

# Modul 1 – Mechanika

Jan Kopečný

# 1. Mechanika

Studium předmětu Fyzika je nejlepší začít částí zvanou **Mechanika**. Mluví pro to hned několik důvodů – zaprvé je to nejstarší obor fyziky zabývající se zákonitostmi mechanického pohybu těles známý již ve starověku. Za druhé je pro studujícího nejsnáze pochopitelný, protože na mechanické jevy naráží každý den. Ne že by se běžně nesetkával i s jinými fyzikálními jevy a zákonitostmi, ale ty nejsou často na první pohled tak zřejmé. A konečně za třetí **se bez znalosti zákonitosti mechaniky neobejdete při studiu jiných partií fyziky** a uplatníte je i u velmi složitých jevů jako je třeba pohyb kosmické lodi či čtecího zařízení CD přehrávače, viz. obr. 1.1-1



obr. 1.1-1

Mechanika se dělí na více částí. **Kinematika** se zabývá pouze **popisem pohybu tělesa**, zatímco **Dynamika** vyšetřuje **příčiny tohoto pohybu**. Samostatně se probírají kapitoly **Mechanická práce a energie** a **Gravitační pole**. Do mechaniky se zařazuje i **Nauka o mechanickém kmitání a vlnění** a její zvláštní část **Akustika**.

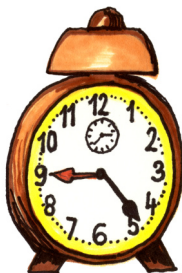
# 1.1 Úvodní pojmy

Než se pustíte do studia nejen této kapitoly, ale i jiných částí fyziky, je třeba si zopakovat základní pojmy, které se v celé fyzice používají. Úplně na začátku se seznámte se soustavou fyzikálních veličin a jednotek, jejich znalost je nezbytná. Fyzika také pracuje se skalárními i vektorovými veličinami, je tedy nutné se naučit jejich odlišnosti a základní matematické operace s nimi.

## 1.1.1 Soustava fyzikálních veličin a jednotek



1. Znat základní jednotky soustavy SI.
2. Znat předpony označující díly a násobky jednotek.
3. Umět rozepsat vedlejší jednotky pomocí jednotek základních.
4. Vědět, že do vztahů je vhodné dosazovat jednotky soustavy SI, výsledek pak vyjde také v jednotkách SI.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 10 minut.



Postupem času při rozvoji fyzikálních poznatků se používalo k vyjádření velikostí fyzikálních veličin nejrůznějších jednotek. Vzpomeňte si z dějepisu na starověké délkové míry – Římané vyjadřovali vzdálenosti ve stádiích, již od středověku používají Angličané míle ať už pozemní, nebo námořní, v Rusku byl vžit pojem versta.

Jak se „globalizoval“ svět, ukázala se nutnost sjednotit všechny jednotky. A tak od roku 1971 byla zavedena **Mezinárodní soustava jednotek** označovaná zkratkou **SI** (z francouzského *Système International des Unités*).

Soustava SI obsahuje sedm **základních fyzikálních jednotek** a tomu odpovídajících sedm **základních veličin**. Tyto základní jednotky jsou přehledně uspořádány s příslušnými veličinami a značkami v následující tabulce:

<i>jednotka</i>	<i>značka</i>	<i>název veličiny</i>	<i>značka</i>
metr	m	délka	<i>l</i>
kilogram	kg	hmotnost	<i>m</i>
sekunda	s	čas	<i>t</i>
ampér	A	elektrický proud	<i>I</i>

kelvin	K	termodynamická teplota	$T$
mol	mol	látkové množství	$n$
kandela	cd	svítivost	$I$

Dále soustava SI obsahuje **odvozené jednotky**. Tyto jednotky jsou odvozeny na základě definičních vztahů příslušných veličin. Například veličinu hustota  $\rho$  definujeme jako hmotnost jednotkového objemu vztahem

$$\rho = \frac{m}{V},$$

Protože jednotkou hmotnosti  $m$  je kilogram (kg) a jednotkou objemu  $V$  je krychlový metr ( $\text{m}^3$ ), jednotkou hustoty je kilogram na metr krychlový. Tuto jednotku pak můžeme zapsat ve dvou různých tvarech a to buď jako  $\text{kg}/\text{m}^3$ , nebo  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Odvozené jednotky se často pojmenovávají po význačných fyzicích. Tak známe jednotku Newton, Pascal, Sievert atd.



**U1.1.1-1.** Jednotka Newton (N) je odvozenou jednotkou pro sílu. Vyjádřete tuto jednotku pomocí základních jednotek



V praxi je často výhodné používat **násobky a díly jednotek**. Proto vzdálenost ujetou autem vyjadřujeme v kilometrech (km) a ne v metrech, malé hodnoty elektrického proudu měříme v miliampérech (mA) a ne v ampérech. Zase jde o použití zásad soustavy SI, která určuje násobky a díly pomocí třetích mocnin základu 10. Jednotlivé násobky a díly jsou označeny předponami. V předchozích příkladech jsme tak použili dvě předpony a to kilo (značka k) pro označení násobku  $10^3$  a mili (značka m) pro  $10^{-3}$ .

Ostatní díly a násobky jednotek najdete v následující tabulce Dekadické násobky jednotek soustavy SI. Někdy se používají ještě další předpony, které nepatří do soustavy SI jako je centi- se značkou c ( $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ ), deci-, značka d ( $1 \text{ dm} = 10^{-1} \text{ m}$ ) a hekto-, značka h ( $1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$ ).

Při používání násobků a dílů jednotek si musíme dávat velký pozor při výpočtech. Například máme vypočítat hmotnost krychle železa o hraně 2 cm. Hustota železa (najdeme v tabulkách) je  $7,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## Přehled dekadických násobků a dílů jednotek soustavy SI

Předpona	Značka	Znamená výchozích jednotek
<b>exa</b>	<i>E</i>	$10^{18}$
<b>peta</b>	<i>P</i>	$10^{15}$
<b>tera</b>	<i>T</i>	$10^{12}$
<b>giga</b>	<i>G</i>	$10^9$
<b>mega</b>	<i>M</i>	$10^6$
<b>kilo</b>	<i>k</i>	$10^3$
<b>hekto</b> <sup>x)</sup>	<i>h</i>	$10^2$
<b>deka</b> <sup>x)</sup>	<i>da</i>	$10^1$
		$10^0$
<b>deci</b> <sup>x)</sup>	<i>d</i>	$10^{-1}$
<b>centi</b> <sup>x)</sup>	<i>c</i>	$10^{-2}$
<b>mili</b>	<i>m</i>	$10^{-3}$
<b>mikro</b>	$\mu$	$10^{-6}$
<b>nano</b>	<i>a</i>	$10^{-9}$
<b>piko</b>	<i>p</i>	$10^{-12}$
<b>femto</b>	<i>f</i>	$10^{-15}$
<b>atto</b>	<i>a</i>	$10^{-18}$
<b>Násobky a díly označené <sup>x)</sup> se používají jen ve zvláštních případech</b>		

Vydeme z definičního vztahu pro hustotu a vyjádříme z něj hmotnost.

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V.$$

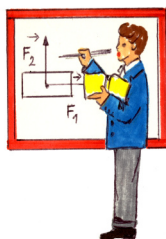
Když teď dosadíme přímo hodnoty bez ohledu na jednotky dostaneme:  
 $m = 7,9 \cdot 10^3 \cdot 2^3 = 63 \cdot 10^3 \text{ kg} = 63 \text{ tun}$ . Tedy zřejmý nesmysl, malá krychlička asi tolik neváží.

Vše vzniklo tím, že jsme **nedosazovali veličiny důsledně v jednotkách SI**. Hustota byla dosazena správně, ale délkový rozměr železné krychle jsme dosadili v centimetrech a ne v metrech. Správný výpočet by tedy vypadal takto:

$$m = 7,9 \cdot 10^3 \cdot 0,02^3 = 63 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 63 \text{ g}. \text{ A to už je výsledek odpovídající našim zkušenostem.}$$

Stále se ještě setkáváme s jednotkami, které nepatří do soustavy SI. Je to dáno jejich praktickým významem, zde patří jednotky jako minuta, hodina, tuna, litr. A nebo tradicí – anglicky mluvící národy se těžko zbavují mílí, stop či liber. Těmto jednotkám se říká **vedlejší jednotky**.

Při převodu jednotek se často dopouštíme chyb. Následující řešený příklad si nejdříve vypočítejte sami a pak si teprve zkontrolujte řešení.



Kolik čtverečných metrů má les o výměře 5 km<sup>2</sup>?

Při řešení si musíte uvědomit, že pracujeme s mocninou jednotky. Nejlepší je si jednotku rozepsat jako součin a pak převést každý činitel zvlášť.

$$\text{Takže: } 5 \text{ km}^2 = 5 (\text{km}) (\text{km}) = 5 (1000 \text{ m}) (1000 \text{ m}) = 5 \cdot 10^6 \text{ m}^2.$$



**U1.1.1-2.** Napište převodní vztahy mezi minutou, hodinou, tunou a litrem a příslušnými jednotkami soustavy SI.

**U1.1.1-3.** Zátka z korku má hmotnost 1g a objem 5 cm<sup>3</sup>. Jaká je hustota korku?

**U1.1.1-4.** Vyjádřete pomocí mocnin o základu 10 následující jednotky: mA, GJ, nm, μV, pF.

## 1.1.2 Skalární a vektorové fyzikální veličiny



1. Definovat a rozlišit skalární a vektorovou veličinu.
2. Umět sečíst a odečíst algebraicky i graficky dva a více vektorů.
3. Rozložit vektor do libovolných směrů.
4. Umět vyjádřit vektor pomocí jeho složek a souřadnic.
5. Vynásobit skalárně jeden vektor druhým.
6. Vynásobit vektorově jeden vektor druhým, umět určit směr výsledného vektoru.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 30 minut



Fyzikální veličiny můžeme rozdělit do dvou skupin. Prvou skupinu tvoří veličiny jako je čas, hmotnost, teplota, energie. U těchto veličin určujeme pouze jejich velikost a samozřejmě i s příslušnou jednotkou. Jestliže řeknu, že cesta z Ostravy do Prahy trvá vlakem 5 hodin, není třeba nic dodávat (pokud nenadávám na ČD, že zase měl vlak zpoždění). V tomto případě hovořím o skalární veličině.

**Skalární fyzikální veličina, krátce skalár, je určena svou velikostí a příslušnou jednotkou.**

Skalární fyzikální veličina a skalární veličina nejsou rovnocenné pojmy. Pokud hovoříme pouze o skalární veličině jako matematickém pojmu, pak je tato veličina určena jen svou velikostí. U skalární fyzikální veličiny musíme vždy připojit ještě jednotku, pokud není bezrozměrná.

Skalární veličinu označujeme v textu kurzívou. Například čas zapíšeme jako  $t$ , hmotnost  $m$  atp.

Do druhé skupiny zařazujeme fyzikální veličiny, jako je síla, rychlost, zrychlení, intenzita elektrického pole apod. Na rozdíl od skalárních veličin, u těchto vektorových veličin musíme brát v úvahu i jejich směr. Chceme-li roztlačit na vodorovné silnici auto, tak samozřejmě působíme silou. Pokud budeme tlačit na auto shora, ani s ním nehnete. Z fyzikálního pohledu působíme silou ve směru kolmém na směr pohybu. Ze zkušenosti víme, že nejúčinnější bude, budeme-li tlačit ve směru vodorovném (síla působí ve směru pohybu).

**Vektorová fyzikální veličina, zkráceně vektor, je veličina, která má určitou velikost, směr a orientaci. A protože se jedná o fyzikální vektorovou veličinu, je nutné připojit i jednotku.**

Vektorovou veličinu označujeme zpravidla tučnou kurzívou nebo šipkou nad jejím symbolem. Například sílu zapíšeme jako  $\mathbf{F}$ , nebo  $\vec{F}$ . Vektorovou veličinu znázorňujeme úsečkou určité délky a určitého orientovaného směru. Délka této úsečky určuje **velikost vektoru** – je to skalár. Velikost vektoru  $\mathbf{A}$  zapisujeme jako  $A = |\mathbf{A}|$ . **Směr vektoru** je dán přímkou ve které vektor leží. A konečně **orientaci vektoru** nám určuje počáteční ( $O$ ) a koncový bod vektoru. Na obrázku, viz. obr. 1.1-2, vidíme znázorněnou sílu  $\mathbf{F}$  velikosti  $F = 4 \text{ N}$  působící ve směru osy  $x$ . Na tomto obrázku je také znázorněn důležitý bod  $O$  – počáteční bod vektoru označovaný jako **umístění vektoru**.





obr. 1.1-2

Ke každému vektoru existuje **opačný vektor**. Opačný vektor má stejnou velikost, stejný směr, ale opačnou orientaci. Vektor opačný k vektoru  $a$  značíme jako  $-a$ .

Pro počítání s vektory platí některá odlišná pravidla než při počítání se skaláry (číslly) tzv. **pravidla vektorového počtu**:

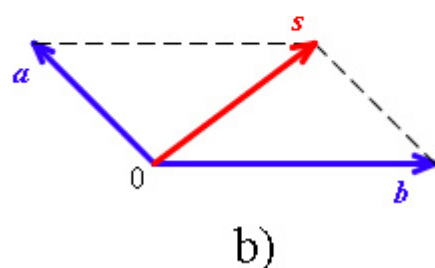
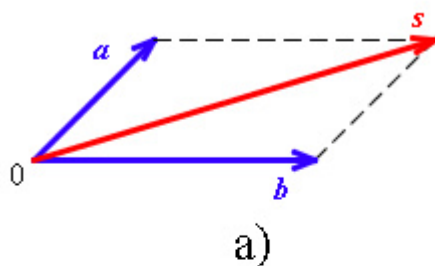
► **Sčítání vektorů.** Vektory sčítáme **vektorovým součtem**. Na rozdíl od sčítání dvou čísel musíme v tomto případě vzít v úvahu nejen velikost vektorů, ale i jejich směr. Matematický zápis pro vektorový součet je:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{s} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Výsledný vektor  $\vec{s}$  nazýváme **výslednice vektorů**, sčítané vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  jsou **složky**.

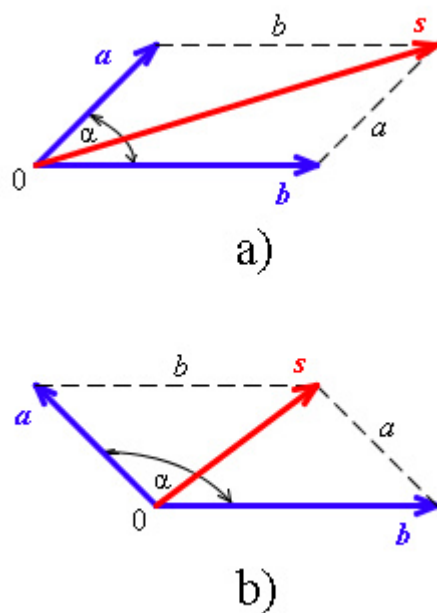
Všimněte si, že výsledkem je opět vektor a že nezáleží na pořadí sčítání.

Názornější je grafické sčítání vektorů. V tomto případě konstruujeme tzv. **vektorový rovnoběžník**. Výslednice vektorů  $s$  je úhlopříčkou rovnoběžníku o stranách tvořených sčítanými vektory - složkami  $a$  a  $b$ . Toto sčítání je znázorněno na obrázku, viz. obr. 1.1-3.



obr. 1.1-3





obr. 1.1-4

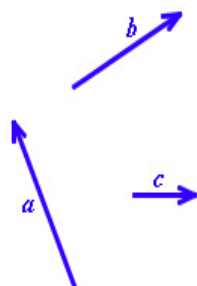
Samozřejmě můžeme sčítat více vektorů. Sečteme nejdříve první dva, k jejich výslednici přičteme další vektor atd.

Velikost výslednice vektoru můžeme také vypočítat, určit algebraicky. Pomůže nám obrázek, viz. obr. 1.1-4, a kosinová věta.  $s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ .



**U1.1.2-5.** Určete výsledný vektor  $c$  vzniklý sečtením vektoru  $a$  velikosti 4 m a majícího směr osy  $x$  s vektorem  $b$  velikosti 3 m ležícího ve směru osy  $y$ . Řešte graficky a poččetně.

**U1.1.2-6.** Určete graficky vektor  $e$ , který je součtem vektorů  $a, b, c$  znázorněných na obrázku, viz. obr. 1.1-6.



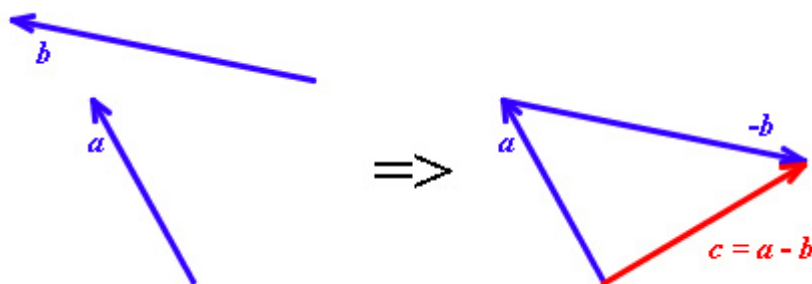
obr. 1.1-6

**U1.1.2-7.** Dvě skupiny se přetahují lanem. Přetahování je nerozhodné, obě skupiny zřejmě táhnou stejnou silou v opačných směrech. *Jaká je výslednice sil? Nakreslete schematický obrázek.*

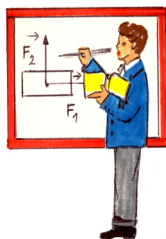
► **Odčítání vektorů.** Pokud se naučíme sčítat vektory, umíme již vektory také odečítat. Máme-li odečíst od vektoru  $\vec{a}$  vektor  $\vec{b}$ , pak to uděláme tak, že k vektoru  $\vec{a}$  přičteme vektorově opačný vektor  $-\vec{b}$ . Matematický zápis této operace je:

$$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}), \text{ nebo } \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

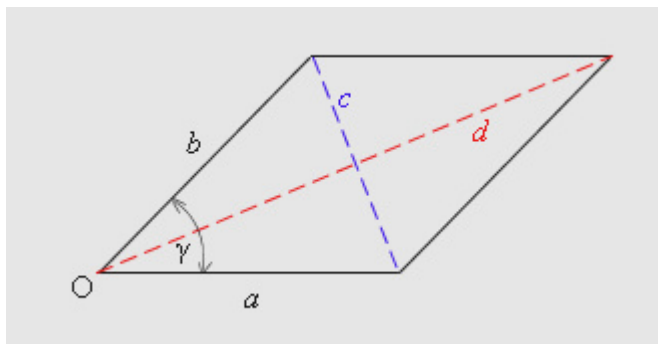
Graficky máte odečítání dvou vektorů znázorněno na obrázku, viz. obr. 1.1-9.



obr. 1.1-9



Na obrázku je zobrazen rovnoběžník o stranách  $a$  a  $b$ , které svírají úhel  $\gamma$ . Můžeme vypočítat úhlopříčky rovnoběžníku s využitím vektorového počtu?, viz. obr. 1.1-10.



obr. 1.1-10

Tento příklad byl zvolen právě proto, aby ukázal, jak lze vektorového počtu použít pro řešení některých geometrických úloh. Představíme si strany  $a$ ,  $b$  jako vektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  se společným počátkem v bodě  $O$ .

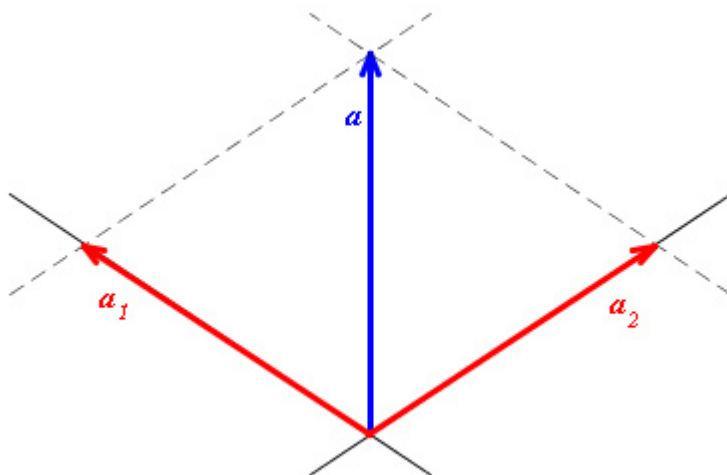
**Delší úhlopříčka** (červená)  $d$  je vlastně velikost **výslednice vektorového součtu** obou vektorů  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma.$$

**Kratší úhlopříčka** (modrá)  $c$  je velikost **výslednice vektorového rozdílu** obou vektorů.

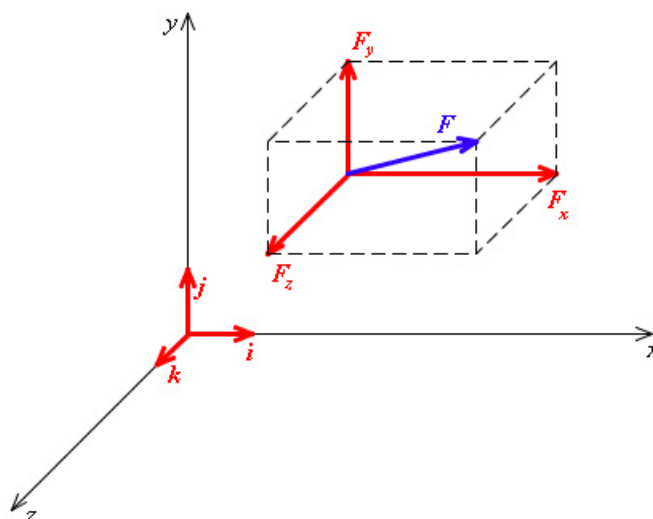
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

► **Rozklad vektoru.** Rozklad vektoru je ve fyzice velice užitečná operace. Vektor rozkládáme do dvou nebo více různoběžných směrů. Na obrázku, viz. obr. 1.1-11, vidíme rozložení vektoru  $a$  na dva vektory  $a_1$  a  $a_2$ . Vektory  $a_1$  a  $a_2$  jsou tzv. **složky vektoru  $a$** . Jejich vektorovým součtem ( $a_1 + a_2 = a$ ) opět dostaneme vektor  $a$ .



obr. 1.1-11

Často rozkládáme vektor na složky ležící v jednotlivých osách pravoúhlé soustavy souřadnic  $Oxyz$ . Velikostem těchto složek pak říkáme **souřadnice vektoru**. Vezměme například vektor síly  $F$ . Jeho rozklad na složky  $F_x$ ,  $F_y$  a  $F_z$  je znázorněn na obrázku, viz. obr. 1.1-12.

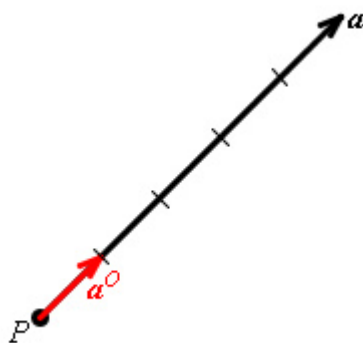


obr. 1.1-12

Pro velikost vektoru  $F$  vyjádřenou pomocí jeho souřadnic platí vztah:

$$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Složky vektoru v pravoúhlé soustavě souřadnic  $Oxyz$  můžeme také vyjádřit pomocí jeho souřadnic a **jednotkových vektorů  $i$ ,  $j$ ,  $k$** . Jednotkový vektor (obr. 1.1-13)  $a^o$  vektoru  $a$  je vektor, který má směr vektoru  $a$  a velikost rovnu 1. Platí tedy  $|\vec{a}^o| = 1$ .



obr. 1.1-13

Například složky vektoru  $F$  zapsané pomocí jeho souřadnic jsou:

$$F_x = F_x \mathbf{i}, \quad F_y = F_y \mathbf{j}, \quad F_z = F_z \mathbf{k},$$

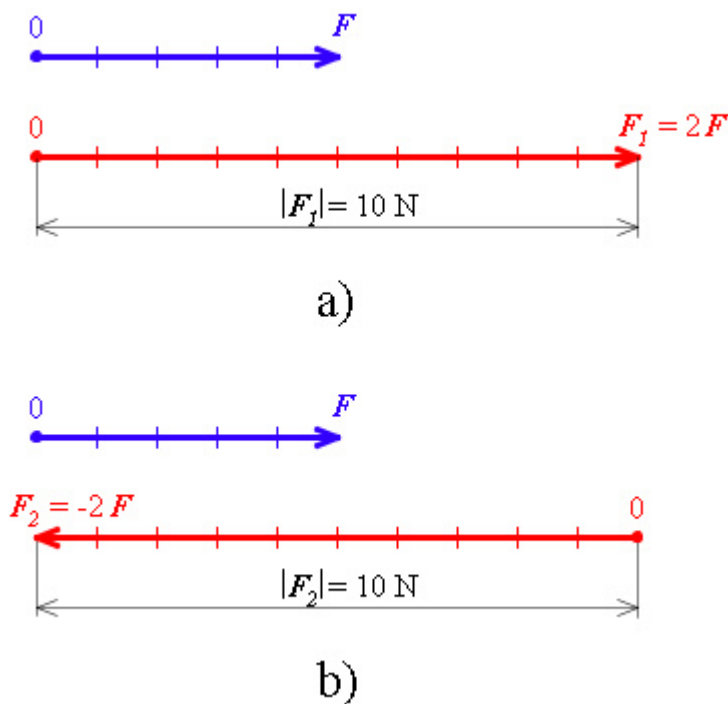
A vektor  $F$  pak jako jejich vektorový součet vyjádříme:

$$F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

► **Násobení vektoru reálným číslem.** Vynásobíme-li vektor  $A_0$  reálným číslem  $n$ , dostaneme vektor stejného směru  $A_I$ . Jeho velikost bude  $n$  násobkem původní velikosti.

$$\vec{A}_I = n \vec{A}_0, \quad A_I = n A_0.$$

Je-li  $n$  kladné, má výsledný vektor  $A_I$  stejný směr i orientaci jako původní vektor  $A_0$ . Bude-li  $n$  záporné číslo, má výsledný vektor orientaci opačnou. Ale pozor, velikost výsledného vektoru bude kladná, délky úseček vyjadřujeme vždy kladnými čísly. Příklad grafického řešení násobení vektoru síly číslem máte na obrázku, viz. obr. 1.1-14.



obr. 1.1-14

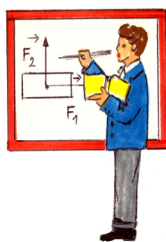
► **Skalární součin dvou vektorů.** Jak název této operace napovídá, násobíme-li skalárně vektor **A** vektorem **B** je **výsledkem skalár C**. Skalární součin zapisujeme:

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos \alpha,$$

Kde *A* a *B* jsou velikosti obou vektorů a  $\alpha$  je úhel, který vektory svírají. Všimněte si tečky mezi násobenými vektory na levé straně rovnice. Touto tečkou vyjadřujeme, že se jedná právě o skalární součin.

