$  (kde  $R_2 = O_{1,2}$ ) daných bodů  $P, Q, R$  a zatím jen slabě vytáhněme půdorys  $P_1Q_1$  a nárys  $P_2Q_2$  úsečky  $PQ$ ; půdorysem osy  $o \perp \pi, R \in o$ , je bod  $o_1 = R_1$ , pro její nárys  $o_2$  platí  $o_2 \perp x_{1,2}$  a  $R_2 \in o_2$ ; daná úsečka  $PQ$  je s osou  $o$  mimoběžná a její rotací tedy vznikne část jednodílného rotačního hyperboloidu, který patří mezi zborcené (tj. do roviny nerozvinutelné) přímkové plochy a může být vytvořen také rotací hyperboly kolem její vedlejší osy souměrnosti, k čemuž se dostaneme v závěrečném kroku řešení této úlohy; k zadání doplňme ještě nárys  $T_2$  bodu  $T$



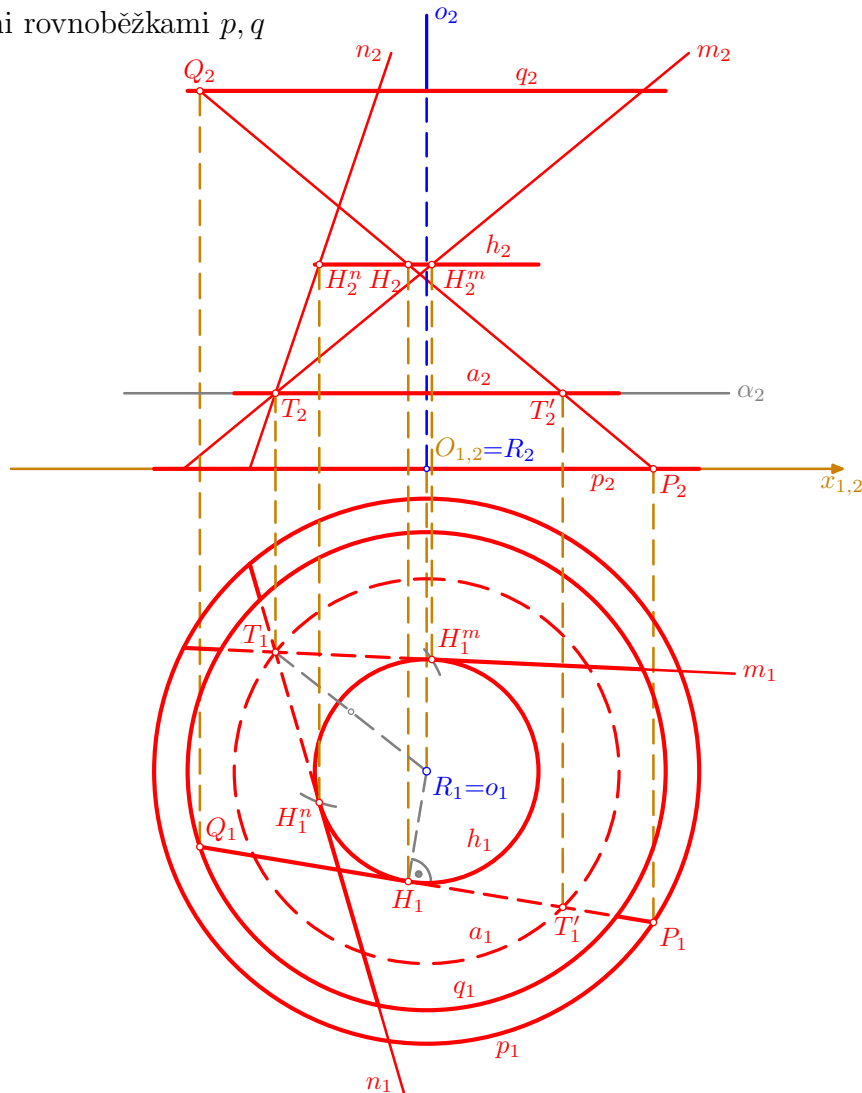




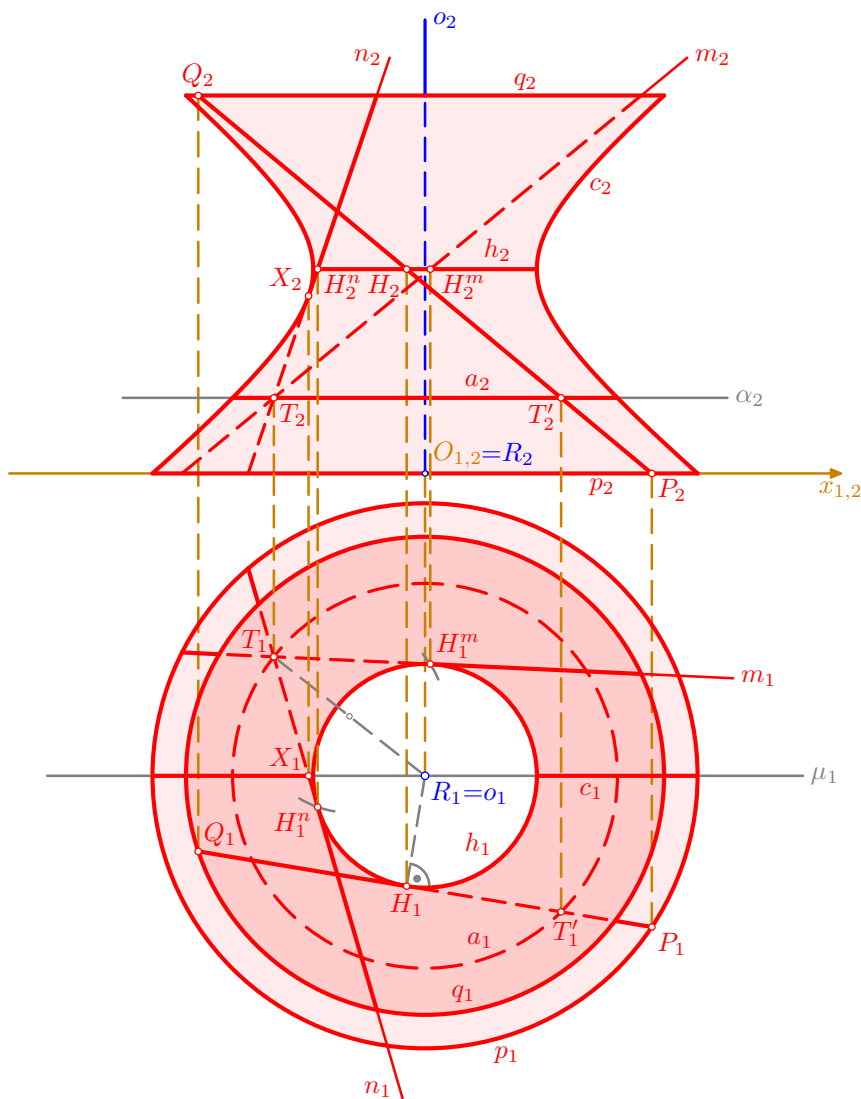
- mezikruží ohraničené kružnicemi  $p_1, q_1$  je půdorysem jakéhosi úpatí plochy, a při pohledu shora vidíme vnější stranu této části hyperboloidu; naopak mezikruží mezi kružnicemi  $q_1, h_1$  je půdorysem jícnu plochy, kde vidíme její vnitřní stranu (není na škodu rozlišit obě strany plochy barevně, což bude provedeno v závěrečném kroku konstrukce); odtud vyplývá také vytažení viditelnosti půdorysu  $P_1Q_1$  úsečky  $PQ$ ; najdeme bod  $T$  na ploše: přímka  $\alpha_2 \parallel x_{1,2}, T_2 \in \alpha_2$ , je nárysem roviny  $\alpha \perp o$ , která protíná úsečku  $PQ$  v bodě  $T'$  (v náryse je  $T'_2 = \alpha_2 \cap P_2Q_2$ , půdorys  $T'_1$  leží na ordinále a na  $P_1Q_1$ ), jehož rotací kolem osy  $o$  vznikne rovnoběžková kružnice  $a$  (půdorysem je kružnice  $a_1(R_1, |R_1T'_1|)$ , nárysem úsečka  $a_2$  na  $\alpha_2$ ), na níž musí ležet také bod  $T$ ; ordinála vedená bodem  $T_2$  protíná kružnici  $a_1$  ve dvou bodech, z nichž podle zadání ( $y_T < y_R$ ) vybereme a označíme  $T_1$  ten, který leží blíže k ose  $x_{1,2}$ ; viditelnost kružnice  $a$  v půdoryse je zřejmá z předchozího výkladu



- tečná rovina  $\tau$  v bodě  $T$  zborceného hyperboloidu je určena dvěma přímkami  $m, n$  různých regulů plochy, přičemž přímka  $m$  vznikne rotací přímky  $PQ$  kolem osy  $o$  a přímka  $n$  je s přímkou  $m$  souměrná podle meridiánové roviny určené osou  $o$  a bodem  $T$ ; půdorysem rotačního pohybu kolem osy  $o$  je zřejmě otáčení kolem bodu  $o_1 = R_1$  a úsečka  $P_1Q_1$  je při tomto otáčení stále tečnou kružnice  $h_1$ ; půdorys  $m_1$  přímky  $m$  je tedy tečnou ke kružnici  $h_1$  vedenou bodem  $T_1$ ; podobně je půdorys  $n_1$  přímky  $n$  druhého regulu tečnou kružnice  $h_1$  souměrnou s  $m_1$  podle přímky  $R_1T_1$ ; příslušné body dotyku označme  $H_1^m, H_1^n$  – jsou to půdorysy průsečíků  $H^m, H^n$  přímek  $m, n$  s hrdlem  $h$ , a jejich nárysy  $H_2^m, H_2^n$  najdeme pomocí ordinál na úsečce  $h_2$ ; nárysy  $m_2 = T_2H_2^m, n_2 = T_2H_2^n$  přímek  $m, n$  nebudeme vytahovat příliš silně, jejich viditelnost v náryse stanovíme až v následujícím kroku; čtenář si může pro zajímavost zkusit najít sdružené průměty průsečíků přímek  $m, n$  s hraničními rovnoběžkami  $p, q$



- viditelnost přímek  $m, n$  v půdoryse byla stanovena již v předchozím kroku podobně jako viditelnost úsečky  $PQ$ ; v náryse je vidět přední polovina plochy, která leží před rovinou  $\mu \parallel \nu, o \in \mu$ , hlavního meridiánu; tímto hlavním meridiánem je část hyperboly  $c$ , jejím půdorysem  $c_1$  jsou dvě úsečky, které leží na přímce  $\mu_1$  a současně v mezikruží ohraničeném kružnicemi  $h_1, p_1$ ; nárys  $c_2$  hyperboly  $c$  prochází krajními body úseček  $p_2, a_2, h_2, q_2$ , přičemž krajní body nárysu  $h_2$  hrdla  $h$  jsou vrcholy hyperboly  $c_2$ ; z půdorysu je vidět, že úsečka  $PQ$ , resp. úsečka na přímce  $m$ , leží před, resp. za, rovinou  $\mu$ , a tudíž bude v náryse vytažena plně, resp. čárkovaně; viditelnost přímky  $n$  v náryse stanovíme pomocí průsečíku  $X = n \cap \mu$ , kde  $X_1 = n_1 \cap \mu_1$  a nárys  $X_2$  odvodíme po ordinále na přímce  $n_2$ , která se v bodě  $X_2$  dotýká hyperboly  $c_2$ ; tím je úloha vyřešena



□

### 3. Průniky ploch a těles

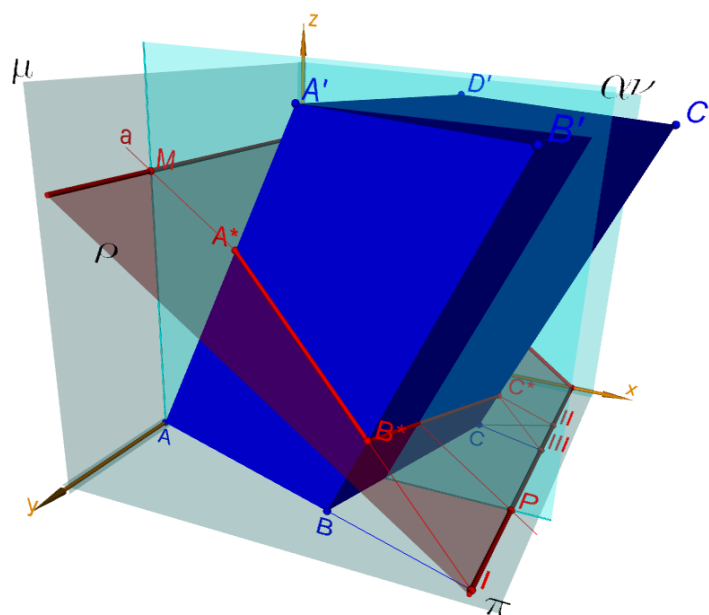
- v následujících úlohách využijeme některé zkušenosti z předchozích kapitol, konkrétní odkazy jsou uvedeny přímo v textu

#### 3.1. Rovinné řezy ploch a těles

- první tři příklady v této podkapitole slouží současně k procvičení užití pravoúhlé axonometrie

##### 3.1.1. Řez kosého čtyřbokého hranolu v pravoúhlé axonometrii

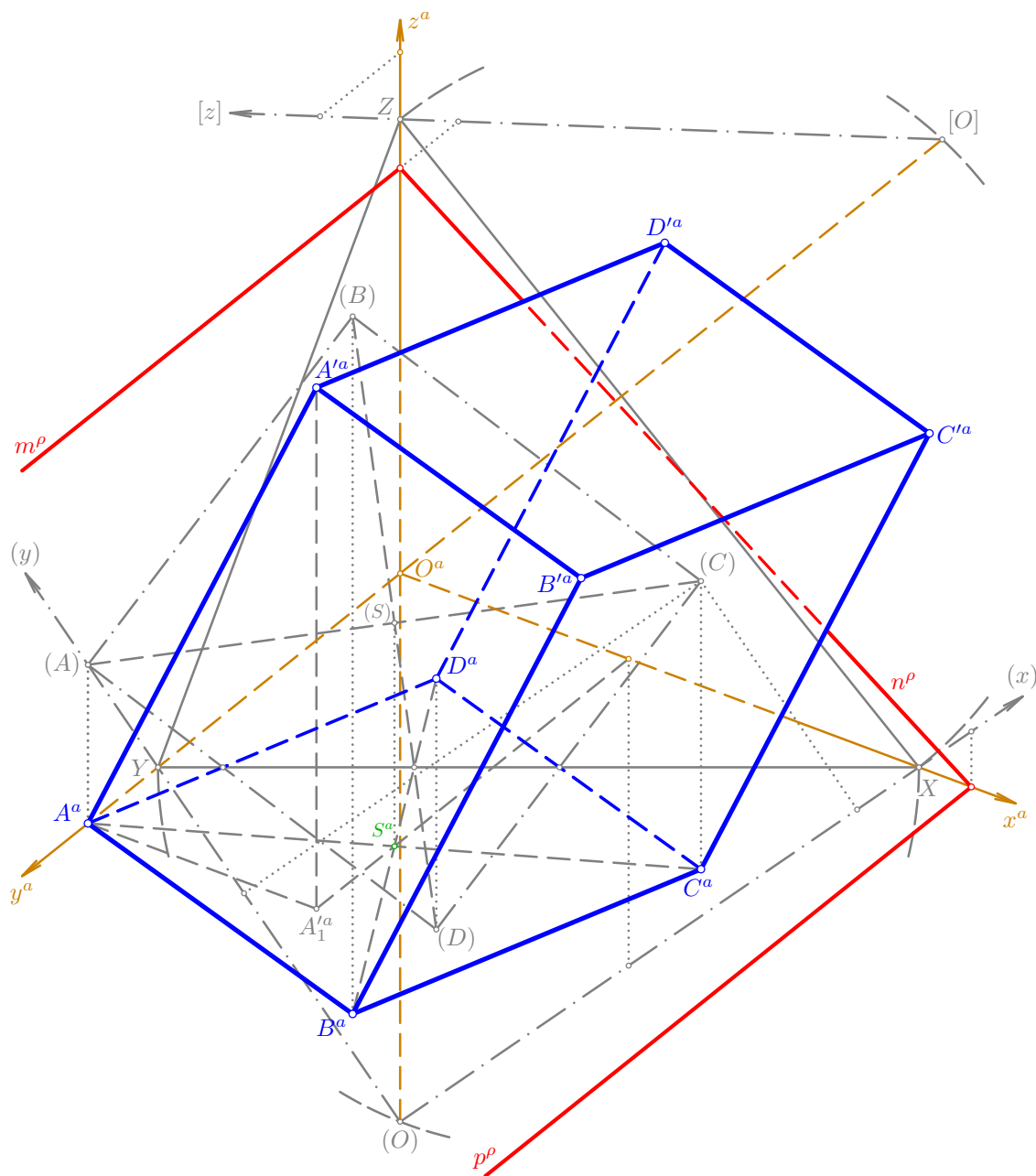
- při řešení úlohy lze použít vlastnosti prostorové osové afinity mezi dvěma rovinami, příslušný výklad je uveden ve sbírce Základy geometrie



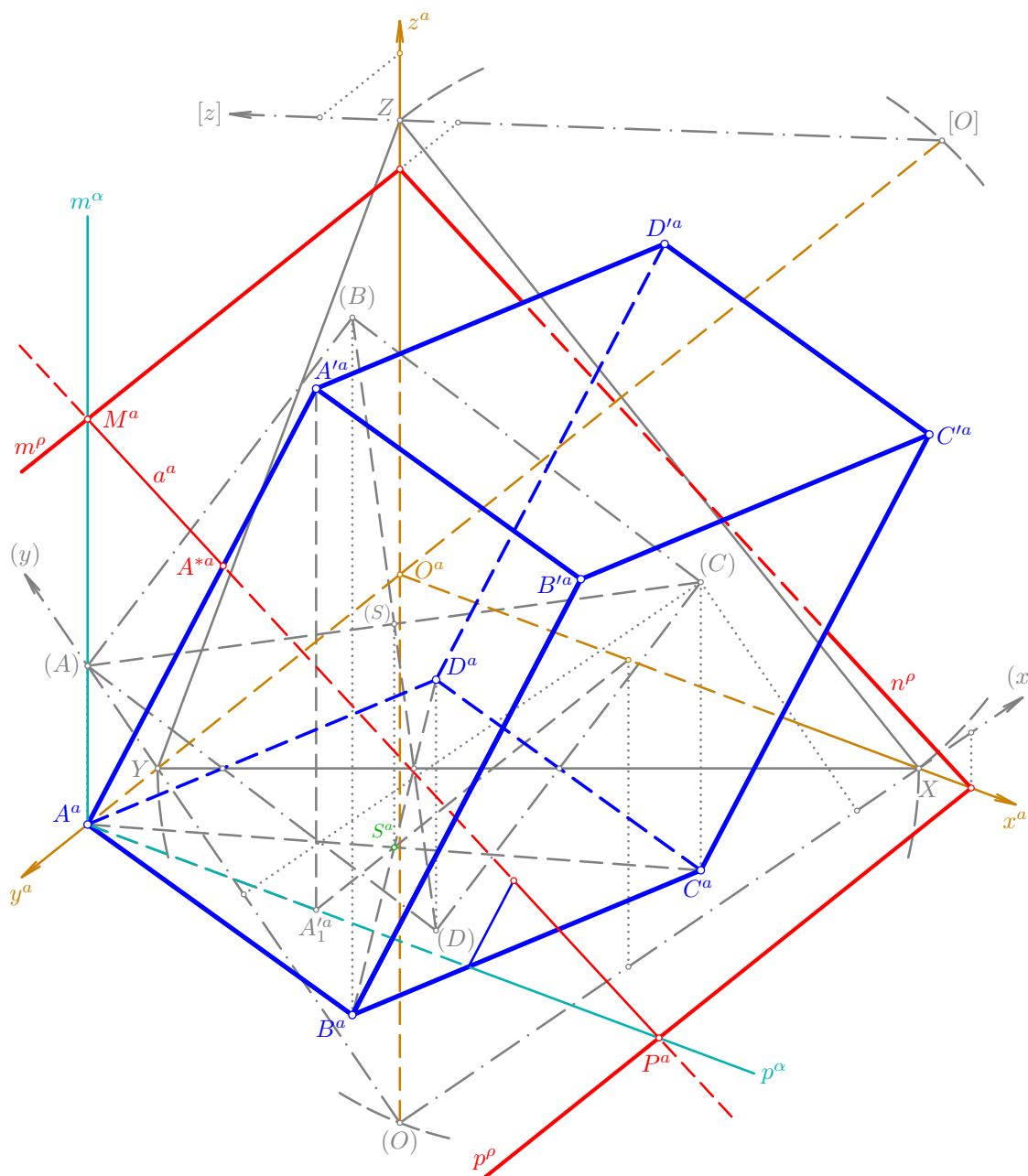
#### Řešené úlohy

**Příklad:** V pravoúhlé axonometrii  $\Delta(11; 10; 12)$  sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu  $ABCD A' B' C' D'$  rovinou  $\rho$ ; daný hranol má jednu čtvercovou podstavu s úhlopříčkou  $AC$  v půdorysně  $\pi$  a druhá podstava má vrchol  $A'$ ;  $A[0; 8; 0]$ ,  $C[8; 4; 0]$ ,  $A'[4; 8; 9]$ ,  $\rho(10; \infty; 7)$ .