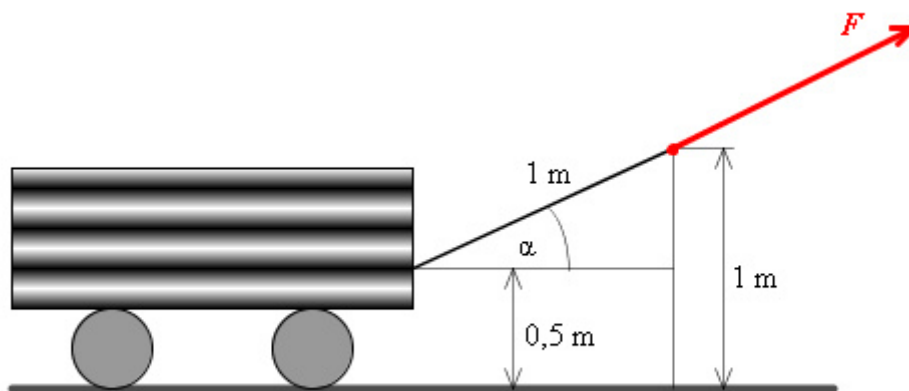
Skalární součin můžeme určit také pomocí souřadnic jednotlivých vektorů:

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



Typickým fyzikálním příkladem na skalární součin je výpočet práce. Máme vypočítat velikost vykonané práce (skalár), táhneme-li vozík po vodorovné cestě silou 500 N (první vektor). Vozík táhneme pomocí 1m dlouhé šňůry po dráze 6m (druhý vektor). Šňůra je upevněna na vozík ve výšce 0,5m, naše ruce jsou ve výšce 1m (z těchto údajů vypočítáme úhel mezi oběma vektory), viz. obr. 1.1-15.

Ze zkušenosti víme, že nejmenší námahu (nejmenší sílu) musíme vynaložit, táhneme-li vozík ve směru pohybu. Ale síla v našem případě působí pod úhlem  $\alpha$ . Ve směru pohybu působí jen složka síly  $F \cos \alpha$ .



obr. 1.1-15

Možná si ještě pamatujete (když ne, tak se to zde později dovíte), že práce je „síla působící po dráze“. Jinak řečeno práci dostaneme jako součin působící síly a dráhy, po které se těleso během působení síly přemístí:

$$A = F \cos(\alpha) s .$$

Srovnáme-li tento vztah s výrazem pro skalární součin vektoru síly **F** a vektoru přemístění **s** ( $\vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha$ ) zjistíme, že jde o stejné vztahy. Takže se můžeme konečně pustit do výpočtu hledané práce. V našem případě je úhel  $\alpha$  roven  $30^\circ$ , jak jednoduše stanovíme z obrázku ( $\sin \alpha = \frac{0,5}{1}$ ). Dosadíme nyní do vztahu pro skalární součin vektoru síly a dráhy:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha = 500 \cdot 6 \cos 30^\circ = 2600 \text{ J} .$$

Výsledek nám vyšel v joulech, v jednotce soustavy SI pro práci, protože jsme dosazovali hodnoty pro velikost síly i dráhy také v jednotkách patřících do soustavy SI..



**U1.1.2-8.** Vypočítejte skalární součin dvou vektorů  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  ve dvou extrémních případech:

- a) vektory jsou rovnoběžné  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
- b) vektory jsou na sebe kolmé  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

► **Vektorový součin dvou vektorů.** Násobíme-li vektorově vektor  $\mathbf{A}$  vektorem  $\mathbf{B}$ , je výsledkem tohoto součinu vektor  $\mathbf{D}$ .

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}).$$

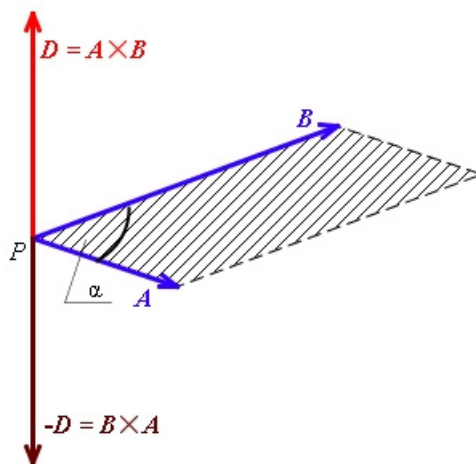
V tomto zápisu si všimněte symbolu pro vektorový součin „ $\times$ “. Důležité je, že si musíme dát pozor i na pořadí vektorů. Vyměníme-li v součinu pořadí obou vektorů, dostaneme sice vektor stejné velikosti, ale opačné orientace.

Výsledný vektor  $\mathbf{D}$  je kolmý na rovinu tvořenou vektory  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ . Je tedy kolmý jak na vektor  $\mathbf{A}$ , tak na vektor  $\mathbf{B}$ .

Pro praktické fyzikální výpočty nám často dostačuje znát velikost vektoru vzniklého jako vektorový součin. Tuto velikost vypočítáme jako součin velikostí obou vektorů a sinu úhlu jimi sevřeného:

$$D = A B \sin \alpha$$

Jedná se vlastně o plochu rovnoběžníka vymezeného násobenými vektory. Názorně je vektorový součin a jeho výsledek vidět na obrázku, viz. obr. 1.1-16.



obr. 1.1-16



**U1.1.2-9.** Stanovte vektorový součin dvou vektorů  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  ve dvou extrémních případech:

- a) vektory jsou rovnoběžné  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
- b) vektory jsou na sebe kolmé  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

## 1.2 Kinematika hmotného bodu

Po této přípravě už můžeme začít s první kapitolou, kinematikou. Tato část fyziky se zabývá **popisem pohybu těles**, aniž by se ptala proč k pohybu dochází. Jak je ve fyzice častým zvykem, budeme studovat ne pohyb konkrétního objektu, tělesa, ale budeme sledovat pohyb hmotného bodu. Situaci tím zjednodušujeme, nahrazujeme reálné těleso modelem - hmotným bodem.

### 1.2.1 Hmotný bod, mechanický pohyb



1. Umět vysvětlit pojem hmotného bodu.
2. Uvést konkrétní příklady, kdy těleso lze nahradit hmotným bodem.
3. Znat definici vztažné soustavy, umět ji zvolit v konkrétním případě.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 10 minut



**Hmotný bod** je myšlený bodový objekt, kterým nahrazujeme skutečné těleso. Hmotný bod má stejnou hmotnost jako těleso a představujeme si ho umístěný do jeho těžiště.

Toto zjednodušení lze použít, jsou-li rozměry tělesa zanedbatelné vůči vzdálenostem po kterých se pohybuje. Jedoucí auto vzhledem ke kilometrovým vzdálenostem, letící kámen, nebo dítě na řetízkovém kolotoči lze přibližně považovat za hmotné body.

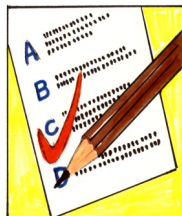
Příklady na hmotný bod v předchozím odstavci vždy ukazovaly těleso v pohybu. Zastavme auto. Jeho poloha se nemění vůči okolí. Říkáme, že objekt je v klidu. Ale auto se přesto pohybuje spolu se Zemí – otáčí se s ní, pohybuje se s ní vůči Slunci atp. **Klid těles je vždy relativní, absolutní klid neexistuje.** Označíme-li těleso za klidné, musíme vždy uvést, vzhledem k čemu je v klidu.

Stejný problém je i s pohybem. Auto jede po silnici devadesátikilometrovou rychlostí. To je rychlost vůči silnici. Ale sledujeme-li jeho rychlost například vůči Slunci, musíme ještě přidat rychlost pohybu Země atd. Z této úvahy opět vyplývá závěr, že **pohyb těles je také vždy relativní.**



Vidíme, že popis klidu i pohybu vždy závisí na tom, k jakým tělesům jej vztahujeme. Volíme tedy soustavu těles, ke kterým vztahujeme pohyb nebo klid sledovaného tělesa - volíme tzv. **vztažnou soustavu**.

Nejčastěji vztahujeme pohyb k povrchu Země. Ale nemusí tomu tak být vždy. Například jdeme-li uličkou v jedoucím vlaku, pak může být vztažnou soustavou vagon, nebo povrch Země.



**KO1.2.1-1.** Které z uvedených těles můžeme považovat za hmotný bod? Míč vystřelený na branku, míč v rukou brankáře, běžící závodník při dálkovém běhu, rotující kulička na stole, umělá družice Země.

**KO1.2.1-2.** Co znamená, že klid a pohyb jsou relativní?

**KO1.2.1-3.** Sedíte v jedoucím autě. Jste v klidu nebo v pohybu? Uvažujte dvě různé vztažné soustavy.

## 1.2.2 Polohový vektor, trajektorie, dráha



1. Umět zapsat polohu hmotného bodu pomocí pravoúhlé soustavy souřadnic.
2. Určit polohu hmotného bodu pomocí polohového vektoru, umět vypočítat jeho velikost a směr.
3. Definovat pojmy dráha a trajektorie.
4. Rozlišovat podle tvaru trajektorie přímočaré a křivočaré pohyby.

5. Zakreslit do grafu závislost dráhy na čase.



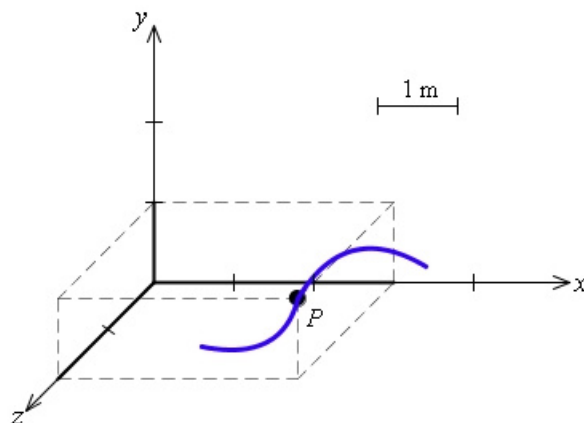
Odhadovaný čas nutný ke studiu je 30 minut.



Vektorový počet.

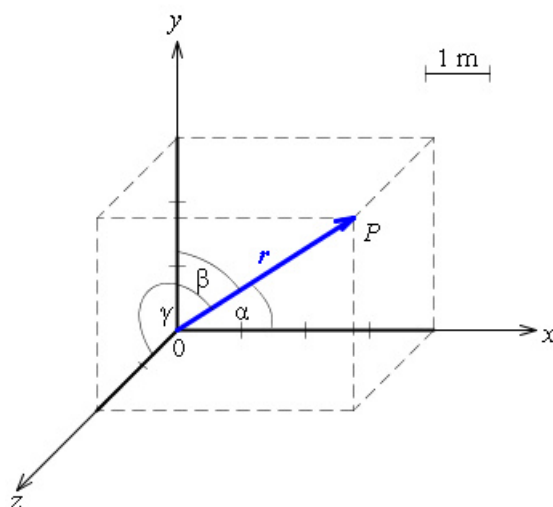


Popisujeme-li mechanický pohyb hmotného bodu vzhledem ke zvolené vztažné soustavě, musíme určit jeho polohu v libovolném čase. Nejjednodušší je určit polohu pomocí **pravouhlé soustavy souřadnic**  $Oxyz$ . Na obrázku stanovujeme polohu bodu  $P$ , třeba umístění vázy na stole v místnosti, viz. obr. 1.2-1. Souřadnou soustavu spojíme s místností, počátek souřadnic  $O$  umístíme do jednoho spodního rohu místnosti. Osami  $x$ ,  $y$ ,  $z$  jsou z tohoto rohu vybíhající rohy stěn. Poloha našeho hmotného bodu – vázy je určena souřadnicemi  $x = 3\text{ m}$ ,  $y = 1\text{ m}$ ,  $z = 2\text{ m}$ . Zkráceně zapisujeme tuto polohu jako  $P = [3\text{ m}, 1\text{ m}, 2\text{ m}]$ .



obr. 1.2-1

Polohu hmotného bodu můžeme určit také pomocí **polohového vektoru**  $\mathbf{r}$ . Polohový vektor je vektor s počátkem v bodě  $O$  souřadnicové soustavy a s koncovým bodem ve vyšetřovaném bodě  $P$ , viz. obr. 1.2-2.



obr. 1.2-2

Souřadnice polohového vektoru jsou totožné se souřadnicemi hmotného bodu  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Vektor  $\mathbf{r}$  tak můžeme zapsat jako  $\mathbf{r}(x, y, z)$ . Jeho velikost je dána vztahem :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

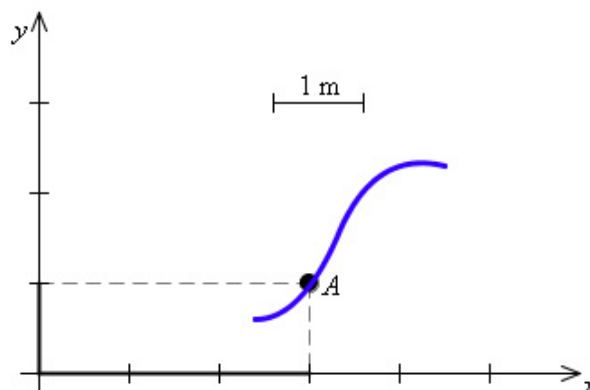
jeho směr je pak určen úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ , a  $\gamma$ , které polohový vektor svírá s osami souřadnic.



*pomocí polohového vektoru, určete jeho velikost a směr.*

**U1.2.2-4.** Na obrázku, viz. obr. 1.2-3, je znázorněna poloha bodu  $A$  ležícího v rovině.

*Zapište jeho polohu*



obr. 1.2-3



Pohybuje-li se hmotný bod, opisuje v prostoru pomyslnou souvislou čáru, kterou nazýváme **trajektorie hmotného bodu**.

**Trajektorie** je množina všech poloh, kterými hmotný bod při svém pohybu prochází.

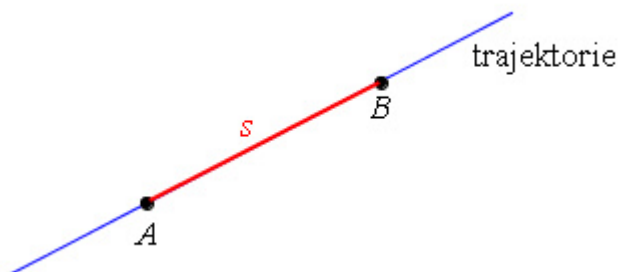
Podle tvaru trajektorie rozlišujeme **pohyby**:

- **přímočaré** – trajektorií je část přímky,
- **křivočaré** – trajektorií je křivka nebo její část (kružnice, parabola, elipsa nebo libovolná prostorová křivka).

Podle tvaru trajektorie usuzujeme na druh pohybu. Nás však také zajímá délka trajektorie – dráha.

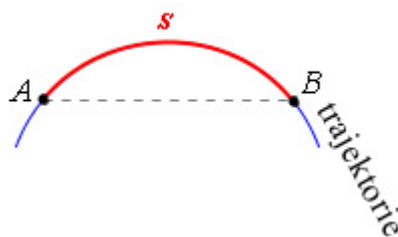
Délka  $s$  trajektorie, kterou hmotný bod opíše za čas  $t$ , se nazývá **dráha**. Dráha je fyzikální veličina, kterou uvádíme v jednotkách délky.

Na obrázku, viz. obr. 1.2-4, se pohybuje hmotný bod po přímočaré trajektorii z bodu  $A$  do bodu  $B$ . V tomto případě je délka trajektorie – dráha  $s$  rovna vzdálenosti bodů  $A$  a  $B$ .



obr. 1.2-4

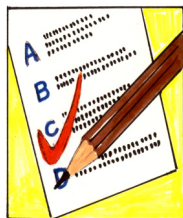
Na druhém obrázku, viz. obr. 1.2-5, se hmotný bod pohybuje po křivočaré trajektorii. Nyní musíme měřit dráhu  $s$  podél celé křivky od bodu  $A$  do bodu  $B$ .



obr. 1.2-5

Jak se hmotný bod pohybuje po své trajektorii, plyne čas. S rostoucím časem se zvětšuje dráha, kterou hmotný bod urazil. Říkáme, že **dráha  $s$  je funkcí času  $t$** . Tuto závislost dráhy na čase zapisujeme výrazem  $s = s(t)$ .

Je výhodné si tuto závislost zakreslovat do grafu. Na  $x$  osu nanášíme čas  $t$ , na osu  $y$  uraženou dráhu  $s$ .



**KO1.2.2-5.** *Jak rozdělujeme pohyby podle trajektorie?*

**KO1.2.2-6.** *Určete podle tvaru trajektorie jaký pohyb koná: vržený oštěp, padající list ze stromu, lokomotiva na přímé trati, sprinter na trati 100 m a 200 m, umělá družice Země, celá Země.*

**KO1.2.2-7.** *Jakou trajektorii opisuje jehla gramofonové přenosky vzhledem: ke skříni gramofonu, k přenosce, otáčející se gramofonové desce?*



**U1.2.2-8.** Běžec uběhl v každé sekundě dráhu 7 m. *Jakou dráhu uběhl za dobu 5 s, 10 s?*

**U1.2.2-9.** Hmotný bod se pohybuje z jednoho místa do druhého a) po přímce, b) po části kružnice. *Ve kterém případě urazí větší dráhu?*

**U1.2.2-10.** *Zakreslete do grafu závislost uražené dráhy na čase auta jedoucího stále stejnou rychlostí 60 km/hod. Jaký bude mít tvar vzniklá křivka? Viz. obr. 1.2-6.*

## 1.2.3 Rychlost hmotného bodu



1. Umět definovat průměrnou rychlost a znát matematický zápis této definice.
2. Řešit úlohy použitím daného vztahu.
3. Klasifikovat pohyby podle rychlosti.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 20 minut



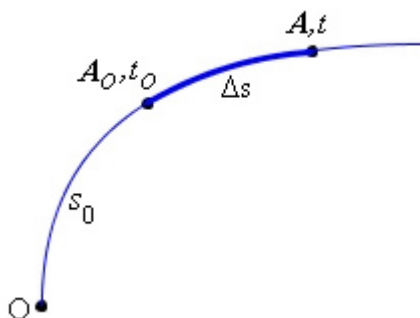
## Dráha hmotného bodu



Prozatím jsme u pohybu hmotného bodu vyšetřovali pouze jeho dráhu. Teď se budeme zabývat druhou veličinou charakterizující pohyb – rychlostí.

Hmotný bod se může pohybovat „pomaleji“ nebo „rychleji“. Cyklista urazí stejnou dráhu jako chodec, ale za různý čas. O cyklistovi, který potřebuje k urazení stejné dráhy kratší čas říkáme, že je rychlejší, nebo má větší rychlost.

Při definování rychlosti vyjdeme z obrázku, viz. obr. 1.2-7. Chceme stanovit rychlost hmotného bodu mezi body trajektorie  $A_o$  a  $A$ . Než se hmotný bod v čase  $t_o$  dostal do bodu  $A_o$ , urazil od počátku  $O$  dráhu  $s_o$ . Označme dráhu od počátku k bodu  $A$  jako  $s$ . Sem se hmotný bod dostane za čas  $t$ . Nás bude zajímat rychlost, se kterou se hmotný bod pohybuje v úseku (intervalu) dráhy  $\Delta s = s - s_o$ . K urazení tohoto úseku dráhy potřebuje čas  $\Delta t = t - t_o$ .



obr. 1.2-7

**Průměrná rychlost** hmotného bodu je podíl jeho dráhy  $\Delta s$  a odpovídající doby pohybu  $\Delta t$ .

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_o}{t - t_o}.$$

Jednotkou rychlosti v soustavě SI je metr za sekundu tj.  $\text{m/s} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Běžně se používá také vedlejší jednotka  $\text{km/h}$ .



**U1.2.3-11.** Automobil jede průměrnou rychlostí  $90 \text{ km/h}$ . Vyjádřete tuto rychlost pomocí jednotek SI.

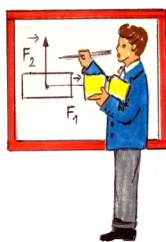


Vypočítám-li si po ujetí jisté vzdálenosti autem průměrnou rychlost, neznamená to, že v každém okamžiku jízdy ukazuje tachometr tuto rychlost. Tento přístroj totiž měří dráhu, kterou auto ujede za velice krátký

čas  $\Delta t$  a ukazuje nám velikost tak zvané **okamžité rychlosti**. Velikost okamžité rychlosti i její směr (jedná se totiž o vektor) se naučíte počítat až se znalostí diferenciálního počtu.

Podle rychlosti si můžeme rozdělit pohyby do dvou skupin:

- **rovnoměrný pohyb.** U tohoto pohybu urazí hmotný bod ve stejných časových intervalech stejné dráhy. Jeho rychlost se během pohybu nemění, je konstantní.
- **nerovnoměrný pohyb.** U nerovnoměrného pohybu se rychlost mění během pohybu, není konstantní.



Automobil projede první třetinu dráhy  $s$  se stálou rychlostí o velikosti  $v_1$ , další dvě třetiny dráhy stálou rychlostí o velikosti  $v_2 = 72 \text{ km/h}$ . Jeho průměrná rychlost byla  $v = 36 \text{ km/h}$ . Určete velikost rychlosti  $v_1$ .

Prvou třetinu dráhy  $s_1 = s/3$  projel automobil za dobu  $t_1 = s_1/v_1 = s/3v_1$ , druhé dvě třetiny dráhy  $s_2 = 2s/3$  za dobu  $t_2 = s_2/v_2 = 2s/3v_2$ , celou dráhu za čas  $t = t_1 + t_2$ , kde  $t = s/v$ .

Po dosazení do vztahu pro celkový čas  $t$  dostáváme výraz  $s/v = s/3v_1 + 2s/3v_2$  a odtud pro velikost rychlosti  $v_1 = v v_2 / (3v_2 - 2v)$ .

Převědeme nyní rychlosti vyjádřené v km/h na jednotky m/s a dosadíme do vztahu pro  $v_1 = 10.20 / (3 \cdot 20 - 2 \cdot 10) = \underline{5 \text{ m/s}}$ .

Velikost rychlosti automobilu v první třetině dráhy byla 5 m/s, tj. 18 km/h.



**U1.2.3-12.** Tachometr automobilu ukazoval po dobu 5 min stálou rychlostí 60 km/h. *Jakou dráhu automobil ujel?*

**U1.2.3-13.** *Za jakou dobu ujede cyklista dráhu 18 km, jede-li stálou rychlostí 30 km/h?*

## 1.2.4 Zrychlení hmotného bodu



1. Umět definovat zrychlení a znát matematický zápis této definice.
2. Rozlišovat průměrné a okamžité zrychlení.
3. Rozložit celkové zrychlení křivočarého pohybu na tečné a normálové zrychlení.
4. Klasifikovat pohyby podle zrychlení.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 30 minut.





Dráha hmotného bodu, rychlost hmotného bodu.



V kapitole o rychlosti jsme si dělali pohyby na rovnoměrné a nerovnoměrné. Pro rovnoměrné pohyby bylo charakteristické, že jejich rychlost byla konstantní. U nerovnoměrných pohybů se rychlost během pohybu mění. **Změnu rychlosti za jednotku času** označujeme jako **zrychlení**. Je to po dráze a rychlosti třetí veličina charakterizující mechanický pohyb z pohledu kinematiky.

Změní-li se rychlost hmotného bodu z hodnoty  $v_o$  v čase  $t_o$  na hodnotu  $v$  v čase  $t$ , pak tuto změnu zapisujeme výrazem  $\Delta v = v - v_o$ . K této změně došlo v časovém intervalu  $\Delta t = t - t_o$ . Pomocí těchto změn můžeme definovat zrychlení hmotného bodu.

**Zrychlení  $a$**  je podíl změny rychlosti  $\Delta v$  a doby  $\Delta t$ , za kterou k této změně dojde.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{t - t_o}.$$

Jednotkou zrychlení v soustavě SI je metr za sekundu na druhou, tj.  $\text{m/s}^2 = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

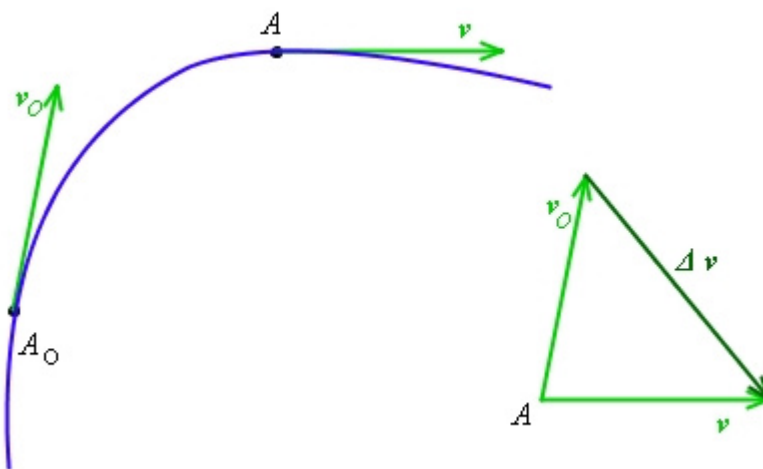
Tímto vztahem je definováno **průměrné zrychlení**. Zkrátíme-li dobu  $\Delta t$ , ve které určujeme zrychlení, na velmi malou hodnotu blíží se nule, pak vztah nám definuje **okamžité zrychlení**.

V definičním vztahu pro zrychlení jsme si vyjadřovali pouze velikost zrychlení. **Zrychlení je** totiž podobně jako rychlost **vektorová veličina**. Úplná definice zrychlení totiž zní:

**Zrychlení  $a$  je vektor vyjadřující časovou změnu vektoru rychlosti, tj. změnu velikosti i směru vektoru rychlosti.**

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{t - t_o}, \text{ kde } \Delta t = t - t_o \text{ je velmi malé.}$$

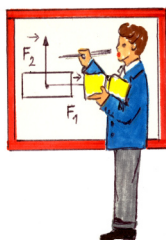
Změna směru vektoru rychlosti se nejlépe ukazuje na křivočarém pohybu. Podívejte se na obrázky, viz. obr. 1.2-8. Na levém obrázku vidíte jak se na obloukové trajektorii mění směr vektoru rychlosti  $\vec{v}$  i když jeho velikost se



obr. 1.2-8



nemění. **Vektor rychlosti má totiž směr tečny k trajektorii.** V pravé části obrázku je pak znázorněn odpovídající vektor **změny rychlosti  $\Delta v$** .



*Určete směr vektoru zrychlení v předchozím obrázku. Zakreslete vektor zrychlení do pravé části obrázku (do vektorového trojúhelníku).*

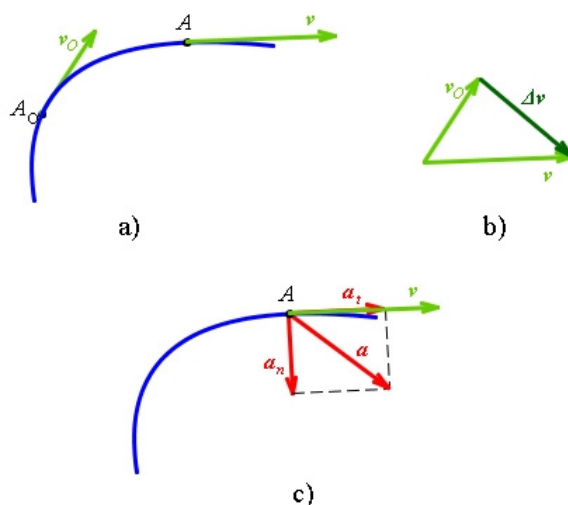
Nejdříve si zkuste úlohu vyřešit samostatně a své řešení si ověřte v následujících řádcích.

Nic nemusíte kreslit. Vektor zrychlení  $a$  bude mít totiž směr vektoru změny rychlosti  $\Delta v$ , bude mít jenom jinou velikost. Zdůvodnění je jednoduché. Vyjdeme z definičního vztahu  $a = \Delta v / \Delta t$  a vzpomene si, co jsme se naučili o násobení vektoru skalárem. V našem případě násobíme vektor  $\Delta v$  reálným číslem  $\frac{1}{\Delta t}$ . A jak jistě víte, výsledkem tohoto násobení je vektor stejného směru jako má násobený ( $\Delta v$ ), pouze jiné velikosti.



Teď se podívejme na další obdobný obrázek pro křivočarý pohyb, ale v něm se nám mění směr i velikost vektoru rychlosti, viz. obr. 1.2-9.

Na obrázku a) jsou zakresleny vektory rychlosti v bodech  $A_0$  a  $A$ . Na obrázku vidíme vektorový trojúhelník určující rozdíl obou vektorů rychlosti  $\Delta v$ . Na třetím obrázku c) je znázorněn vektor zrychlení  $a$  pohybu hmotného bodu po křivce. Tento vektor jsme si rozložili do dvou vzájemně kolmých směrů:



obr. 1.2-9

Do směru tečného k trajektorii. Složku vektoru  $a$  v tomto směru jsme označili  $a_t$ . Toto tak zvané **tečné zrychlení vyjadřuje změnu velikosti rychlosti hmotného bodu.**

Do směru normály k trajektorii. Složku vektoru  $a$  v tomto směru jsme označili  $a_n$ . Toto tak zvané **normálové zrychlení vyjadřuje změnu směru rychlosti hmotného bodu.**

Podle pravidel vektorového počtu je **celkové zrychlení  $a$**  dáno vektorovým součtem tečného a normálového zrychlení:

$$a = a_t + a_n$$

Velikost celkového zrychlení můžeme vypočítat jestliže známe velikost tečného a normálového zrychlení pomocí Pythagorovy věty:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



**U1.2.4-14.** Stanovte velikost normálového a tečného zrychlení přímočarého pohybu. Celkové zrychlení tohoto pohybu je  $5 \text{ m.s}^{-2}$ .



Obdobně jak jsme rozlišovali pohyby na rovnoměrný a nerovnoměrný pomocí rychlosti, můžeme využít i zrychlení ke klasifikaci pohybů:

**Rovnoměrný pohyb.** Tečné zrychlení tohoto pohybu je nulové  $a_t = 0$ .

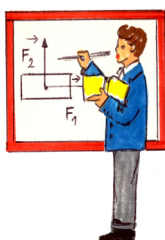
**Rovnoměrně zrychlený pohyb.** Tečné zrychlení tohoto pohybu je konstantní  $a_t = \text{konst.}$ , a je kladné ( $a_t > 0$ ).

**Rovnoměrně zpomalený pohyb.** Tečné zrychlení tohoto pohybu je konstantní  $a_t = \text{konst.}$ , ale je záporné ( $a_t < 0$ ).

**Nerovnoměrný pohyb.** Tečné zrychlení se během pohybu mění  $a_t \neq \text{konst.}$

**Přímocharý pohyb.** Normálové zrychlení je nulové  $a_n = 0$ , tečné zrychlení je rovno celkovému zrychlení  $a_t = a$ .

**Křivocharý pohyb.** Normálové zrychlení je různé od nuly  $a_n \neq 0$ .



Automobil jede rychlostí  $36 \text{ km/h}$ . V určitém okamžiku řidič „šlápne na plyn“ a během doby  $30 \text{ s}$  zvětší rychlost na  $90 \text{ km/h}$ . *Určete průměrné zrychlení automobilu.*

Nejdříve převedeme všechny jednotky do soustavy SI. Počáteční rychlost  $v_o = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$ , konečná rychlost  $v = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$ .

Vyjdeme ze vztahu pro zrychlení, kde za  $\Delta v$  dosadíme  $v - v_o$ , za  $\Delta t$  dobu zrychlování  $t$  a dostaneme

$$a = (v - v_o)/t = (25 - 10)/30 = \underline{0,5 \text{ m/s}^2}$$

Automobil jede s průměrným zrychlením  $0,5 \text{ m/s}^2$

## 1.2.5 Přímocharý pohyb hmotného bodu

V této kapitole využijeme toho, co jsme se naučili o dráze, rychlosti a zrychlení k řešení pohybu hmotného bodu po přímkové trajektorii. Začneme nejjednodušším případem tj.

rovnoměrným pohybem, přejdeme na pohyb rovnoměrně zrychlený a ukončíme obecným nerovnoměrným pohybem.

Vždy nás budou zajímat tři veličiny: zrychlení, rychlost a dráha daného pohybu.

Důležité je, že všechny přímočaré pohyby lze charakterizovat tím, že jejich **normálové zrychlení je rovno nule**.



1. Rozlišovat druhy přímočarých pohybů pomocí jejich zrychlení a rychlosti.
2. Umět si odvodit u rovnoměrného a rovnoměrně zrychleného pohybu vztahy pro jejich rychlost a uraženou dráhu.
3. Graficky znázornit u těchto pohybů závislost zrychlení, rychlosti a dráhy na čase.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 30 minut.

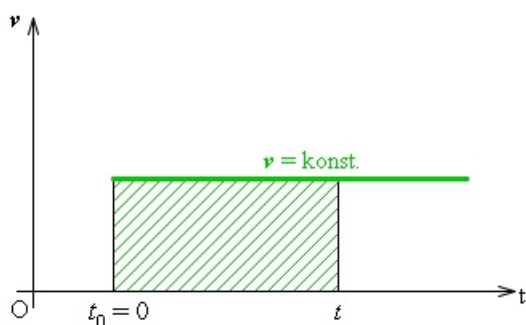


Dráha hmotného bodu, rychlost hmotného bodu, zrychlení hmotného bodu.

### 1.2.5.1 Rovnoměrný přímočarý pohyb.

Pro rovnoměrný přímočarý pohyb je charakteristické, že **zrychlení je rovno nule,  $a = 0$ . Rychlost je konstantní,  $v = \text{konst.}$ , jak její velikost, tak její směr.**

Názorné je vynést si závislost rychlosti na čase  $v = v(t)$  do grafu, viz. obr. 1.2-10. Vidíme, že grafem této závislosti je část přímky rovnoběžné s časovou osou. K vyšrafované ploše se vrátíme za chvíli.



obr. 1.2-10

Tedy nám zbývá stanovit dráhu, známe-li rychlost pohybu. Není třeba si pamatovat další vzorec, odvodíme si ho. Vyjdeme z definičního vztahu pro rychlost  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_o}{t - t_o}$ . Do tohoto vztahu dosadíme za interval dráhy  $\Delta s$  konečnou dráhu  $s$  (ta nás zajímá) a počáteční hodnotu dráhy  $s_o$  (dráhu, kterou hmotný bod urazil od počátku měření času). Do intervalu času  $\Delta t$  dosadíme čas  $t$  ve kterém hledáme velikost uražené dráhy. Počáteční čas  $t_o$  bude roven nule – začínáme teprve nyní pohyb sledovat. Dostaneme tak vztah:

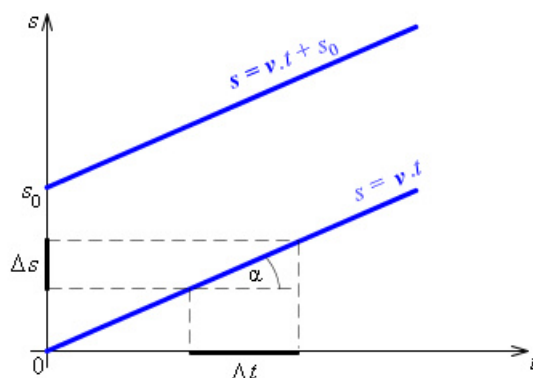
$$v = \frac{s - s_o}{t - 0}, \text{ ze kterého si vyjádříme hledanou dráhu } s:$$

$$s = v t + s_o$$

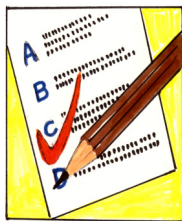
Vzorec nám vyjadřuje velikost dráhy uražené hmotným bodem za čas  $t$ . Hmotný bod se pohybuje konstantní rychlostí  $v$ . Člen  $s_o$  nám říká, že před sledováním pohybu už hmotný bod urazil dráhu  $s_o$ .

Vrátíme-li se ke grafu závislosti  $v = v(t)$ , vidíme, že vyšrafovaná plocha vyjadřuje velikost uražené dráhy  $s$  v čase  $t$  konstantní rychlostí  $v$ .

A ještě jeden graf je užitečný. Vyneseme si do grafu závislost dráhy na čase  $s = v t + s_o$ , viz. obr. 1.2-11. Horní přímka odpovídá dané závislosti, spodní přímka je pro zjednodušený případ, kdy počáteční dráha je nulová ( $s = v t$ ). Z grafu vidíme, že dráha roste přímo úměrně s časem, konstantou úměrnosti je rychlost. Tuto rychlost můžeme z grafu stanovit jako směrnici obou přímek  $k = \tan \alpha = \Delta s / \Delta t$ .



obr. 1.2-11



**KO1.2.5-15.** *U rovnoměrného pohybu přímočarého*

- a) dochází jen ke změně velikosti vektoru rychlosti
- b) dochází jen ke změně směru vektoru rychlosti
- c) dochází ke změně jak směru tak i velikosti vektoru rychlosti
- d) vektor rychlosti je konstantní co do směru i velikosti

**KO1.2.5-16.** *Zrychlení pohybu rovnoměrného přímočarého je*

- a) libovolné
- b) konstantní, různé od nuly
- c) stále nulové

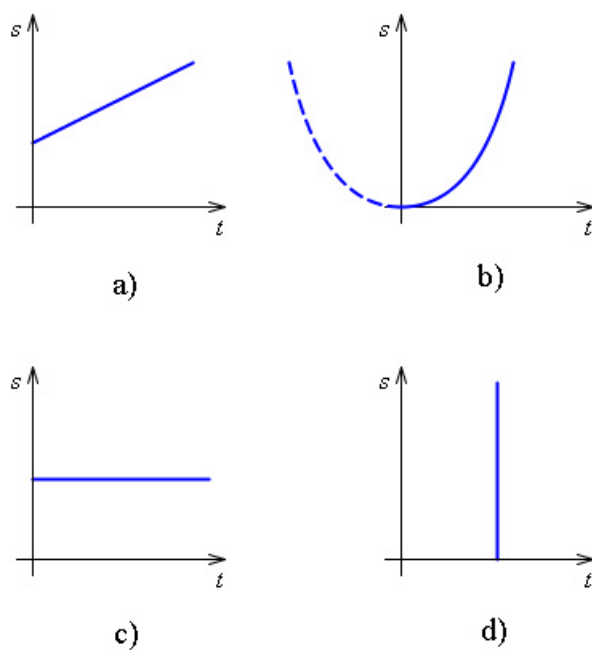
**KO1.2.5-17.** *U pohybu rovnoměrného přímočarého je*

- a) dráha i rychlost lineární funkcí času
- b) dráha lineární funkcí času a rychlost konstantou
- c) dráha kvadratickou a rychlost lineární funkcí času
- d) dráha i rychlost konstantní, nezávislé na čase

**KO1.2.5-18.** Hmotný bod se pohybuje po přímce tak, že jeho dráhu lze vyjádřit rovnicí:  $s = 5t + 1$ . *O jaký pohyb se jedná?*

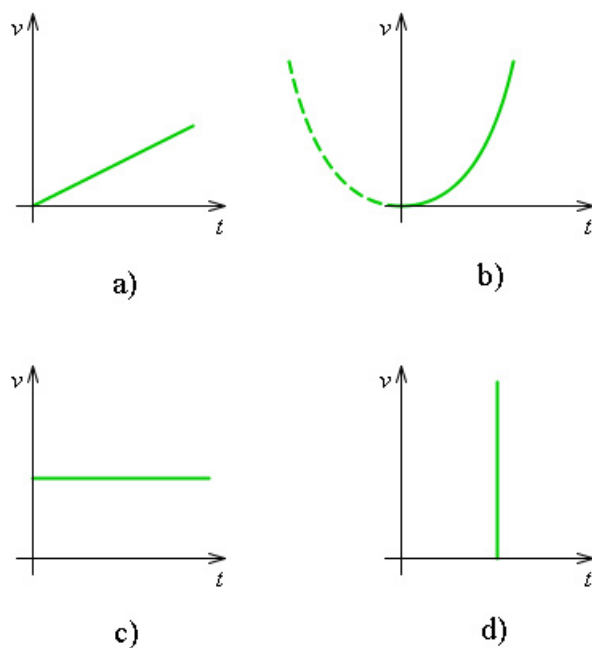
- a) rovnoměrný
- b) zrychlený
- c) rovnoměrně zrychlený
- d) nelze rozhodnout

**KO1.2.5-19.** Hmotný bod se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. *Který z grafů představuje závislost dráhy na čase?, viz. obr. 1.2-12.*



obr. 1.2-12

**KO1.2.5-20.** Hmotný bod se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. *Který z grafů představuje závislost rychlosti na čase ? viz. obr. 1.2-13.*



obr. 1.2-13



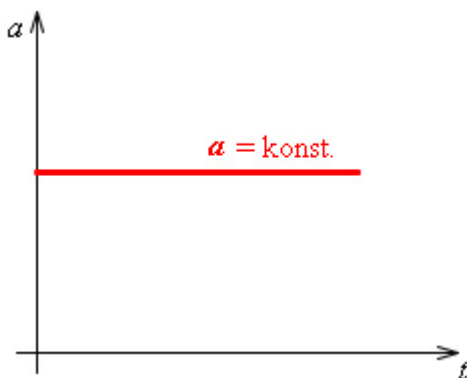
**U1.2.5-21.** Hmotný bod urazí dráhu 10 m za 5 s pohybem rovnoměrným přímočarým. *Jakou se pohybuje rychlostí ?*

**U1.2.5-22.** Hmotný bod se pohybuje po přímce tak, že jeho dráhu lze vyjádřit rovnicí:  $s = 6t + 1$  (m,s). *Určete jeho rychlost. Co znamená číslo 1?*

### 1.2.5.2 Rovnoměrně zrychlený (zpomalený) přímočarý pohyb.

Pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb je charakteristické, že **zrychlení je konstantní,  $a = \text{konst.}$** , nemění se ani jeho velikost ani jeho směr.

Pokud si sestrojíme graf závislosti zrychlení na čase dostaneme polopřímku rovnoběžnou s časovou osou, viz. obr. 1.2-14.



obr. 1.2-14

Jak je to s rychlostí zrychleného pohybu? Zase si ji odvodíme. Vyjdeme z definičního vztahu

pro zrychlení  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{t - t_o}$ . Jestliže v čase  $t_o = 0$  je počáteční rychlost rovna  $v_o$ , pak vztah pro velikost zrychlení bude :

$$a = \frac{v - v_o}{t - 0} = \frac{v - v_o}{t}$$

Z něj si vyjádříme hledanou **rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu**:

$$v = a t + v_o$$

V nadpisu této kapitoly je uvedeno, že budeme hovořit o rovnoměrně zrychleném nebo zpomaleném pohybu. Nejedná se o dva zásadně odlišné pohyby. Jediný rozdíl je v tom, že **u rovnoměrně zrychleného pohybu je zrychlení kladné  $a > 0$** , rychlost hmotného bodu roste a **u rovnoměrně zpomaleného pohybu je zrychlení záporné  $a < 0$** , rychlost hmotného bodu se zmenšuje.



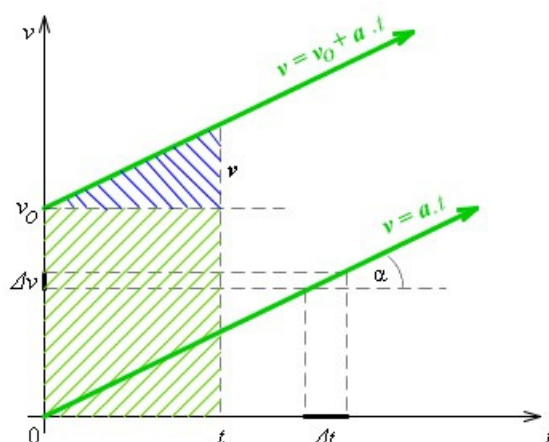
**U1.2.5-23.** Napište vztah pro rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu.



Opět je výhodné znázornit si v grafu závislost rychlosti na čase  $v = v(t)$ , viz. obr. 1.2-15. Z grafu vyčteme celou řadu užitečných informací. Za prvé je vidět, že na začátku sledování pohybu (čas  $t_o = 0$ ) se hmotný bod pohyboval rychlostí  $v_o$ . Za druhé můžeme ze směrnice obou přímek  $k = \tan \alpha = \Delta v / \Delta t$  určit velikost zrychlení  $a$ . A konečně z vyšrafovaných ploch



určíme dráhu pohybu. Zelená plocha vyjadřuje dráhu  $s_o = v_o t$ , kterou by hmotný bod urazil kdyby se pohyboval po čas  $t$  pouze pohybem rovnoměrným počáteční rychlostí  $v_o$ . Ale jemu se rychlost během času  $t$  zvětšuje a tomu odpovídá zvětšení uražené dráhy o modře vyšrafovanou plochu.



obr. 1.2-15

Velikost modře vyšrafované plochy odpovídající pohybu se zvětšující se rychlostí  $v = a t$  vyjádříme jako  $s = \frac{1}{2} v t = \frac{1}{2} a t t = \frac{1}{2} a t^2$ .

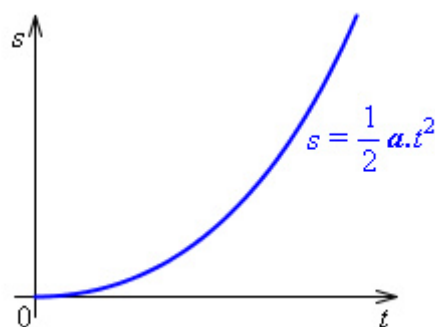
Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu při nenulové počáteční rychlosti bude dána vztahem:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_o t.$$

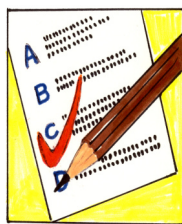
V případě, že hmotný bod urazil ještě před započítáním měření určitou dráhu  $s_o$ , pak **celková dráha rovnoměrně zrychleného pohybu** hmotného bodu v čase  $t$  bude dána vztahem:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_o t + s_o$$

Jako poslední graf této kapitoly si nakresleme závislost dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu na čase. Pro zjednodušení si vezmeme případ pohybu s nulovou počáteční rychlostí a nulovou počáteční dráhou. Zkuste si graf nakreslit nejdříve sami a ověřte si správnost řešení na obr. 1.2-16.

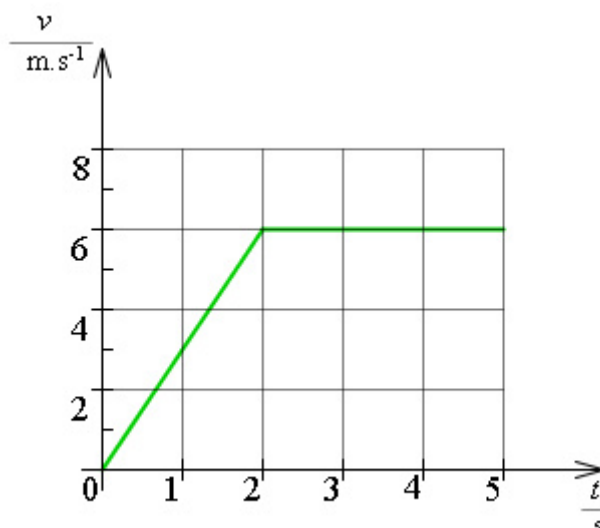


obr. 1.2-16



**KO1.2.5-24.** Hmotný bod koná přímočarý pohyb. Na obrázku obr. 1.2-17 je nakreslen graf závislosti velikosti rychlosti hmotného bodu na čase. Jak velké je zrychlení hmotného bodu během prvních dvou sekund pohybu?

- a)  $0,3 \text{ m.s}^{-2}$    b)  $3 \text{ m.s}^{-2}$    c)  $6 \text{ m.s}^{-2}$    d)  $12 \text{ m.s}^{-2}$



obr. 1.2-17

**KO1.2.5-25.** Hmotný bod koná přímočarý pohyb. Na obrázku je nakreslen graf závislosti velikosti rychlosti hmotného bodu na čase, viz. obr. 32. Jak velké je zrychlení hmotného bodu v čase  $t = 3 \text{ s}$ ?

- a)  $0 \text{ m.s}^{-2}$    b)  $0,2 \text{ m.s}^{-2}$    c)  $2 \text{ m.s}^{-2}$    d)  $6 \text{ m.s}^{-2}$

**KO1.2.5-26.** Automobil se rozjíždí rovnoměrně zrychleně po přímé silnici. Velikost zrychlení automobilu je  $2 \text{ m.s}^{-2}$ , jeho počáteční rychlost je nulová. Jak velká je rychlost automobilu za  $4 \text{ s}$  od začátku jeho pohybu?

- a)  $0,5 \text{ m.s}^{-1}$    b)  $2 \text{ m.s}^{-1}$    c)  $4 \text{ m.s}^{-1}$    d)  $8 \text{ m.s}^{-1}$

**KO1.2.5-27.** Automobil jede po přímé silnici rychlostí  $20 \text{ m.s}^{-1}$ . V určitém okamžiku začne řidič brzdit a automobil jede rovnoměrně zpomaleně. Jeho zrychlení má opačný směr než rychlost a má velikost  $4 \text{ m.s}^{-2}$ . Jak velká je rychlost automobilu po  $3 \text{ sekundách}$  jeho zpomaleného pohybu?

- a)  $5 \text{ m.s}^{-1}$    b)  $8 \text{ m.s}^{-1}$    c)  $12 \text{ m.s}^{-1}$    d)  $16 \text{ m.s}^{-1}$

**KO1.2.5-28.** Automobil jede po přímé silnici rychlostí  $20 \text{ m.s}^{-1}$ . V určitém okamžiku začne řidič brzdit a automobil jede rovnoměrně zpomaleně. Jeho zrychlení má opačný směr než rychlost a má velikost  $4 \text{ m.s}^{-2}$ . Jakou dráhu ujede automobil za první  $3 \text{ sekundy}$  zpomaleného pohybu?

- a)  $18 \text{ m}$    b)  $42 \text{ m}$    c)  $50 \text{ m}$    d)  $60 \text{ m}$



**U1.2.5-29.** Hmotný bod koná rovnoměrně zrychlený pohyb ve směru osy  $x$  se zrychlením o velikosti  $2 \text{ m.s}^{-2}$ , přičemž v čase  $t_0 = 0 \text{ s}$  se nachází v bodě o souřadnici  $x_0 = 5 \text{ m}$  a má rychlost o velikosti  $v_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$ .

a) Napište vztahy vyjadřující závislost rychlosti a dráhy hmotného bodu na čase.

b) Určete dobu, ve které má rychlost hmotného bodu velikost  $40 \text{ m.s}^{-1}$ .

c) Určete dobu, ve které má hmotný bod  $x$ -ovou souřadnici  $110 \text{ m}$ .

**U1.2.5-30.** Vlak se rozjíždí z klidu se stálým zrychlením o velikosti  $0,6 \text{ m.s}^{-2}$ . Za jakou dobu dosáhne rychlosti o velikosti  $20 \text{ m.s}^{-1}$ ? Jakou dráhu přitom ujede?