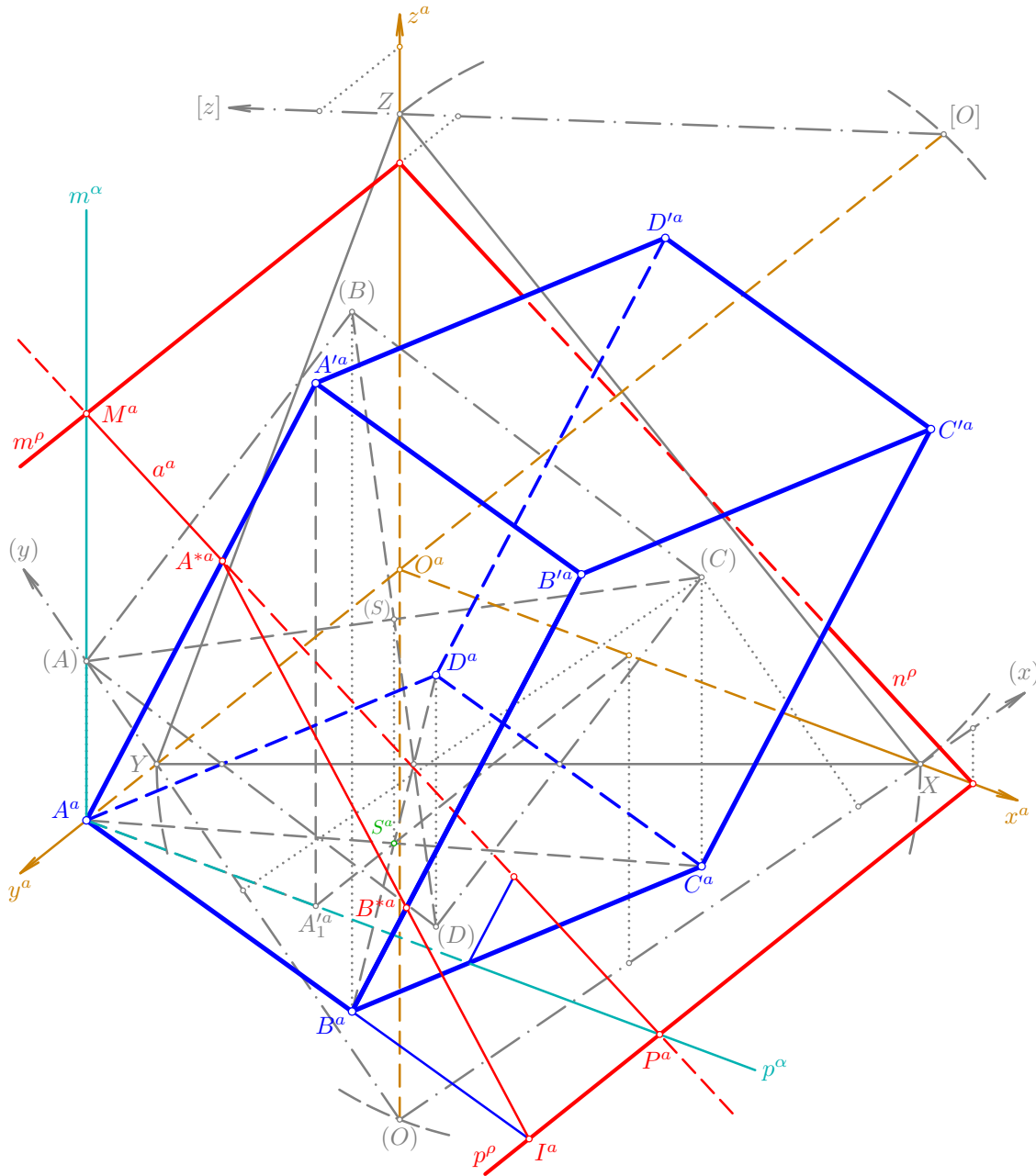
- zadání úlohy popíšeme pouze stručně, jednotlivé dílčí úlohy byly blíže popsány v kapitole **Pravoúhlá axonometrie**: v otočení půdorysny do axonometrické průmětny sestrojme čtverec  $(A)(B)(C)(D)$ , který je dán úhlopříčkou  $(A)(C)$ , a vraťme zpět do průmětu, přičemž lze využít pravoúhlou osovou afinitu; dále sestrojme axonometrický půdorys  $A_1^{a}$  a průmět  $A'^a$  vrcholu  $A'$  a doplňme průmět celého hranolu; k zadání patří ještě konstrukce stop rezné roviny  $\rho$ , která je rovnoběžná s osou  $y$ , což se zachová také pro její půdorysnou a bokorysnou stopu, tj.  $p^\rho \parallel m^\rho \parallel y$



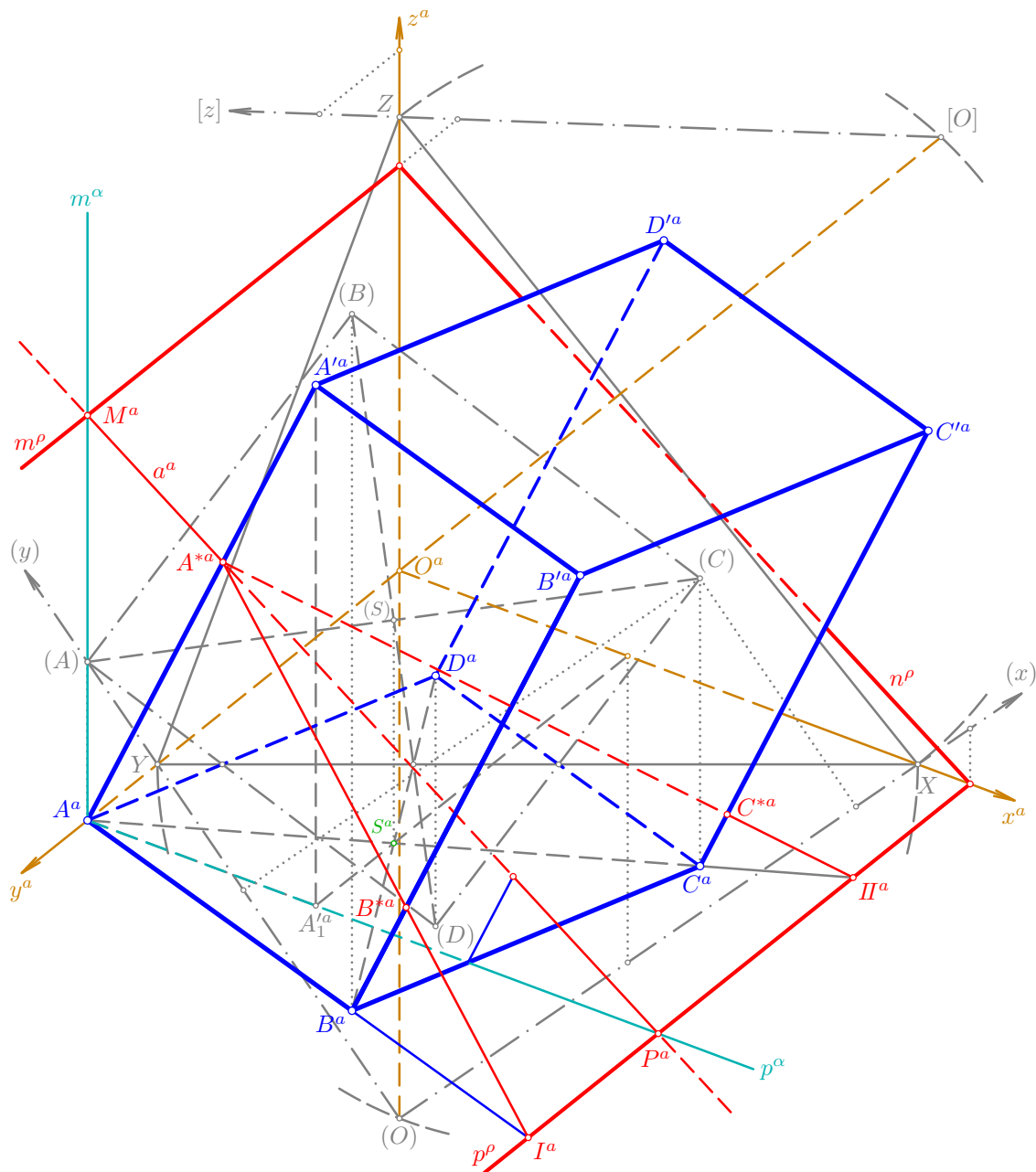
- najdeme první vrchol řezu (prováděné konstrukce budou popisovány v prostoru, jejich realizace v axonometrickém průmětu jsou zřejmé z obrázků): boční hranou  $AA'$  vedeme rovinu  $\alpha = AA'A'_1$ , která je kolmá k  $\pi$  (dokonce je  $\alpha \parallel \nu$ ) a pro její stopy platí  $p^\alpha = AA'_1$ ,  $m^\alpha \parallel z$ ,  $A \in m^\alpha$ ; sestrojme průsečnici  $a = \alpha \cap \rho = PM$ , kde  $P = p^\alpha \cap p^\rho$  a  $M = m^\alpha \cap m^\rho$ , a označme  $A^*$  její průsečík s hranou  $AA'$ ; tento bod  $A^*$  je prvním vrcholem hledaného řezu; zvědavý čtenář si může jako cvičení promyslet konstrukci průsečíku přímky  $a$  s rovinou boční stěny  $BCC'B'$ ...



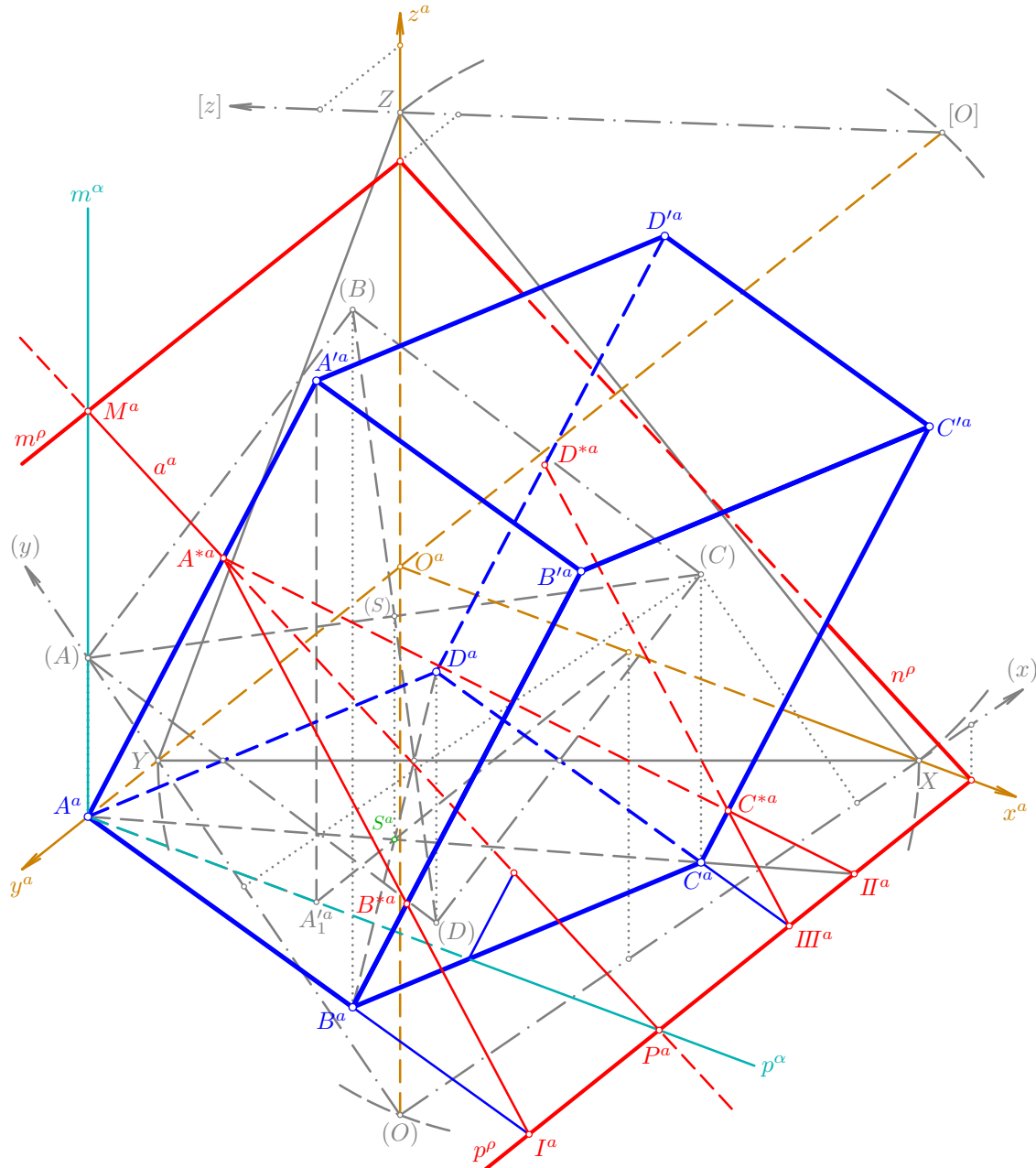
- pro další vrchol  $B^*$  řezu platí  $B^* = BB' \cap IA^*$ , přičemž  $I = AB \cap p^\rho$ ; jinak řečeno, přímka  $AB$  je půdorysnou stopou roviny boční stěny  $ABB'A'$  a přímka  $IA^*$  je pak průsečnicí roviny  $\rho$  řezu s rovinou této stěny



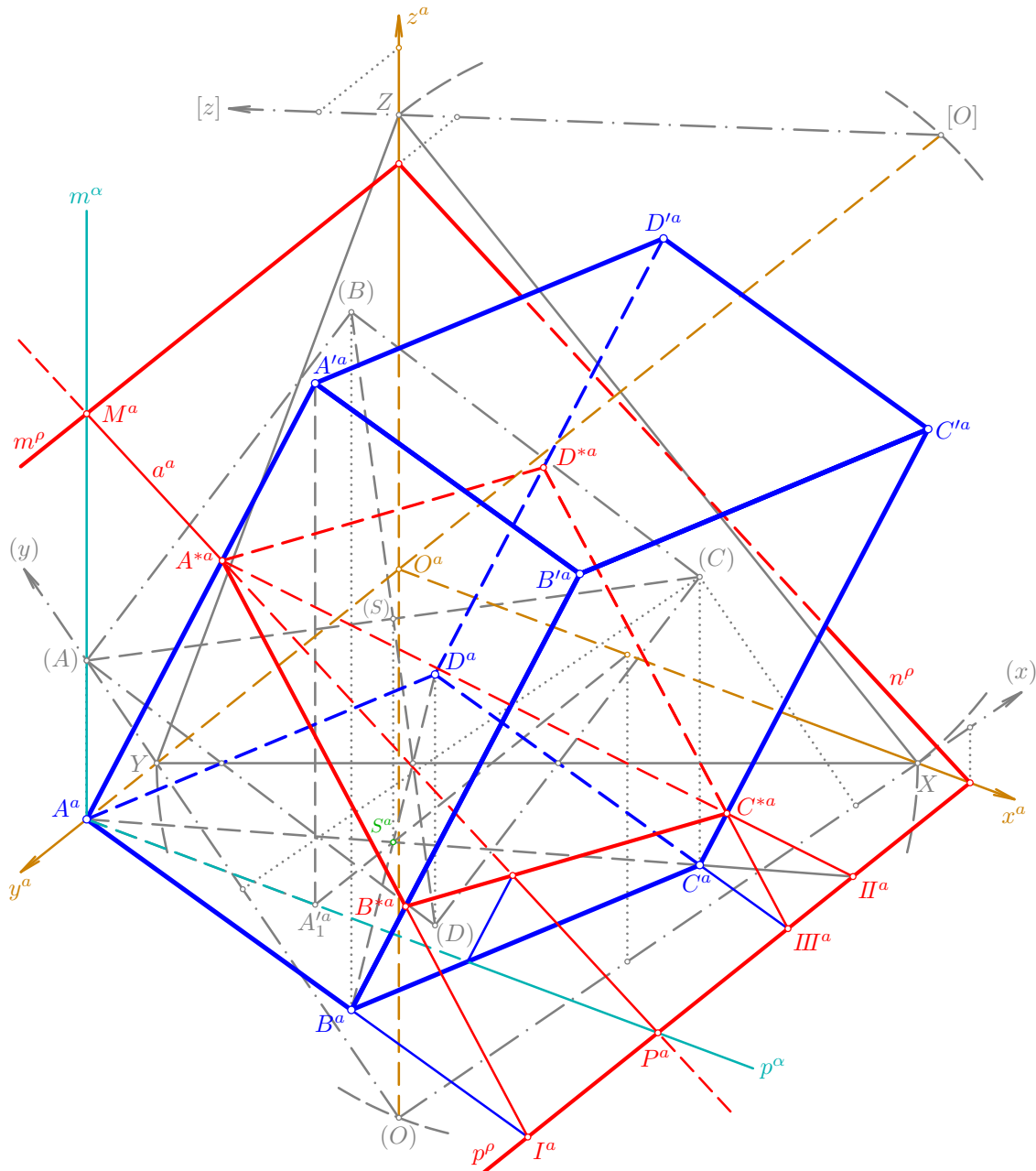
- podobně sestrojíme průsečík  $II$  přímky  $AC$  se stopou  $p^\rho$  a následně průsečnici  $IIA^*$  roviny  $\rho$  s rovinou  $ACC'$ ; přímka  $IIA^*$  pak protíná hranu  $CC'$  v dalším vrcholu  $C^*$  hledaného řezu



- poslední vrchol  $D^*$  řezu na hraně  $DD'$  můžeme doplnit už jen na základě rovnoběžnosti,  $D^*C^* \parallel A^*B^*$ , nebo použijeme analogický postup jako v předchozích krocích – přímka  $CD$  protíná půdorysnou stopu  $p^\rho$  v bodě  $III$  a bod  $D^*$  je průsečíkem přímky  $IIIC^*$  s boční hranou  $DD'$



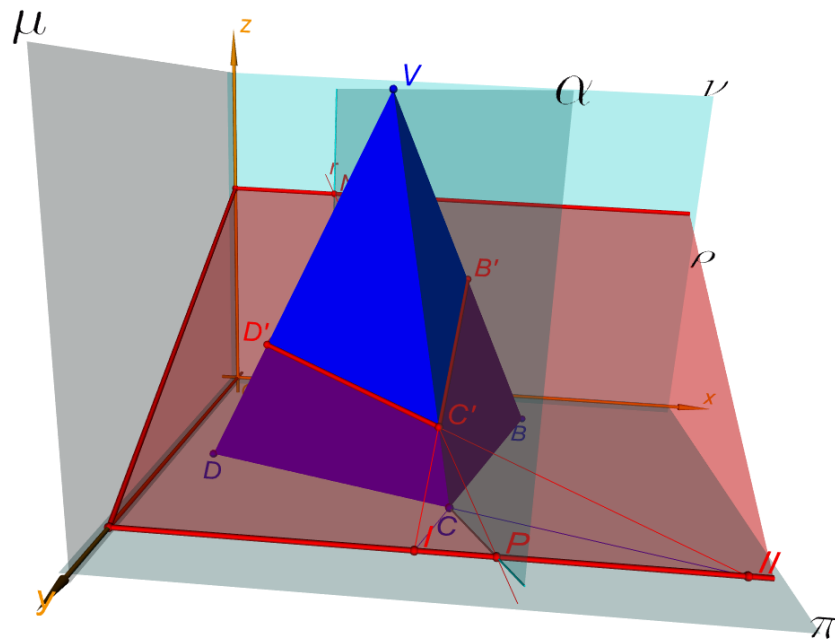
- na závěr doplníme zbývající strany  $A^*D^*$ ,  $B^*C^*$  řezu, kterým je rovnoběžník  $A^*B^*C^*D^*$ ; mezi podstavným čtvercem  $ABCD$  a sestrojeným rovnoběžníkem řezu je vztah prostorové osové afinity mezi rovinami  $\pi$  a  $\rho$ , její osou je půdorysná stopa  $p^\rho$ , na které leží samodružné body  $I, II, III$ , a směr udává některá boční hrana daného hranolu; pravouhlym průmětem zmíněné afinity do axonometrické průmětny dostáváme osovou afinitu v rovině, jejíž osou je průmět stopy  $p^\rho$  a směr je dán přímkou  $A^aA'^a$



□

## 3.1.2. Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu v pravoúhlé axonometrii

- při řešení této úlohy lze použít vlastnosti prostorové středové kolineace mezi dvěma rovinami, příslušný výklad je uveden ve sbírce Základy geometrie

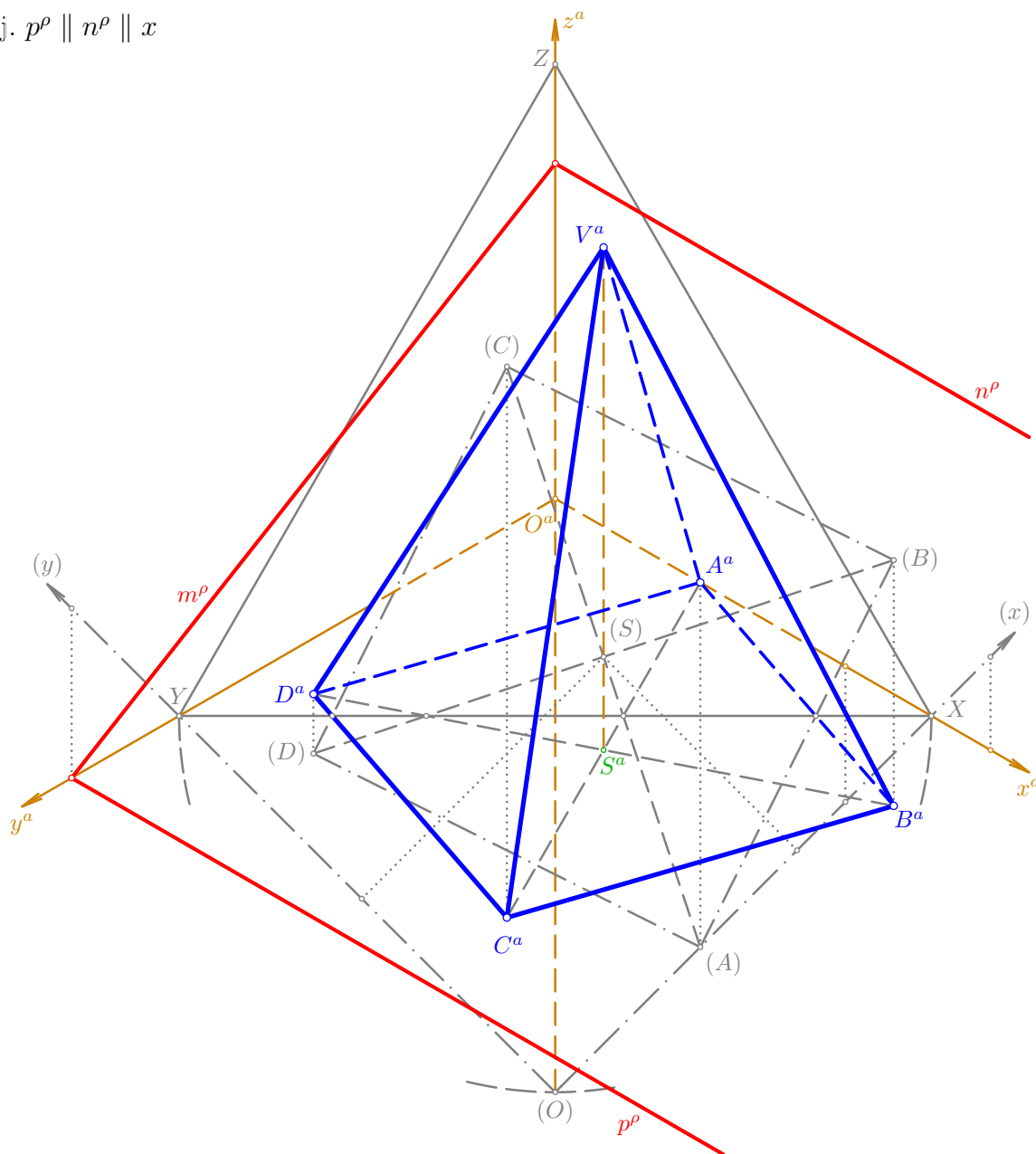


## Řešené úlohy

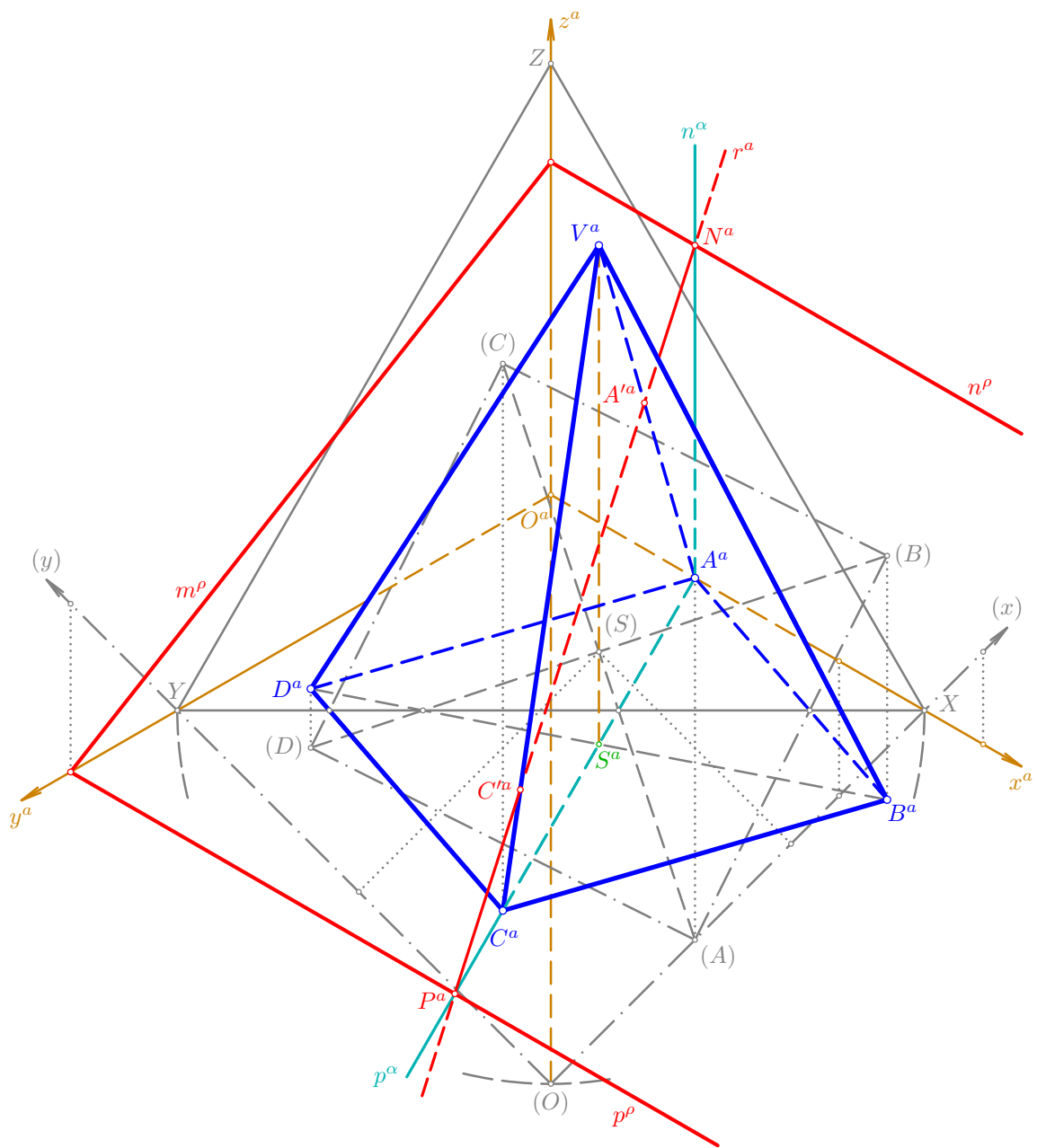
**Příklad:** V pravoúhlé izometrii  $\Delta(11; 11; 11)$  sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  rovinou  $\rho$ ; daný jehlan má čtvercovou podstavu o středu  $S$  a vrcholu  $A$  v půdorysně  $\pi$  a výšku  $v$ ;  $A[3; 0; 0]$ ,  $S[5; 4; 0]$ ,  $v = 9$ ,  $\rho(\infty; 10; 6)$ .



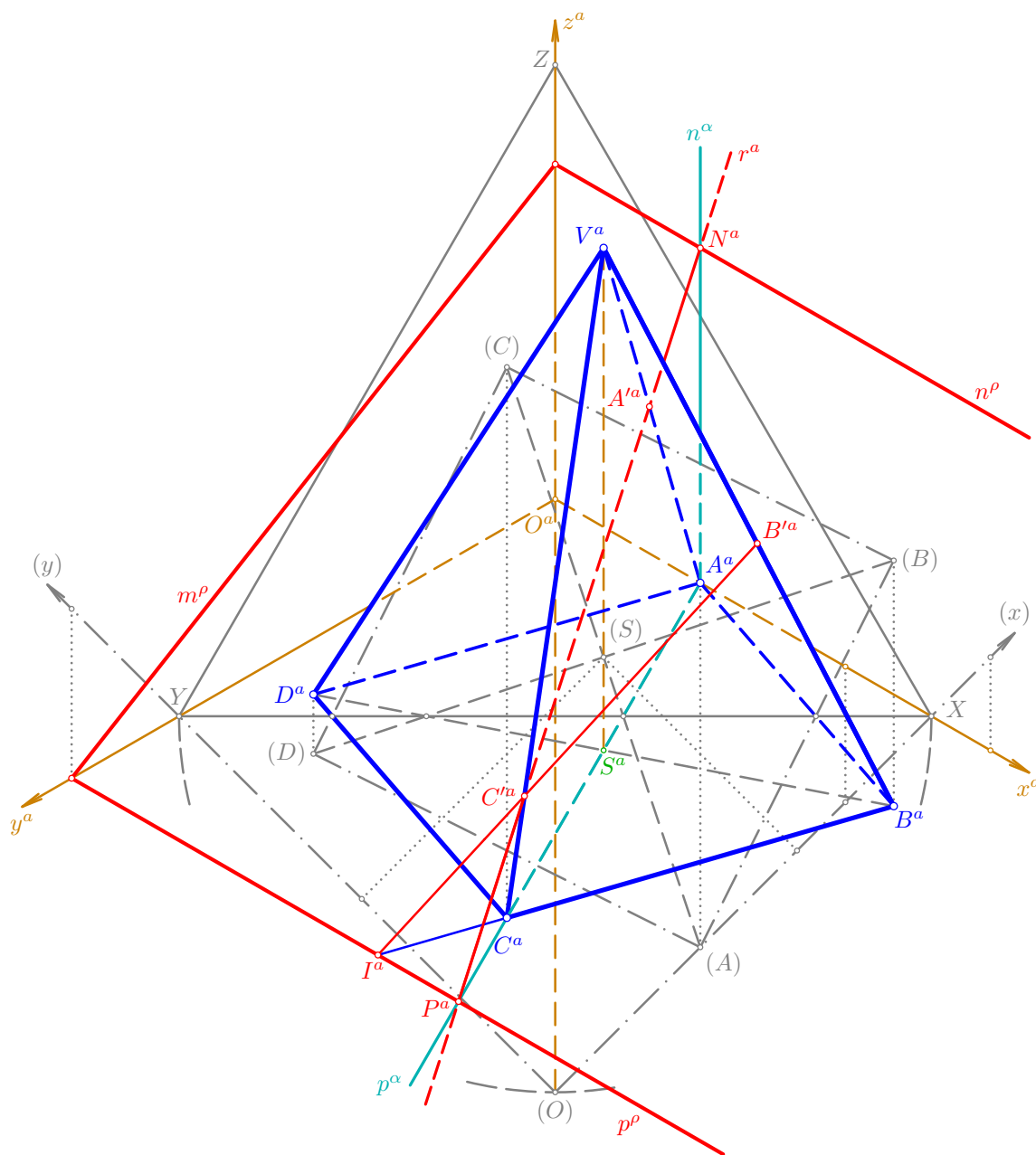
- zadání úlohy popíšeme pouze stručně, jednotlivé dílčí úlohy byly blíže popsány v kapitole **Pravouhlá axonometrie**: v otočení půdorysny do axonometrické průmětny sestrojme čtverec  $(A)(B)(C)(D)$ , který je dán středem  $(S)$  a vrcholem  $(A)$ , a vraťme zpět do průmětu, přičemž lze využít pravouhlou osovou afinitu; dále doplníme axonometrický průmět  $V^a$  hlavního vrcholu  $V$ , který leží ve výšce  $v = 9$  nad středem  $S$  podstavy (axonometrické zkrácení ve směru průmětu osy  $z$  můžeme v izometrii určovat např. jako zkrácení ve směru průmětu osy  $x$ ); k zadání patří ještě konstrukce stop řezné roviny  $\rho$ , která je rovnoběžná s osou  $x$ , což se zachová také pro její půdorysnou a nárysnou stopu, tj.  $p^\rho \parallel n^\rho \parallel x$



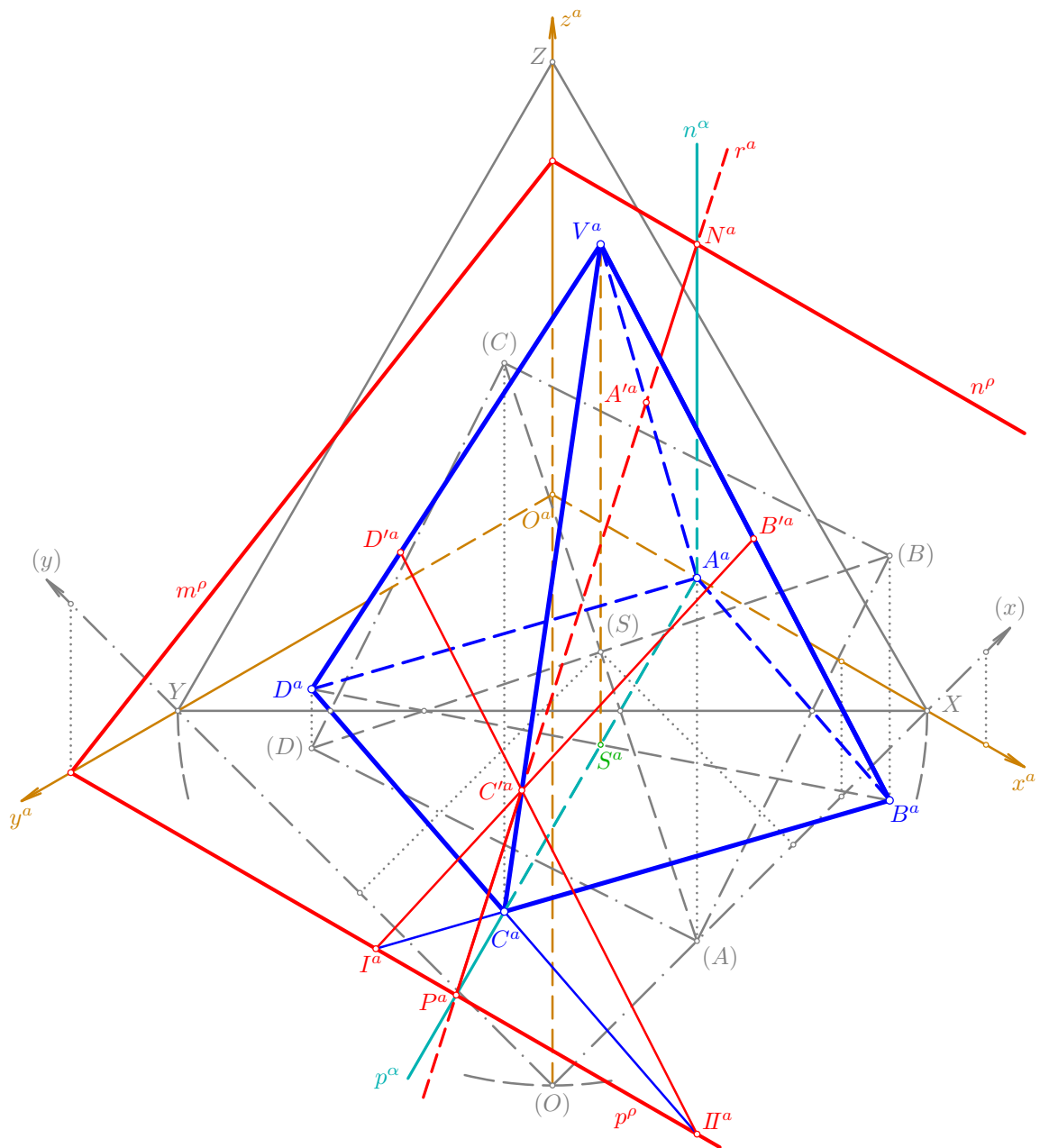
- najděme první dva vrcholy řezu (prováděné konstrukce budou popisovány v prostoru, jejich realizace v axonometrickém průmětu jsou zřejmé z obrázků): bočními hranami  $AV, CV$  vedeme rovinu  $\alpha = ACV$ , která je kolmá k  $\pi$  a pro jejíž stopy platí  $p^\alpha = AC$ ,  $n^\alpha \parallel z$ ,  $A \in n^\alpha$ ; sestrojme průsečnici  $r = \alpha \cap \rho = PN$ , kde  $P = p^\alpha \cap p^\rho$  a  $N = n^\alpha \cap n^\rho$ , a označme její průsečky  $A', C'$  s hranami  $AV, CV$



- pro další vrchol  $B'$  řezu platí  $B' = BV \cap IC'$ , přičemž  $I = BC \cap p^\rho$ ; jinak řečeno, přímka  $BC$  je půdorysnou stopou roviny boční stěny  $BCV$ , přímka  $IC'$  je pak průsečnicí roviny  $\rho$  řezu s rovinou této stěny, a tudíž protíná hranu  $BV$  v dalším vrcholu  $B'$  hledaného řezu



- poslední vrchol  $D'$  řezu na hraně  $DV$  můžeme doplnit analogicky – přímka  $CD$  protíná půdorysnou stopu  $p^\rho$  v bodě  $II$  a bod  $D'$  je průsečíkem přímky  $IIC'$  s boční hranou  $DV$ ; nebo lze použít alternativní postup:  $D' = DV \cap IIIA'$ , kde  $III = AD \cap p^\rho$  (tato konstrukce není v obrázku provedena, necht' si ji čtenář laskavě doplní jako cvičení. . .)

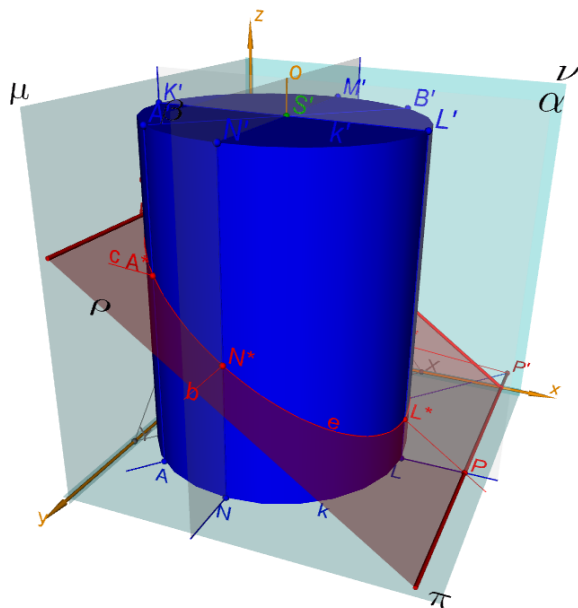




## 3.1.3. Řez rotačního válce v pravoúhlé axonometrii

## Výklad

- plášť rotačního válce je částí rotační kvadriky a obecná rovina (která není kolmá k jeho ose ani s ní není rovnoběžná) jej řízne v elipse (nebo její části)
- pro tuto řeznou elipsu lze pomocí prostorové osové afinity mezi rovinou podstavy válce a rovinou řezu najít dvojici sdružených průměrů, což použijeme v následujícím příkladě
- jinak bychom mohli křivku řezu sestavit také tzv. bodově, tj. mohli bychom sestavit dostatečný počet jejích bodů, v tomto případě nejlépe jako průsečíky povrchových úseček daného válce s danou řeznou rovinou

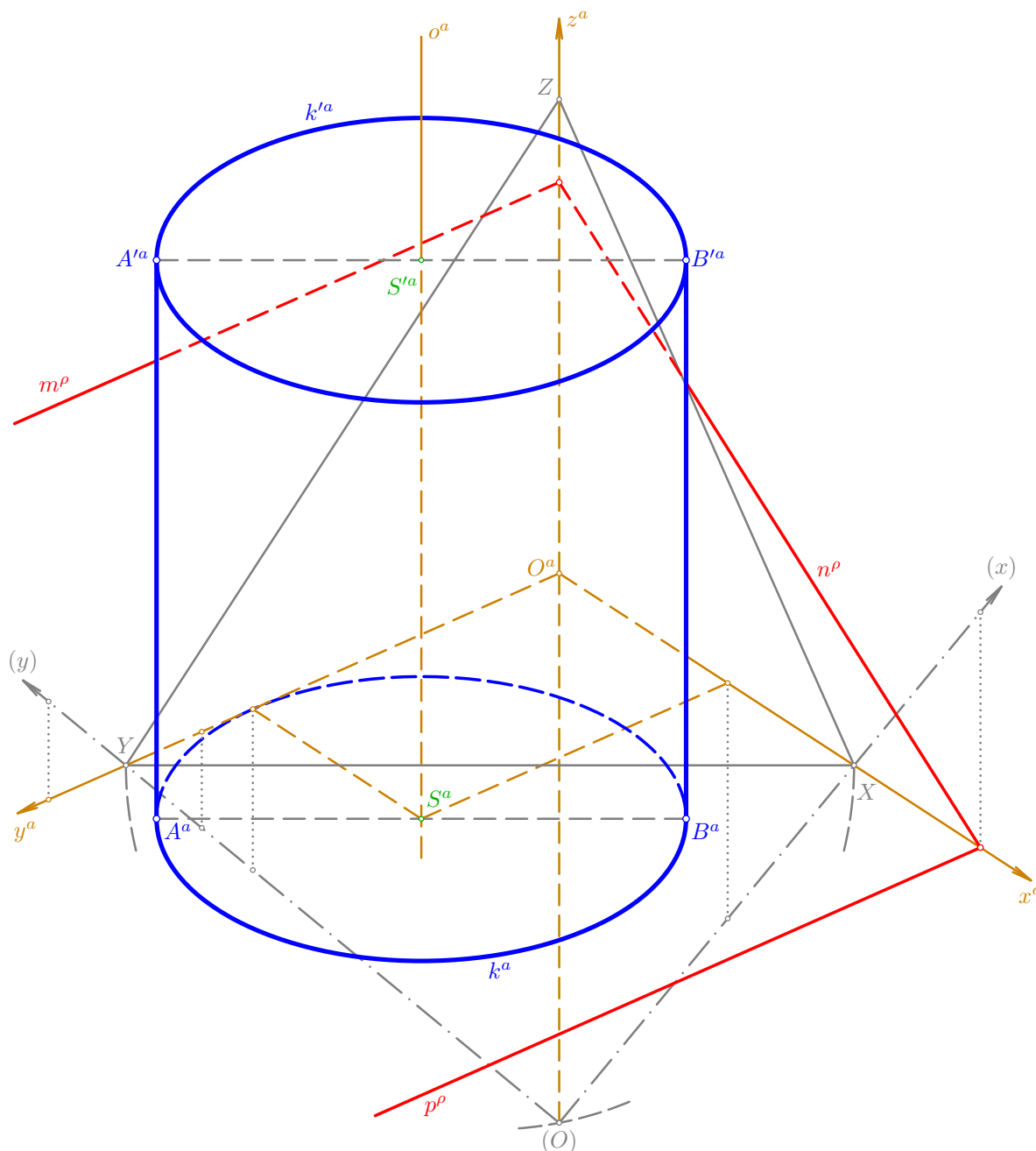


## Řešené úlohy

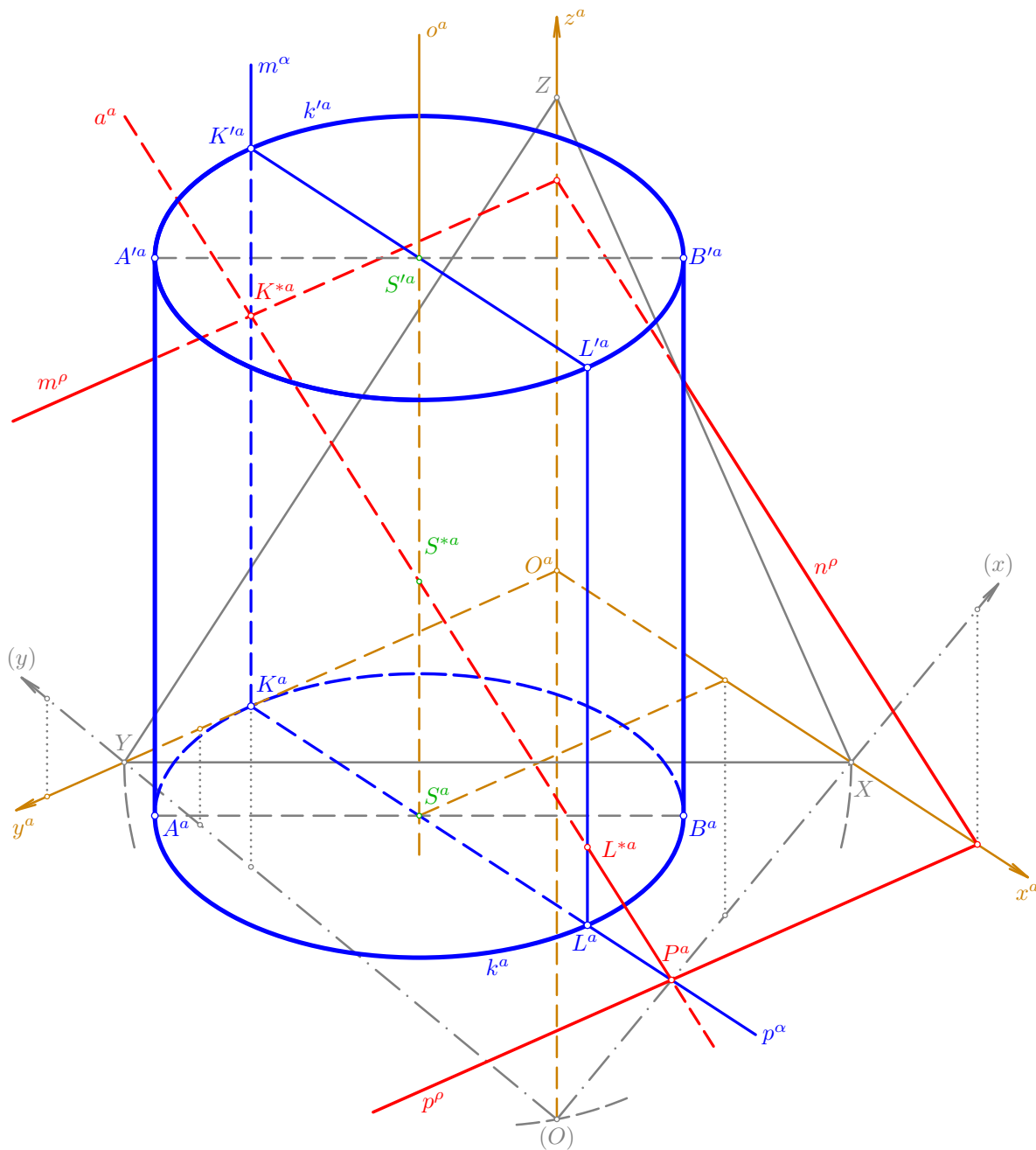
**Příklad:** V pravoúhlé dimetrii  $\Delta(11; 12; 11)$  sestrojte řez rotačního válce rovinou  $\rho$ ; daný válec má jednu podstavovou kružnici  $k(S, r)$  v půdorysně  $\pi$  a výšku  $v$ ;  $S[4; 6; 0]$ ,  $r=4$ ,  $v=10$ ,  $\rho(10; \infty; 7)$ .

V následujících několika krocích budeme popisovat konstrukce především z hlediska prostorového postupu řešení, příslušné konstrukce v axonometrickém průmětu jsou zřejmé z obrázků, případně k nim bude připojen stručný komentář.

- zadání úlohy: podstavné kružnice  $k, k'$  zobrazíme jako elipsy  $k^a, k'^a$  (podrobnější popis je uveden na straně 154 a následujících), obrys válce dokončíme spojením příslušných hlavních vrcholů obou elips;  $k$  zadání patří ještě konstrukce stop řezné roviny  $\rho$ , která je rovnoběžná s osou  $y$ , což se zachová také pro její půdorysnou a bokorysnou stopu, tj.  $p^\rho \parallel m^\rho \parallel y$ ; pro vynášení  $z$ -ových souřadnic využijeme skutečnosti, že se díky zadané dimetrii zkrátí jednotka délky stejně ve směru průmětu osy  $z$  i ve směru průmětu osy  $y$

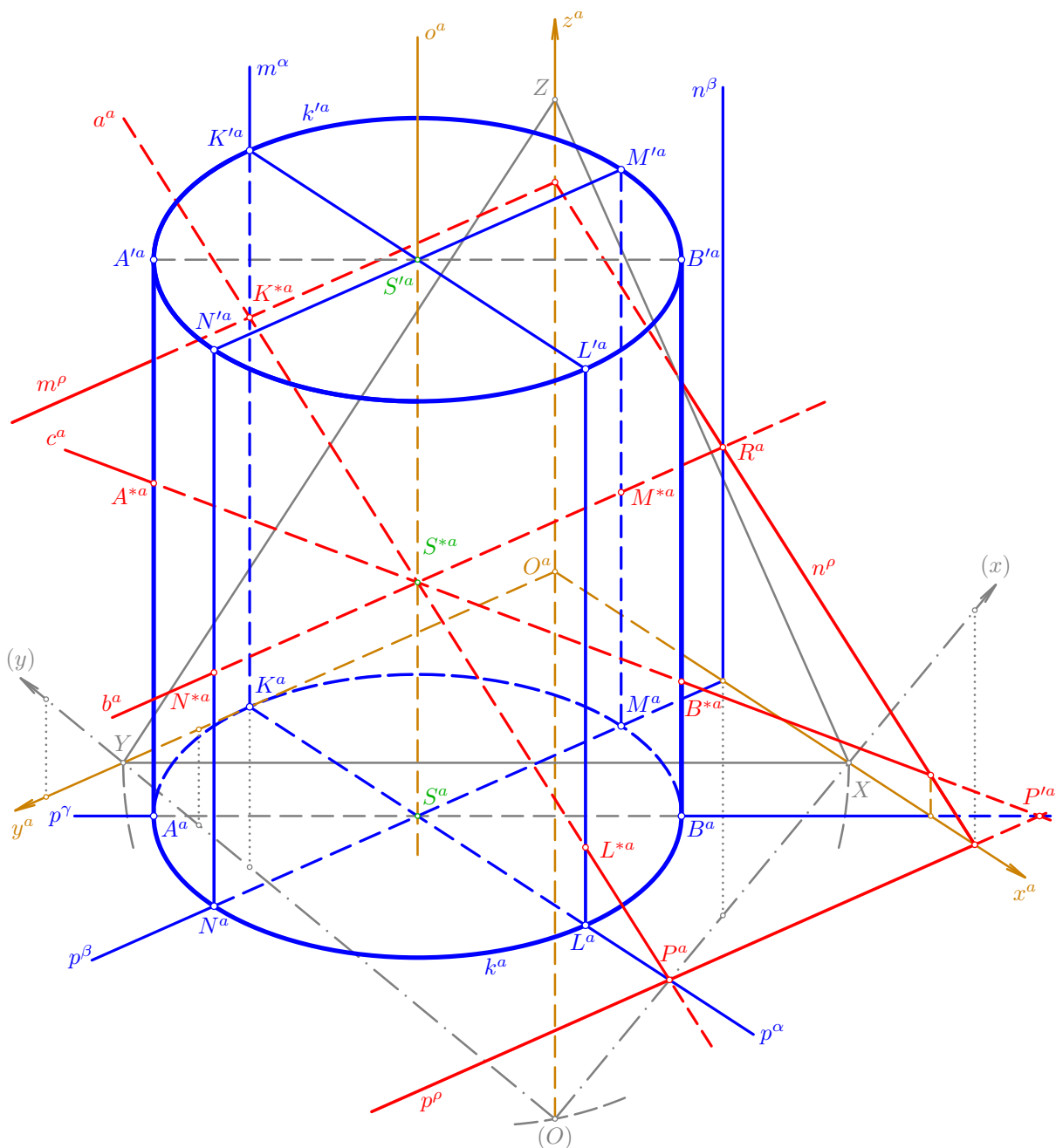


- osou  $o = SS'$  válce ved'eme rovinu  $\alpha \parallel \nu$ , její půdorysná stopa  $p^\alpha \parallel x$ ,  $S \in p^\alpha$ , protíná podstavnu kružnici  $k$  v bodech  $K, L$  (v bodě  $K$  se kružnice  $k$  dotýká osy  $y$ ) a bokorysná stopa  $m^\alpha$  prochází bodem  $K$  rovnoběžně s osou  $z$ ; rovina  $\alpha$  protíná daný válec v obdélníku  $KLL'K'$  a danou rovinu  $\rho$  řezu v přímce  $a = PK^*$ , kde  $P = p^\alpha \cap p^\rho$  a  $K^* = m^\alpha \cap m^\rho$ ; průsečíky  $K^*, L^*$  přímky  $a$  se stranami  $KK', LL'$  jsou pak první dva body hledaného eliptického řezu, bod  $S^* = a \cap o$  je jeho středem