### 1.2.5.3 Volný pád.



Volný pád třeba upuštěného kamene z věže je vlastně rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb. Platí pro něj všechny vztahy jako pro tento druh pohybu. Protože jde o „volný“ pád (kámen pouze upustíme, nehodíme), je počáteční rychlost nulová  $v_0 = 0$ . Jeho zrychlení je rovno **tíhovému zrychlení  $g$** .

Pro dráhu  $s$  volně padajícího tělesa a jeho rychlost  $v$  v závislosti na čase tak platí vztahy:

$$v = g t, \quad s = \frac{1}{2} g t^2$$



**U1.2.5-31.** Z jaké výšky padalo těleso volným pádem, jestliže dopadlo na zem rychlostí  $82 \text{ km/h}$ ?

**U1.2.5-32.** Jak se změní velikost rychlosti volně padajícího tělesa během třetí sekundy pádu? Jakou dráhu těleso za tuto dobu urazí?

## 1.2.6 Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici

Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici, zkráceně rovnoměrný kruhový pohyb, je nejjednodušší případ křivočarého pohybu. **Jeho trajektorii je kružnice.** Takto se pohybuje například sedačka roztočeného řetízkového kolotoče, nebo ventilek stojícího jízdního kola otáčejícího se stálou rychlostí.



1. Vědět, že u rovnoměrného kruhového pohybu se mění směr rychlosti, ne však její velikost.
2. Vysvětlit pojem úhlová dráha a úhlová rychlost.
3. Umět určit úhlovou dráhu pomocí délky oblouku a poloměru kružnice.
4. Znat definiční vztah pro úhlovou rychlost.
5. Znat souvislost mezi obvodovou a úhlovou rychlostí.
6. Znat vztah mezi periodou a frekvencí, umět vyjádřit úhlovou rychlost pomocí těchto veličin.
7. Znat vztah pro velikost dostředivého zrychlení.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 30 minut.



Dráha hmotného bodu, rychlost hmotného bodu, zrychlení hmotného bodu.



Při vyšetřování rovnoměrného kruhového pohybu nás budou opět zajímat tři veličiny: zrychlení, rychlost a dráha.

Protože se jedná o křivočarý pohyb, nesmíme zapomenout na to, že celkové zrychlení bude mít dvě složky tečné a normálové zrychlení.

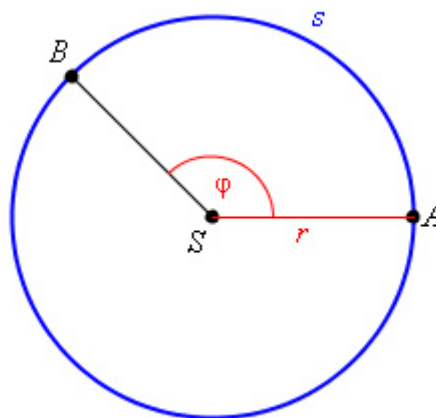
Složka ve směru tečném  $a_t$ , která rozhoduje o zrychlování či zpomalování pohybu je rovna nule, protože se jedná o rovnoměrný pohyb  $a_t = 0$ . Velikost rychlosti pohybujícího se hmotného bodu bude tedy konstantní  $v = \text{konst}$ .

Směr vektoru rychlosti se však v každém okamžiku mění. To způsobuje druhá složka zrychlení ve směru normály  $a_n$ . U kruhového pohybu se toto normálové zrychlení označuje jako **dostředivé zrychlení**  $a_d$ , protože v každém bodě kruhové dráhy směřuje do jejího středu. Velikost dostředivého zrychlení je dána vztahem:

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

kde  $v$  je velikost rychlosti (někdy označované jako obvodová rychlost) a  $r$  je poloměr opísané kružnice.

Pro popis pohybu po kružnici zavádíme některé další veličiny. Začneme dráhou. Vedle dráhy  $s$  jako délky oblouku používáme tzv. úhlovou dráhu, viz. obr. 1.2-18.



obr. 1.2-18

**Úhlová dráha**  $\varphi$  je středový úhel, který opíše průvodič  $r$  hmotného bodu za dobu  $t$ .

Úhlovou dráhu měříme v radiánech se značkou rad.  $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi \approx 57^\circ$



**U1.2.6-33.** Kolik radiánů je úhlová dráha celé kružnice?



Mezi přírůstkem úhlové dráhy  $\Delta\varphi$  a příslušnou změnou dráhy  $\Delta s$  platí vztah:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

nebo, jak jsme vyjadřovali u přímočarých pohybů,  $\varphi - \varphi_o = \frac{s - s_o}{r}$ . Opět  $s$  a  $\varphi$  vyjadřují konečné hodnoty dráhy resp. úhlové dráhy a  $s_o$  a  $\varphi_o$  hodnoty na počátku měření času ( $t = 0$ ).

Pomocí změny úhlové dráhy si můžeme definovat další veličinu typickou pro kruhový pohyb. Je to úhlová rychlost.

**Úhlová rychlost**  $\omega$  je podíl změny úhlové dráhy  $\Delta\varphi$  a odpovídající doby pohybu  $\Delta t$ .

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_o}{t - t_o}$$

Jednotkou úhlové rychlosti je radián za sekundu ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Dosadíme-li do posledního vztahu za  $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$  dostaneme výraz:

$\omega = \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{1}{r}$ . Podílem  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  jsme si dříve definovali rychlost  $v$ . Upravíme si vztah a dostaneme důležitou rovnici udávající souvislost mezi velikostí obvodové rychlosti  $v$  a úhlovou rychlostí  $\omega$ :

$$v = r \omega$$

Pohybuje-li se hmotný bod po kružnici, po jisté době opíše celou kružnici.

**Doba, za kterou hmotný bod opíše celou kružnici se označuje jako perioda  $T$ .**

Periodu, někdy nazývanou oběžná doba, vyjadřujeme ji jako každý jiný čas v sekundách.

A ještě jednu veličinu související s periodou si budeme definovat. Je to počet oběhů po kružnici za jednotku času tzv. **frekvence**  $f$ . Frekvenci vyjadřujeme v jednotkách  $1/\text{s} = \text{s}^{-1}$ . Tato jednotka se někdy označuje jako hertz (Hz). Obě posledně definované veličiny spolu souvisejí vztahem:

$$f = \frac{1}{T}$$

Pomocí frekvence a periody můžeme vyjádřit úhlovou rychlost. Vyjdeme z definičního vztahu pro úhlovou rychlost a dosadíme za úhlovou dráhu jedné otočky  $2\pi$  a za čas periodu. Dostaneme tak výraz:

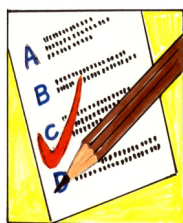
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

U námi sledovaného rovnoměrného pohybu po kružnici jsou perioda a frekvence konstantní. Takovýto pohyb, který se pravidelně opakuje se nazývá **pohyb periodický**. Periodickým pohybem se pohybuje například otáčející se setrvačnick, ale také pohyb kyvadla „pendlovek“, nebo rozkmitaná membrána reproduktoru jsou periodické pohyby.

Pravděpodobně jste si všimli, že vztahy definující rychlost  $v$  a úhlovou rychlost  $\omega$  jsou si podobné. V obou případech je definována rychlost jako změna dráhy za čas. Obdobných analogií mezi přímočarým pohybem a kruhovým pohybem je více.



**U1.2.6-34.** *Odvoďte vztah pro úhlovou dráhu rovnoměrného kruhového pohybu v závislosti na čase. Před započítím měření času urazil hmotný bod počáteční dráhu  $\varphi_0$ . Získaný vztah srovnejte se vztahem pro dráhu rovnoměrného přímočarého pohybu.*



**KO1.2.6-35.** *Kterými fyzikálními veličinami popisujeme pohyb hmotného bodu po kružnici?*

**KO1.2.6-36.** *Mění se rychlost hmotného bodu, který koná rovnoměrný pohyb po kružnici?*

**KO1.2.6-37.** *Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru 2 m s rychlostí stejné velikosti  $8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jak velká je úhlová rychlost hmotného bodu?*

- a)  $4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$    b)  $16 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$    c)  $32 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$    d)  $128 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$



**U1.2.6-38.** *Určete oběžnou dobu a frekvenci otáčení hodinové a minutové ručičky u hodinek.*

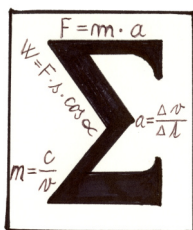
**U1.2.6-39.** *Automobil jede po přímé silnici stálou rychlostí velikosti 72 km/h. Jaká je oběžná doba kola automobilu o poloměru 0,5 m?*

**U1.2.6-40.** *Kotouč brusky koná 600 otáček za minutu. Určete jeho frekvenci, periodu a úhlovou rychlost.*

**U1.2.6-41.** *Kolotoč koná 15 otáček za minutu. Určete jeho úhlovou rychlost a rychlost osoby na sedačce, která opisuje kružnici o poloměru 5 m.*

**U1.2.6-42.** *Určete velikost rychlosti předmětů na povrchu Země: a) na rovníku, b) na  $60^\circ$  zeměpisné šířky, je-li poloměr Země 6 400 km. Viz. obr. 1.2-19.*





1. Kinematika popisuje mechanický pohyb, nezkoumá jeho příčinu. Mechanický pohyb je popsán dráhou, rychlostí a zrychlením.
2. **Trajektorie** je souhrn všech poloh, kterými pohybující se bod postupně prochází. Trajektorie je geometrická čára.
3. Polohu bodu určujeme pomocí **polohového vektoru**  $\mathbf{r}$ . Je to vektor mající působiště v počátku pravouhlé souřadné soustavy a s koncovým bodem ve vyšetřovaném bodě. Velikost polohového vektoru vyjádříme pomocí jeho složek  $x, y, z$  jako
 
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$
4. Délka trajektorie, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu, je **dráha**  $s$ . Jednotkou dráhy je metr.
5. Přírůstek dráhy  $\Delta s$  za čas  $\Delta t$  je **rychlost**  $v$ ,  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Jednotkou rychlosti je m/s.  
Rychlost je vektor, u přímočarých pohybů je její směr konstantní, u křivočarých pohybů změna směru rychlosti způsobí zakřivení trajektorie.
6. Změna rychlosti  $\Delta v$  za čas  $\Delta t$  je **zrychlení**  $a$ ,  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ . Jednotkou zrychlení je m/s<sup>2</sup>.  
Zrychlení je vektor, který rozkládáme do dvou složek,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$ .  $\mathbf{a}_t$  je **tečné zrychlení** a způsobuje změnu velikosti rychlosti.  $\mathbf{a}_n$  je **normálové zrychlení**, které způsobuje změnu směru rychlosti a je příčinou zakřivení trajektorie.
7. **Přímočarý pohyb** je charakterizován tím, že jeho **normálové zrychlení je rovno nule**.
  - U **přímočarého pohybu rovnoměrného** je **zrychlení nulové**, jeho rychlost je konstantní. Dráha tohoto pohybu je dána vztahem  $s = v t + s_o$ , kde  $s_o$  je počáteční dráha.
  - U **přímočarého pohybu rovnoměrně zrychleného** je **zrychlení konstantní**, rychlost rovnoměrně roste s časem  $v = a t + v_o$ ,  $v_o$  je počáteční rychlost. Dráhu vyjádříme jako  $s = \frac{1}{2} a t^2 + v_o t + s_o$ .
8. Pro **pohyb po kružnici** je charakteristické **konstantní normálové zrychlení**. Toto zrychlení se označuje jako dostředivé zrychlení a je dáno vztahem  $a_d = \frac{v^2}{r}$ .
9. U křivočarých pohybů zavádíme nové veličiny:
  - **Úhlovou dráhu**  $\varphi$  jako středový úhel, který opíše průvodič  $r$  za dobu  $t$ . Jednotkou je rad.



- **Úhlovou rychlost**  $\omega$  jako podíl změny úhlové dráhy a doby pohybu  $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ .  
Jednotkou je  $\text{rad.s}^{-1}$ . Úhlová rychlost a rychlost pohybu spolu souvisejí vztahem  $v = r \omega$ .
- **Frekvenci**  $f$  - počet oběhů po kružnici za jednotku času s jednotkou  $\text{s}^{-1}$ .
- **Periodu**  $T$  jako dobu jednoho oběhu vyjadřovanou v sekundách. Periodu je možné vyjádřit jako převrácenou hodnotu frekvence  $T = \frac{1}{f}$ . Obě poslední veličiny souvisejí s úhlovou rychlostí vztahem  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ .

## 1.3 Dynamika

V kapitole 1.2 Kinematika jsme se zabývali popisem pohybu těles, aniž bychom se zajímali o to proč k pohybu dochází. O příčině pohybu pojednává část mechaniky zvaná dynamika.

### 1.3.1 Síly



1. Definovat sílu jako vektorovou veličinu a znát její jednotku.
2. Vědět, že síla způsobuje změnu pohybu.
3. Rozlišovat působení síly přímým stykem a na dálku, uvést příklady.
4. Vysvětlit statický a dynamický účinek síly.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 15 minut



Lidé neznalí fyziky si myslí, že pohybuje-li se nějaké těleso, musí na něj působit síla. Ale vystřelený puk se však pohybuje po ledě pohybem rovnoměrným přímočarým a žádná síla na něj po vystřelení již nepůsobí. Kdyby nebylo tření a odporu vzduchu, pohyboval by se takto neomezeně dlouho. Tělesa uvedená do pohybu se pohybují rovnoměrně přímočaře **setrvačností**.

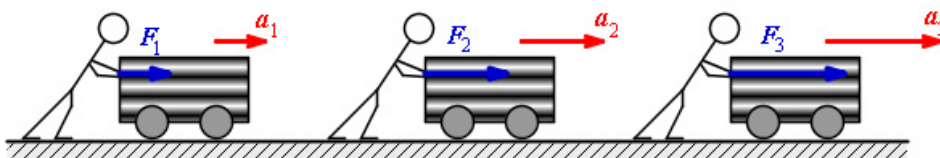
Aby se takto puk pohyboval, musíme jej nejdříve uvést z klidu do pohybu. A zde je role síly.

**Síla není příčinou pohybu, ale způsobuje změnu pohybového stavu.**

Působíme-li na těleso silou, uvádíme ho z klidu do pohybu nebo zrychlujeme jeho pohyb (měníme jeho pohybový stav). Silou také zpomalíme pohyb, nebo uvedeme těleso do klidu. Silou zakřívíme trajektorii jeho pohybu, můžeme jejím působením měnit tvar tělesa. Ale silou působí také magnet na kovový předmět, nebo Slunce na planety.

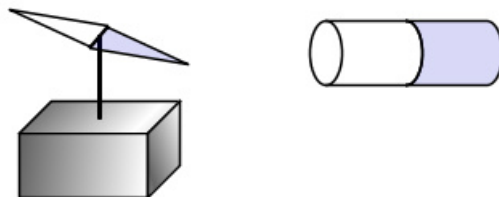
**Z uvedených příkladů silového působení vyplývá, že síla se projevuje vždy při vzájemném působení dvou těles, a že působení sil je dvojího druhu:**

- Vzájemné působení těles **přímým stykem** (hokejka vystřelující puk, ruka zdvihající břemeno, člověk tlačící vozík, viz. obr. 1.3-1.)



obr. 1.3-1

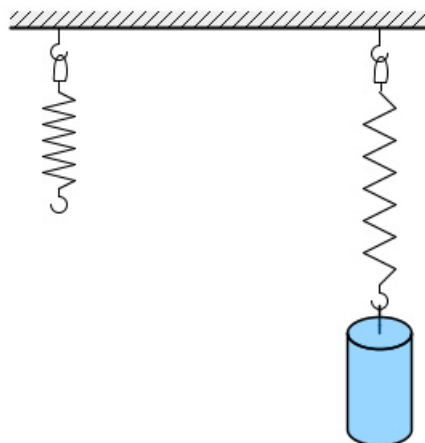
- Vzájemné působení těles **na dálku prostřednictvím silových polí** (silové pole magnetu působící na střelku kompasu, viz. obr. 1.3-2, gravitační pole Slunce.)



obr. 1.3-2

A když už jsme u dělení působení sil, uveďme si ještě dělení sil podle jejich účinků:

- **Statický účinek síly** jako je protažení pružiny závažím, viz. obr. 1.3-3, nebo tlaková síla působící na podložku (kniha na stole).



obr. 1.3-3

- **Dynamický účinek síly**, který se projevuje tím, že se mění směr nebo velikost rychlosti pohybujícího se tělesa (motor auta).

A právě dynamickými účinky sil se zabývá **dynamika** (z řeckého *dynamis*, což znamená síla).

Účinky síly závisí nejen na její velikosti, ale také na směru jejího působení a na tom, kde působí. Z toho vyplývá, že:

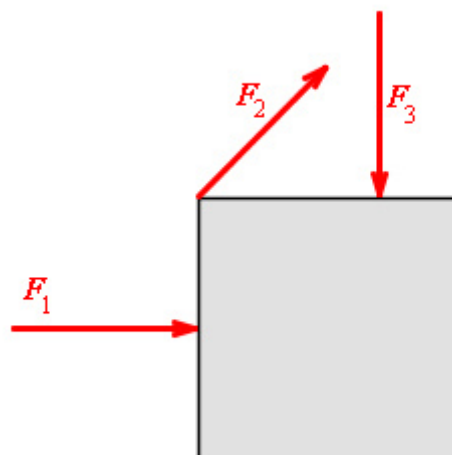
**Síla  $F$  je vektorová veličina určená velikostí, působištěm, směrem a orientací.**

Jednotkou síly je newton označovaný písmenem N. Tato jednotka rozepsaná (není třeba si pamatovat, vyjdeme z druhého Newtonova pohybového zákona) pomocí základních jednotek soustavy SI je  $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



otáčením kvádru?

**U1.3.1-1** Na obrázku máte nakreslený gumový kvádr, na který působí tři stejně velké síly, viz. obr. 1.3-4. *Účinky které síly se projeví deformací, posuvem,*



obr. 1.3-4

## 1.3.2 Newtonovy pohybové zákony

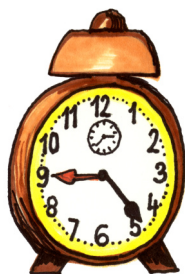
Je to až neuvěřitelné, že základní zákony pohybu, které se dosud používají při řešení základních technických problémů, zformuloval Isaac Newton již před více než třemi sty léty. Je nutné je zvládnout, protože se uplatňují nejen v mechanice, ale i v jiných odvětvích fyziky. Pomocí pohybových zákonů řešíme také pohyb náboje v elektrickém poli, sílu mezi dvěma proudovodiči a tak dále.



1. Znát slovní definici zákona setrvačnosti, uvést příklady působnosti tohoto zákona.
2. Vysvětlit rozdíl mezi inerciálními a neinerciálními vztažnými soustavami.
3. Znát slovní a matematickou formulaci zákona síly.
4. Umět vektorově sčítat síly působící na těleso (graficky algebraicky).
5. Vypočítat rychlost a dráhu uraženou tělesem, na které působí síly.
6. Vysvětlit rozdíl mezi tíhovou silou a tíhou tělesa.
7. Znát účinky třecí síly, vědět na čem tato síla závisí a nezávisí.
8. Řešit pohyb tělesa po nakloněné rovině, působí-li na něj smykové tření.
9. Vědět na čem závisí odporová síla valivého odporu.
10. Srovnat odporové síly smykového tření a valivého odporu.
11. Vyslovit zákon akce a reakce, dokumentovat jeho působnost na praktických příkladech.
12. Vysvětlit pojem setrvačná síla. Vědět, za jakých podmínek tato síla vzniká.
13. Definovat dostředivou a odstředivou sílu, znát vztah pro její výpočet u kruhového pohybu.

14. Znáť vztah pro hybnost tělesa, vysvětlit rozdíl mezi definičním vztahem pro velikost hybnosti a pro vektor hybnosti.

15. Umět aplikovat zákon zachování hybnosti na řešení úloh.



Odhadovaný čas nutný ke studiu je 60 minut



Sčítání vektorů, rychlost hmotného bodu, zrychlení hmotného bodu, přímočarý pohyb hmotného bodu, rovnoměrný pohyb po kružnici



Newton zformuloval tři základní zákony klasické dynamiky ve slovní podobě, později byly formulace doplněny i matematickými zápisy. Začneme tedy od počátku od prvního zákona.

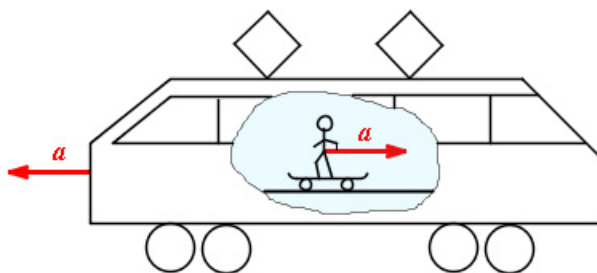
### **První Newtonův pohybový zákon – zákon setrvačnosti**

Newton v originále formuloval svůj zákon poněkud komplikovanějšími slovy, v současnosti se vyslovuje takto:

**Každé těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není vnějšími silami donuceno tento svůj stav změnit.**

Ze zkušenosti to známe. Stojíme-li na skateboardu, musíme se odrazit (působit silou našich svalů), abychom se rozjeli. A jedeme-li po rovině, jedeme stejnou rychlostí, i když se neodrážíme. Samozřejmě v praxi se pohyb zpomaluje a časem se zastavíme, ale to už na nás působí vnější síly, jako je odpor vzduchu a tření.

Ale stejně to vždy neplatí. Představte si, že jste na tom skateboardu ve stojící tramvaji. V okamžiku, kdy se tramvaj začne rozjíždět s jistým zrychlením, začnete se i vy pohybovat se stejným zrychlením vůči tramvaji, ale v opačném směru, viz. obr. 1.3-5. Kdybyste se stihli podívat ven, zjistíte, že jste v klidu vůči okolí. A poslední zjištění. Pokud se tramvaj bude pohybovat rovnoměrným přímočarým pohybem, zůstaneme na skateboardu v klidu i vůči tramvaji.

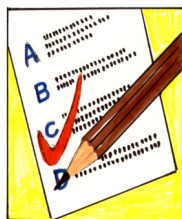


obr. 1.3-5

Jaký je závěr z tohoto pokusu. Newtonův zákon setrvačnosti platí, vztahujeme-li svůj pohyb vůči okolí tramvaje, ale neplatí, posuzujeme-li pohyb vůči **rozjíždějící se** tramvaji. Narazili jsme na problém diskutovaný v kinematice – problém vztažných soustav. Musíme si tedy definovat vztažné soustavy, ve kterých platí Newtonovy pohybové zákony. Z pokusu se skateboardem plyne, že zákony budou platit tehdy, jestliže tramvaj stojí, nebo se pohybuje pohybem rovnoměrným přímočarým.

Newtonovy pohybové zákony platí ve vztažných soustavách, které jsou vůči sobě v klidu, nebo se vůči sobě pohybují pohybem rovnoměrným přímočarým. Takovéto soustavy se označují jako **inerciální** nebo **setrvačné**.

Se setrvačností těles se denně setkáváme. Projevuje se při rozjezdu automobilu, pozorujeme ji při jeho zastavování, při nárazu na překážku atd. Ještě se k setrvačnosti vrátíme.



**KO1.3.2-2.** Proč při klopýtnutí padáme dopředu, uklouzneme-li, padáme dozadu?

**KO1.3.2-3.** Proč při prudkém zatočení auta doleva jsou cestující přitlačeni k pravým dveřím?

**KO1.3.2-4.** Jakou funkci mají bezpečnostní pásy a airbagy v autě?

**KO1.3.2-5.** Na podlaze vagónu, který jede po přímé vodorovné trati stálou rychlostí, leží kulička. V určitém okamžiku je vagón zabrzděn a jeho pohyb je dále rovnoměrně zpomalený. Tření mezi kuličkou a podlahou vagónu neuvažujte. *Jak se od tohoto okamžiku pohybuje kulička vzhledem k vagónu?*

- a) rovnoměrně směrem k přední stěně vagónu
- b) rovnoměrně směrem k zadní stěně vagónu
- c) rovnoměrně zrychleně směrem k přední stěně vagónu
- d) rovnoměrně zrychleně směrem k zadní stěně vagónu

**KO1.3.2-6.** Na podlaze vagónu, který jede po přímé vodorovné trati stálou rychlostí, leží kulička. V určitém okamžiku je vagón zabrzděn a jeho pohyb je dále rovnoměrně zpomalený. Tření mezi kuličkou a podlahou vagónu neuvažujte. *Jak se bude kulička pohybovat vzhledem k povrchu Země?*

- a) rovnoměrně ve směru jízdy vagónu
- b) rovnoměrně proti směru jízdy vagónu
- c) rovnoměrně zrychleně ve směru jízdy vagónu
- d) rovnoměrně zrychleně proti směru jízdy vagónu

## Druhý Newtonův pohybový zákon – zákon síly



Již nějakou dobu se zabýváme silou, hovoříme o síle svalů, síle motoru uvádějící do pohybu auto, o síle vystřelující puk. Ale fyzici jsou zvyklí přesně veličinu definovat. Při definování síly jako fyzikální veličiny vyjdeme z několika praktických pozorování.

U sportovního auta (Ferrari) silný motor vyvine sílu, která udělí rychlost 100 km/h za 5 až 6 sekund. To odpovídá zrychlení asi  $5,5 \text{ m.s}^{-2}$ . Motor běžné slabší Fabie zrychlí auto na 100 km/h přibližně za 12 sekund. Zrychlení tohoto vozu je tedy přibližně  $2,3 \text{ m.s}^{-2}$ .

Z příkladu je patrné, že **kolikrát bude větší síla působící na těleso, tolikrát větší bude jeho zrychlení.**

Jiný příklad z oblasti automobilismu. Každý automobilista ví, že s plně naloženým vozem se rozjíždí „pomaleji“, tedy s menším zrychlením, než s prázdným autem. A při tom má pod kapotou stejný motor.