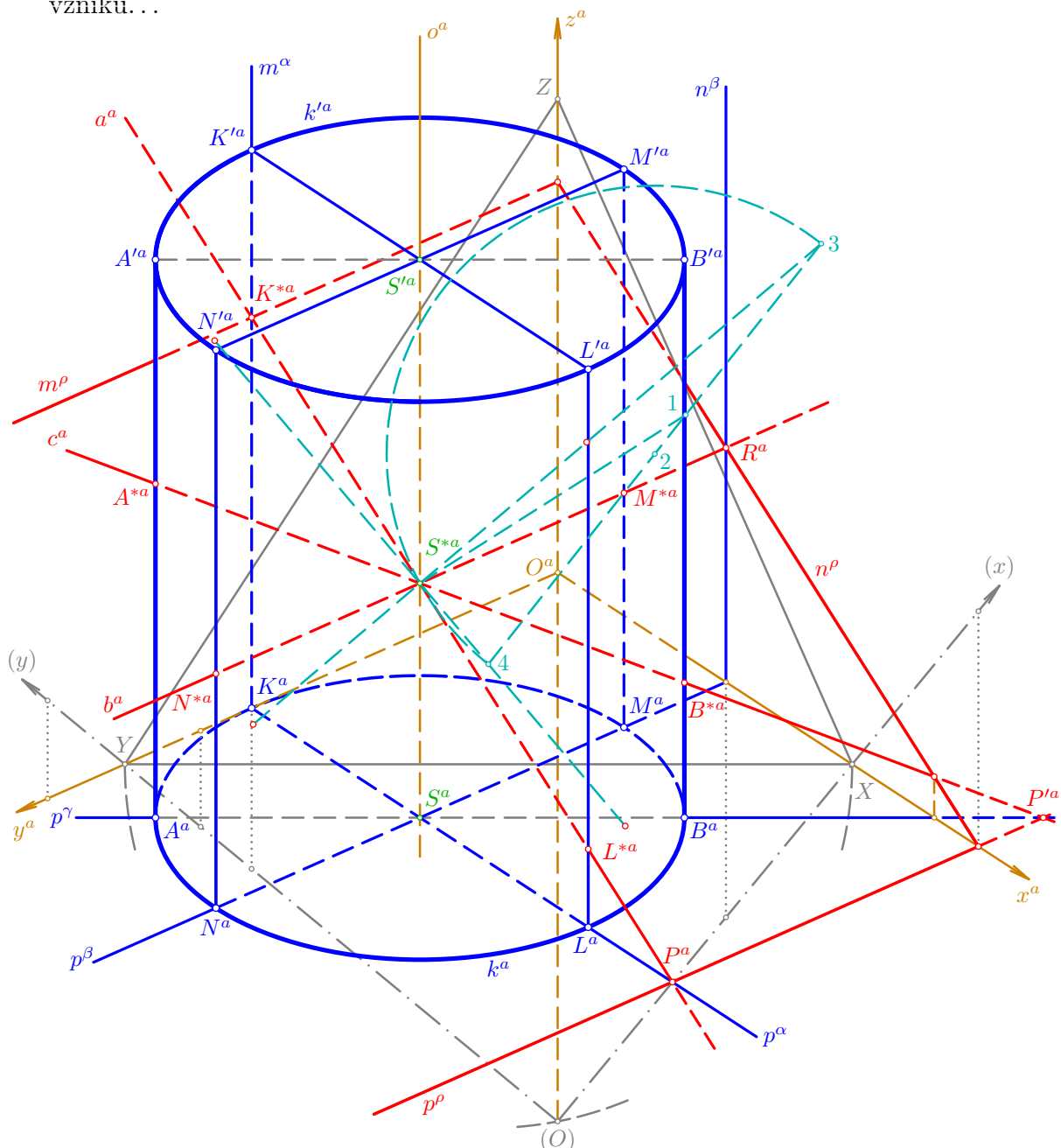




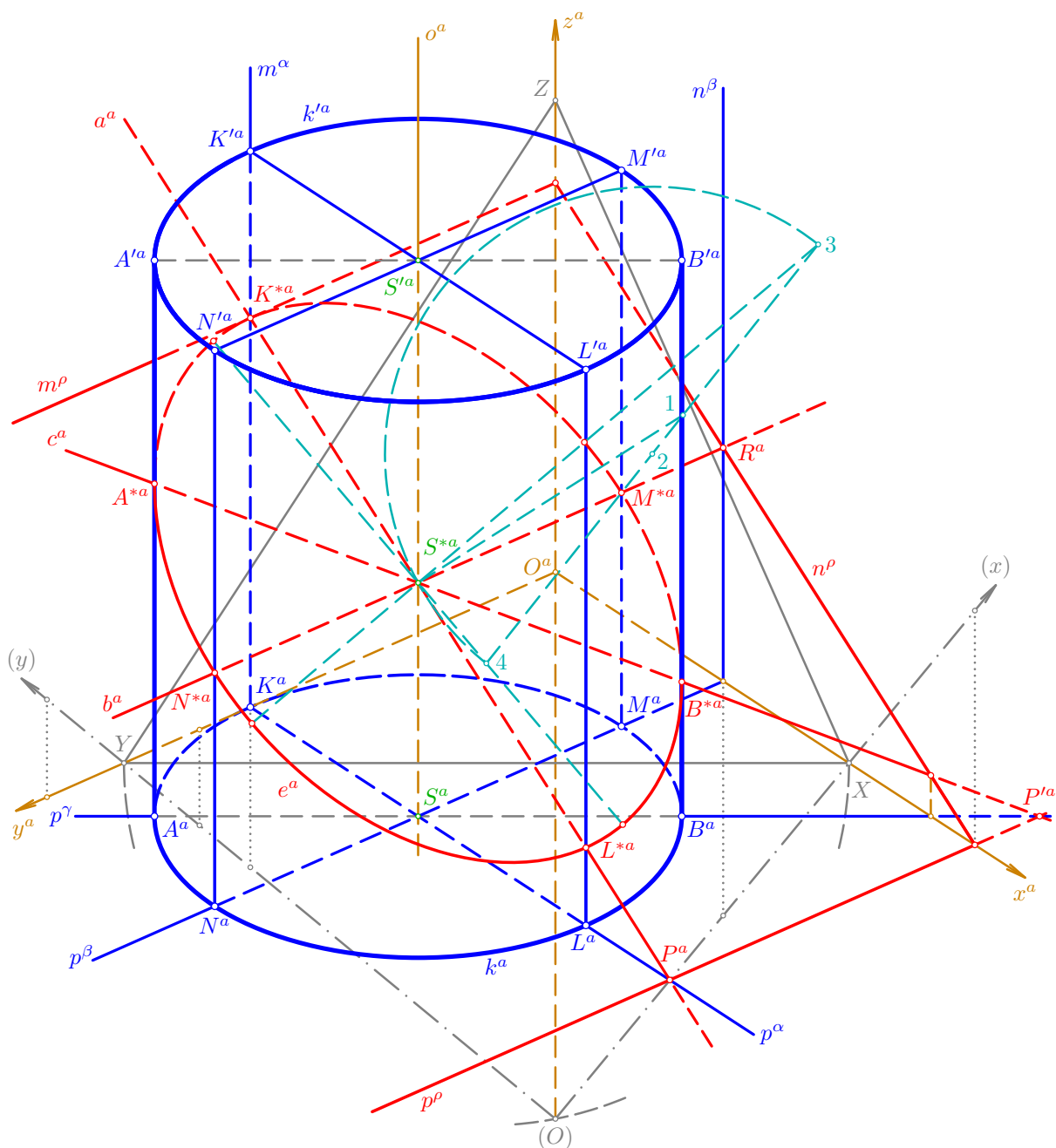
- ještě jednou provedme analogickou konstrukci – osou  $o$  válce vedme rovinu  $\gamma = ABB'$ , která protíná rovinu  $\rho$  řezu v přímce  $c = P'S^*$ , kde  $P' = p^\gamma \cap p^\rho$  a  $p^\gamma = AB$ ; body  $A^* = c \cap AA'$ ,  $B^* = c \cap BB'$  jsou pak další body křivky řezu, které navíc leží na obrysových stranách válce a bude se v nich tudíž měnit viditelnost řezné elipsy



- zvolené průměry  $KL, MN$  podstavné kružnice  $k$  jsou navzájem **kolmé**, a v rovině  $\rho$  jim tedy odpovídají **sdužené průměry**  $K^*L^*, M^*N^*$  elipsy řezu (v našem zadání jsou dokonce body  $K^*, L^*$  hlavními a body  $M^*, N^*$  vedlejšími vrcholy sestrojované elipsy); sduženost průměrů se rovnoběžným promítáním zachová, a v axonometrickém průmětu tak máme dvojici sdužených průměrů  $K^{*a}L^{*a}$  a  $M^{*a}N^{*a}$ , k nimž sestrojíme hlavní a vedlejší vrcholy průmětu řezné elipsy pomocí **Rytzovy konstrukce** (viz strana 200); v obrázku jsou příslušné pomocné body označeny 1, 2, 3, 4 postupně podle pořadí jejich vzniku...



- na závěr je vyrýsován (nejlépe za pomoci hyperoskulačních kružnic ve vrcholech) a i s viditelností vytažen průmět  $e^a$  elipsy  $e$ , která je hledaným řezem daného rotačního válce danou rovinou  $\rho$  a která odpovídá podstavné kružnici  $k$  v prostorové osové afinitě mezi půdorysnou  $\pi$  a rovinou  $\rho$ , přičemž osou této afinity je půdorysná stopa  $p^\rho$  a směr udává přímka  $o = SS'$



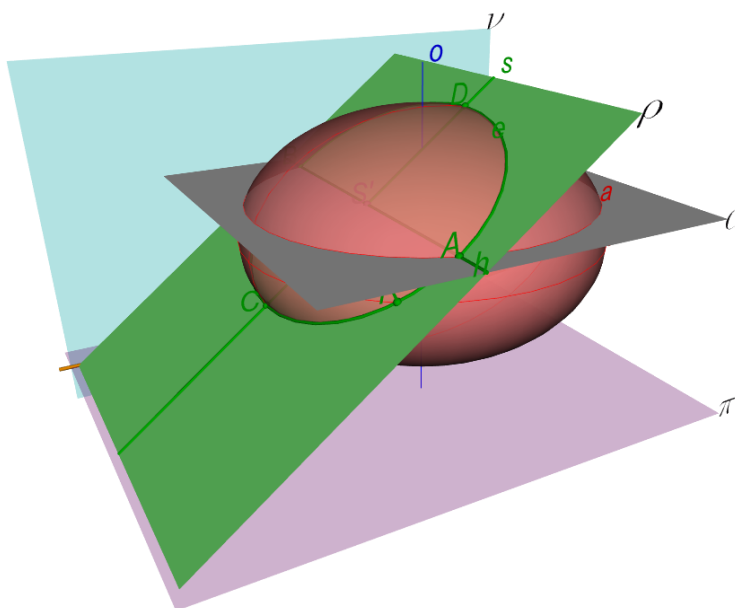
□

## 3.1.4. Řez rotačního zploštělého elipsoidu v Mongeově promítání



## Výklad

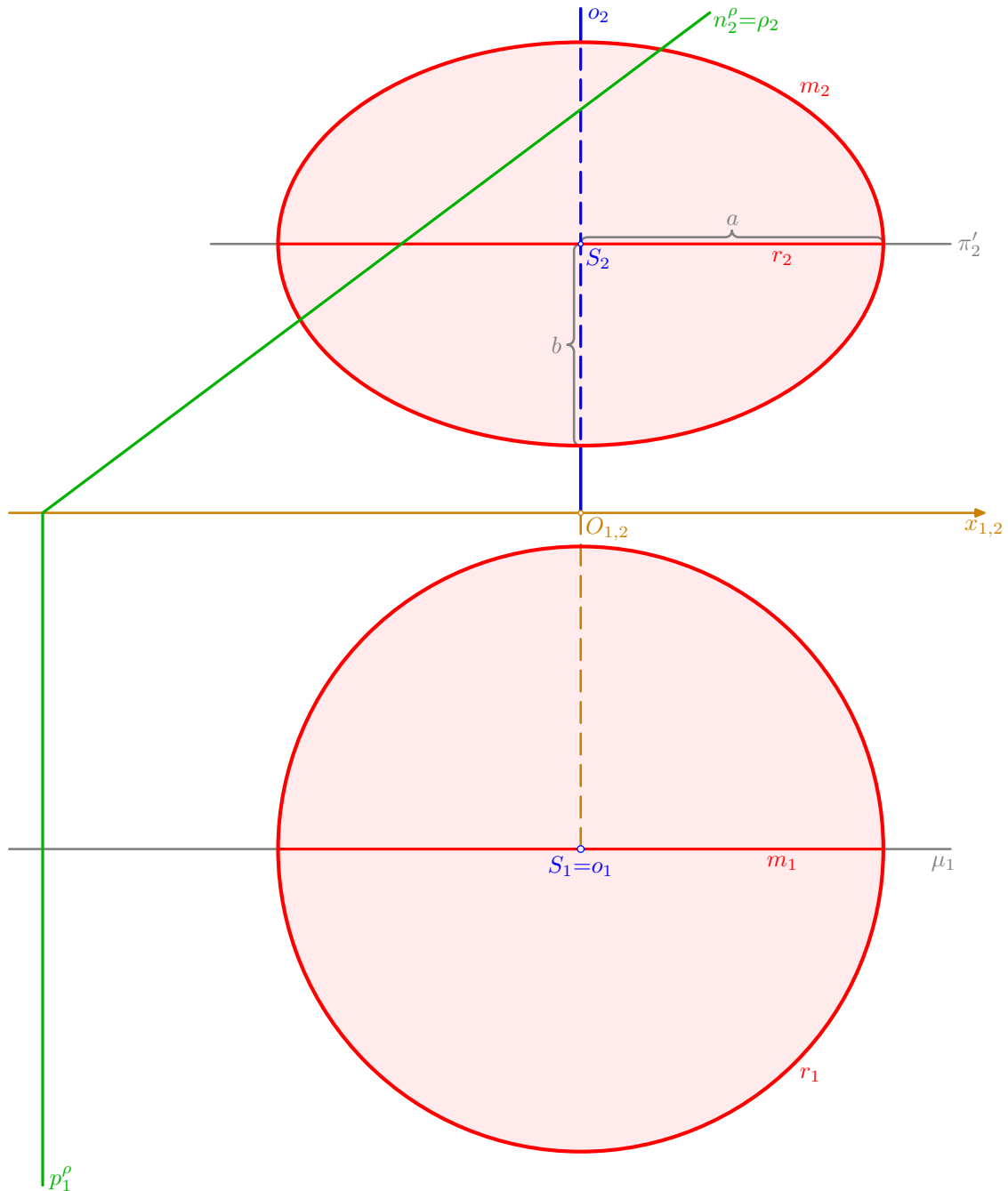
- rotační zploštělý elipsoid patří mezi rotační kvadriky a jeho rovinným řezem je tedy nějaká kuželosečka, v tomto případě buď kružnice nebo elipsa
- v následujícím příkladě naznačíme princip bodové konstrukce, pomocí kterého najdeme určující prvky hledané řezné kuželosečky



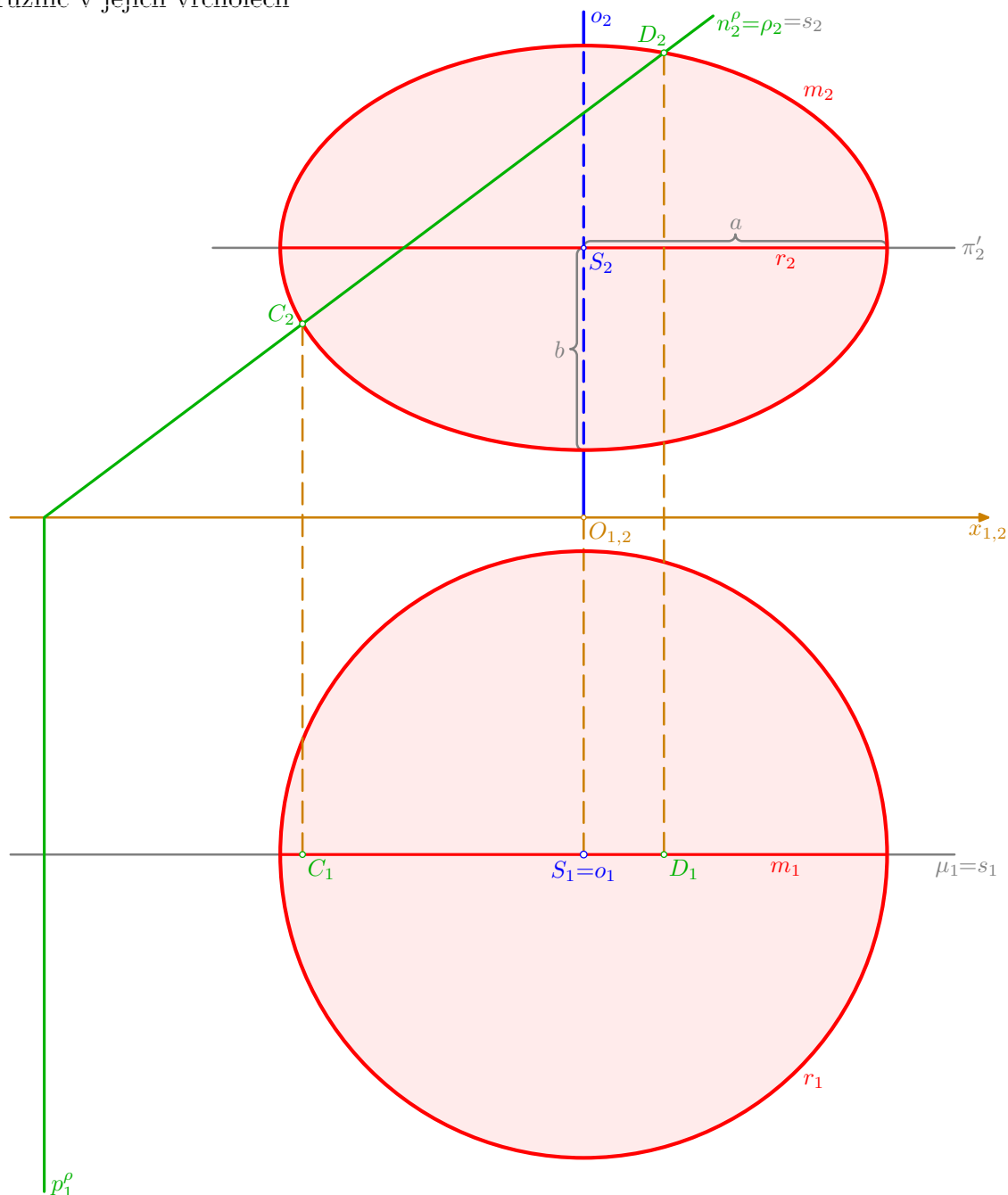
## Řešené úlohy

**Příklad:** V Mongeově promítání sestrojte řez zploštělého rotačního elipsoidu rovinou  $\rho$ ; daný elipsoid má střed  $S$ , osu  $o \perp \pi$ ,  $S \in o$  a délky  $a, b$  hlavní a vedlejší poloosy;  $S[0; 5; 4]$ ,  $a = 4,5$ ,  $b = 3$ ,  $\rho(-8; \infty; 6)$ .

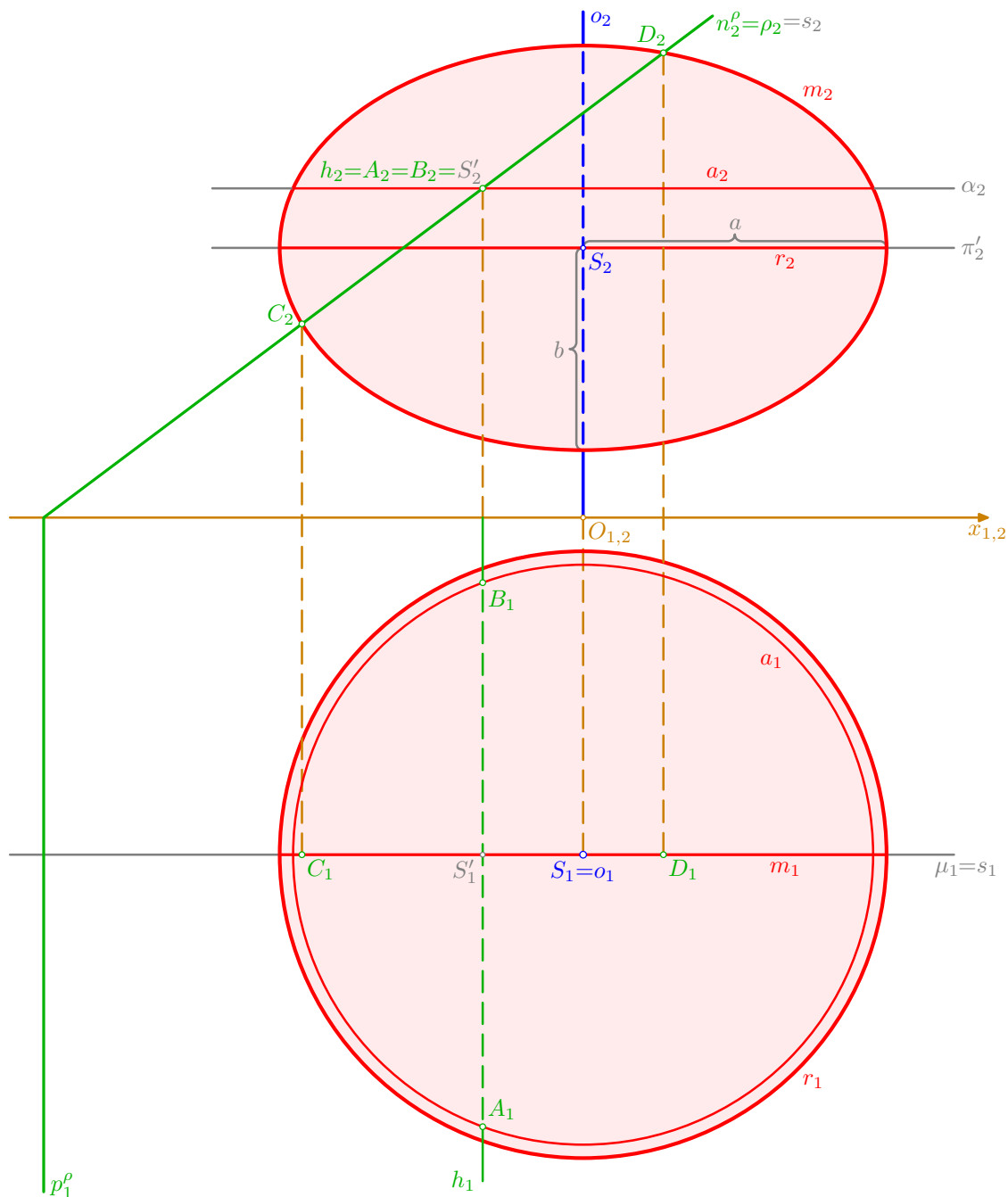
- podle zadání sestrojme sdružené průměty  $S_1, S_2$  středu  $S$ , půdorysem osy  $o \perp \pi, S \in o$ , je bod  $o_1 = S_1$ , nárysem je přímka  $o_2 \perp x_{1,2}, S_2 \in o_2$ ; rovina  $\pi' \perp o, S \in \pi'$ , protíná daný elipsoid v rovníkové kružnici  $r(S, a = 4,5)$ , jejím půdorysem je kružnice  $r_1(S_1, a)$ , nárysem úsečka  $r_2$ ; podobně protíná rovina  $\mu \parallel \nu, S \in \mu$ , plochu v hlavní meridiánové elipse  $m$ , jejímž nárysem je elipsa  $m_2$  a půdorysem úsečka  $m_1$ ; k zadání patří ještě stopy  $p_1^{\rho} \perp x_{1,2}$  a  $n_2^{\rho} = \rho_2$  řezné roviny  $\rho$