**Kolikrát větší bude hmotnost tělesa, tolikrát bude při stejné působící síle motoru menší jeho zrychlení.**

Shrneme-li obě předchozí pozorování, můžeme vyslovit závěr:

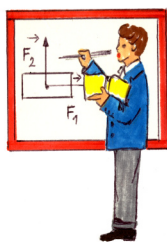
**Zrychlení  $a$ , které uděluje síla  $F$  tělesu o hmotnosti  $m$ , je přímo úměrné velikost této síly a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.**

$$a = \frac{F}{m}$$

Vyslovili jsme tak **druhý Newtonův pohybový zákon – zákon síly.**

Častěji se tento zákon zapisuje ve tvaru:

$$F = ma$$



Vyjádřete jednotku 1 N pomocí základních jednotek soustavy SI.

Vyjdeme ze vztahu pro sílu vyjádřenou pomocí hmotnosti a zrychlení

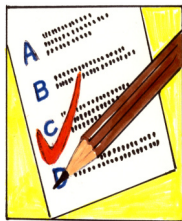
$F = ma$  a dosadíme jednotky jednotlivých veličin.  $\text{N} = \text{kg.m.s}^{-2}$ .



V předešlých odstavcích jsme hovořili o síle působící na těleso, Výsledkem této činnosti je, že se mění pohybový stav tělesa. Ale co když působí na toto těleso sil více? Vozík táhne více osob?

**Při působení více sil na těleso je musíme sčítat. Ale protože síla je vektorová veličina, musíme síly sčítat vektorovým součtem.**

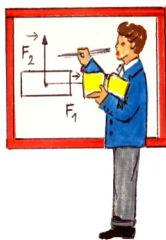




**KO1.3.2-7.** Na těleso o hmotnosti 2 kg, které je v dané inerciální vztažné soustavě v klidu, začne působit stálá síla o velikosti 4 N. *Jak velké zrychlení tato síla uděluje?*

- a)  $0,5 \text{ ms}^{-2}$       b)  $2 \text{ ms}^{-2}$       c)  $4 \text{ ms}^{-2}$       d)  $8 \text{ ms}^{-2}$

**KO1.3.2-8.** Při pokusu se rozjížděl vozíček se zrychlením  $30 \text{ cm.s}^{-2}$ . *Jaké bude jeho zrychlení, zvětší-li se na dvojnásobek a) působící tažná síla, b) hmotnost vozíčku?*



Automobil o hmotnosti 1 t se rozjíždí z klidu a za dobu 20 s dosáhne rychlosti 90 km/h. *Jak velkou tažnou sílu vyvinul motor automobilu?*

Tažná síla by vám měla vyjít 1 250 N. Označíme hmotnost automobilu  $m = 1 \text{ t} = 1\,000 \text{ kg}$ , jeho konečnou rychlost  $v = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$ , počáteční rychlost  $v_o = 0$ , čas  $t = 20 \text{ s}$  a hledanou sílu  $F$ .

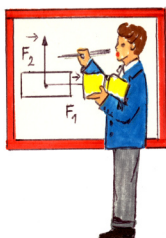
Automobil bude konat vlivem konstantní síly rovnoměrně zrychlený pohyb. K výpočtu síly musíme vypočítat zrychlení ze vztahu pro rychlost  $v = v_o + a t$  (kapitola 1.2.5 vztah) a z ní vyjádříme zrychlení:

$$a = (v - v_o)/t$$

Toto zrychlení uděluje automobilu síla daná 2.Newtonovým pohybovým zákonem:

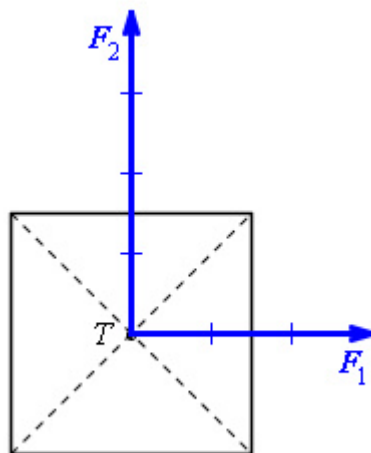
$$F = m a = m (v - v_o)/t = 1\,000 (25 - 0)/20 = \underline{1\,250 \text{ N}}.$$

Automobilový motor vyvinul tažnou sílu 1 250 N.



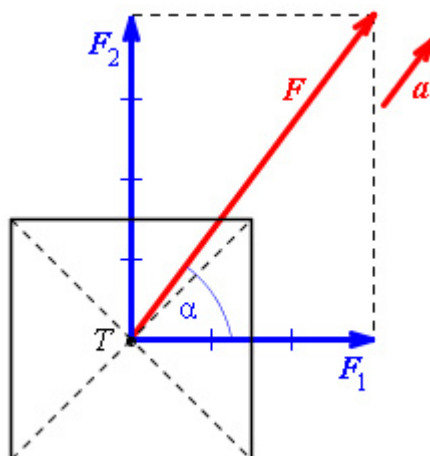
Na krychli hmotnosti 2 kg působí dvě síly  $F_1$  a  $F_2$ . Velikost první síly je 3 N, velikost druhé je 4 N. Síly jsou na sebe kolmé. *Určete zrychlení způsobené oběma silami působícími současně.*

Nejdříve si nakreslíme obrázek. Působíště obou sil umístíme do těžiště kvádru, jedna ze sil ať působí ve směru osy  $x$ . Ověřte si svůj náčrt zde, viz. obr. 1.3-6.



obr. 1.3-6

Do obrázku zakreslete výslednici obou sil. Hledané zrychlení bude mít směr této výslednice. Opět si ověřte svůj výsledek viz. obr. 1.3-7.



obr. 1.3-7

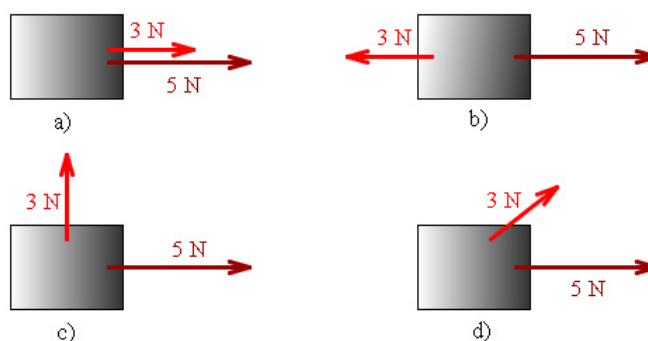
A teď již můžeme začít počítat. Nejdříve si stanovíme výslednou sílu  $F = F_1 + F_2$ . Z druhého obrázku vyjádříme její velikost jako výslednici vektorového součtu obou sil:

$$F = \sqrt{(F_1^2 + F_2^2)} = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5 \text{ N}.$$

Zrychlení vypočítáme z definičního vztahu pro sílu  $F = ma$  jako podíl výsledné síly a hmotnosti krychle  $a = \frac{F}{m} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m.s}^{-2}$ .



**U1.3.2-9.** Na obrázcích jsou znázorněny dvě různě velké síly působící v různých směrech na kvádr pohybující se po podložce bez tření, viz. obr. 1.3-8. *Seřadte obrázky a), b), c), d) za prvé podle velikosti výslednice sil od největší po nejmenší. Za druhé seřadte obrázky podle zrychlení kvádrů.*



obr. 1.3-8

**U1.3.2-10.** Automobil o hmotnosti 1 200 kg jel rovnoměrně zpomaleným pohybem a zastavil za dobu 5 s na dráze 25 m. a) *Jak velká byla počáteční rychlost automobilu?* b) *Jak velká byla brzdící síla?*

**U1.3.2-11.** Nákladní automobil o hmotnosti 3 t začne brzdit při rychlosti 90 km/h a zastaví za dobu 10 s. a) *Jak velkou brzdící sílu vyvinou brzdy automobilu?* b) *Jakou brzdnou dráhu přitom automobil ujede?*

## Tíhová síla a tíha tělesa



Jednou ze sil, se kterými se běžně setkáváme je síla, kterou na nás působí gravitační pole Země. Pokud nestojíme na Zemi, nebo nejsme nějak připoutáni, pak padáme – pohybujeme se volným pádem. Jak jsme si již řekli v kinematice, volný pád je rovnoměrně zrychlený pohyb s konstantním zrychlením  $g$  nazývaným **tíhové zrychlení**. V některých učebnicích najdete tíhové zrychlení označované symbolem  $a_G$ .

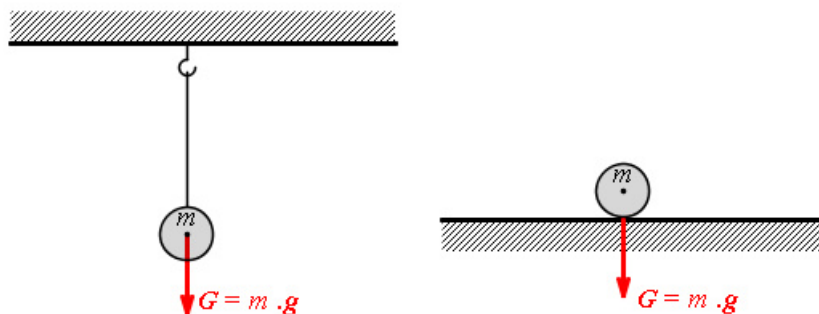
Vynásobíme-li tíhové zrychlení  $g$  hmotností  $m$  tělesa, dostaneme podle druhého Newtonova pohybového zákona sílu, která způsobuje volný pád tohoto tělesa. Tato síla se nazývá **tíhová síla**  $F_G$  a její velikost je dána vztahem:

$$F_G = m g$$

Tíhová síla má vždy směr svisle dolů, kolmo na povrch Země.

Tíhová síla se neprojevuje pouze na Zemi. Třeba na Měsíci působí na astronauta tíhová síla 6 krát menší než na Zemi. Je to dáno tíhovým zrychlením na Měsíci, které je 6 krát menší.

Tíhová síla nemá vždy na těleso účinek pohybový, jak bylo ukázáno na volném pádu. Visíme-li na laně nebo stojíme na pevné zemi, pak na nás také působí tíhová síla. K pohybu však nedochází, síla působí v případě lana jako **tahová síla**, v druhém případě jako **síla tlaková** zde, viz. obr. 1.3-9.

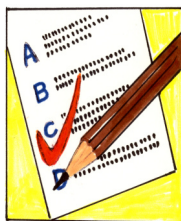


obr. 1.3-9

**Tíhovou sílu, kterou působí nehybné těleso na vodorovnou podložku nebo na svislý závěs nazýváme **tíhou tělesa**  $G$ .**

Je-li těleso v klidu, má tíha a tíhová síla stejný směr i stejnou velikost, tj.  $G = F_G$ . Můžeme tedy napsat:

$$G = m g.$$



**KO1.3.2-12.** Jak velká tíhová síla působí na člověka o hmotnosti 100 kg na povrchu Země a na povrchu Měsíce?

**KO1.3.2-13.** Jak velká je tíha člověka v obou případech předešlé kontrolní otázky.

## Odporové síly

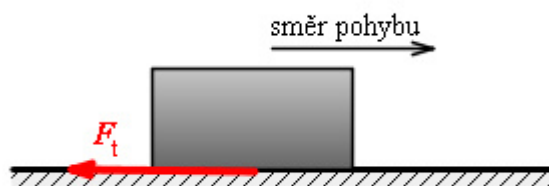


Jedeme-li na saních z kopce dolů, zpomalují náš pohyb hned dvě síly. Našemu pohybu brání odpor vzduchu a tření.

**Odporové síly působí proti směru pohybu tělesa a brzdí jeho pohyb.**

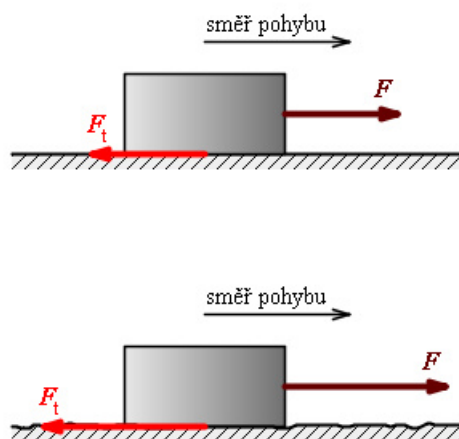
Nejznámější odporové síly jsou třecí síla, odporová síla valivého odporu a odporová síla prostředí.

Jestliže se těleso posouvá po povrchu jiného tělesa (podložky), dochází ke **smykovému tření**. Odporová síla, která pohyb brzdí se nazývá **třecí síla  $F_t$**  a působí na stykové ploše pohybujícího se tělesa a podložky, viz. obr. 1.3-10.



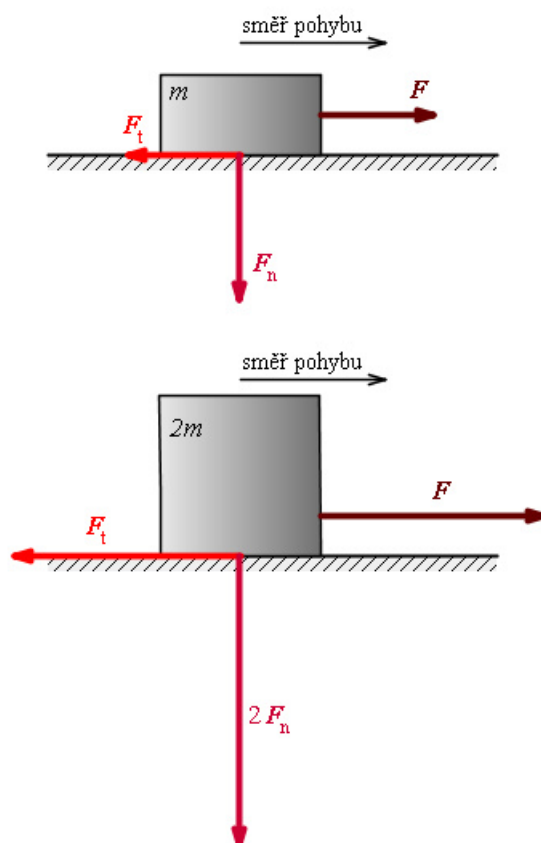
obr. 1.3-10

Ze zkušenosti víme, že bednu taženou po hladké podložce posuneme s menším úsilím (menší silou) než po betonu, viz. obr. 1.3-11.



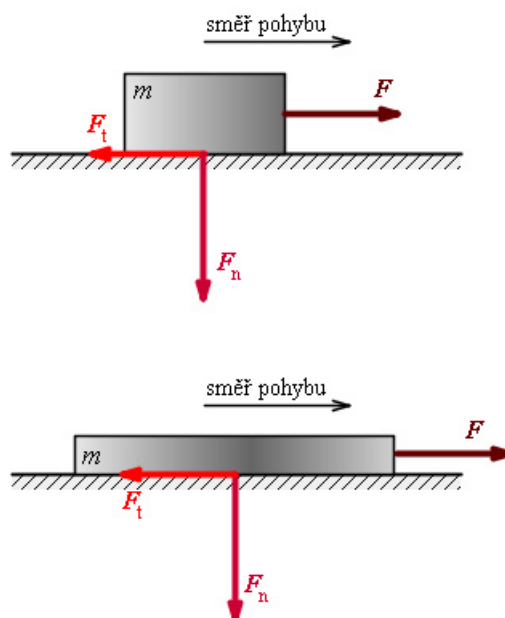
viz. obr. 1.3-11

Větší sílu musíme vynaložit na těžší bednu, viz. obr. 1.3-12.



obr. 1.3-12

Trochu s překvapením bychom zjistili, že nezáleží na velikosti třecích ploch, viz. obr. 1.3-13.



obr. 1.3-13

A konečně největší sílu musíme vynaložit do uvedení bedny do pohybu. Z těchto pozorování můžeme udělat následující závěry:

- **Třecí síla je přímo úměrná tlakové síle  $F_n$** , kterou působí těleso kolmo na podložku. Konstantou úměrnosti je **součinitel smykového tření  $f$** .

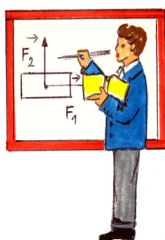
$$F_t = f F_n$$

Součinitel (nebo koeficient) smykového tření je bezrozměrné číslo. V tabulkách se udává vždy pro dvojici materiálů, které se po sobě posouvají (viz tabulka Součinitel smykového tření).

Tlaková síla je velice často dána tíhou tělesa.

- **Velikost třecí síly nezávisí na velikosti stykových ploch.**
- **Klidová třecí síla je větší, než třecí síla působící při pohybu.**

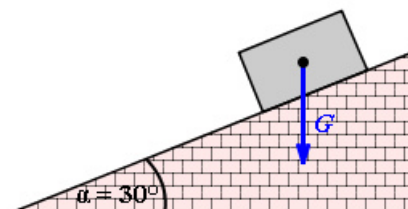
Kdo jste četli knížku Jacka Londona Bílý tesák, možná jste si všimli tohoto jevu v epizodě o sázce. Hlavní hrdina se vsadil, že jeho pes uveze na saních neuvěřitelný náklad. Kritickým momentem byla snaha psa „odtrhnout“ sáně od sněhu, tedy vyvinout dostatečnou sílu k překonání klidové třecí síly. V okamžiku, kdy se daly sáně do pohybu, měl vyhráno.



*S jakým zrychlením se bude pohybovat bedna hmotnosti 10 kg tlačená vzhůru po prkně silou 100 N. Prkno má sklon  $30^\circ$ , koeficient smykového tření mezi bednou a prknem je 0,1.*

Nejdříve si nakreslíme obrázek. Zkuste si nakreslit základní schéma sami. Ověřte si svůj nákres na obr. 1.3-14.

Ted' si do obrázku zakreslete všechny působící síly.



obr. 1.3-14

Ve směru pohybu musí působit síla 100 N, kterou si označte jako  $F_p$ . Proti pohybu bude působit síla tření  $F_t = f F_n$  a složka tíhy  $F$  působící ve směru nakloněné roviny. Zkontrolujte si svůj obrázek na obr. 1.3-15.

Vytvořili jsme si tak základní předpoklad pro vlastní výpočet. Síla  $F_v$ , kterou bude posunována bedna nahoru po nakloněné rovině, bude dána silou  $F_p$  zmenšenou o třecí sílu  $F_t$  a složku tíhy  $F$ .

$$F_v = F_p - F_t - F.$$

Třecí síla je dána součinem koeficientu tření  $f$  a tlakové síly na podložku  $F_n = G \cos \alpha$ .  
Složka tíhy  $F$ , která by způsobovala posuv

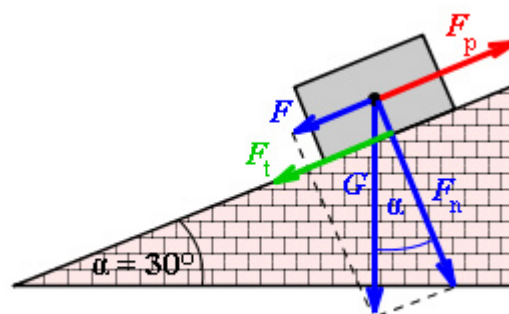
dolů po nakloněné rovině, kdybychom nepůsobili

silou  $F_p$  je  $F = G \sin \alpha$  Po dosazení do rovnice pro síly dostáváme

$$F_v = F_p - f m g \cos \alpha - m g \sin \alpha.$$

A dosazením číselných hodnot

$$F_v = 100 - 0,1 \cdot 10,9,81 \cdot \cos 30^\circ - 10,9,81 \cdot \sin 30^\circ = 42,46 \text{ N}.$$



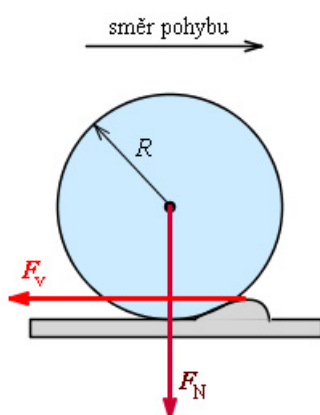
obr. 1.3-15

Ale to ještě nejsme na konci. Úkolem bylo vypočítat zrychlení pohybu bedny. To vypočítáme z druhého Newtonova pohybového zákona (zákona síly)  $F = m a$ . Z toho plyne pro zrychlení

$$a = \frac{F}{m} = \frac{42,46}{10} \cong 4,2 \text{ m.s}^{-2}.$$



Další odporovou silou, kterou si probereme, je odporová síla valivého odporu. O valivém odporu mluvíme tehdy, jestliže se těleso s kruhovým průřezem (např. válec) **valí** po pevné podložce. Při tomto pohybu dochází ke stlačování a deformaci podložky před valícím se tělesem, někdy i k deformaci samotného tělesa. Většinou tyto deformace nepozorujeme. Příčinou tohoto jevu je zase kolmá tlaková síla  $F_n$ , viz. obr. 1.3-16.

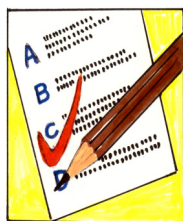


obr. 1.3-16

**Odporová síla valivého odporu  $F_v$  je přímo úměrná kolmé tlakové síle  $F_n$  působící na podložku a nepřímo úměrná poloměru  $R$  tělesa. Konstantou úměrnosti je rameno valivého odporu  $\xi$  (ksí).**

$$F_v = \xi \frac{F_n}{R}$$

Rameno valivého odporu (dříve se používal logičtější název součinitel valivého tření) se vyjadřuje v metrech. Zase se jedná o tabelované hodnoty.



**KO1.3.2-14.** Dělník posunuje rovnoměrným pohybem bednu o hmotnosti 100 kg. Jak velkou silou na ni působí, je-li součinitel smykového tření 0,47?

**KO1.3.2-15.** Na sedadle vagónu leží kniha a míček. Při rozjždění vlaku se začal pohybovat míček, zatímco kniha zůstala v klidu. Vysvětlete.

**KO1.3.2-16.** Velikost smykového tření závisí:

- na součiniteli smykového tření a kolmé tlakové síle
- na součiniteli smykového tření, na velikosti styčných ploch a na kolmé tlakové síle
- na součiniteli smykového tření a na velikosti styčných ploch
- na velikosti styčných ploch a na kolmé tlakové síle.



**KO1.3.2-17.** Součinitel smykového tření:

- a) je bezrozměrné číslo
- b) má rozměr síly
- c) má rozměr délky
- d) má rozměr plochy

**KO1.3.2-18.** Rameno valivého odporu

- a) je bezrozměrné číslo
- b) má rozměr síly
- c) má rozměr délky
- d) má rozměr rychlosti

**KO1.3.2-19.** Proč řidič automobilu při jízdě zatáčkou snižuje rychlost?

**KO1.3.2-20.** Proč mají neklopená zatáčky na dálnicích velké poloměry křivosti?



**U1.3.2-21.** Na korbě nákladního auta jedoucího po přímém vodorovném úseku silnice je bedna. Auto začne brzdit tak, že za dobu 7 s se zmenší jeho rychlost ze 72 km/h na 30 km/h. Určete mezní součinitel smykového tření  $f$ , při kterém bedna ještě nebude klouzat po podlaze korby.

**U1.3.2-22.** Srovnajte síly nutné k přesouvání bedny hmotnosti 50 kg rovnoměrným pohybem. V prvním případě je bedna posouvána po vodorovné podložce, součinitel smykového tření je 0,2. V druhém případě je bedna podložena válečky o průměru 10 cm. Rameno valivého odporu je v této situaci 0,005 m.

**U1.3.2-23.** Klopená zatáčka o poloměru 100 m má vzhledem k vodorovné rovině dostředný sklon  $10^\circ$ . Jak velkou rychlostí může projet zatáčkou kolo, aby se ještě nepřeklopilo.

Návod: Uvědomte si, že na kolo působí v zatáčce dvě síly – tíhová a odstředivá síla. Hledaná rychlost musí být taková, aby výslednice těchto dvou sil byla kolmá na rovinu silnice. Viz. obr. 1.3-17.

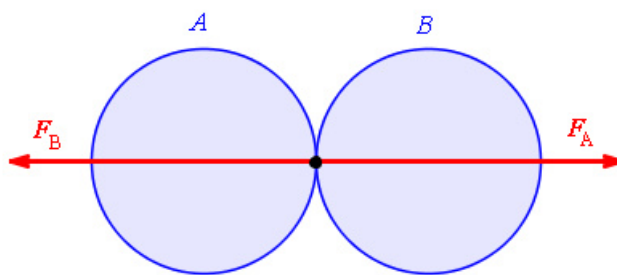
## Třetí Newtonův pohybový zákon – zákon akce a reakce



V úvodu kapitoly o dynamice jsme si zdůraznili, že síla se projevuje při vzájemném působení těles. Zdviháme-li nějaký předmět, působíme na něj silou ruky. Ale současně tento předmět působí i na ruku. Srazíme-li se s někým člověkem, působíme silou na něj. Ale současně i on působí stejně velkou silou na nás. Z těchto několika ukázek je možné vyvodit několik závěrů:

- Síly, kterými na sebe působí dvě tělesa  $A$  a  $B$  jsou stejně veliké  $F_A = F_B$ .
- Tyto síly jsou stejného směru, avšak opačné orientace  $F_A = -F_B$ .
- Obě síly současně vznikají a současně zanikají.
- Každá z těchto sil působí na jiné těleso, proto se ve svém účinku neruší.

Uvedme si ještě jeden příklad , na kterém si ukážeme obě působící síly. Vezměme si dvě koule  $A$  a  $B$ , které se srazí. V okamžiku srážky koule  $A$  působí na kouli  $B$  silou  $F_A$  a současně působí koule  $B$  na kouli  $A$  silou  $F_B$ . Na obrázku, viz. obr. 1.3-18 máme znázorněny obě síly.



obr. 1.3-18

Pokusy potvrzující tato tvrzení prováděl již Isaac Newton. Na jejich základě formuloval **třetí pohybový zákon**:

**Síly, kterými na sebe působí dvě tělesa jsou stejně veliké, stejného směru, opačné orientace a vznikají a zanikají současně.**

Někdy se používá ještě jiná formulace. Nazveme-li jednu ze sil **akce** a druhou **reakce**, pak lze napsat:

**Každá akce vyvolává stejně velkou reakci stejného směru, ale opačné orientace .**

Odtud název pro třetí Newtonův pohybový **zákon akce a reakce**.



**U1.3.2-24.** Kniha ležící na stole působí na desku stolu silou – v tomto případě je touto silou tíha knihy  $G$ . Deska působí na knihu také silou  $F$ , silou, která zabraňuje deformaci desky. *Která z obou sil je silou akce a která reakce? Viz. obr. 1.3-19.*

## Součinitel smykového tření

$f_0$  - součinitel smykového tření, začíná-li pohyb z klidu

$f$  – součinitel smykového tření v pohybu

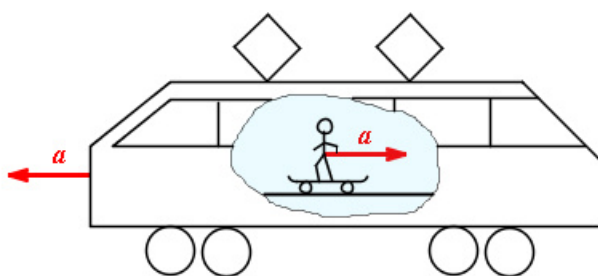
Látka	$f_0$	$f$
kalená ocel na kalené oceli	0,15	0,10
mazáno	0,1 až 0,12	0,05 až 0,1
měkká ocel na měkké oceli	0,13	0,10
mazáno	0,11	0,09 až 0,10
železniční kolo na kolejnici	0,25	0,18
vlhké	0,2 až 0,1	0,018
kalená ocel na šedé litině	0,3	0,27 až 0,13
měkká ocel na šedé litině	0,19	0,18
mazáno	0,05 až 0,15	0,075
kalená ocel na ledě	0,03	0,01
ocel na dřevě	0,65	0,5 až 0,4
kůže na šedé litině	0,3 až 0,5	0,56
pryž na betonu	0,7 až 1,0	0,7
pryž na asfaltové vozovce	0,5 až 0,75	0,71
vlhké	0,25 až 0,6	0,2 až 0,3
pryž na dlažbě	0,6 až 0,8	
dřevo na dřevě	0,50	0,34
vlhké	0,33	0,15
korek na oceli		0,45
nylon na oceli		0,3
polystyrén na oceli		0,5
teflon na oceli		0,05

### 1.3.3 Síla v neinerciální soustavě



O Newtonových pohybových zákonech jsme si řekli, že platí pouze v inerciálních soustavách. Jak budeme řešit problémy silového působení v neinerciálních soustavách?

Už jsme se této problematice dotkli v kapitole o prvním Newtonově pohybovém zákonu. Vzpomeňte si na rozjíždějící se tramvaj a jezdce na skateboardu, viz. obr. 1.3-20. Jezdec je v klidu vůči tramvaji, která se pohybuje pohybem rovnoměrným přímočarým. Soustava spojená s jezdcem a soustava spojená s tramvají jsou inerciální.



obr. 1.3-20

V okamžiku, kdy tramvaj začne zrychlovat se zrychlením  $a$  jsou již obě soustavy **neinerciální**. Skateboardista se začne pohybovat ve směru proti pohybu tramvaje. Člověk v tramvaji, který je vůči ní v klidu (sedí), pozoruje pohyb skateboardisty jako pohyb zrychlený se zrychlením  $-a$ , tedy opačným než je zrychlení tramvaje.

**Zrychlení skateboardisty není vyvoláno silovým působením žádného tělesa. Sílu, která vyvolává jeho zrychlený pohyb, a která vzniká v důsledku zrychleného pohybu vztažné soustavy nazýváme setrvačná síla  $F_s$ .**

Někdy se setrvačné síly označují jako síly **zdánlivé**.

Setrvačnou sílu, která uděluje jezdci zrychlení opačného směru než je zrychlení  $a$  tramvaje vůči povrchu Země je možné vyjádřit vztahem

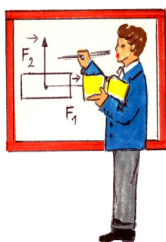
$$F_s = -m a.$$

V neinerciální vztažné soustavě:

- neplatí zákon setrvačnosti,
- neplatí zákon akce a reakce.

Vidíte, že jsme vynechali druhý Newtonův pohybový zákon – zákon síly. Jak je to s platností tohoto zákona v neinerciální vztažné soustavě?

- Zákon síly je možné v neinerciální vztažné soustavě použít s tím, že setrvačná síla má opačný směr než zrychlení, které ji vyvolává.



Vypočítejte sílu, kterou působí člověk hmotnosti 100 kg na podlahu výtahu když se výtah pohybuje:

pohybem rovnoměrným,

zrychleným pohybem směrem nahoru se zrychlením  $2 \text{ m.s}^{-2}$ ,

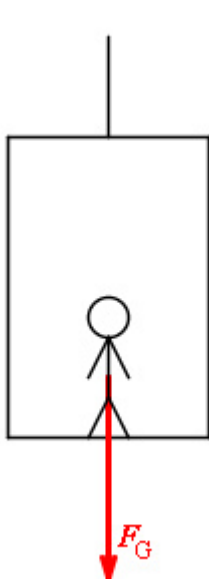
zrychleným pohybem směrem dolů se zrychlením  $2 \text{ m.s}^{-2}$ ?

a) Je-li kabina výtahu v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrným pohybem, tvoří inerciální vztažnou soustavu. Na člověka působí pouze jeho tíhová síla  $F_G = m g$ , viz. obr. 1.3-21. Touto silou  $F = 100.9,81 = 981 \text{ N}$  působí člověk na podlahu.

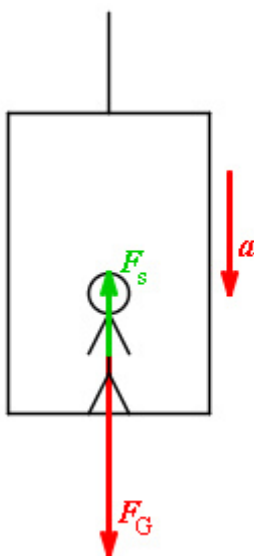
b) Při pohybu výtahu nahoru se zrychlením  $a$  působí na podlahu jednak tíhová síla člověka  $F_G$ , tak setrvačná síla  $F_s$ . Tato setrvačná síla má směr opačný než je zrychlení výtahu, směřuje tedy dolů, viz. obr. 1.3-22. Výsledná síla na podlahu je dána součtem obou sil  $F = F_G + F_s = m g + m a = 100.9,81 + 100.2 = 1181 \text{ N}$ .

c) Při pohybu výtahu dolů se zrychlením  $a$  působí na podlahu zase tíhová síla člověka  $F_G$ , i setrvačná síla  $F_s$ . Tato setrvačná síla má směr opačný než je zrychlení výtahu, tedy v tomto případě směřuje nahoru, viz. obr. 1.3-23. Výsledná síla na podlahu je teď dána rozdílem obou sil  $F = F_G - F_s = m g - m a = 100.9,81 - 100.2 = 781 \text{ N}$ .

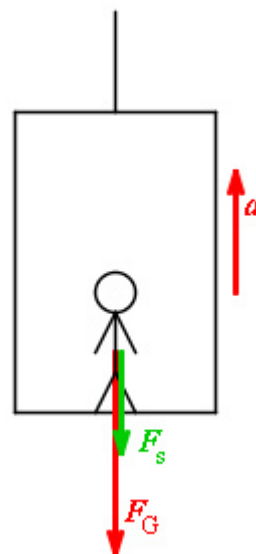
Pokud by se výtah pohyboval se zrychlením  $a = -g$  (volným pádem), pak by výsledná síla působící na pasažéra byla nulová. Tímto způsobem je možné simulovat „beztížný stav“.



obr. 1.3-21



obr. 1.3-22



obr. 1.3-23



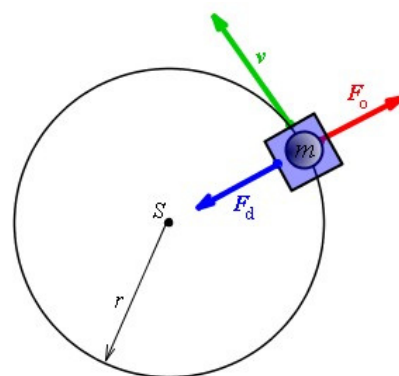
A ještě s jednou setrvačnou silou se velmi často setkáváte. V předchozí části kapitoly vznikala setrvačná síla při zrychlování nebo zpomalování přímočarého pohybu. Vráťme se k příkladu tramvaje. Jede-li tramvaj po přímočaré dráze rovnoměrným pohybem a najednou vjede do levotočivé otáčky při nezměněné velikosti rychlosti, jsou cestující vytlačováni na pravou stranu tramvaje. Pasažéři jsou podrobeni účinku setrvačné síly, která je důsledkem pohybu po křivočaré trajektorii. Tato setrvačná síla se označuje jako **síla odstředivá**.

**Setrvačná odstředivá síla  $F_o$  vzniká v neinerciální vztažné soustavě pohybující se po zakřivené trajektorii.**

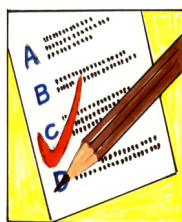
Podívejme se na další příklad – kolotoč. Trajektorií pohybu člověka hmotnosti  $m$  bude kružnice o poloměru  $r$ . Pohyb po kružnici je charakterizován dostředivým zrychlením  $a_d = \frac{v^2}{r}$ , jak jsme si ukázali v kapitole Kinematika. Zakřivení pohybu po kružnici bude způsobeno **dostředivou silou  $F_d$** , kterou si vyjádříme pomocí druhého pohybového zákona ve tvaru  $F_d = m \frac{v^2}{r}$ . Tato síla bude mít směr do středu kružnice (osy kolotoče).

Podle zákona akce a reakce bude akční síla – dostředivá síla působící na sedačku vyvolávat sílu reakční. Tato reakční síla působící na člověka na sedačce bude stejně veliká, stejného směru jako síla akční, ale opačně orientovaná, viz. obr. 1.3-24. Touto reakční silou je právě setrvačná síla odstředivá. Její velikost si tedy můžeme vyjádřit pomocí velikosti dostředivého zrychlení jako

$$F_o = m \frac{v^2}{r}$$



obr. 1.3-24



**KO1.3.3-25.** Inerciální vztažná soustava je taková soustava,

- a) v níž platí všechny Newtonovy pohybové zákony
- b) která vůči pevnému systému stojí
- c) která se vůči pevnému systému pohybuje rovnoměrně přímočaře

d) ve které platí jen zákon setrvačnosti

**KO1.3.3-26.** Uvažujme čtyři železniční vozy. Vůz 1 stojí v klidu na kolejích, vůz 2 se rozjíždí rovnoměrně zrychleně po přímé trati, vůz 3 jede stálou rychlostí po přímé trati a vůz 4 projíždí kruhovou zatáčkou rovnoměrným pohybem. Vztažnou soustavu spojenou s povrchem Země považujte za inerciální. *Na které vozy působí síly tak, že jejich výslednice je nulová?*

- a) jen na 1
- b) na 1,2,3
- c) na 1,3
- d) na 1,3,4

**KO1.3.3-27.** Uvažujme čtyři železniční vozy. Vůz 1 stojí v klidu na kolejích, vůz 2 se rozjíždí rovnoměrně zrychleně po přímé trati, vůz 3 jede stálou rychlostí po přímé trati a vůz 4 projíždí kruhovou zatáčkou rovnoměrným pohybem. Vztažnou soustavu spojenou s povrchem Země považujte za inerciální. *Na které vozy působí síly tak, že jejich výslednice má stálou nenulovou velikost a stálý směr?*

a) na 2,3

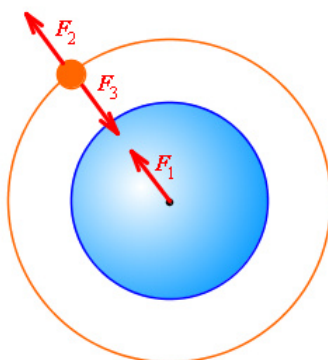
b) jen na 2

c) jen na 3

d) na 2,4

**KO1.3.3-28.** Stacionární družice obíhá kolem Země po kruhové dráze. Na obrázku jsou znázorněny tři hlavní síly  $F_1$ ,  $F_2$  a  $F_3$  působící v této soustavě, viz. obr. 1.3-25. Přiřadte pojmenovaným silám jejich symbol z obrázku.

Název síly	symbol
odstředivá síla	
síla akce	
síla reakce	
dostředivá síla	



obr. 1.3-25

**KO1.3.3-29.** Podmínkou rovnoměrného pohybu tělesa po kružnici je, že:

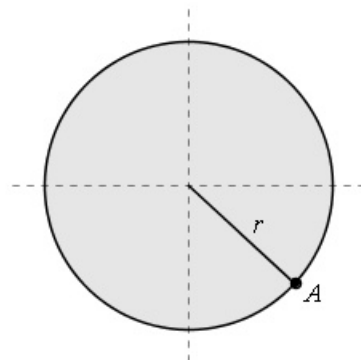
- a) na něj nepůsobí žádná síla,
- b) na něj působí odstředivá síla,
- c) na něj působí dostředivá síla,
- d) tečná síla na něj působící je nulová.



**U1.3.3-30.** Astronauti používají ve svém výcviku obrovské centrifugy. Centrifuga je takový mohutný kolotoč, ve kterém astronaut v kabině koná kruhový pohyb na dlouhém rameni vysokou rychlostí. Co vlastně astronauti na tomto zařízení trénují?

**U1.3.3-31.** Člověk hmotnosti 80 kg je ve výtahu. Ten se utrhne a padá volným pádem. Jakou silou působí člověk na podlahu výtahu?

**U1.3.3-32.** Kámen hmotnosti 2 kg je uvázan na provázku



obr. 1.3-26



délky 1 m a roztočen tak, že obíhá po vodorovné kružnici rychlostí  $3 \text{ m.s}^{-1}$ . Jakou silou je napínán provázek?

**U1.3.3-33.** Kámen hmotnosti  $m$  je uvázan na provázku délky  $l$  a roztočen tak, že obíhá po svislé kružnici rychlostí  $v$ . Jakou silou je napínán provázek a) v horním bodě trajektorie, b) ve spodním bodě trajektorie, c) v bodě A, viz. obr. 1.3-26 a obr. 1.3-27?

## 1.3.4 Hybnost tělesa

Vraťme se ještě jednou k prvnímu a druhému Newtonovu pohybovému zákonu. První z nich říká: pokud se těleso hmotnosti  $m$  pohybuje pohybem rovnoměrným přímočarým rychlostí  $v$ , pak musíme na něj působit vnější silou  $F$ , abychom tento stav změnili.

Ze zkušenosti víme, že velikost síly, kterou musíme vynaložit na třeba zastavení běžícího člověka, bude záviset na jeho rychlosti a na jeho hmotnosti. Snáze zastavíme jdoucí dítě, než utíkajícího metrákového chlapa. Čím tedy bude rychlost tělesa větší nebo bude větší jeho hmotnost, tím větší sílu musíme vynaložit.

Zavádí se proto další fyzikální veličina označovaná jako hybnost, beroucí v úvahu obě zmíněné veličiny. Hybností můžeme charakterizovat pohybový stav tělesa.

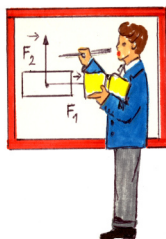
**Hybnost tělesa  $p$  je dána součinem jeho hmotnosti  $m$  a jeho rychlosti  $v$ .** Je to vektor, který má stejný směr jako okamžitá rychlost.

$$p = m v$$

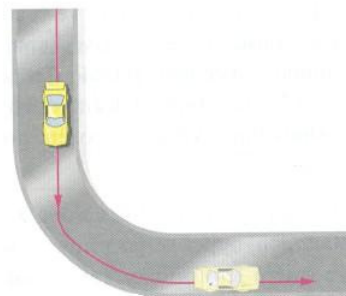
Pokud při změně hybnosti dochází v důsledku **změny směru** rychlosti, pak musíme zapsat vztah pro hybnost **ve vektorovém tvaru**

$$\Delta p = m \Delta v.$$

Pro jednotku hybnosti plyne z definičního vztahu  $\text{kg.m.s}^{-1}$ . Tato jednotka nemá své jméno.



Stanovte graficky změnu hybnosti dětského autíčka hmotnosti  $m = 1 \text{ kg}$  po projetí pravoúhlou zatáčkou, viz. obr. 1.3-28. Velikost jeho rychlosti před zatáčkou byla  $v_1 = 0.4 \text{ m.s}^{-1}$ , za zatáčkou  $v_2 = 0.3 \text{ m.s}^{-1}$ .

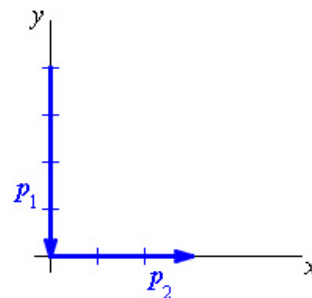


obr. 1.3-28

Vyjdeme ze vztahu pro **změnu vektoru** hybnosti, který si upravíme do tvaru.

$$\Delta p = m v_2 - m v_1.$$

Ted' si nakreslete vektorový obrázek hybností. Jedná se o pravoúhlou zatáčku takže hybnost před otáčkou kreslete ve směru osy  $y$ , za zatáčkou ve směru osy  $x$ . Svůj náčrt si ověřte na obr. 1.3-29.

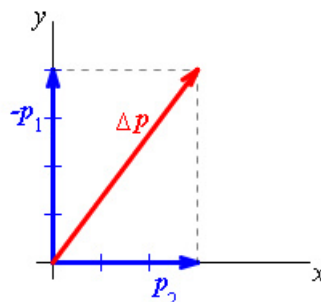


obr. 1.3-29

Nyní zakreslete do svého obrázku rozdíl obou vektorů hybnosti  $\Delta \mathbf{p}$ . Pokud se vám nedaří, obrázek máte zde, viz. obr. 1.3-30.

Už na první pohled je jasné (není problém ověřit výpočtem), že velikost vektoru změny hybnosti  $\Delta \mathbf{p} = 0,5 \text{ N}\cdot\text{s}$  se liší od **nesprávně počítané** hodnoty  $\Delta p = m (v_2 - v_1) = 0,1 \text{ N}\cdot\text{s}$ .

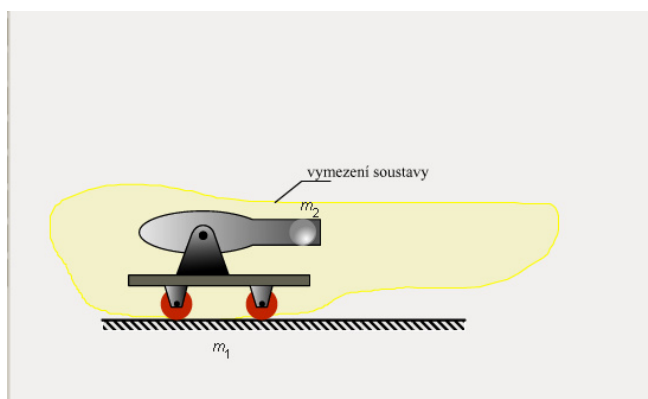
obr. 1.3-30



Fyzika zná celou řadu zákonů zachování. Jistě si vzpomenete na zákon zachování energie, který budeme probírat později, existuje zákon zachování elektrického náboje atd. My si teď probereme zákon zachování hybnosti.

Představte si, že jste v loďce na klidné hladině rybníka. Hodíte z loďky kámen vodorovným směrem a loďka se s vámi dá do pohybu směrem opačným. Tento pokus se lehce vysvětlí právě zákonem zachování hybnosti.

Podívejte se na obrázek děla, viz. obr. obr. 1.3-31. Dělo hmotnosti  $m_1$  i koule v něm připravená k výstřelu hmotnosti  $m_2$  jsou v klidu. A teď si vzpomeňte na námořní bitvy korzárů ve filmu. Po výstřelu vyletí dělová koule z hlavní rychlostí  $v_2$  a dělo se začne pohybovat opačným směrem rychlostí  $v_1$ . V našem pokusu uvažujme, že na střílicí dělo nepůsobí již žádné jiné vnější síly.



obr. 1.3-31

To znamená, že dělo se bude pohybovat po výstřelu jedním směrem pohybem rovnoměrným přímočarým, náboj poletí opačným směrem také rovnoměrně přímočaře.

Před výstřelem jsou dělo i náboj v klidu. Po dobu výstřelu  $t$  působí na dělo síla  $F_1$  a na dělovou kouli síla  $F_2$ . Síla je dána tlakem rozpínajících se plynů v hlavní, působí do doby, než koule opustí hlaveň ( $t$ ). Podle zákona akce a reakce musí být obě síly stejně veliké, ale opačné orientace  $F_1 = -F_2$ . Tyto síly si můžeme zapsat pomocí Newtonova zákona síly a rovnice bude mít tvar

$m_1 a_1 = m_2 a_2$ , nebo po rozepsání zrychlení  $m_1 \frac{v_1}{t} = m_2 \frac{v_2}{t}$ . Po zkrácení doby  $t$ , která je stejná při působení obou sil, dostáváme vztah

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Hybnosti, které dělo a koule získají, jsou stejně veliké.

Ale hybnost je vektorová veličina, má tedy i svůj směr a orientaci. Jak je vidět na animaci, jsou směry rychlostí koule a děla opačné, budou tedy i hybnosti mít opačný směr

$$m_1 \mathbf{v}_1 = - m_2 \mathbf{v}_2, \text{ nebo}$$

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0$$

Tento vztah vyjadřuje **zákon zachování hybnosti**.

**Uvedeme-li dvě tělesa z klidu do pohybu jen vzájemným silovým působením, součet jejich hybností je nulový, (tedy stejný jako před uvedením do pohybu).**

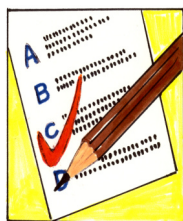
Možná jste již zakusili působení tohoto zákona zachování na vlastním těle při střelbě z pušky nebo revolveru. Při výstřelu vás pažba „kopne“ do ramene, ruka s revolverem „odskočí“ dozadu. Na stejném principu fungují také reaktivní motory letadel či nosných raket družic, pohybující se medúza atd.

Již jsme se zmínili, že ke změně hybnosti tělesa  $\Delta p$  musíme vždy vynaložit sílu.

**Působíme-li větší silou, bude změna hybnosti větší. Je také důležité, jak dlouho tato síla působí. Je zřejmé, že čím déle bude síla působit, tím větší bude změna hybnosti.**

$$F \Delta t = \Delta p = m \Delta v$$

Součin síly  $F$  působící po dobu  $\Delta t$  na těleso je **impuls síly**. Na impulsu síly závisí změna hybnosti tělesa. Impuls síly je vektor a jeho jednotkou je newton sekunda ( $N \cdot s = kg \cdot m \cdot s^{-1}$ ).



**KO1.3.4-34.** Jaký směr bude mít změna rychlosti ve srovnání se směrem působící síly.

**KO1.3.4-35.** Která ze sil vyvolá větší změnu hybnosti.  $F_1 = 50 \text{ N}$  působící po dobu  $0,02 \text{ s}$ , nebo  $F_2 = 1 \text{ N}$  působící po dobu  $1 \text{ s}$ ?

**KO1.3.4-36.** Proč někdy drží i více hasičů proudnici, ze které prudce stříká voda?



**U1.3.4-37.** Jak velkou silou udeřil hokejista do stojícího kotouče o hmotnosti  $200 \text{ g}$ , jestliže kotouč nabyl rychlosti  $90 \text{ km/hod}$ ? Doba působení nárazové síly byla  $0,01 \text{ s}$ .

**U1.3.4-38.** Střela hmotnosti  $20 \text{ g}$  proletěla hlavní za  $0,01 \text{ s}$  a nabyla rychlosti  $800 \text{ m/s}$ . Jak velké rychlosti nabyla puška hmotnosti  $5 \text{ kg}$  při zpětném nárazu?

**U1.3.4-39.** Signální raketa o hmotnosti  $50 \text{ g}$  vystřelí  $5 \text{ g}$  plynů v jednom směru a raketa tím nabude rychlosti  $30 \text{ m/s}$ . Jaká je rychlost vystřelených plynů?

1. **Síla není příčinou pohybu, ale způsobuje jeho změnu.**
2. Síla se projevuje vždy **při vzájemném působení** dvou těles
  - přímým kontaktem,
  - na dálku prostřednictvím silových polí.

3. Účinky sil mohou být

- statické,
- dynamické.

4. Síla je **vektorová veličina** určená velikostí, směrem, orientací a působištěm. Jednotkou je newton  $1\text{N} = \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

5. **1. Newtonův pohybový zákon – zákon setrvačnosti:** Každé těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není vnějšími silami donuceno tento stav změnit.

6. **2. Newtonův pohybový zákon – zákon síly:** Zrychlení  $a$ , které uděluje síla  $F$  tělesu o hmotnosti  $m$ , je přímo úměrné velikost této síly a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.  $a = \frac{F}{m}$ .

• Při působení více sil na těleso je musíme **sčítat vektorovým součtem**.

• Síla, která způsobuje volný pád tělesa se označuje jako **tíhová síla** a je dána tíhovým zrychlením  $F_G = m g$ .

• Tíhová síla, kterou působí těleso na vodorovnou podložku je **tíha tělesa G**.

7. **Odporové síly** působí proti směru pohybu tělesa a brzdí jeho pohyb.

• **Třecí síla  $F_t$**  je přímo úměrná tlakové síle  $F_n$  a součiniteli smykového tření  $f$ .  $F_t = f F_n$ .

• **Odporová síla valivého odporu  $F_v$**  je přímo úměrná kolmé tlakové síle  $F_n$  působící na podložku, ramenu valivého odporu  $\xi$  a nepřímo úměrná poloměru  $R$  tělesa.  $F_v = \xi \frac{F_n}{R}$ .

8. **3. Newtonův pohybový zákon – zákon akce a reakce:** Síly, kterými na sebe působí dvě tělesa jsou stejně veliké, navzájem opačné orientace a vznikají a zanikají současně.