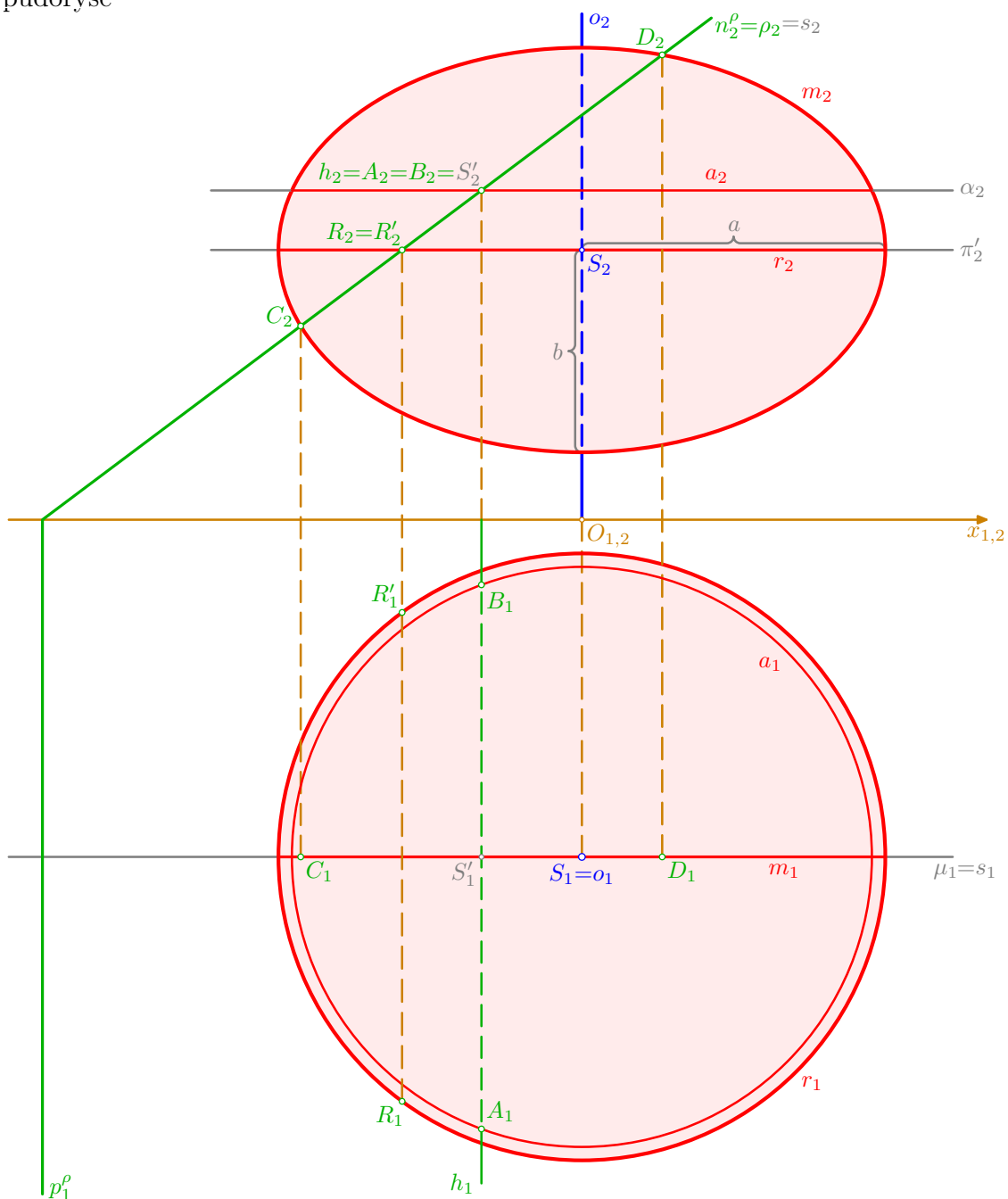
- roviny  $\rho$  a  $\mu$  se protínají v přímce  $s = \rho \cap \mu$ , v půdoryse je  $s_1 = \mu_1$ , v náryse platí  $s_2 = n_2^{\rho}$ ; přímka  $s$  pak protíná meridiánovou elipsu  $m$  v bodech  $C, D$ , kterými tedy musí procházet hledaná křivka řezu; v náryse je  $C_2, D_2 = s_2 \cap m_2$  a půdorysy  $C_1, D_1$  odvodíme po příslušných ordinálách a na přímce  $s_1$ ; pro přesnou konstrukci průsečíků  $C_2, D_2$  lze použít ohniskové vlastnosti elipsy nebo vhodné osové afinity, pro naše účely ovšem postačí pokud možno co nejlepší vyrýsování elipsy  $m_2$  pomocí oblouků hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech



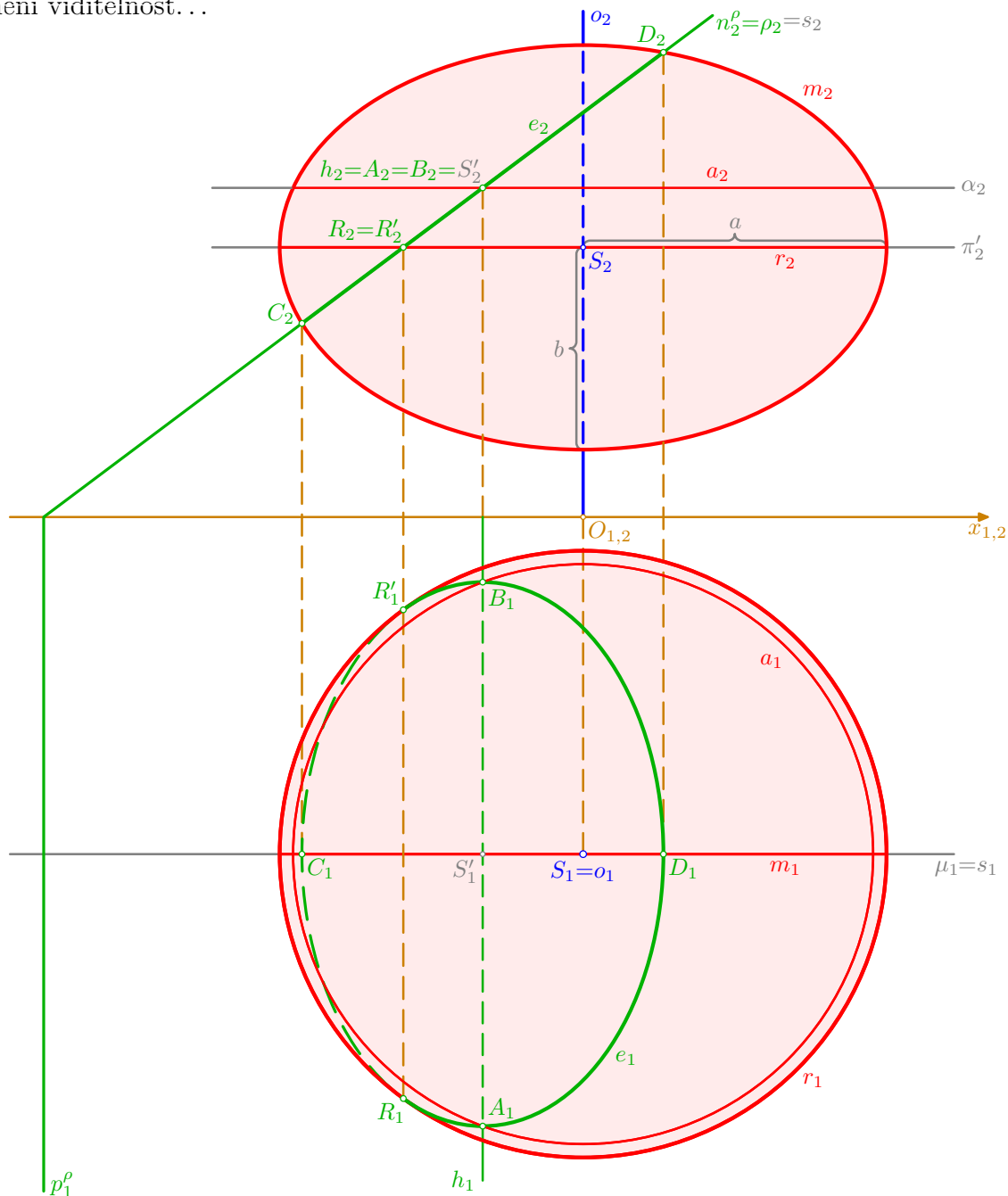
- středem  $S'$  úsečky  $CD$  vedme pomocnou rovinu  $\alpha \perp o$ , která protne elipsoid v rovnoběžkové kružnici  $a$  a rovinu  $\rho$  v přímce  $h$ ; průsečíky  $A, B = a \cap h$  jsou pak další body hledaného řezu; v naryse se rovina  $\alpha$  zobrazí jako přímka  $\alpha_2 \perp o_2, S'_2 \in \alpha_2$  ( $S'_2$  je středem úsečky  $C_2D_2$ ), narysem kružnice  $a$  je úsečka  $a_2$ , jejíž krajní body jsou průsečíky přímky  $\alpha_2$  s elipsou  $m_2$ , a konečně narysem přímky  $h = \alpha \cap \rho$  a bodů  $A, B$  je bod  $h_2 = A_2 = B_2 = S'_2$ ; půdorys  $h_1$  přímky  $h$  splývá s ordinálou bodu  $S'$ , půdorysem kružnice  $a$  je kružnice  $a_1(S_1, \frac{1}{2}|a_2|)$  a pro půdorysy bodů  $A, B$  platí  $A_1, B_1 = a_1 \cap h_1$



- stejným způsobem jako v předchozím kroku bychom mohli sestrojovat další a další body křivky řezu; pro nás bude užitečné najít takto ještě body  $R, R'$ , které leží v rovině  $\rho$  a současně na rovníku  $r$  plochy; v náryse je  $R_2 = R'_2 = \rho_2 \cap \pi'_2$ , kde  $\pi'_2$  je nárysem roviny  $\pi'$  rovníku  $r$ , a půdorysy  $R_1, R'_1$  najdeme na ordinále a na kružnici  $r_1$ ; právě body  $R_1, R'_1$  budou užitečné v následujícím závěrečném kroku pro stanovení viditelnosti řezné křivky v půdoryse



- dá se ukázat, že řezem daného rotačního zploštělého elipsoidu danou rovinou  $\rho$  je elipsa  $e$ , která má hlavní vrcholy  $A, B$  a vedlejší vrcholy  $C, D$  – proto jsme také vedli rovinu  $\alpha$  středem  $S'$  úsečky  $CD$ , abychom se co nejrychleji dostali k významným bodům řezné křivky; nárysem elipsy  $e$  je úsečka  $e_2 = C_2D_2$ , jejím půdorysem je elipsa  $e_1$ , která má střed  $S'_1$ , hlavní vrcholy  $A_1, B_1$ , vedlejší vrcholy  $C_1, D_1$  a která se v bodech  $R_1, R'_1$  dotýká kružnice  $r_1$ , tj. v těchto bodech mají křivky  $e_1, r_1$  společné tečny a také se zde mění viditelnost...



□

## 3.2. Průnik přímky s plochou či tělesem



### Výklad

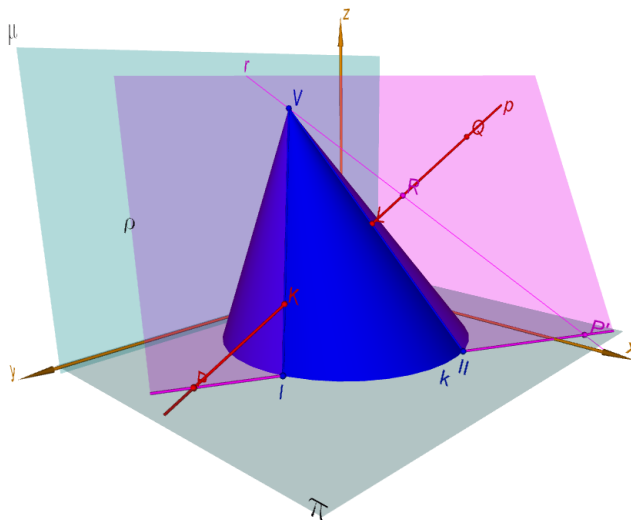
- obecný princip konstrukce přímky s daným geometrickým objektem je vyloženo ve sbírce Základy geometrie
- jde o speciální případ užití úloh z předchozí podkapitoly, tj. využijeme zde zkušenosti s konstrukcí řezu daného tělesa nebo plochy
- následující dva příklady slouží rovněž k procvičení užití pravoúhlé axonometrie

### 3.2.1. Průnik přímky s kosým kruhovým kuželem v pravoúhlé axonometrii



### Výklad

- pouze tzv. vrcholová rovina, určená vrcholem daného kužele a danou přímkou, protne těleso v jednoduchém trojúhelníkovém řezu; ostatní roviny, proložené danou přímkou, protínají daný kužel v nějakých kuželosečkách (nebo jejich částech)

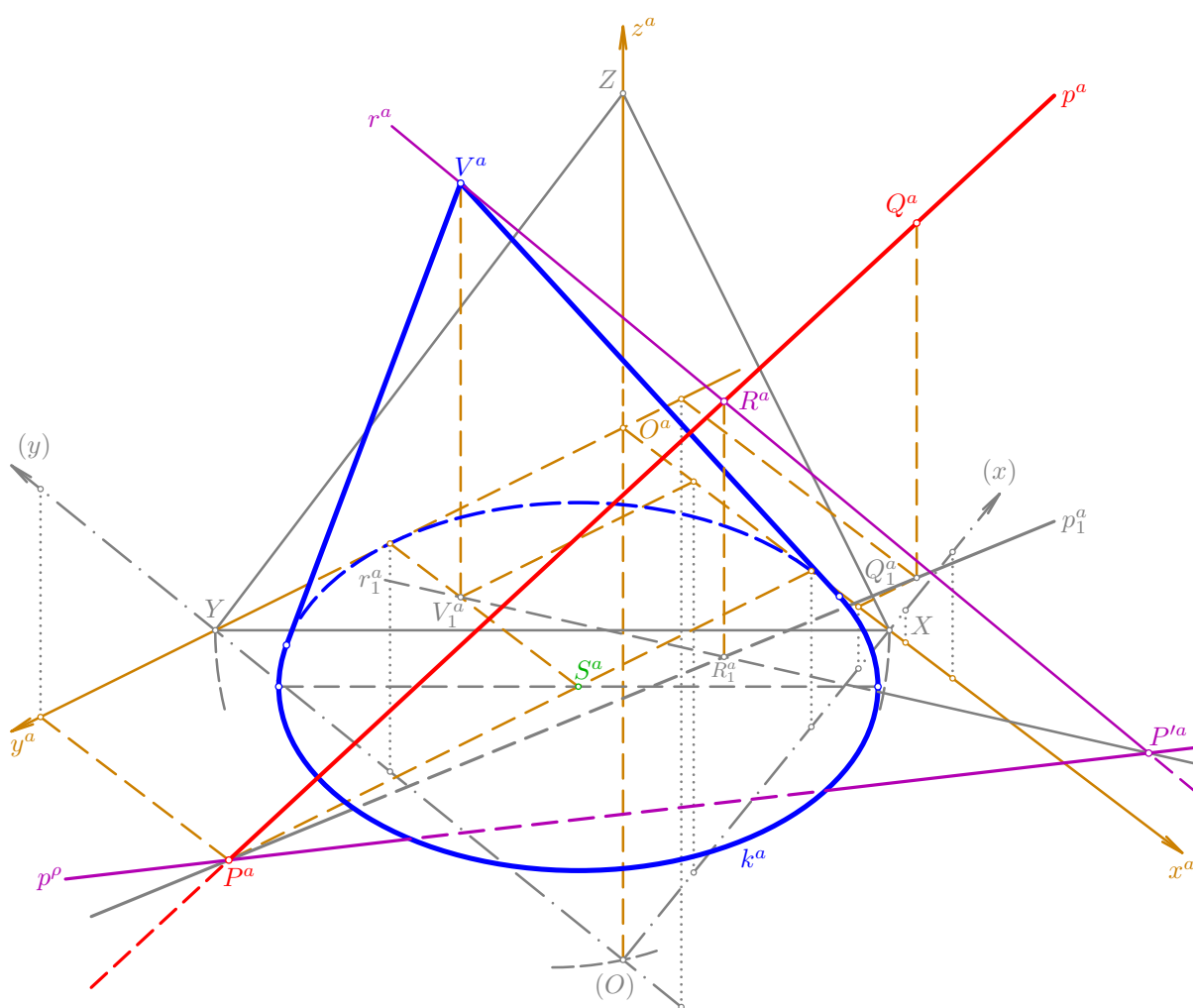


### Řešené úlohy

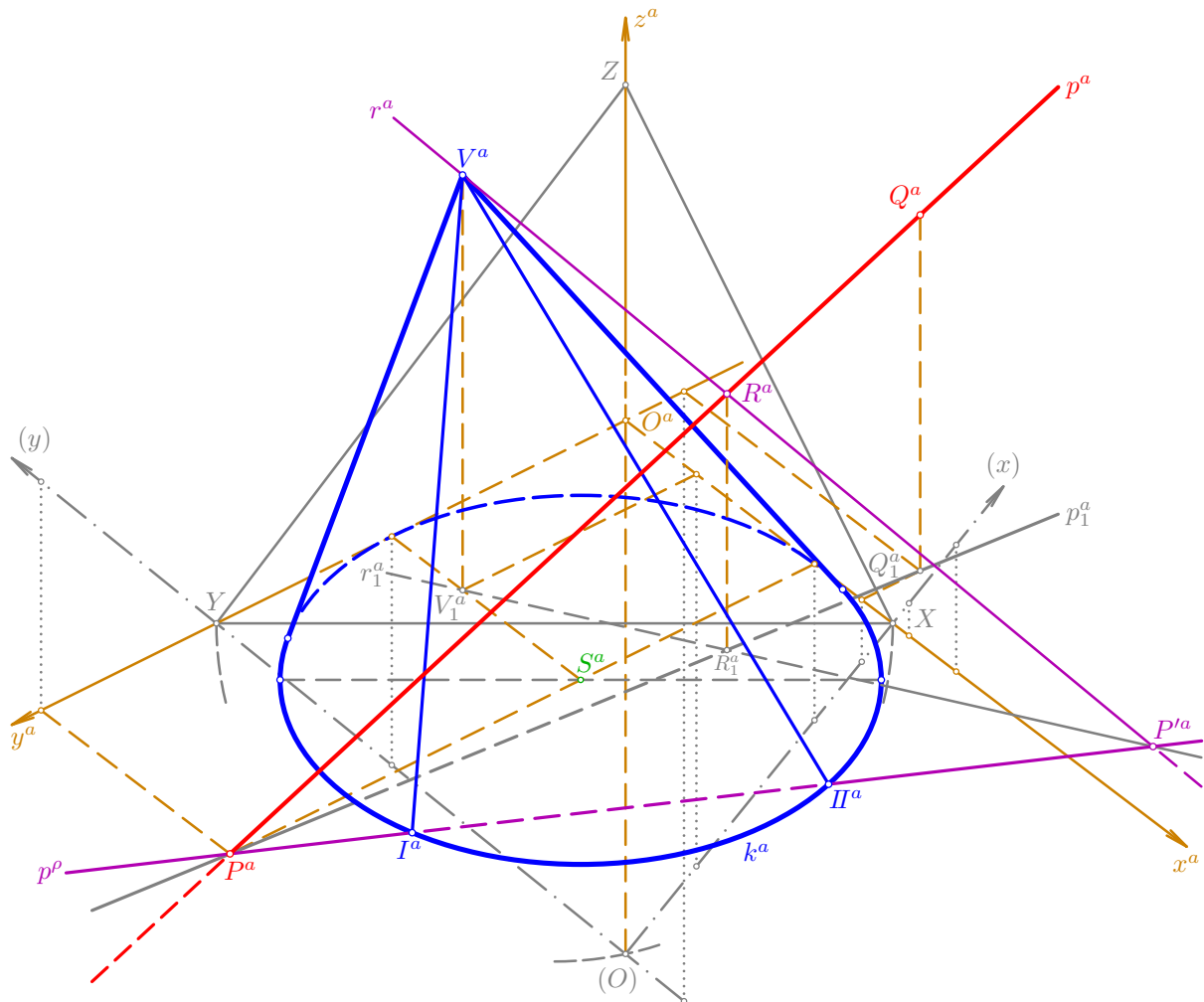
**Příklad:** V pravoúhlé dimetrii  $\Delta(9; 9; 8)$  sestrojte průnik přímky  $p = PQ$  s kosým kruhovým kuželem, který má podstavnu kružnici  $k(S, r)$  v půdorysně  $\pi$  a vrchol  $V$ ;  $S[4; 4; 0]$ ,  $r = 4$ ,  $V[1,5; 4; 7]$ ,  $P[4; 10; 0]$ ,  $Q[5; -1; 6]$ .



- danou přímkou  $p = PQ$  proložme tzv. vrcholovou rovinu  $\rho = Vp = VPQ$  a sestrojme její půdorysnou stopu  $p^\rho$ : zadaný bod  $P$  je půdorysným stopníkem přímky  $p$  a bude tedy  $P \in p^\rho$ ; průmět půdorysného stopníku přímky  $VQ$  by nám nevyšel na nákresnu, proto zvolme na přímce  $p$  pomocný bod  $R$  a sestrojme půdorysný stopník  $P'$  přímky  $r = RV$ : v průmětu je vhodně zvolen bod  $R^a \in p^a$ , sestrojen příslušný axonometrický půdorys  $R_1^a \in p_1^a, R_1^a R^a \parallel z^a$ , a přímky  $r^a = R^a V^a, r_1^a = R_1^a V_1^a$  se pak protínají v průmětu  $P'^a$  hledaného stopníku  $P'$ ; nyní již můžeme snadno sestrojít axonometrický průmět půdorysné stopy  $p^\rho = PP'$  proložené roviny  $\rho$



- rovina  $\rho = Vp$  protíná daný kužel v trojúhelníku  $IIV$ , kde body  $I, II$  jsou průsečíky půdorysné stopy  $p^\rho$  s podstavou kružnicí  $k$ ; v průmětu můžeme průsečíky  $I^a, II^a$  průmětu stopy  $p^\rho$  s elipsou  $k^a$  najít přibližně díky pečlivému vyrýsování této elipsy pomocí hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech, nebo přesně v otočení půdorysny  $\pi$ , v níž oba útvary leží, do axonometrické průmětny kolem přímky  $XY$  (tato konstrukce není v obrázku provedena a čtenář si ji může doplnit jako cvičení)



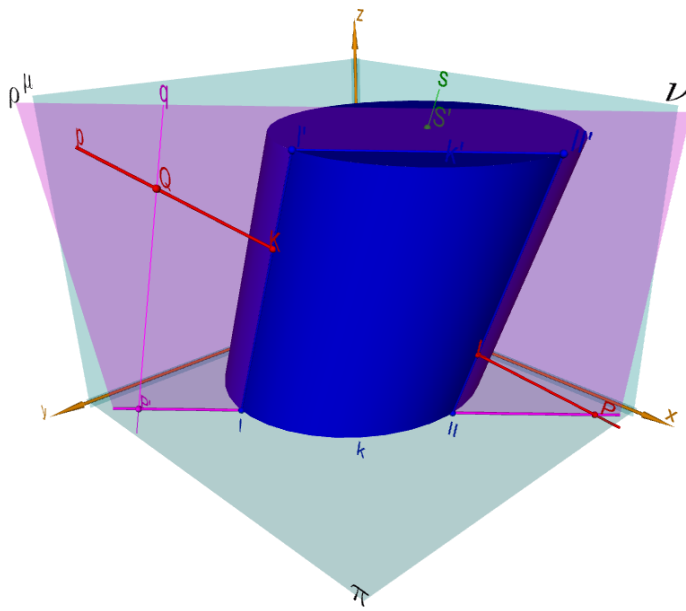


3.2.2. Průnik přímky s kosým kruhovým válcem v pravoúhlé axonometrii

Výklad



- pouze tzv. směrová rovina, která prochází danou přímkou rovnoběžně se směrem površek daného válce, protne těleso v jednoduchém rovnoběžníkovém řezu; ostatní roviny, proložené danou přímkou, protínají daný válec v nějakých kuželosečkách (nebo jejich částech)