9. Newtonovy pohybové zákony platí v **inerciálních** neboli setrvačných vztažných soustavách.

10. Sílu, která vzniká v důsledku zrychleného pohybu vztažné soustavy nazýváme **setrvačná síla  $F_s$** .

11. **Setrvačná odstředivá síla  $F_o$**  vzniká v neinerciální vztažné soustavě pohybující se po zakřivené trajektorii.

12. Zakřivení pohybu po kružnici způsobuje **dostředivá síla  $F_d = m \frac{v^2}{r}$** .

13. **Hybnost tělesa  $p$**  je dána součinem jeho hmotnosti  $m$  a jeho rychlosti.  $p = m v$ .

14. **Zákon zachování hybnosti:** Uvedeme-li dvě tělesa z klidu do pohybu jen vzájemným silovým působením, součet jejich hybností je nulový, tedy stejný jako před uvedením do pohybu.  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$ .

15. Součin síly  $F$  působící po dobu  $\Delta t$  na těleso je **impuls síly**. Impuls síly způsobí změnu hybnosti tělesa. Impuls síly je vektor a jeho jednotkou je newton sekunda (N.s).

$$F \Delta t = \Delta p = m \Delta v$$

## 1.4 Práce, výkon, energie

Slovo práce má v běžném životě mnoho významů. Řekneme-li „těžká práce“, můžeme mít na mysli, že je s někým těžké pořízení, ale může jít i o namáhavou práci fyzickou nebo duševní (třeba se studiem fyziky). Tentýž problém máme i s výrazem energie. Můžeme hovořit o energii elektrické, energii vynaložené na získání nějakého cíle, nebo energii vyplývanou na vzdělávání svých potomků.

V této kapitole si problém zúžíme, budeme se zabývat pouze mechanickou prací, mechanickou energií a mechanickým výkonem. Přesto ale tato kapitola poskytne výklad řady pojmů a definice, které budou užitečné i při studiu dalších kapitol. Prostudujte si tedy tuto kapitolu velmi pozorně.



Kinematika hmotného bodu, dynamika.



Odhadovaný čas je 90 minut

### 1.4.1 Mechanická práce



1. Vědět, že práce je dráhový účinek síly.
2. Znát vztah pro výpočet práce.
3. Umět určit práci výpočtem i graficky.
4. Umět použít vztah pro práci, zejména vzhledem k úhlu, který svírá síla a dráha.

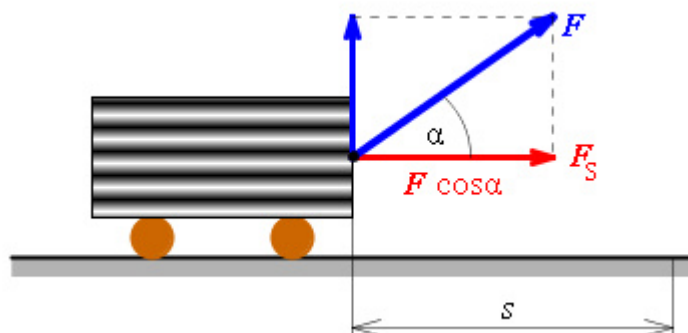


**Mechanická práce je práce síly.** Již na základní škole jste se učili, že tlačíme-li před sebou bednu po nějaké dráze a překonáváme odpor tření, konáme práci. Padáme-li, koná práci po trajektorii volného pádu tíhová síla, práci koná motor traktoru táhnoucího vlečku atd.

Velikost vykonané práce závisí nejen na velikosti působící síly, ale je důležitý i směr, ve kterém síla na těleso působí. Působí-li síla na těleso ve

směru trajektorie pohybu, jsou její účinky (a tím i vykonaná práce) maximální viz. obr. 1.4-1. Čím více se směr síly odchyluje od trajektorie, tím se účinky snižují. Z obrázku je vidět, že **práci koná jen složka síly ve směru pohybu  $F_s$** . Složka kolmá těleso nadlehčuje.

**Mechanická práce  $W$  vykonaná silou  $F$  při přemísťování tělesa je úměrná velikosti této síly  $F$ , dráze  $s$ , o kterou se těleso přemísť a úhlu  $\alpha$ , který svírá síla s trajektorií pohybu, viz. obr. 1.4-1.**



obr. 1.4-1

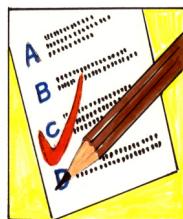
$$W = F s \cos \alpha$$

Jednotkou práce je joule (J). 1 joule je práce, kterou vykoná síla 1 N při přemístění tělesa po dráze 1 m ve směru působící síly.

Práce je **skalární veličina**.



**U1.4.1-1.** Vyjádřete jeden joule v jednotkách soustavy SI.



**KO1.4.1-2.** Na těleso pohybující se po vodorovné podložce působí postupně tři stejně velké síly. Síla  $F_1$  ve směru pohybu, síla  $F_2$  pod úhlem  $30^\circ$  od směru pohybu a síla  $F_3$  kolmo na směr pohybu. *Která síla koná největší práci?*

- a)  $F_1$       b)  $F_2$       c)  $F_3$       d) všechny síly konají stejnou práci

**KO1.4.1-3.** Na těleso pohybující se po vodorovné podložce působí postupně tři stejně velké síly. Síla  $F_1$  ve směru pohybu, síla  $F_2$  pod úhlem  $30^\circ$  od směru pohybu a síla  $F_3$  kolmo na směr pohybu. *Která síla koná nulovou práci?*

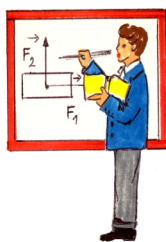
- a)  $F_1$       b)  $F_1, F_3$       c)  $F_3$       d) žádná z nich

**KO1.4.1-4.** Pro výpočet mechanické práce  $W$  lze použít následující vztahy:

- a)  $W = F s \sin \alpha$       b)  $W = F s \cos \alpha$       c)  $W = F s$

**KO1.4.1-5.** *Jak velkou práci vykoná síla 5 N působící ve směru osy  $x$  při přemístění tělesa z bodu A(2,0) do bodu B(12,0)?*





Člověk táhne rovnoměrným pohybem po vodorovné pláni sáně s nákladem 100 kg po dráze 300 m. *Jakou mechanickou práci vykoná, jestliže provaz svírá s vodorovnou rovinou úhel  $0^\circ$  a součinitel smykového tření saní na sněhu je 0,1?*

$= 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

Označíme si hmotnost nákladu  $m = 100 \text{ kg}$ , dráhu  $s = 300 \text{ m}$ , úhel mezi směrem pohybu a působící silou  $\alpha = 0^\circ$ , součinitel tření  $f = 0,1$ . Počítáme s  $g$

Má-li být pohyb rovnoměrný, pak člověk musí působit silou  $F$ , která je právě tak velká jako síla třecí  $F_t = f m g$ . Rovnoměrný pohyb (bez zrychlení) je totiž charakterizován tím, že výslednice působících sil je nulová. Podle vztahu pro práci  $W = F s \cos \alpha$  vykoná působící síla mechanickou práci:

$$W = F_t s = f m g s \cos \alpha = 0,1 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 300 \cdot \cos 0 = \underline{30\,000 \text{ J}}.$$

Člověk vykoná mechanickou práci 30 kJ.



**U1.4.1-6.** *Jakou mechanickou práci vykoná síla naší paže, jestliže nákupní tašku o hmotnosti 8 kg a) zvedneme do výše 1 m, b) držíme ve výši 1 m nad zemí, c) přeneseme ve vodorovném směru do vzdálenosti 5 m?*

**U1.4.1-7.** Cyklista jede stálou rychlostí po vodorovné silnici proti větru, který na něj působí silou 12 N. a) *Jakou práci vykoná při překonávání síly větru na dráze 5 km?* b) *Jakou práci vykoná, svírá-li směr větru se směrem jeho pohybu úhel  $60^\circ$ ?*

**U1.4.1-8.** Automobil o hmotnosti 2 000 kg jede stálou rychlostí do kopce se stoupáním 4 m na každých 100 m dráhy. Součinitel odporu proti pohybu automobilu je 0,08. *Určete práci, kterou vykoná motor automobilu na dráze 3 km.* Viz. obr. 1.4-2.

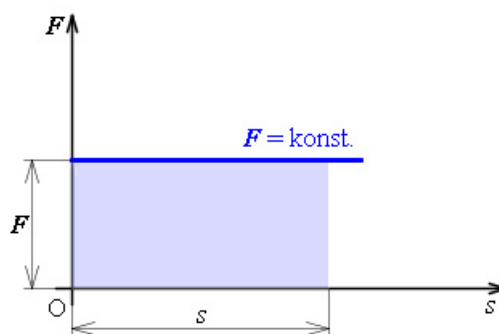


Další krátký úsek můžete vynechat. Pokud ovšem budete pokračovat ve studiu na vysoké škole, kde se setkáte s fyzikou, bude pro vás tato partie užitečná.

Mechanickou práci můžeme také určovat **graficky**. Vzpomeňte si na grafické stanovování velikosti uražené dráhy rovnoměrného pohybu

z plochy v diagramu závislosti rychlosti na čase (kapitola 1.2.5). Nyní si na osu  $x$  budeme vynášet dráhu  $s$ , na osu  $y$  pak velikost působící síly  $F$ . Musíme však rozlišovat různé situace podle charakteru působící síly:

- *Síla je konstantní.* V našem grafu bude znázorněna síla jako polopřímka rovnoběžná s osou  $s$ , viz. obr. 1.4-3.

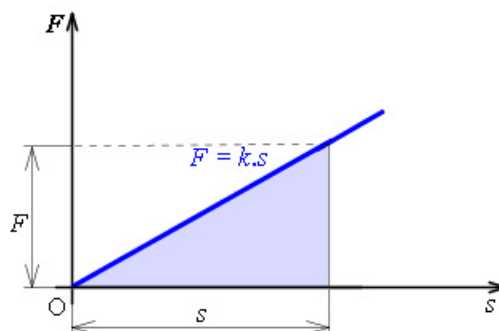


obr. 1.4-3



Obsah vyšrafovaného vybarveného obdélníka udává vykonanou práci  $W = F s$ . Ale pozor, jako působící sílu musíme uvažovat jen její složku působící ve směru pohybu.

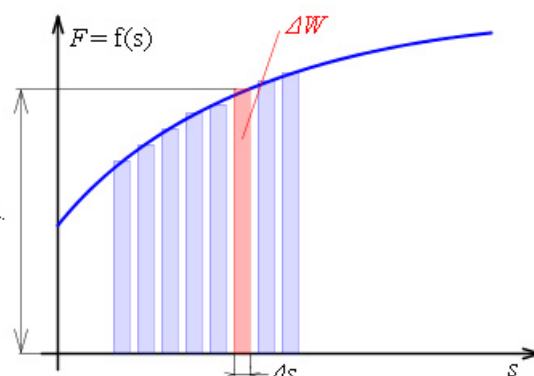
- *Síla je proměnná, rovnoměrně roste s dráhou ( $F = k s$ ). V tomto případě je práce dána obsahem podbarveného trojúhelníka  $W = \frac{1}{2} F s = \frac{1}{2} k s^2$ , viz. obr. 1.4-4.*



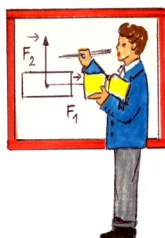
obr. 1.4-4

- *Síla je proměnná, její průběh je popsán obecnou křivkou. Tuto situaci vidíme na obrázku, viz. obr. 1.4-5. V tomto případě musíme rozdělit dráhu na malé úseky  $\Delta s$ , pro které je změna síly velmi malá, zanedbatelná. Sílu v tomto úseku dráhy považujeme za konstantní. Pro podbarvenou plošku opět platí, že odpovídající přírůstek práce  $\Delta W$  si můžeme vyjádřit jako součin konstantní síly v daném úseku dráhy  $F$  a příslušné dráhy  $\Delta s$ ,  $\Delta W = F \Delta s$ . Celková*

vykonaná práce je pak součtem všech prací na jednotlivých úsecích. Tento postup je vlastně základem pro integrování plochy. Ale s tím se seznámíte až na vysoké škole.



obr. 1.4-5



Vypočítejte práci nutnou k prodloužení pružiny o 10 cm. Tuhost pružiny je  $500 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

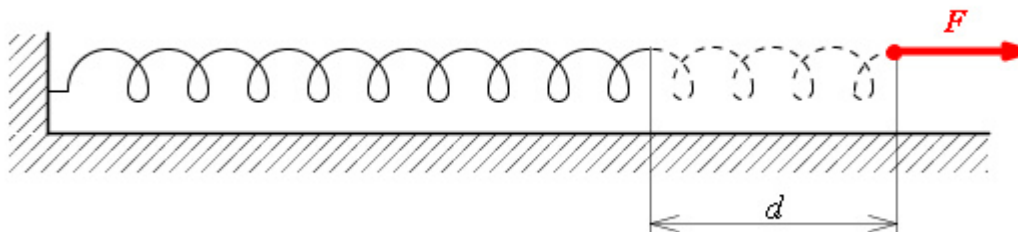
Tuhost pružiny vyjadřuje elastické vlastnosti pružiny. Tuhost pružiny  $k$  je konstanta úměrnosti mezi působící silou a délkou protažení pružiny. Kdo posilujete ruce s roztahovacími pružinami, víte že čím více pružiny roztahujete, tím větší sílu musíte vynaložit.

Při výpočtu vykonané práce nemůžeme přímo vyjít ze vztahu pro práci  $W = F s \cos\alpha$ . Tento vztah platí za podmínky, že síla po celé dráze zůstává konstantní. V našem případě síla se mění s délkou protažení  $d$  podle vztahu  $F = k d$ . Tedy použijeme grafického určování velikosti práce. Vyjdeme z obrázku pro průběh síly, která lineárně roste s dráhou, jak je znázorněno na obrázku, viz. obr. 67.

Pro vykonanou práci pak plyne z obrázku vztah  $W = \frac{1}{2} k d^2$ . Po dosazení dostáváme  $W = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0,1^2 = 2,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

Abychom pružinu udrželi protaženou o 10 cm, musíme na ni působit silou 5 N, viz. obr. 1.4-6. a) *Jaká je tuhost pružiny?* b) *Jak velkou práci konáme?*

a)  $500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Vycházíme ze vztahu  $F = k d$ . b) O J. Práce se nekona, nepůsobíme silou po dráze.



obr. 1.4-6

## 1.4.2 Výkon



1. Vědět, že výkon je veličina vyjadřující „jak rychle se práce koná“.
2. Umět vyjádřit práci z výkonu a odvodit příslušné jednotky.
3. Vysvětlit rozdíl mezi výkonem a příkonem.
4. Definovat účinnost.
5. Vědět, že okamžitý výkon souvisí se silou a rychlostí.



V současné civilizaci se pracovní síla hodnotí nejen podle množství odvedené práce, ale také za jakou dobu je provedena. Pracovníci se hodnotí podle jejich výkonu. **Výkon vyjadřuje jak rychle se určitá práce koná.** Ve fyzice se fyzikální veličina výkon definuje následovně:

**Výkon  $P$  je podíl vykonané práce  $\Delta W$  a doby  $\Delta t$ , za kterou byla tato práce vykonána.**

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Jednotkou výkonu je jeden watt (W). Z definičního vztahu pro výkon vyplývá, že  $1 \text{ W} = \text{J/s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ .

Jednotka watt je poměrně malá jednotka. Zdvihneme-li kilogramové závaží do výšky jednoho metru za jednu sekundu, pracujeme s výkonem přibližně 10 W. V praxi se nejčastěji setkáváme s výkony vyjadřovanými v kilowatech (kW). Slabší auta mají motor s výkonem 40 až 50 kW, silná ve stovkách kW. Hovoříme-li o výkonech elektráren, pak je vyjadřujeme v megawatech (MW).

Například při určování výkonu motoru auta, ale i jinde se můžete setkat se starší jednotkou nazývanou koňská síla HP (horse power).  $1 \text{ HP} = 0,746 \text{ kW} \approx \frac{3}{4} \text{ kW}$ .

Definičním vztahem pro výkon jsme si definovali **průměrný výkon**. Budeme-li určovat výkon ve velice krátkém časovém intervalu  $\Delta t$ , budeme stanovovat **okamžitý výkon**.

Často potřebujeme určit okamžitý výkon třeba motoru auta v nějakém krátkém čase  $\Delta t$ . V tomto případě dostačuje znát tažnou sílu motoru  $F$  a rychlost auta  $v$ . Uvažujme takto: za velmi krátkou dobu  $\Delta t$  urazí těleso (auto) dráhu  $\Delta s$  a bude mít okamžitou rychlost  $v = \Delta s / \Delta t$ . Tažná síla vykoná práci  $\Delta W = F \Delta s$ . Okamžitý výkon tedy bude:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \Delta s}{\Delta t} = F v.$$

U řady elektrických spotřebičů jste se jistě setkali s pojmem podobným výkonu – příkonem. Touto veličinou vyjadřujeme, že dodáváme spotřebiči určitou energii  $\Delta E$  za čas  $\Delta t$ . Pomocí těchto veličin definujeme příkon.

**Podíl dodané energie  $\Delta E$  a doby, po kterou energii dodáváme  $\Delta t$  nazýváme příkon  $P_o$ .**

$$P_o = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

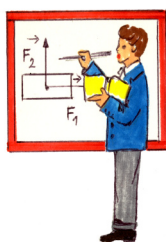
Jednotkou příkonu bude samozřejmě zase watt.

Máme-li tedy reálný spotřebič, například elektromotor, s příkonem  $1 \text{ kW}$ , pak se těžko veškerá dodaná energie spotřebuje na tzv. užitečný výkon  $P$  (výkon využitý pro požadovanou činnost). Bude to záviset na konstrukci elektromotoru, na kvalitě jeho provedení a řadě jiných parametrů. To jak velká část příkonu se využije ve formě užitečného výkonu, nám udává veličina nazývaná účinnost  $\eta$  (éta).

**Účinnost  $\eta$  je podíl výkonu  $P$  a příkonu  $P_o$ .**

$$\eta = \frac{P}{P_o}$$

Účinnost je bezrozměrná veličina, násobíme-li ji stem, dostaneme účinnost v procentech.



Zásobník vody pro vodovod je na sloupu ve výšce  $25 \text{ m}$  nad povrchem vody v přehradě. Kolik vody přečerpá čerpadlo s příkonem  $30 \text{ kW}$  do zásobníku za  $1$  hodinu, je-li účinnost čerpadla  $30 \%$ ? Za jakou dobu se voda načerpá do nádrže spotřebuje, je-li spotřeba vody  $10 \text{ l}$  za sekundu? Změnu výšky hladiny v přehradě zanedbáváme.

Označíme si příkon čerpadla  $P_o = 3 \cdot 10^4 \text{ W}$ , jeho účinnost  $\eta = 0,3$ , objem, který odečte za  $1$  sekundu  $V_s = 10 \text{ l/s}$ , čas čerpání  $t = 1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$ , výšku nad hladinou  $h = 25 \text{ m}$ , hustota vody je  $\rho = 1\,000 \text{ kg.m}^{-3}$ , hledaný objem bude  $V$  a hledaný čas  $t_L$ .

Výkon čerpacího zařízení je  $P = \eta P_o$ , práce vykonaná při přečerpávání vody za dobu  $t$  je  $W = P t = \eta P_o t$ . K přečerpání vody o objemu  $V$  a hustotě  $\rho$  do výšky  $h$  je nutné vykonat práci. Tato práce se projeví jako změna potenciální energie vody  $E_p = m g h = V \rho g h$ . Vykonaná práce je rovna změně energie.

$$\eta P_o t = V \rho g h.$$

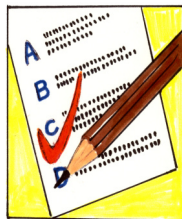
Z této rovnice určíme objem vyčerpané vody:

$$V = \frac{\eta P_o t}{\rho g h} = 0,3 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 3600 / (10^3 \cdot 10 \cdot 25) = \underline{130 \text{ m}^3}$$

**Doba, za kterou se voda o objemu  $V$  spotřebuje je**

$$t_1 = V/V_s = 130 / (10 \cdot 10^{-3}) = 13\,000 \text{ s} = \underline{3,6 \text{ h}}.$$

Za 1 hodinu se do nádrže načerpá  $130 \text{ m}^3$  vody, která se pak spotřebuje za 3,6 h.



**KO1.4.2-9. Jednotka  $W \cdot s$  (wattsekunda) je jednotkou :**

- a) výkonu                      b) práce                      c) energie                      d) impulzu  
síly

**KO1.4.2-10. Fyzikální veličina výkon je:**

- a) vektor                      b) skalár

**KO1.4.2-11. Účinnost  $\eta$  je vždy:**

- a)  $< 1$                       b)  $> 1$                       c)  $\leq 1$                       d)  $\geq 1$



**U1.4.2-12. Vzpěrač zvedl činku o hmotnosti  $210 \text{ kg}$  do výšky  $2 \text{ m}$  za  $3 \text{ s}$ . Urči jeho průměrný výkon.**

**U1.4.2-13. Na těleso působí konstantní síla  $2 \text{ N}$ . Určete jeho výkon v okamžiku, kdy je jeho rychlost  $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .**

**U1.4.2-14. Sklep, jehož podlaha o ploše  $50 \text{ m}^2$  je ve výšce  $3 \text{ m}$  pod úrovní okolí, zaplavila voda do výšky  $80 \text{ cm}$ . Za jakou dobu vyčerpá tuto vodu čerpadlo o příkonu  $1 \text{ kW}$  a účinnosti  $75 \%$ ?**

**U1.4.2-15. Elektromotor s příkonem  $1,2 \text{ kW}$  vykoná za  $1$  minutu práci  $60 \text{ kJ}$ . Jaká je jeho účinnost?**

**U1.4.2-16. Běžně používanou praktickou jednotkou práce je kilowatthodina. Kolik je to joulů?**

## 1.4.3 Mechanická energie



1. Vědět, že mechanická energie je dána součtem energie kinetické a potenciální.
2. Znat souvislost změny kinetické energie a tíhové potenciální energie s mechanickou prací.
3. Znat vztah pro kinetickou energii.
4. Vědět, že tíhová potenciální energie závisí na volbě nulové hladiny energie.

5. Znat vztah pro tíhovou potenciální energii.

6. Vědět, že potenciální energii pružnosti mají všechna pružně deformovaná tělesa.

7. Znát vztah pro energii pružně deformované pružiny.

8. Znát zákon zachování energie, umět uvést konkrétní příklady dějů, při nichž se mechanická energie mění v jiné formy energie.



Koná-li síla mechanickou práci přemísťováním tělesa, pak se výsledek této práce může projevit dvojím způsobem:

a) *Těleso získá nebo změní svou rychlost.* Vyjděme z následujícího příkladu. Tlačíme vozík hmotnosti  $m$  určitou konstantní silou  $F$  po vodorovné dráze délky  $s$ . Neuvažujeme odporové síly. Vozík se bude

pohybovat pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením  $a = \frac{F}{m}$  a za čas  $t$  získá rychlost  $v$

$= a t$ . V tomto čase urazí vozík dráhu  $s = \frac{1}{2} a t^2$ . Práce vykonaná působící silou bude:

$$W = F s = m a \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} m (a t)^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

Takto „rozjetý“ vozík, který má „energii“, může tuto energii přeměnit zpět na práci. Tuto mechanickou energii označujeme jako **kinetickou (pohybovou) energii tělesa  $E_k$** . Kinetická energie je **skalární veličina**.

**Kinetická energie  $E_k$  tělesa je přímo úměrná jeho hmotnosti  $m$  a druhé mocnině jeho rychlosti  $v$ .**

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Síla působící po dráze dodá tedy tělesu kinetickou energii. Proto kinetická energie bude mít stejnou jednotku jako práce. Jednotkou kinetické energie je joule.

b) *Těleso získá schopnost konat práci.* Uveďme si zase příklad. Zdvihejme těleso hmotnosti  $m$  do výšky  $h$  nad povrch Země. Aby pohyb byl rovnoměrný, budeme působit stejně velkou silou jako je tíhová síla  $F_G$ , ale opačně orientovanou. Musíme vykonat práci:

$$W = F s = F_G h = m g h.$$

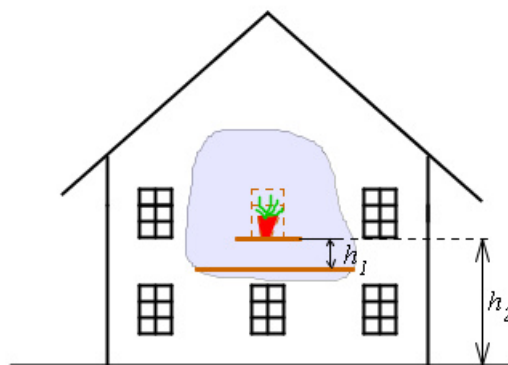
Vykonaná práce se tentokrát přeměnila na energii označovanou jako potenciální. Protože se jedná o potenciální energii, kterou mají tělesa v tíhovém poli Země, nazýváme ji **tíhová potenciální (polohová) energie tělesa**.

**Tíhová potenciální energie  $E_p$  tělesa hmotnosti  $m$  ve výšce  $h$  nad povrchem Země je přímo úměrná jeho hmotnosti, tíhovému zrychlení  $g$  a výšce  $h$ .**

$$E_p = m g h$$

Potenciální energie se opět vyjadřuje v jednotkách joule.

Jistě jste si všimli, že tíhovou potenciální energii jsme definovali ve výšce  $h$  nad povrchem Země. **Tíhová potenciální energie tělesa závisí na volbě vodorovné roviny, vůči které ji stanovujeme.** Proto je třeba si dát pozor na to vůči jaké rovině potenciální energii vztahujeme. Zase se podívejme na příklad a to na obrázku, viz. obr. obr. 1.4-7. Květináč stojící na okenním parapetu má potenciální energii vůči podlaze bytu  $m g h_1$ . Spadne-li nám na nohu v místnosti až tak moc se nestane. Potenciální energie květináče vůči Zemi je  $m g h_2$ . Kdyby nám spadl na chodníku na hlavu, byly by jeho účinky podstatně vážnější.