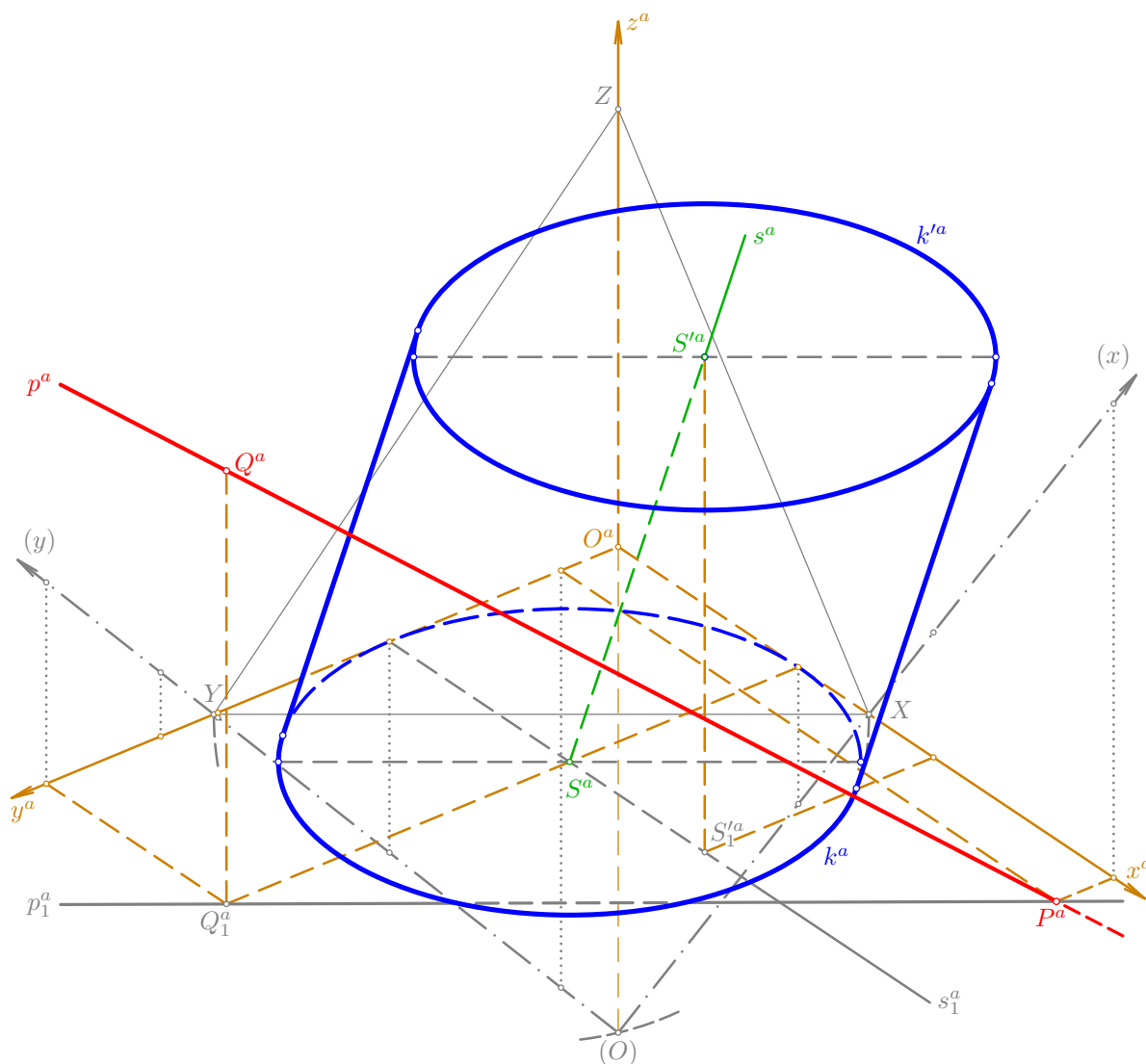


Řešené úlohy

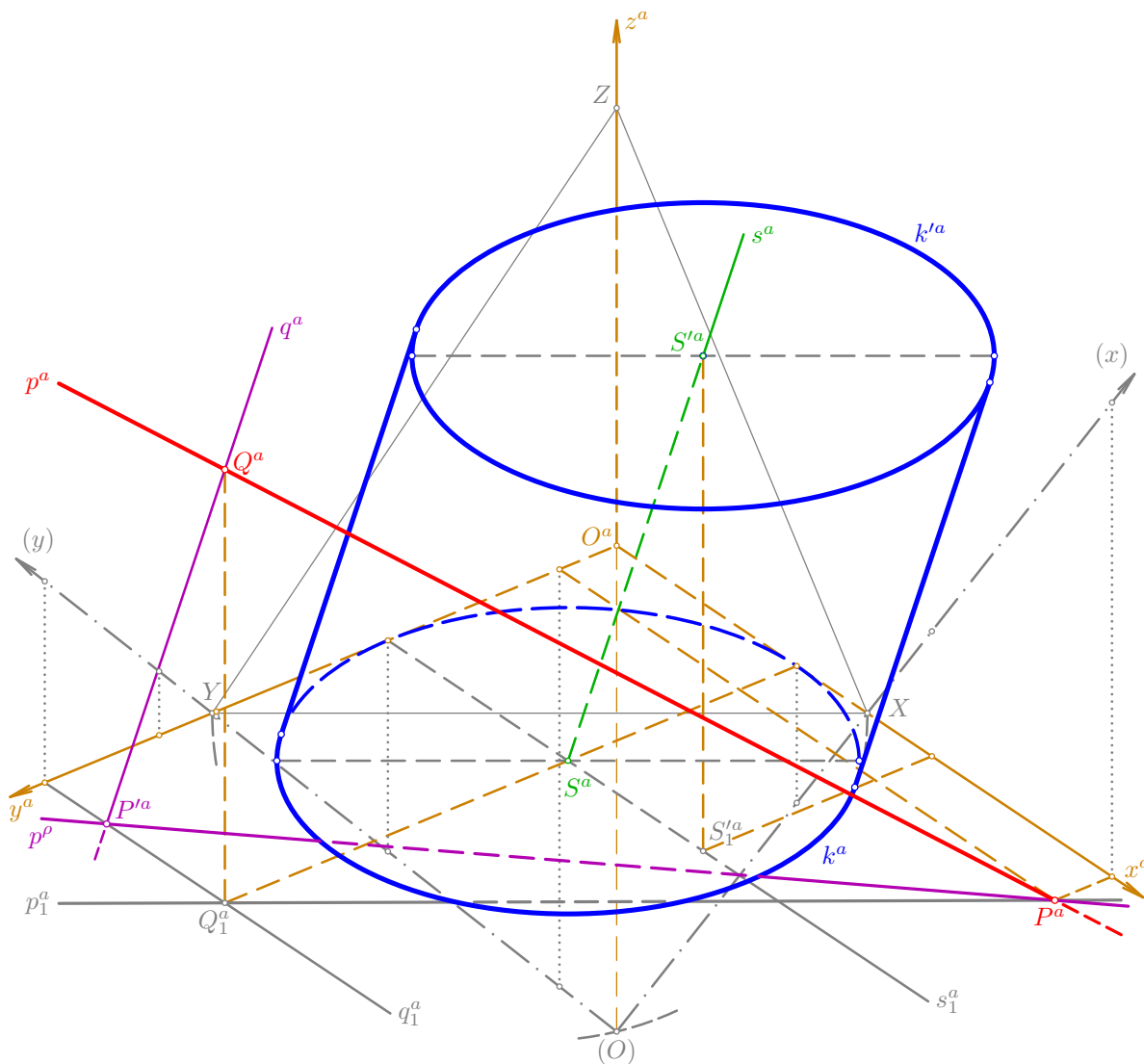


**Příklad:** V pravoúhlé dimetrii  $\Delta(9; 10; 9)$  sestrojte průnik přímky  $p = PQ$  s kosým kruhovým válcem, který má jednu podstavnou kružnici  $k(S, r)$  v půdorysně  $\pi$  a střed druhé podstavy je v bodě  $S'$ ;  $S[4; 4; 0]$ ,  $r = 4$ ,  $S'[7; 4; 8]$ ,  $P[11; 1; 0]$ ,  $Q[4; 10; 7]$ .

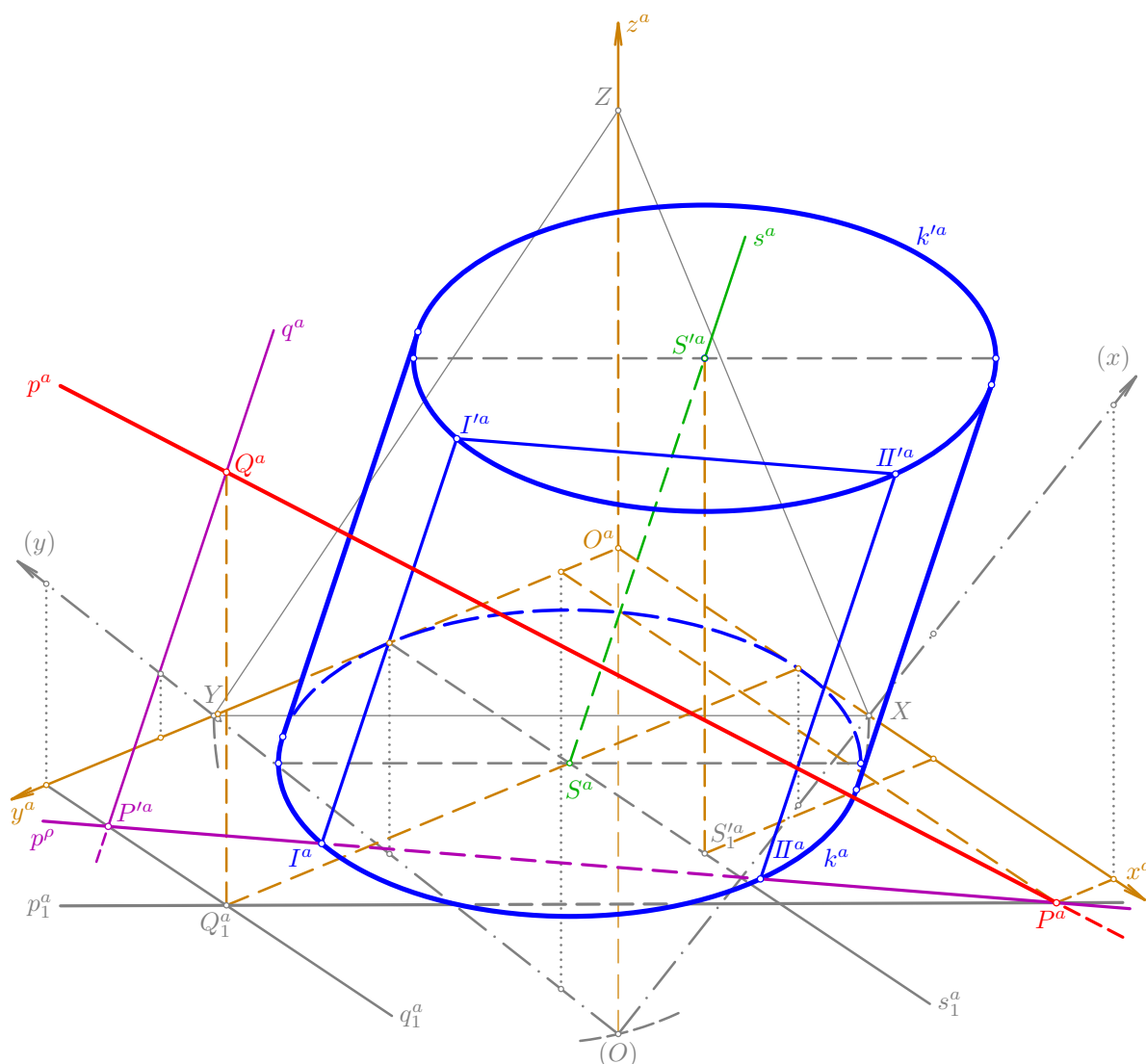
- zadání úlohy: podstavné kružnice  $k(S, r), k'(S', r)$  zobrazíme jako elipsy  $k^a, k'^a$  (podrobnější popis je uveden na straně 154 a následujících), obrys válce dokončíme sestrojením společných tečen elips  $k^a, k'^a$  rovnoběžných s průmětem  $s^a = S^a S'^a$  středné  $s = SS'$  daného válce – to lze provést přesně pomocí ohniskových vlastností elipsy (podrobněji na straně 189) nebo přibližně pouhým přiložením pravítka (tzv. „inženýrská“ konstrukce); pro přímkou  $p = PQ$  sestrojíme její axonometrický půdorys  $p_1^a = P^a Q_1^a$  a axonometrický průmět  $p^a = P^a Q^a$ ; při vynášení  $z$ -ových souřadnic využijeme skutečnosti, že se díky zadané dimetrii zkrátí jednotka délky stejně ve směru průmětu osy  $z$  jako ve směru průmětu osy  $y$ , a vystačíme tedy pouze s otočením půdorysny  $\pi$  do axonometrické průmětny



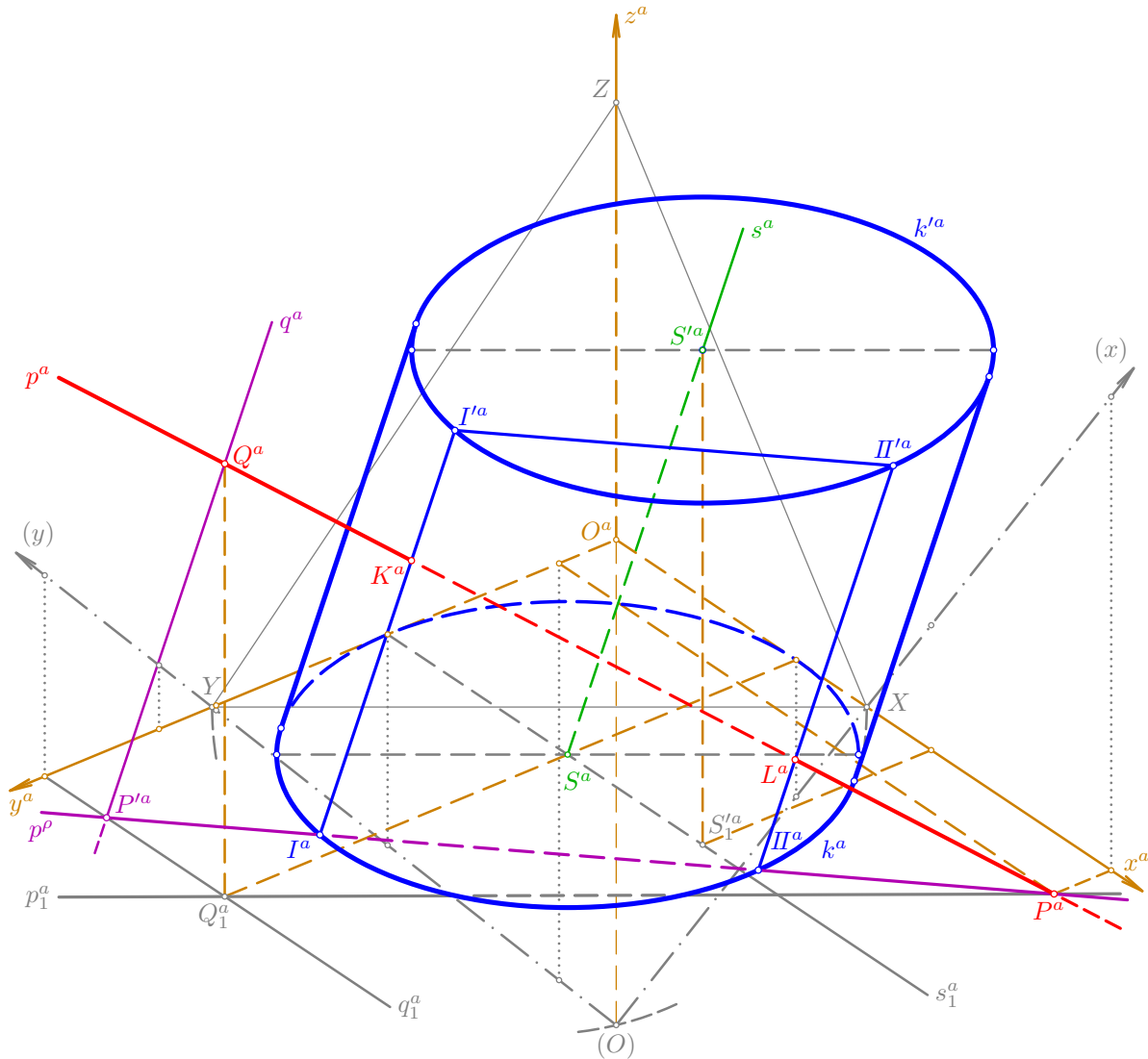
- danou přímkou  $p = PQ$  proložme tzv. směrovou rovinu  $\rho \parallel s$  a sestrojme její půdorysnou stopu  $p^\rho$ : zadaný bod  $P$  je půdorysným stopníkem přímky  $p$  a bude tedy  $P \in p^\rho$ ; dále sestrojme půdorysný stopník  $P'$  přímky  $q \parallel s, Q \in q$ : v průmětu je  $q^a \parallel s^a, Q^a \in q^a$  a  $q_1^a \parallel s_1^a, Q_1^a \in q_1^a$  (kde  $s_1^a = S^a S_1^a$ ), a bod  $P'^a = q^a \cap q_1^a$  je pak axonometrickým průmětem hledaného stopníku  $P' = q \cap \pi$ ; nyní již můžeme snadno sestrojít axonometrický průmět půdorysné stopy  $p^\rho = PP'$  proložené roviny  $\rho$



- směrová rovina  $\rho$  protíná daný válec v rovnoběžníku  $IIII'I'$ , kde body  $I, II$  jsou průsečíky půdorysné stopy  $p^\rho$  s podstavovou kružnicí  $k$  a strany  $II', III'$  jsou rovnoběžné s přímkou  $s$ ; v průmětu můžeme průsečíky  $I^a, II^a$  průmětu stopy  $p^\rho$  s elipsou  $k^a$  najít přibližně díky pečlivému vyrýsování této elipsy pomocí hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech, nebo přesně v otočení půdorysny  $\pi$ , v níž oba útvary leží, do axonometrické průmětny kolem přímky  $XY$  (tato konstrukce není v obrázku provedena a čtenář si ji může doplnit jako cvičení)



- přímka  $p$  protíná strany  $II'$ ,  $III'$  sestrojeného řezného rovnoběžníka v bodech  $K$ ,  $L$ ; ty jsou současně krajními body úsečky  $KL$ , která je hledaným průnikem dané přímky  $p$  s daným kosým kruhovým válcem; v průmětu jsou již tedy jen označeny body  $K^a = p^a \cap I^a I'^a$ ,  $L^a = p^a \cap II^a II'^a$  a opravena viditelnost průmětu  $p^a$  přímky  $p$



□

### 3.3. Průniky rotačních ploch

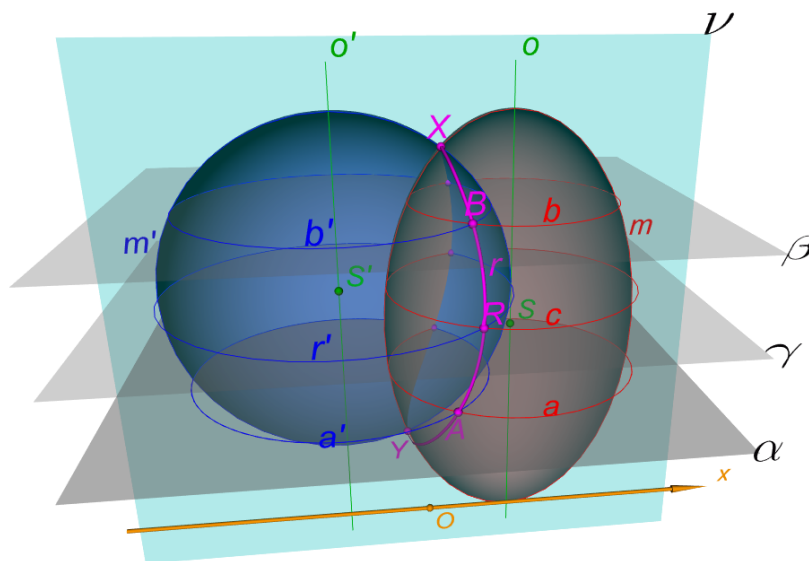
- konstrukce průnikové křivky se provádí bodově a její způsob závisí na vzájemné poloze os rotace daných rotačních ploch
- následující dva příklady ukazují dvě různé varianty řešení téže úlohy

#### 3.3.1. Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysu (varianta rovnoběžných os – metoda rovnoběžných rovin)



##### Výklad

- pro danou kulovou plochu zvolme její osu rotace rovnoběžně s osou rotace daného elipsoidu
- veďme pak soustavu několika vhodných rovin kolmých k oběma osám, tyto roviny protnou obě plochy v rovnoběžkových kružnicích a jejich průsečíky jsou body hledané průnikové křivky – odtud název metody použitý v nadpise

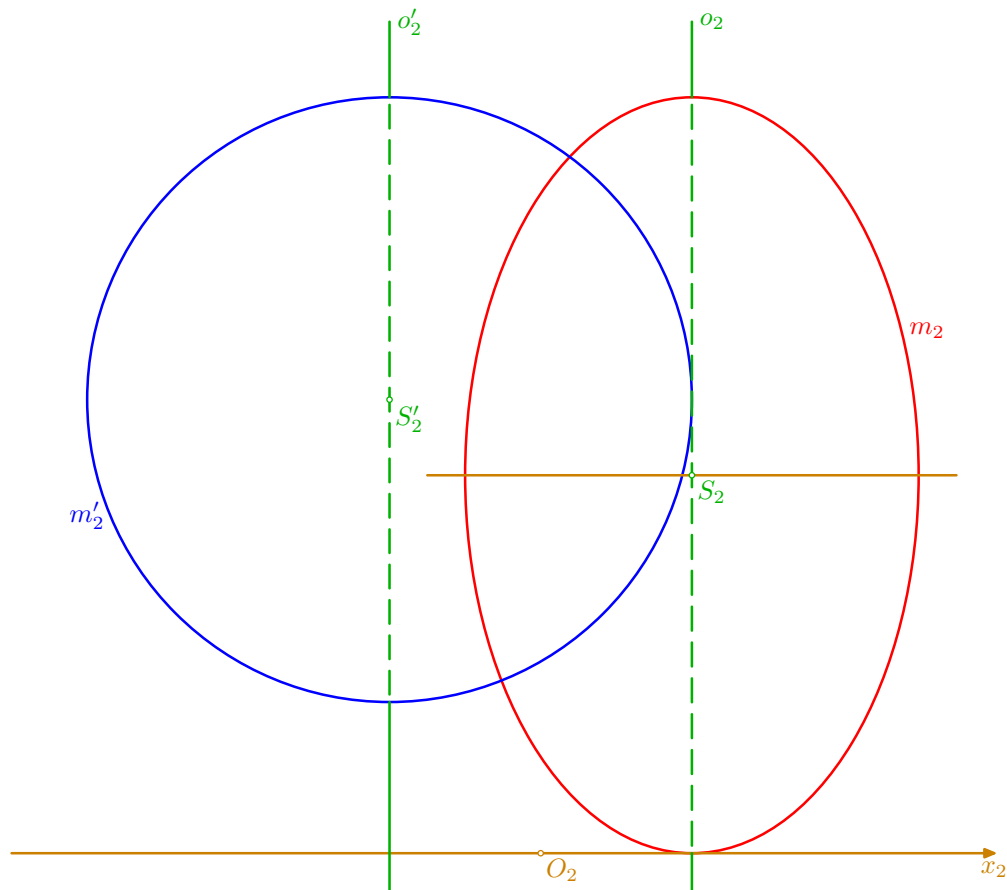


##### Řešené úlohy

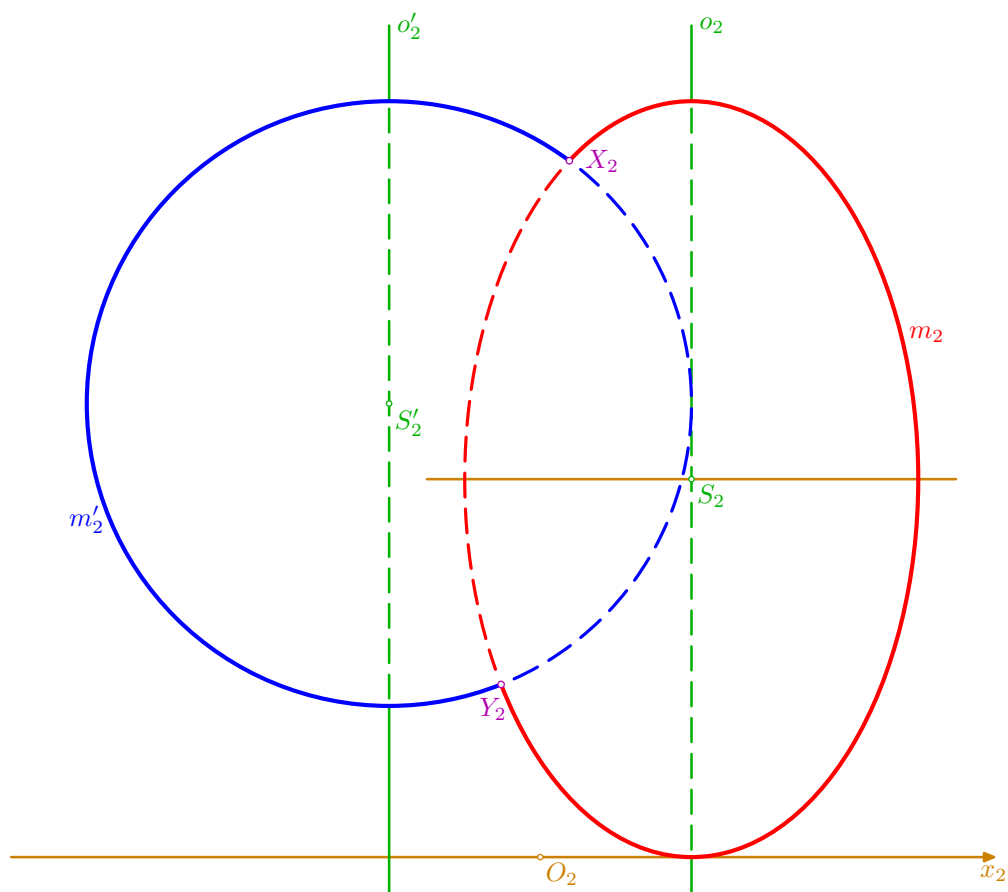
**Příklad:** V kolmém promítání na nárysu sestrojte průnik rotačního vejčitého elipsoidu s kulovou plochou; elipsoid má střed  $S$ , svislou osu  $o$  a délky  $a, b$  hlavní a vedlejší poloosy; kulová plocha je dána středem  $S'$  a poloměrem  $r$ ;  $S[2; 0; 5]$ ,  $a = 5$ ,  $b = 3$ ,  $S'[-2; 0; 6]$ ,  $r = 4$ .

Kolmé promítání na nárysnu je téměř totéž jako Mongeovo promítání bez půdorysu, tj. jen nárys, namísto půdorysu užíváme sklápění rovin rovnoběžných s půdorysnou do náryсны. . .

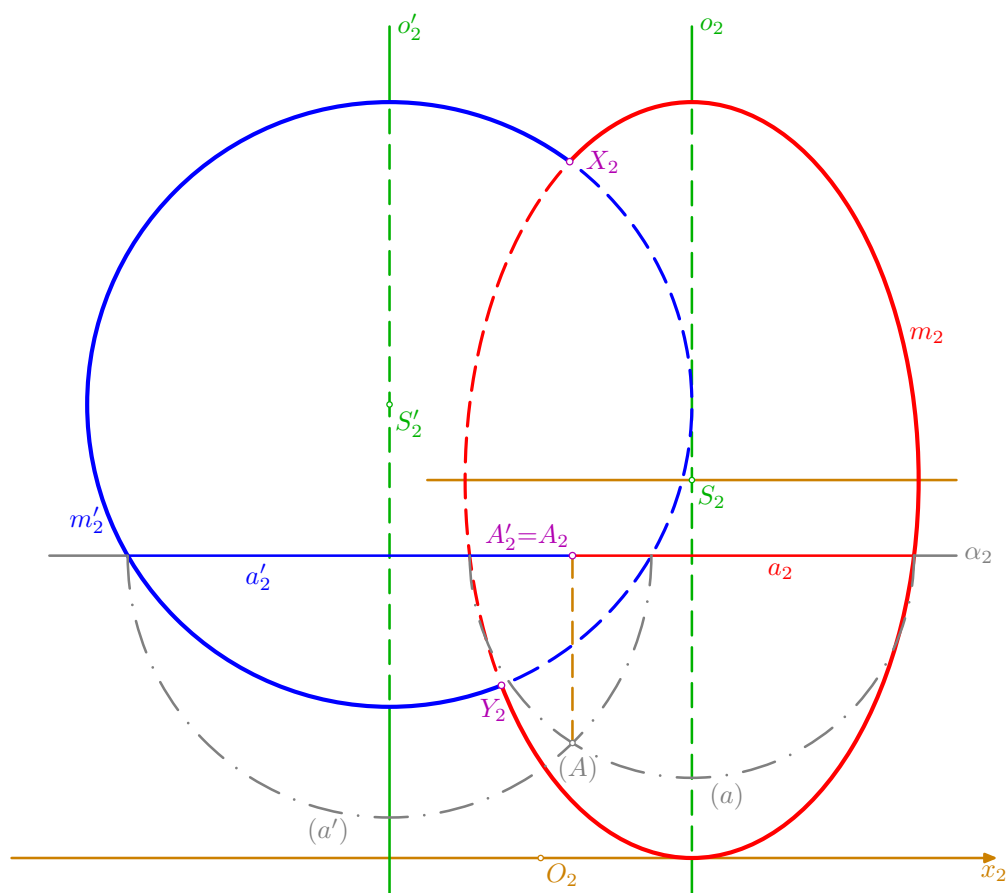
- podle zadání sestrojme nárysy  $S_2, S'_2$  středů  $S, S'$  daných ploch; osa  $o$  elipsoidu je svislá, tj.  $o_2 \perp x_2$  a  $S_2 \in o_2$ ; elipsoid protíná nárysnu v elipse  $m = m_2$  hlavního meridiánu, která má hlavní osu na přímce  $o = o_2$  a zadané délky  $a = 5, b = 3$  hlavní a vedlejší poloosy; daná kulová plocha protíná nárysnu v kružnici  $m'(S', r = 4)$ , která splývá se svým nárysem  $m'_2(S'_2, r = 4)$ ; každou přímkou  $o'$  jdoucí bodem  $S'$  můžeme považovat za osu dané kulové plochy, pro naše účely zvolme  $o' \parallel o$ , tj. v náryse je  $o'_2 \parallel o_2$  a  $S'_2 \in o'_2$ ; tím máme dány dvě rotační plochy, které mají navzájem rovnoběžné osy rotace



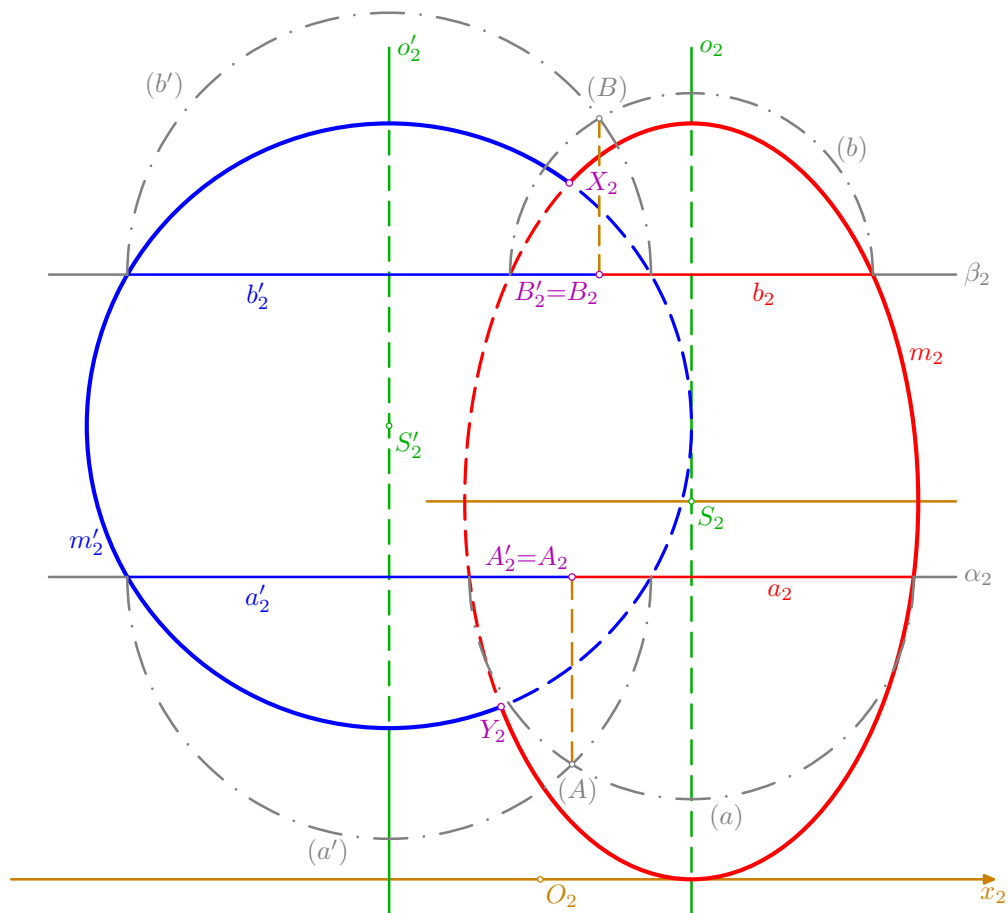
- nejprve sestrojme průsečíky  $X, Y$  hlavních meridiánových křivek  $m$  a  $m'$ ; k tomu účelu je vhodné, abychom měli elipsu  $m_2$  vyrýsovanou pokud možno co nejpřesněji, minimálně s využitím oblouků hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech, případně můžeme použít také zahradnickou konstrukci, která vychází z ohniskové definice elipsy (viz příslušnou pasáž o elipse na straně 174); jen tak se nám podaří dostatečně přesně určit průsečíky  $X_2, Y_2$  elipsy  $m_2$  s kružnicí  $m'_2$ ; bod  $X = X_2$ , resp. bod  $Y = Y_2$ , je nejvyšším, resp. nejnižším, bodem hledané průnikové křivky



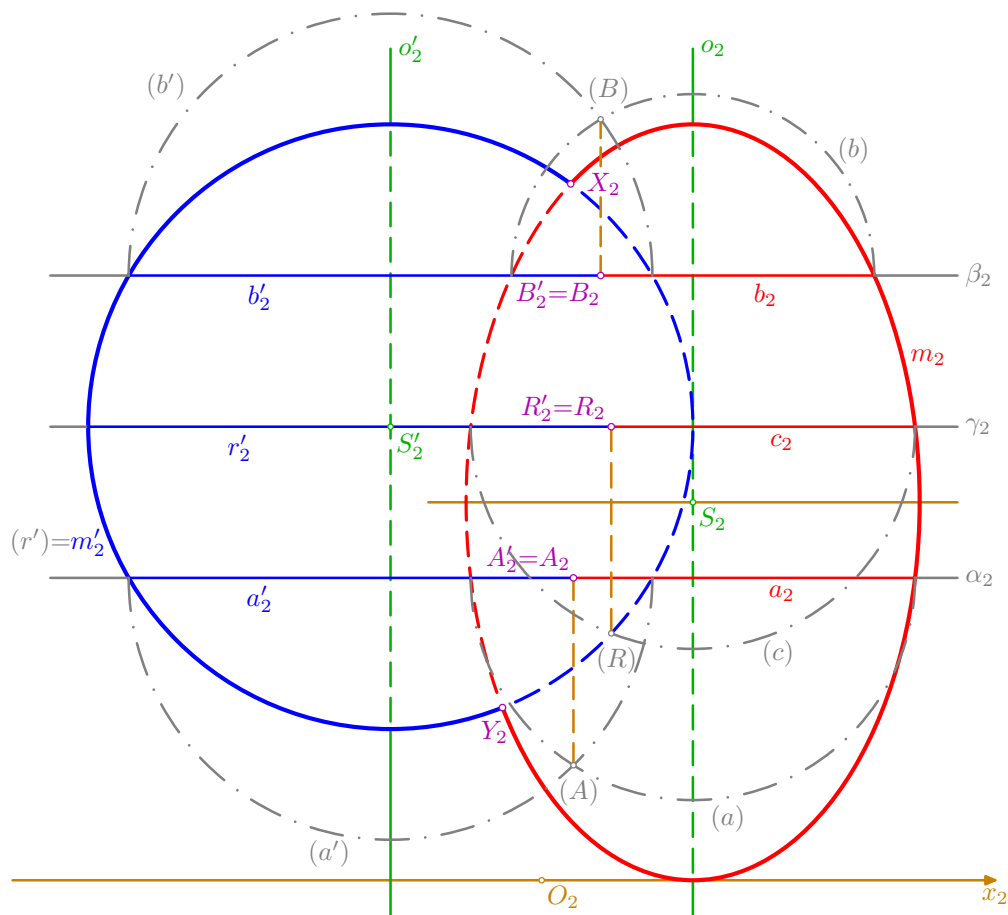
- někde mezi sestrojenými body  $X, Y$  vedme pomocnou rovinu  $\alpha$ , která je kolmá k oběma osám  $o, o'$  daných ploch; rovina  $\alpha$  pak protíná elipsoid i kulovou plochu v rovnoběžkových kružnicích  $a$  a  $a'$ , jejichž průsečíky  $A, A'$  jsou další dva body hledaného průniku; nárysem roviny  $\alpha$  je přímka  $\alpha_2 \perp o_2$ , kružnice  $a, a'$  se v náryse jeví jako úsečky  $a_2, a'_2$ , jejichž středy leží na příslušných osách  $o_2, o'_2$  a krajní body na příslušných meridiánových křivkách  $m_2, m'_2$ ; nárysy průsečíků  $A, A'$  kružnic  $a, a'$  určíme v průmětu pomocí sklopení roviny  $\alpha$  do náryсны: pro větší přehlednost sestrojme pouze dolní poloviny sklopených poloh  $(a), (a')$  kružnic  $a, a'$ , najdeme jejich průsečík  $(A)$  a odvodíme jej zpět do nárysu  $A_2 \in \alpha_2$ ; dané plochy jsou podle zadání zřejmě souměrné podle náryсны, což platí také pro jejich rovnoběžkové kružnice  $a, a'$  a pro jejich průsečíky  $A, A'$ ; odtud vyplývá, že pro nárys  $A'_2$  bodu  $A'$  platí  $A'_2 = A_2$  (pro jejich  $y$ -ové souřadnice platí  $y_A = |A_2(A)| = -y_{A'}$ )



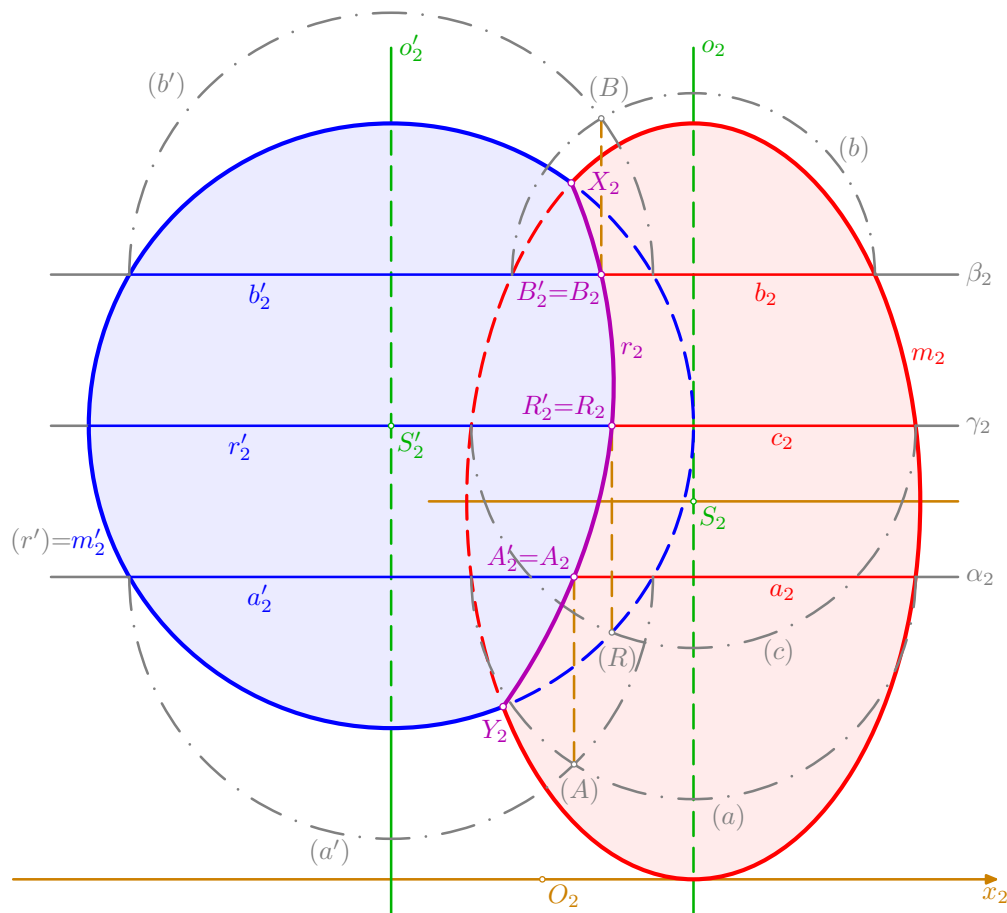
- princip popsaný v předchozím kroku nazvěme **metodou rovnoběžných rovin** a analogicky ho použijme ke konstrukci dalších bodů hledaného průniku obou daných ploch; takto je tedy sestaven také splývající nárys  $B'_2 = B_2$  bodů  $B, B'$ , v nichž se protínají rovnoběžkové kružnice  $b, b'$ , které leží v další zvolené rovině  $\beta \parallel \alpha$ ; pro přehlednost dalších konstrukcí bylo tentokrát sklopení provedeno směrem nahoru, výsledek na tom zřejmě nezávisí



- vyplníme ještě mezeru mezi rovinami  $\alpha, \beta$  a ved'eme středem  $S'$  kulové plochy rovinu  $\gamma \parallel \alpha$ ; ta protíná daný vejčítý elipsoid v rovnoběžkové kružnici  $c$  a danou kulovou plochu v rovníku  $r'$ ; sklopenou polohu  $(c)$  poloviny kružnice  $c$  sestrojíme obdobně jako v předchozích krocích, sklopená poloha  $(r')$  rovníku  $r'$  splývá s meridiánem  $m'_2 = (r')$ ; půlkružnice  $(c), (r')$  se protínají v bodě  $(R)$ , ten odvodíme zpět na nárys  $\gamma_2$  roviny  $\gamma$  do splývajícího nárysu  $R_2 = R'_2$  souměrných průsečíků  $R, R'$  kružnic  $c, r'$ ; kdybychom chtěli pro zajímavost doplnit půdorys této úlohy, měnila by se právě v půdorysech  $R_1, R'_1$  bodů  $R, R'$  viditelnost půdorysu průnikové křivky – zvědavý čtenář nechť si to rozhodně zkusí načrtnout, či narýsovat, např. do volného místa v následujícím závěrečném obrázku této konstrukce...



- obě dané plochy jsou kvadriky, tj. plochy druhého stupně, a odtud lze odvodit, že jejich průniková křivka  $r$  je stupně čtvrtého, tzv. **kvartika**; podle předchozího je křivka  $r$  souměrná podle náryсны, a každá z jejích polovin ležících v opačných poloprostorech určených nárysnou se promítá do téže křivky  $r_2$ , která má krajní body  $X_2, Y_2$  a mezi nimi prochází po dvou splývavých bodech  $B_2 = B'_2, R_2 = R'_2, A_2 = A'_2$ ; dá se dokázat, že křivka  $r_2$  je částí jisté paraboly...

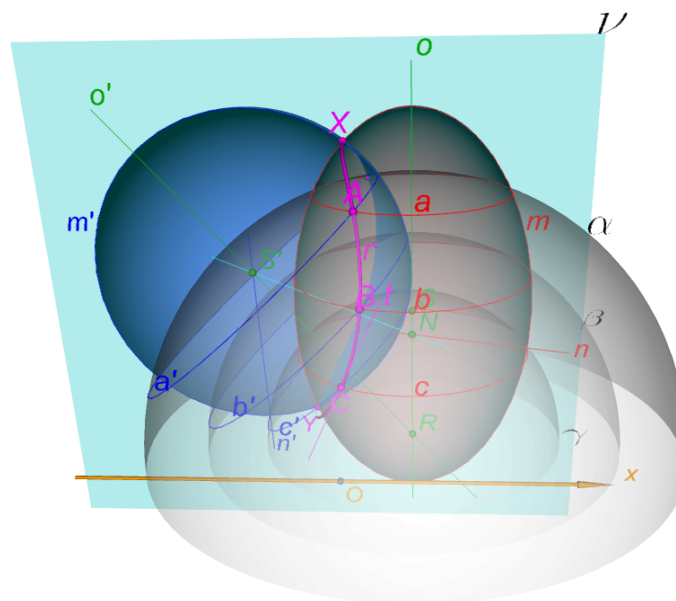


□

### 3.3.2. Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta různoběžných os – metoda soustředných kulových ploch)

#### Výklad

- pro danou kulovou plochu zvolme její osu rotace tak, aby byla různoběžná s osou rotace daného elipsoidu
- veďme pak soustavu několika soustředných kulových ploch, které mají společný střed v průsečíku os rotace daných ploch, tyto pomocné sféry protnou obě plochy v rovnoběžkových kružnicích a jejich průsečíky jsou body hledané průnikové křivky – odtud název metody použitý v nadpise

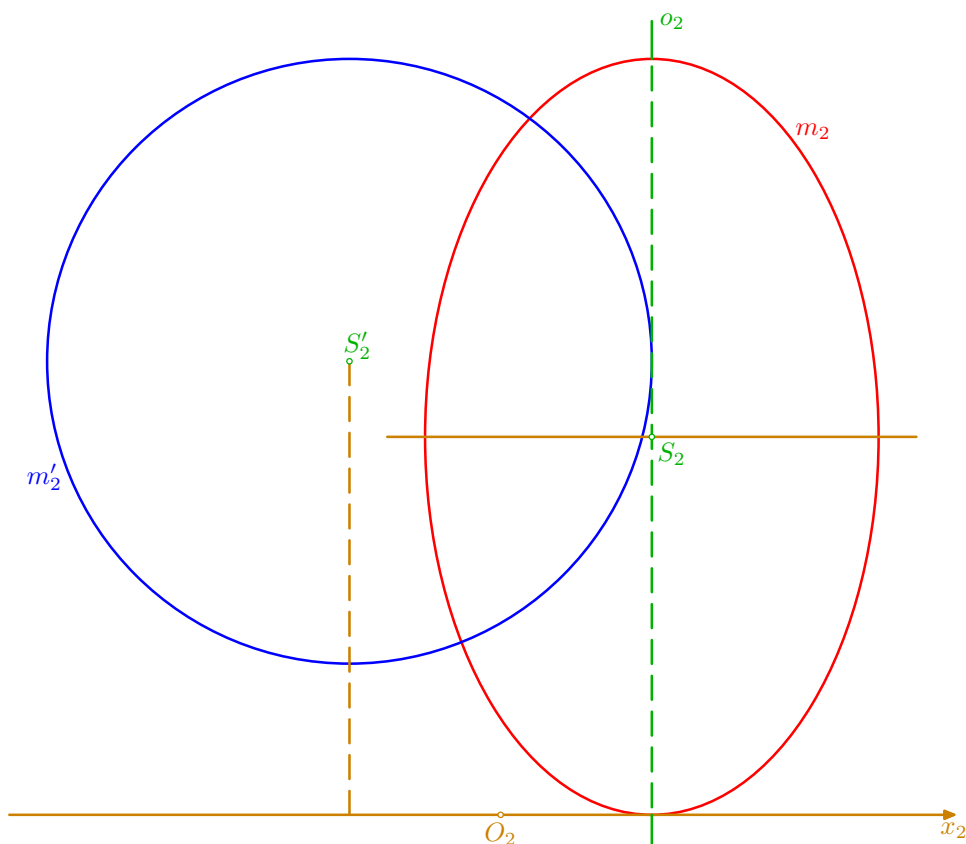




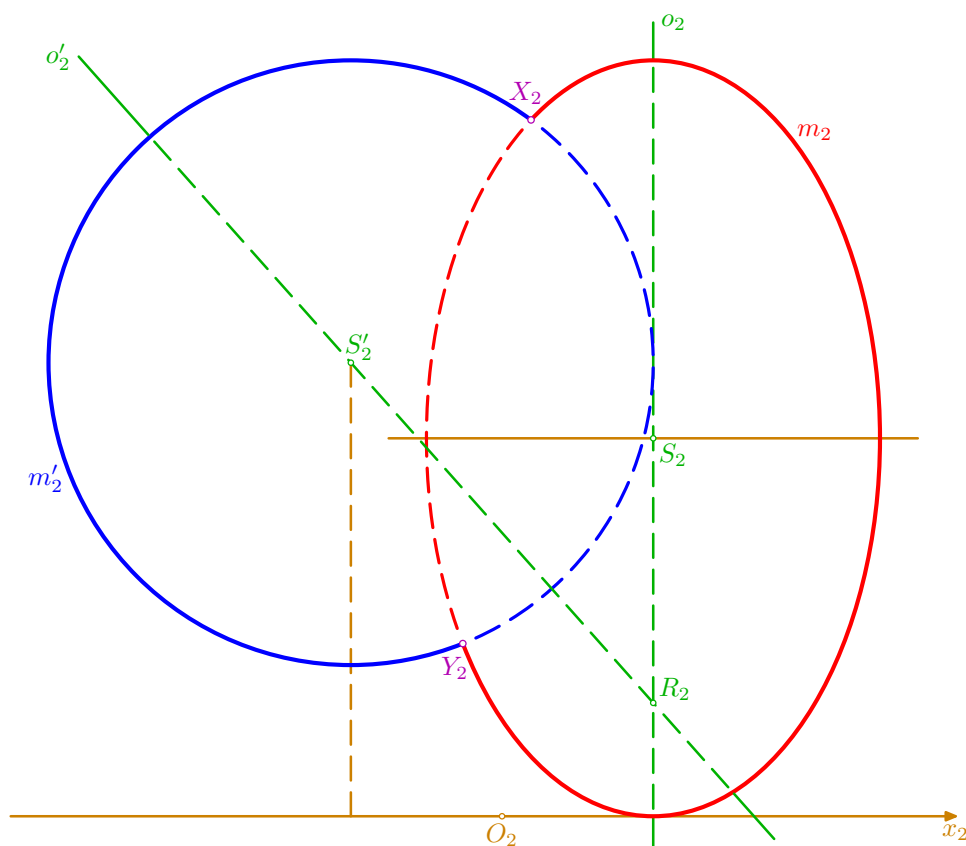
### Řešené úlohy

**Příklad:** V kolmém promítání na nárysnu sestrojte průnik rotačního vejčitého elipsoidu s kulovou plochou; elipsoid má střed  $S$ , svislou osu  $o$  a délky  $a, b$  hlavní a vedlejší poloosy; kulová plocha je dána středem  $S'$  a poloměrem  $r$ ;  $S[2; 0; 5]$ ,  $a = 5, b = 3$ ,  $S'[-2; 0; 6]$ ,  $r = 4$ .

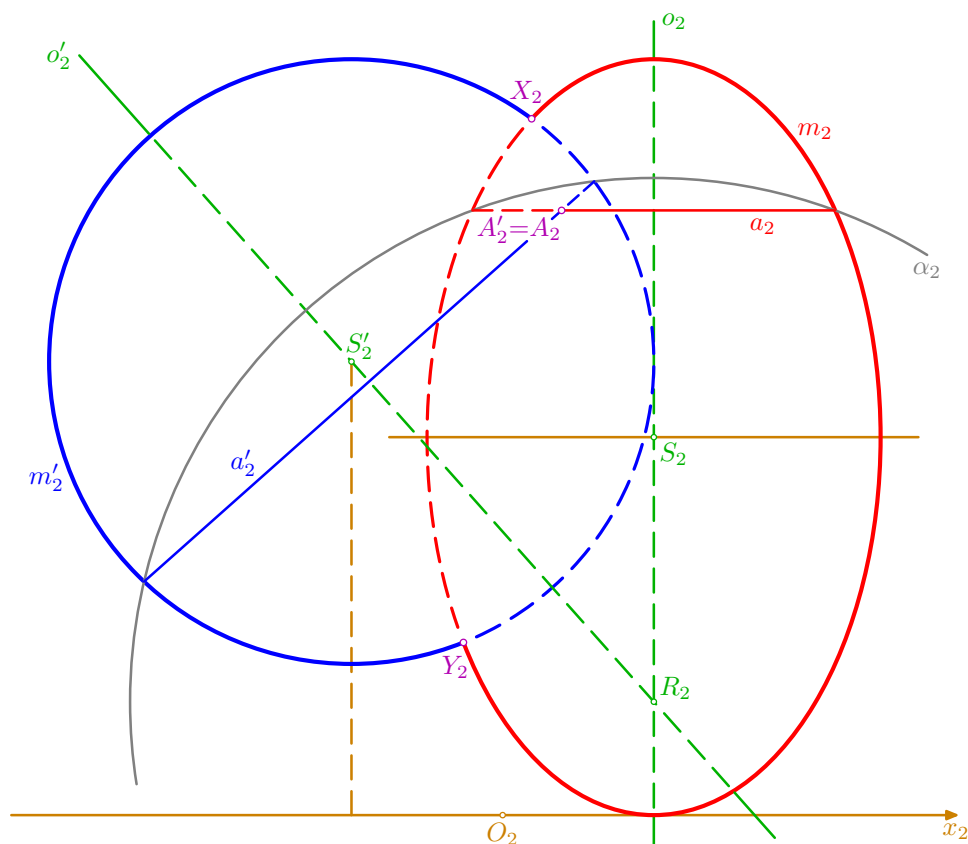
- podle zadání sestrojme nárysy  $S_2, S'_2$  středů  $S, S'$  daných ploch; osa  $o$  elipsoidu je svislá, tj.  $o_2 \perp x_2$  a  $S_2 \in o_2$ ; elipsoid protíná nárysnu v elipse  $m = m_2$  hlavního meridiánu, která má hlavní osu na přímce  $o = o_2$  a zadané délky  $a = 5, b = 3$  hlavní a vedlejší poloosy; daná kulová plocha protíná nárysnu v kružnici  $m'(S', r = 4)$ , která splývá se svým nárysem  $m'_2(S'_2, r = 4)$



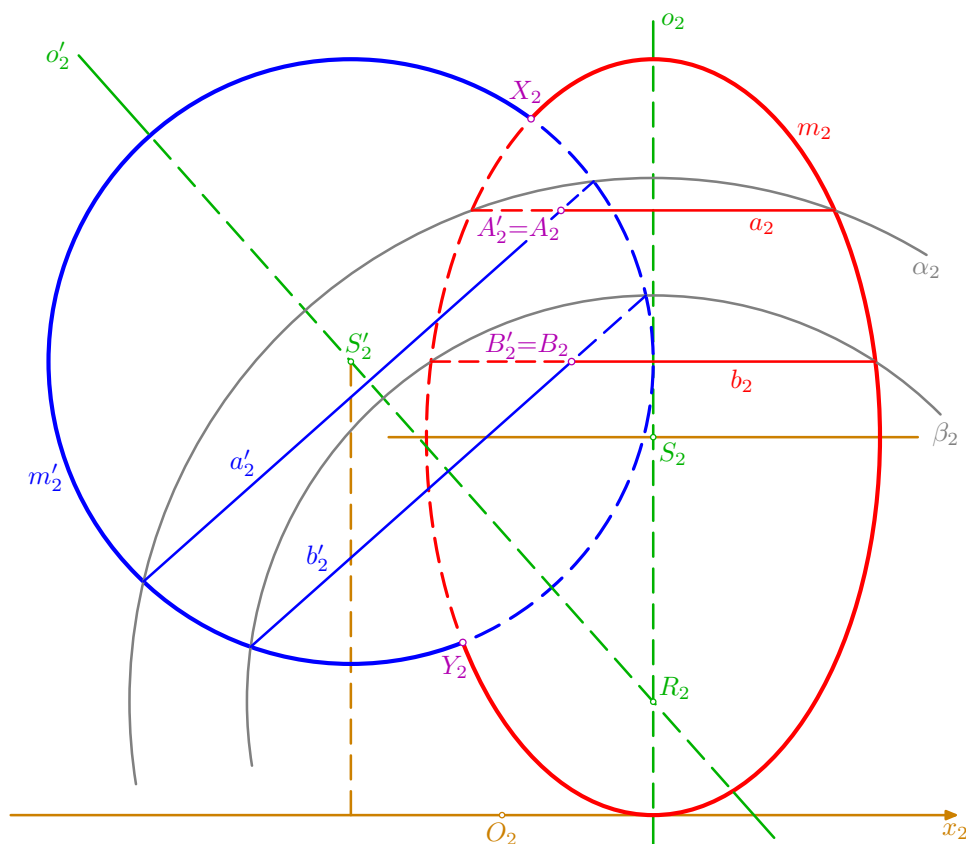
- nejprve sestrojme průsečíky  $X, Y$  hlavních meridiánových křivek  $m$  a  $m'$ ; k tomu účelu je vhodné, abychom měli elipsu  $m_2$  vyrýsovanou pokud možno co nejpřesněji, minimálně s využitím oblouků hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech, případně můžeme použít také zahradnickou konstrukci, která vychází z ohniskové definice elipsy (viz příslušnou pasáž o elipse na straně 174); jen tak se nám podaří dostatečně přesně určit průsečíky  $X_2, Y_2$  elipsy  $m_2$  s kružnicí  $m'_2$ ; bod  $X$ , resp. bod  $Y$ , je nejvyšším, resp. nejnižším, bodem hledané průnikové křivky; pro další postup konstrukcí zvolenou **metodou soustředných kulových ploch** zvolme na ose  $o$  elipsoidu bod  $R$  (je celkem lhostejno, kde) a přímku  $o' = RS'$  považujme za osu rotace dané kulové plochy; máme tak sestrojít průnik dvou rotačních ploch s různoběžnými osami; bod  $R \in o$  i osa  $o' = RS'$  leží v nárýsně a splývají tedy se svými nárýsy  $R_2 \in o_2$  a  $o'_2 = R_2S'_2$



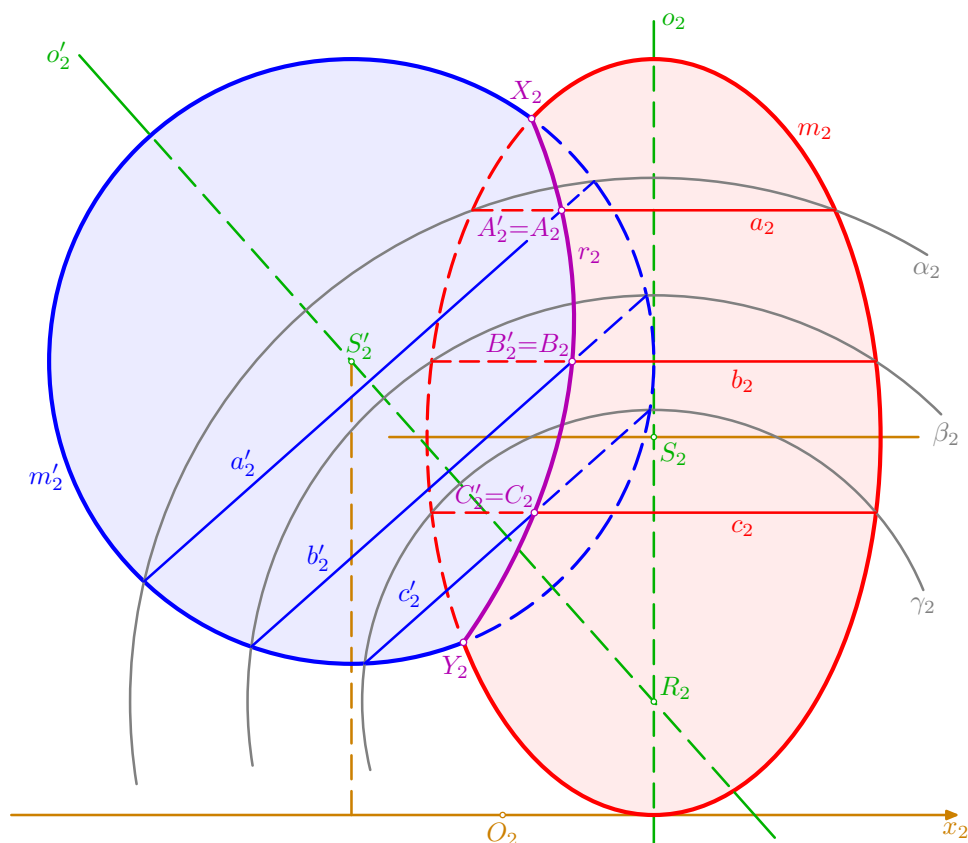
- libovolně vhodně zvolme pomocnou kulovou plochu  $\alpha$  se středem v bodě  $R = o \cap o'$ , v náryse sestrojme část její hlavní meridiánové kružnice a označme ji  $\alpha_2$ ; zvolená pomocná kulová plocha  $\alpha$  protíná daný elipsoid i danou kulovou plochu v rovnoběžkových kružnicích  $a$  a  $a'$ , jejichž průsečíky  $A, A'$  jsou další dva body hledaného průniku; kružnice  $a, a'$  se v náryse jeví jako úsečky  $a_2 \perp o_2, a'_2 \perp o'_2$ , jejichž středy leží na příslušných osách  $o_2, o'_2$  a krajní body jsou průsečíky příslušných meridiánových křivek  $m_2, m'_2$  s kružnicí  $\alpha_2$ ; bod  $A_2 = A'_2 = a_2 \cap a'_2$  je pak nárysem hledaných průsečíků  $A, A'$  kružnic  $a, a'$



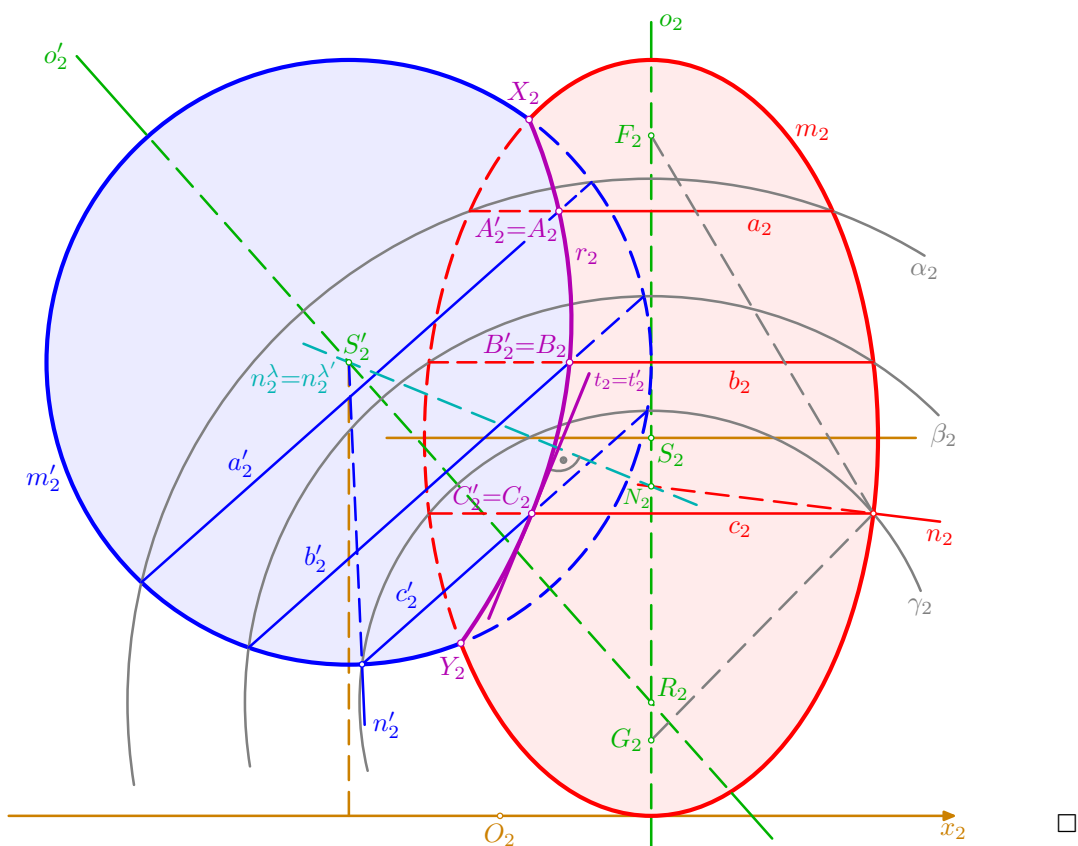
- princip popsaný v předchozím kroku analogicky použijme ke konstrukci dalších bodů hledaného průniku obou daných rotačních ploch; takto je tedy sestaven také splývající nárys  $B'_2 = B_2$  bodů  $B, B'$ , v nichž se protínají rovnoběžkové kružnice  $b, b'$ , které leží na další zvolené kulové ploše  $\beta$ , jejíž střed je opět v bodě  $R$  (proto metoda **soustředných** kulových ploch); kružnice  $\beta_2$  je hlavním meridiánem zvolené kulové plochy  $\beta$ , její průsečíky s meridiány  $m_2, m'_2$  jsou krajní body úseček  $b_2 \perp o_2, b'_2 \perp o'_2$ , do nichž se v náryse promítnou kružnice  $b, b'$ ; bod  $B_2 = B'_2$  je pak průsečíkem sestavených úseček  $b_2, b'_2$



- stejným způsobem popsaným v předchozích dvou krocích doplníme ještě splývající nárys  $C_2 = C'_2$  průsečíků  $C, C'$  rovnoběžkových kružnic  $c, c'$ , v nichž protíná dané rotační plochy další zvolená kulová plocha  $\gamma$  (která má opět střed v bodě  $R$ ); obě dané rotační plochy jsou kvadriky, tj. plochy druhého stupně, a odtud lze odvodit, že jejich průniková křivka  $r$  je stupně čtvrtého, tzv. **kvartika**; podle zadání jsou dané plochy a tedy i jejich průniková křivka  $r$  souměrné podle nárysnou, a každá z jejích polovin ležících v opačných poloprostorech určených nárysnou se promítá do téže křivky  $r_2$ , která má krajní body  $X_2, Y_2$  a mezi nimi prochází po dvou splývajícími body  $A_2 = A'_2, B_2 = B'_2$  a  $C_2 = C'_2$ ; dá se dokázat, že křivka  $r_2$  je částí jisté paraboly...



- na závěr ukažme, jak lze sestrojít nárys tečny v některém průnikovém bodě, vyberme např. bod  $C$ ; nejprve prostorový princip konstrukce: tečna  $t$  v bodě  $C$  průnikové křivky  $r$  musí být kolmá k tzv. normálové rovině  $\lambda$  křivky  $r$  v tomto bodě; dá se ukázat, že rovina  $\lambda$  je určena normálami obou daných rotačních ploch, vztyčenými v uvažovaném bodě  $C$ ; v průmětu postupujeme takto: v jednom z krajních bodů úsečky  $c_2$  sestrojme normálu  $n_2$  meridiánové elipsy  $m_2$  (podle **Věty 1** na straně 184 pólí normála vnitřní úhel průvodičů) a najdeme její průsečík  $N_2 = n_2 \cap o_2$ ; při rotaci normály  $n = n_2$  kolem osy  $o = o_2$  zůstává bod  $N = N_2$  na místě, normálou daného elipsoidu v bodě  $C$  je tedy přímka  $CN$  – pro naše účely ji není třeba v průmětu sestrojovat, postačí znalost jejího nárysného stopníku  $N = N_2$ ; normála v libovolném bodě dané kulové plochy musí procházet jejím středem  $S' = S'_2$ , který je současně nárysným stopníkem každé z těchto normál; přímka  $n_2^\lambda = N_2S'_2$  je tedy nárysnou stopou zmíněné normálové roviny  $\lambda$  a pro nárys  $t_2$  tečny  $t \perp \lambda, C \in t$ , platí  $t_2 \perp n_2^\lambda, C_2 \in t_2$ ; ze souměrnosti podle nárysu vyplývá, že tytéž konstrukce lze provést pro sestrojení nárysu  $t'_2$  tečny  $t'$  v bodě  $C'$  průnikové křivky  $r$



## 4. Úlohy k samostatnému řešení

### Šroubové plochy

1. Je dána osa  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$  šroubového pohybu a přímka  $t = PQ$ . V Mongeově promítání zobrazte část rozvinutelné šroubové plochy vzniklé šroubováním přímky  $t$ . Plochu omezte hranou vratu a půdorysnou  $\pi$ .

$$R[0; 5; 0], P[-2; 12; 0], Q[4; 5; 6]$$

2. V Mongeově promítání zobrazte jeden závit schodové plochy, která vznikne šroubováním úsečky  $AB$ ; pravotočivý šroubový pohyb je dán osou  $o \perp \pi$ ,  $B \in o$  a výškou závitu  $v$ ; v bodě  $T$  plochy sestrojte tečnou rovinu  $\tau$ .

$$A[4; 5; 0], B[0; 5; 0], v = 12, T[-3; 4; ?]$$

3. V Mongeově promítání zobrazte jeden závit přímého šroubového konoidu, který vytvoří úsečka  $AB$ ; pravotočivý šroubový pohyb je dán osou  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$  a výškou závitu  $v$ ; v bodě  $T$  sestrojte tečnou rovinu a normálu plochy.

$$R[0; 7; 0], v = 12, A[-2; 7; 0], B[-5; 7; 0], T[3; ?; 5]$$

4. Levotočivý šroubový pohyb je dán osou  $o \perp \pi$ ,  $R \in o$  a redukovanou výškou závitu  $v_0$ . V Mongeově promítání zobrazte jeden závit plochy, která vznikne šroubováním úsečky  $AB$ ; v bodě  $T$  plochy sestrojte tečnou rovinu a doplňte celý název plochy.

$$R[0; 7; 0], A[0; 10; 0], B[5; 10; 0], v_0 = 2, T[-4; 5; ?]$$

5. V Mongeově promítání zobrazte jeden závit pravotočivé vývrtkové plochy, která vznikne šroubováním úsečky  $AB$  kolem osy  $o \perp \pi$ ,  $B \in o$ , výška závitu je  $v$ ; v bodě  $T$  plochy sestrojte tečnou rovinu.

$$A[-5; 6; 0], B[0; 6; 2], T[1; 5; ?], v = 9, 6$$

### Řezy těles a jejich průniky s přímkou

1. V pravouhlé axonometrii  $\Delta(6; 7; 5; 8)$  je dán pravidelný šestiboký hranol s podstavou o středu  $S$  a vrcholu  $A$  v půdorysně a s výškou  $v$ ; sestrojte jeho řez rovinou  $\rho$ .

$$S[0; 0; 0], A[0; 5; 0], v = 9, \rho(12; 6; 4)$$

2. V dimetrii  $\Delta(6; 10; 10)$  je dán kosý čtyřboký jehlan čtvercovou podstavou o středu  $S$  a vrcholu  $A$  v půdorysně  $\pi$ ; vrchol jehlanu je v bodě  $V$ . Sestrojte řez jehlanu rovinou  $\rho$ .

$$S[4; 5; 0], A[-1; 6; 0], V[0; 0; 12], \rho(7; \infty; 7)$$

3. V izometrii sestrojte řez rotační válcové plochy s řídicí kružnicí  $k(S, r)$  v půdorysně  $\pi$  rovinou  $\alpha$ .

$$S[2; 1; 0], r = 4, \alpha(\infty, 5; 4)$$

4. V pravoúhlé axonometrii  $\Delta(12; 11; 10)$  zobrazte řez rotační válcové plochy s řídicí kružnicí  $k(S, r)$  v půdorysně  $\pi$  rovinou  $\alpha$ .

$$S[4; 4; 0]; r = 3, 5; \alpha(9; \infty; 8)$$

5. V izometrii určete průnik přímky  $a = KL$  s kosým kruhovým kuzelem, který má podstavu o středu  $S$  a poloměru  $r$  v půdorysně  $\pi$  a hlavní vrchol  $V$ .

$$K[4, 5; -2; 1, 5], L[1; 4; 1], S[0; 2; 0], r = 5; V[4; 6; 10]$$

6. V izometrii je dán trojboký kosý hranol podstavou  $ABC$  a vrcholem  $A'$ . Sestrojte jeho průnik s přímkou  $r = MN$ .

$$A[6; 1; 0], B[5; 5; 0], C[1; 5; 0], A'[0; 3; 8], M[7; 0; 7], N[0; 7; 2]$$

## Rotační plochy, jejich řezy a průniky

1. Protáhlý (vejčitý) elipsoid je určen ohnisky  $F, G$  (přímka  $o = FG$  je osou rotace) a bodem  $M$ ; v Mongeově promítání sestrojte rovnoběžku, meridián a tečnou rovinu v bodě  $M$ .

$$F[0; 5; 4], G[0; 5; 9], M[-3; 7; 10]$$

2. V Mongeově promítání zobrazte protáhlý (vejčitý) elipsoid, který je určen ohnisky  $F, G$  (přímka  $o = FG$  je osou rotace) a tečnou rovinou  $\tau$ .

$$F[0; 4; 9], G[0; 4; 4], \tau(-3; 7; 3)$$

3. V Mongeově promítání sestrojte řez jednodílného rotačního hyperboloidu, který má osu  $o \perp \pi$ , střed  $S$  a délky poloos  $a, b$ , rovinou  $\rho$ .

$$S[0; 6; 5], a = b = 2,5, \rho(7; \infty; 2,5)$$

4. V Mongeově promítání sestrojte řez rovinou  $\rho$  na jednodílném rotačním hyperboloidu, který má osu  $o \perp \pi$ , střed  $S$  a délky poloos  $a, b$ .

$$S[0; 7; 6], a = 2,5, b = 3, \rho(1; \infty; -3)$$

5. Sestrojte řez rotačního kuželu, který má vrchol  $V$  a podstavu o poloměru  $r$  v  $\pi$ , rovinou  $\rho$ . Proveďte v Mongeově promítání.

$$V[0; 4; 6], r = 4, \rho(-6; \infty; 2)$$

6. V Mongeově promítání sestrojte řez rovinou  $\rho$  na rotační kuželové ploše, která má vrchol  $V$  a řídicí kružnici o poloměru  $r$  v  $\pi$ .

$$V[0; 4; 3], r = 4, \rho(1; \infty; -4)$$

7. V Mongeově promítání sestrojte průnik přímky  $p = PN$  s rotačním paraboloidem, který má vrchol  $V$ , svislou osu  $o$  a půdorysnu protíná v rovnoběžkové kružnici o poloměru  $r$ .

$$V[0; 4; 5; 9, 5], r = 4,5, P[8; 12; 0], N[-3; 0; 7]$$

8. V pravouhlém promítání na nárysnu zobrazte množinu všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu  $S$  vzdálenost  $r$  a od dané přímky  $o = MN$  vzdálenost  $r'$ .

$$S[0; 0; 2], r = 4, M[-2; 0; 0], N[-2; 0; 7]; r' = 3$$

9. V pravouhlém promítání na nárysnu zobrazte množinu všech bodů v prostoru, které mají od dané přímky  $o = AB$  vzdálenost  $r$  a od dané přímky  $o' = CD$  vzdálenost  $r'$ .

$$A[0; 0; 0], B[0; 0; 6], r = 3, C[4; 0; 0], D[-5; 0; 4], r' = 2$$

10. V pravouhlém promítání na nárysnu sestrojte průnik rotačního paraboloidu, který má vrchol  $V$  a ohnisko  $F$ , s kulovou plochou  $\kappa(S, r)$ ; v libovolném bodě průnikové křivky doplňte její tečnu.

$$V[0; 0; 9], F[0; 0; 7], S[3; 0; 5], r = 4$$

11. V Mongeově promítání sestrojte průnik rotačního kužele, který má podstavou kružnici  $k(S, r)$  v  $\pi$  a výšku  $v$ , s kulovou plochou  $\kappa(S', r')$ .

$$S[0; 5; 0], r = 4, v = 9, S'[-3; 5; 4], r' = 4$$

**Literatura****Literatura**

- [1] Černý, J. - Kočandrllová, M.: Konstruktivní geometrie. Praha, ČVUT 1998.
- [2] Urban, A.: Deskriptivní geometrie I, II. Praha, SNTL 1965, 1967.
- [3] Piska, R. - Medek, V.: Deskriptivní geometrie I, II. Praha, SNTL 1966.
- [4] Drábek, K. - Harant, F. - Setzer, O.: Deskriptivní geometrie I, II. Praha, SNTL 1978.
- [5] Doležal, J.: Základy geometrie. Ostrava, VŠB-TU 2006.