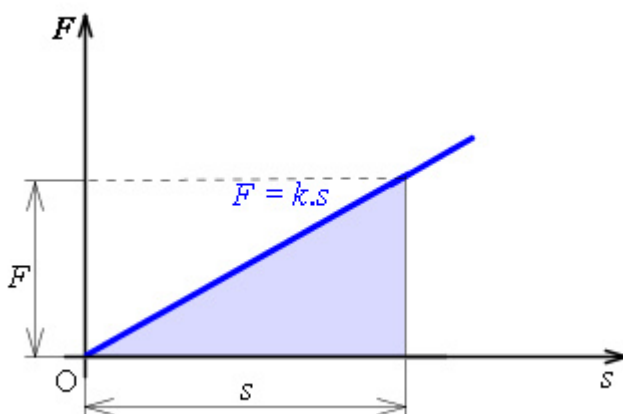
obr. 1.4-7

Tíhová potenciální energie není jedinou fyzikům známou potenciální energií. Potenciální energie se vždy definuje v poli určitých sil. Tak třeba se později setkáme s potenciální energií elektrického a magnetického pole. Zůstaňme ale v mechanice. Probereme si ještě jednu mechanickou potenciální energii, a to potenciální energii pružnosti.

Stlačíme-li pružinu vzduchovky – „natáhneme“ tuto pušku. Zmáčkne-li spoušť uvolníme pružinu a ta koná práci vystřelením broku. To je typický příklad uvolnění tzv. **elastické energie**. Elastickou energii, jinak řečeno **potenciální energii pružnosti**, mají všechna pružně deformovaná tělesa.

Potenciální energii pružnosti stanovujeme pomocí práce, kterou vykonají vnější síly při deformaci tělesa.

Všimneme si velice častého případu deformace pružiny. Síla stlačující (natahující) pružinu je úměrná deformaci  $F = k s$ . Deformací (deformační dráhou) rozumíme vzdálenost o kterou byla pružina prodloužena (resp. zkrácena). Vnější síla tak po deformační dráze  $s$  vykoná práci, kterou jsme již graficky stanovovali v kapitole 1.4.1. Podle obrázku, viz. obr. 1.4-8 je práce dána obsahem vybarveného trojúhelníku vztahem  $W = \frac{1}{2} k s^2$ . Tato práce se rovná potenciální energii pružnosti  $W = E_p$ .



obr. 1.4-8

**Potenciální energie pružnosti je dána tuhostí pružiny  $k$  a čtvercem deformační dráhy  $s$ .**

$$E_p = \frac{1}{2} k s^2$$

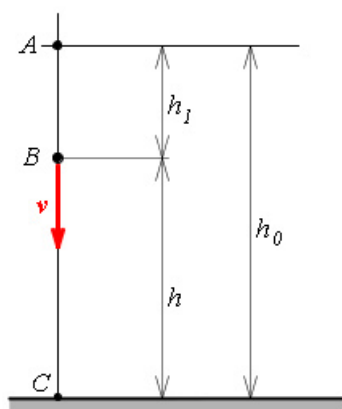
**Tuhost pružiny** je materiálová konstanta, která vyjadřuje elastické vlastnosti pružiny a má jednotku  $\text{N.m}^{-1}$ .



Ale vraťme se ještě k příkladu padajícího květináče. Vysvětleme si, proč jsou účinky v obou případech různé. Necháme spadnout květináč z parapetu do místnosti. Květináč má tíhovou potenciální energii vůči podlaze  $m g h_1$  a začne padat vlivem tíhové síly. Tíhová síla koná práci po délce  $h_1$ . Tato práce se změnila na kinetickou energii. Po dopadu na podlahu se celá tíhová potenciální energie přemění na kinetickou energii. Padá-li květináč z okna, opět se tíhová potenciální energie mění na energii pohybovou. Teď však určujeme potenciální energii vůči Zemi, výška  $h_2$  je podstatně větší než  $h_1$ . Potenciální energie květináče vůči Zemi je tedy také větší než vůči podlaze v místnosti. Protože se mění větší potenciální energie, bude i kinetické energie květináče větší. To znamená, že bude větší i jeho dopadová rychlost a s tím související jeho hybnost.

Na případu květináče jsme si vlastně vysvětlili důležitý fyzikální zákon, zákon zachování mechanické energie. Popišme si, co se vlastně děje při pádu květináče poněkud „fyzikálněji“.

Vyjdeme z obrázku, viz. obr. 1.4-9. Tíhová potenciální energie  $E_{po}$  tělesa hmotnosti  $m$  je v bodě A rovna  $m g h_o$  (vůči Zemi). Je-li těleso v klidu, jeho kinetická energie je nulová  $E_{ko} = 0$ . V bodě B se potenciální energie snížila o  $m g h_1$  na hodnotu  $m g h$ . Současně ale těleso získalo kinetickou energii  $\frac{1}{2} m v^2$ . A konečně ve spodním bodě C je potenciální energie tělesa nulová  $E_p = 0$  a jeho kinetická energie je  $E_k = \frac{1}{2} m v_k^2$ .



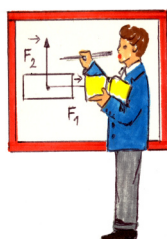
obr. 1.4-9

Z předešlého si můžeme vyvodit závěr, že při volném pádu se celková mechanická energie tělesa podél celé trajektorie nemění. Dokonce lze experimenty dokázat, že platí obecnější **zákon zachování mechanické energie:**

**Při všech mechanických dějích se mění potenciální energie v kinetickou energii a naopak. Celková mechanická energie v izolované soustavě se zachovává.**

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = \text{konst.}$$

Je třeba zdůraznit, že tento zákon platí pouze v izolované soustavě těles. Nemohou zde působit síly zvnějšku. Například při volném pádu jsme neuvažovali odpor prostředí.



Těleso hmotnosti 1 kg padá z výšky 45 m. *Jaké budou potenciální a kinetická energie a) na počátku pohybu, b) po jedné sekundě a c) po třech sekundách pádu?*



Označíme si hmotnost tělesa  $m = 1 \text{ kg}$ , výšku  $h = 45 \text{ m}$ , časy  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1 \text{ s}$ ,  $t_3 = 3 \text{ s}$ , hledáme energii kinetickou  $E_k$  a energii tíhovou potenciální  $E_p$ . Budeme počítat pro tíhové zrychlení  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

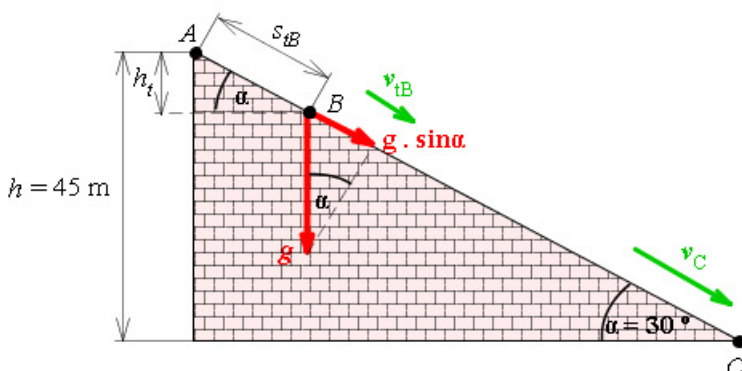
ad a) Ve výšce  $h$  bude mít těleso vůči povrchu Země potenciální energii  $E_{po} = m g h = 1 \cdot 10 \cdot 45 = 450 \text{ J}$ . Předpokládáme, že těleso pouze upustíme, tedy jeho počáteční rychlost je nulová a tedy i kinetická energie bude nulová. Jeho celková energie je  $E_c = E_{po} + E_{ko} = 450 \text{ J}$ .

ad b) Na konci první sekundy urazí těleso dráhu  $s_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = 0,5 \cdot 10 \cdot 1^2 = 5 \text{ m}$  a bude mít rychlost  $v_1 = g t_1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ m/s}$ . Potenciální energie vůči povrchu Země tedy bude  $E_p = m g (h - s_1) = 1 \cdot 10 \cdot (45 - 5) = 400 \text{ J}$ . Kinetická energie bude  $E_k = 0,5 \cdot m \cdot v_1^2 = 0,5 \cdot 1 \cdot 10^2 = 50 \text{ J}$ . Součet obou energií je roven celkové energii a bude zase 450 J.

ad c) Na konci třetí sekundy urazí těleso dráhu  $s_3 = \frac{1}{2} g t_3^2 = 0,5 \cdot 10 \cdot 3^2 = 45 \text{ m}$  a bude mít rychlost  $v_3 = g t_3 = 10 \cdot 3 = 30 \text{ m/s}$ . Potenciální energie vůči povrchu Země tedy bude  $E_p = m g (h - s_3) = 1 \cdot 10 \cdot (45 - 45) = 0 \text{ J}$ . Těleso v tomto okamžiku dopadne na povrch Země. Kinetická energie bude  $E_k = 0,5 \cdot m \cdot v_3^2 = 0,5 \cdot 1 \cdot 30^2 = 450 \text{ J}$ .



Vraťme se ještě k tomuto řešenému příkladu. Poněkud si změňme situaci. Těleso nepadá z výšky 45 m, ale klouže z této výšky bez tření po nakloněné rovině se sklonem  $30^\circ$ , viz. obr. 1.4-10.



obr. 1.4-10

Zase budeme hledat potenciální tíhovou a kinetickou energii podél dráhy tělesa. Začneme v bodě A, tedy na počátku pohybu. Stejně jako v případě volného pádu, bude zde kinetická energie nulová  $E_{kA} = 0$ . Potenciální polohová energie zde bude maximální  $E_{pA} = m g h$ . Celková mechanická energie tělesa je  $E_{cA} = E_{kA} + E_{pA} = m g h$ .

Přejdeme do bodu B do kterého dorazí těleso za čas  $t$ . Energie počítáme úplně stejným způsobem jako v řešeném případě. Pouze si musíme uvědomit, že na nakloněné rovině způsobuje pohyb jen složka tíhové síly  $F = F_G \sin \alpha = m g \sin \alpha$ .

Za čas  $t$  urazí těleso dráhu  $s_{tB} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$  a bude mít rychlost  $v_{tB} = g \sin \alpha t$ . V tomto čase bude potenciální energie tělesa  $E_{pB} = m g h_t = m g (s_{tB} \sin \alpha)$ . Dosadíme-li za dráhu  $s_{tB}$ , dostaneme pro potenciální tíhovou energii výraz  $E_{pB} = m g h - m g \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$ .

Kinetická energie tělesa je  $E_{kB} = \frac{1}{2} m v_{tB}^2 = \frac{1}{2} m (g \sin \alpha t)^2 = \frac{1}{2} m g^2 \sin^2 \alpha t^2$ . Sečteme-li teď obě mechanické energie v bodě B, dostaneme výraz  $E_{cB} = E_{kB} + E_{pB} = m g h = E_{cA}$ .

A konečně se podívejme na koncový bod dráhy  $C$ . Potenciální energie tělesa vůči Zemi zde bude nulová  $E_{pC} = 0$ . Kinetická energie se vypočítá ze vztahu  $E_{kC} = \frac{1}{2} m v_C^2$ . Konečnou rychlost si musíme stanovit. Do vztahu pro rychlost potřebujeme znát čas, který těleso potřebuje k uražení celé dráhy. Čas si určíme právě ze známé dráhy  $s_C = \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t_C^2$ .

Z tohoto vztahu vyplývá pro hledaný čas vztah  $t_C = \sqrt{\frac{2s_C}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha}}$ . Dosadíme tento

čas do rovnice pro rychlost  $v_C = g \sin \alpha \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha}}$ , a rychlost pak do vztahu pro hledanou

kinetickou energii. Po úpravě výsledného výrazu dostaneme zase  $E_{kC} = m g h$ . V dolním bodě dráhy je kinetická energie tělesa rovna potenciální energii na počátku dráhy  $E_{kC} = E_{pA} = E_c$ .

Proč jsme tak důkladně rozebírali tento příklad? Výpočty mechanických energií se zde prováděly pomocí vzorců z kinematiky. To vedlo ke zdlouhavým výpočtům. Pokud ale máme určit jen hodnoty energií, často dostačuje vycházet ze zákona zachování energie a výpočty se podstatně zjednoduší. Kdybychom měli například stanovit v našem případě konečnou rychlost  $v_C$  v bodě  $C$ . Vyjdeme ze zákona zachování energie, energie si stanovíme nahoře v bodě  $A$  a dole v bodě  $C$ . Bude platit  $E_{cA} = E_{cC}$ , tedy  $m g h = \frac{1}{2} m v_C^2$ .

Vyjádríme si z této rovnice konečnou rychlost  $v_C = \sqrt{2 g h}$ . Po dosazení

$$v_C = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} = 30 \text{ m.s}^{-1}.$$

A do třetice se vrátíme k řešenému příkladu. Zopakujme si jaké problémy jsme řešili.

- Nejdříve jsme uvažovali volný pád tělesa a vyšetřovali jsme přeměnu jedné formy mechanické energie (potenciální tíhové) v druhou formu (kinetickou energii).
- V druhém případě se těleso pohybovalo po nakloněné rovině bez tření. Opět se původní tíhová potenciální energie měnila postupně v energii kinetickou.

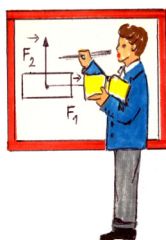
V obou případech se jednalo o uzavřenou (izolovanou) soustavu skládající se ze Země a vyšetřovaného tělesa. Uvnitř soustavy působila tíhová síla – říkáme jí **vnitřní síla** soustavy. Na soustavu nepůsobily žádné **vnější síly**  $F_{ext}$ . V našem případě vnějšími silami mohou být odporové síly jako je tření, odpor vzduchu apod.

V této izolované soustavě platí:  $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = \text{konst.}$ . Matematické znění tohoto zákona zachování energie si můžeme také zapsat jako  $\Delta E = 0$ .

- V posledním případě jsme uvažovali, že na soustavu působí vnější síly. Tělesu brání ve volném pádu odporová síla vzduchu. Pohybuje-li se těleso po nakloněné rovině, pak působí třecí síla atp. To prakticky znamená, že například při pohybu po nakloněné rovině se část celkové energie soustavy spotřebuje na práci třecích sil, případně na práci nutnou k překonání odporu vzduchu. **Dochází ke změně celkové mechanické energie soustavy  $\Delta E \neq 0$ .**

**Změna mechanické energie soustavy je dána prací vnějších sil.**

$$\Delta E = F_{ext} s = W_{ext}.$$



Vraťme se ještě naposled k příkladu tělesa hmotnosti 1 kg pohybujícího se z výšky 45 m. Bude se pohybovat po nakloněné rovině o úhlu  $30^\circ$ , tentokrát se třením. Koeficient smykového tření bude 0,3. Máme určit *rychlost tělesa* na konci nakloněné roviny.

Těleso v horním bodě bude mít nulovou kinetickou energii  $E_{kA} = 0$ . Jeho celková energie bude rovna potenciální tíhové energii  $E_{pA} = m g h = 1 \cdot 10 \cdot 45 = 450 \text{ J}$ .

Když se těleso pohybovalo bez tření, byla jeho celková energie v dolním bodě  $C$  rovna kinetické energii. Ze zákona zachování energie vyplývalo  $m g h = \frac{1}{2} m v_C^2$ .

Ale my teď uvažujeme tření. Dochází tedy ke změně celkové energie, ve spodním bodě bude celková energie menší o vykonanou práci třecích sil. To si můžeme vyjádřit obecným vztahem:

$$\Delta E = E_{cA} - E_{cC} = W_{ext}.$$

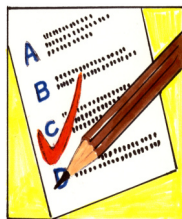
V našem případě bude platit, dosadíme-li za práci třecích sil výraz  $f m g \cos \alpha$ .

$$m g h - \frac{1}{2} m v_C^2 = f m g \cos \alpha.$$

Hledaná rychlost je tedy dána vztahem:

$$v_C = \sqrt{2(g h - f g \cos \alpha)} = \sqrt{2(10 \cdot 45 - 0,3 \cdot 10 \cdot \cos 30)} = 29,9 \text{ m.s}^{-1}$$

Rychlost na konci nakloněné roviny bude poněkud menší, než v ideálním případě pohybu bez tření ( $30 \text{ m.s}^{-1}$ ).



**KO1.4.3-17.** Těleso hmotnosti  $m$  bylo vrženo v gravitačním poli Země svisle vzhůru počáteční rychlostí  $v_0$ . V nejvyšším bodě své dráhy má těleso:

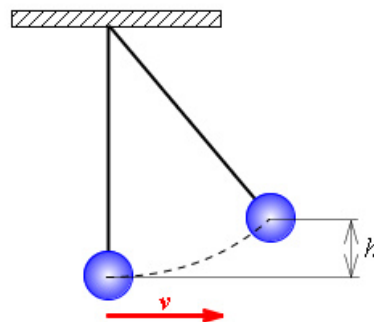
- a) jen energii kinetickou
- b) jen energii potenciální
- c) jak kinetickou, tak potenciální energii.

**KO1.4.3-18.** Těleso hmotnosti  $m$  bylo vrženo v gravitačním poli Země šikmo vzhůru počáteční rychlostí  $v_0$  pod elevačním úhlem  $\alpha$ . V nejvyšším bodě své dráhy má těleso:

- a) jen energii kinetickou
- b) jen energii potenciální
- c) jak kinetickou, tak potenciální energii.

**KO1.4.3-19.** Kámen tíhy  $20 \text{ N}$  byl vržen svisle vzhůru v gravitačním poli Země počáteční rychlostí  $4 \text{ m/s}$ . Odpor prostředí neuvažujeme. Jak velkou energii má kámen v nejvyšším bodě své dráhy?

**KO1.4.3-20.** Kyvadlo prochází rovnovážnou polohou rychlostí  $v$ . Odpor prostředí



neuvažujeme. Do jaké výšky  $h$  vystoupí?, viz. obr. 1.4-11.

**KO1.4.3-21.** Ve vagónu, který jede po přímé trati rychlostí 6 m/s, bylo vrženo ve směru jízdy těleso o hmotnosti 2 kg rychlostí 4 m/s vzhledem k vagónu. *Jakou kinetickou energii má těleso vzhledem k vagónu?*

- a) 32 J      b) 16 J      c) 8 J      d) 4 J

**KO1.4.3-22.** Ve vagónu, který jede po přímé trati rychlostí 6 m/s, bylo vrženo ve směru jízdy těleso o hmotnosti 2 kg rychlostí 4 m/s vzhledem k vagónu. *Jakou kinetickou energii má těleso vzhledem k povrchu Země?*

- a) 100 J      b) 52 J      c) 36 J      d) 16 J

**KO1.4.3-23.** Vodorovná deska stolu je ve výšce 0,8 m nad podlahou místnosti. Na stole leží kulička o hmotnosti 0,2 kg. *Jakou tíhovou potenciální energii má kulička vzhledem k podlaze místnosti? Počítejte s  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .*

- a) 0,4 J      b) 1,6 J      c) 2 J      d) 4 J

**KO1.4.3-24.** Vodorovná deska stolu je ve výšce 0,8 m nad podlahou místnosti. Na stole leží kulička o hmotnosti 0,2 kg. *Jakou práci vykonáme, zvedneme-li kuličku rovnoměrným pohybem do výšky 0,2 m nad desku stolu? Počítejte s  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .*

- a) 0,4 J      b) 1,6 J      c) 2 J      d) 4 J

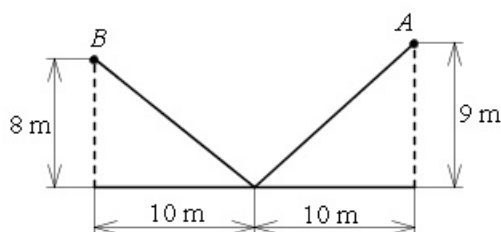


**U1.4.3-25.** Kabina výtahu o hmotnosti 400 kg vyjede ze třetího do pátého poschodí. O jakou hodnotu se zvětší tíhová potenciální energie kabiny? Jakou užitečnou práci přitom vykoná motor výtahu? Výška jednoho poschodí je 5 m.

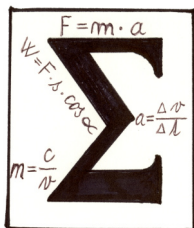
**U1.4.3-26.** Automobil jedoucí rychlostí 25 km/h zvětšil při výjezdu na dálnici rychlost na 75 km/h. *Kolikrát se zvětšila jeho kinetická energie?*

**U1.4.3-27.** Těleso o hmotnosti 10 kg je zvednuto do výšky 1 m nad stůl rovnoměrným pohybem po šikmé dráze, která svírá se svislým směrem úhel  $60^\circ$ . *Určete jakou polohovou energii těleso získá vzhledem k vodorovné desce stolu.*

**U1.4.3-28.** Těleso hmotnosti 100 kg je přeneseno z místa A do místa B po vyznačené dráze podle obrázku, viz. obr. 1.4-12, neuvažujeme žádné odporové síly. *Jaká byla vykonána práce?*



obr. 1.4-12



1. **Mechanická práce**  $W$  je práce složky síly ve směru pohybu.

- Mechanická práce  $W$  vykonaná silou  $F$  při přemísťování tělesa je úměrná velikosti této síly  $F$ , dráze  $s$ , o kterou se těleso přemístí a úhlu  $\alpha$ , který svírá síla s trajektorií pohybu.  $W = F s \cos \alpha$ .
- Jednotkou práce je joule,  $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ .
- Mechanickou práci můžeme určovat graficky z diagramu  $F = f(s)$ .

2. **Výkon** vyjadřuje „jak rychle se práce koná“.

- Výkon  $P$  je podíl vykonané práce  $\Delta W$  a doby  $\Delta t$ , za kterou byla vykonána.  $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ .
- Jednotkou výkonu je watt,  $W = J/s = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ .
- **Okamžitý výkon** je možné vyjádřit pomocí působící síly  $F$  a získané rychlosti  $v$ .  
 $P = F v$ .

**Příkon**  $P_o$  je podíl dodané energie  $\Delta E$  a doby  $\Delta t$  po kterou energii dodáváme.  $P_o = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ .

- **Účinnost  $\eta$  je podíl výkonu  $P$  a příkonu  $P_o$ .**  $\eta = \frac{P}{P_o}$ .

- Účinnost je bezrozměrná veličina.

3. **Kinetická energie**  $E_k$  tělesa je přímo úměrná jeho hmotnosti  $m$  a druhé mocnině jeho rychlosti  $v$ .  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ .

- Jednotkou je joule.

4. **Tíhová potenciální energie**  $E_p$  tělesa hmotnosti  $m$  ve výšce  $h$  nad povrchem Země je přímo úměrná jeho hmotnosti, tíhovému zrychlení  $g$  a výšce  $h$ .  $E_p = m g h$ .

- Jednotkou je joule.
- Tíhová potenciální energie tělesa závisí na volbě vodorovné roviny, vůči které ji stanovujeme.

5. **Potenciální energie pružnosti** je dána tuhostí pružiny  $k$  a čtvercem deformační dráhy  $s$ .

$$E_p = \frac{1}{2} k s^2.$$

- **Tuhost pružiny** je materiálová konstanta a má jednotku  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

6. Při všech mechanických dějích se mění potenciální energie v kinetickou energii a naopak. **Celková mechanická energie v izolované soustavě se zachovává.**  $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = \text{konst.}$

7. **Změna mechanické energie soustavy je dána prací vnějších sil.**  $\Delta E = F_{\text{ext}} s = W_{\text{ext.}}$

## 1.5 Gravitační pole

Není třeba na úvod této kapitoly uvádět praktický příklad působení gravitace na hmotná tělesa. Každý jsme již upadli, nebo nám něco spadlo na zem.

Této problematice jsme se již dotkli v dynamice, hlavně v kapitole tíhová síla a tíha tělesa. V následující krátké kapitole se na příčinu našich „pádů“ podíváme podrobněji.



Kinematika hmotného bodu, dynamika



Odhadovaný čas je 90 minut

### 1.5.1 Newtonův gravitační zákon



1. Osvojit si poznatek o vzájemném přitahování hmotných objektů.
2. Znat vztah pro velikost gravitační síly.
3. Umět definovat gravitační pole.
4. Umět vypočítat gravitační síly i jiných polí než v gravitačním poli Země.



Dříve, než si vyslovíme Newtonův gravitační zákon si musíme vysvětlit pojem gravitační síla a gravitační pole.

Z vlastní zkušenosti víme, že všechna tělesa jsou přitahována Zemí. Na tato tělesa působí Země **gravitační silou**  $F_g$ . Prosím nezaměňovat s tíhovou silou  $F_G$ , rozdíl si vysvětlíme dále. Důležité je, že gravitační síla působí na všechna hmotná tělesa na i nad povrchem Země. V okolí Země existuje gravitační pole.

**Gravitační pole tělesa je prostor v jeho okolí, ve kterém se projevují účinky gravitační síly na jiná hmotná tělesa.**

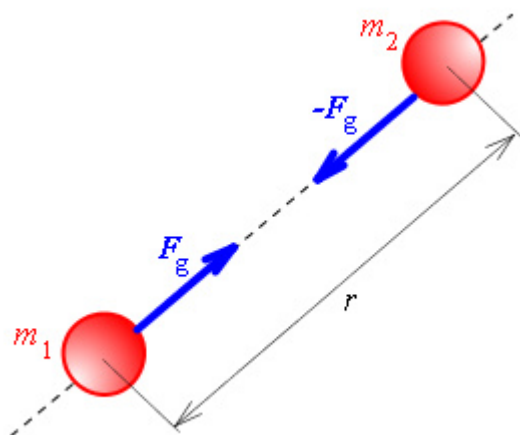
Gravitační pole Země samozřejmě není jediným existujícím gravitačním polem. Své gravitační pole má Měsíc, Slunce, ale i člověk nebo dřevěná bedna zkrátka každé těleso.



Jsme-li v gravitačním poli Země, je současně i Země v našem gravitačním poli. Působí-li Země na nás gravitační silou, působíme i my na Zemi gravitační silou a to stejně velikou. (Newtonův zákon akce a reakce). **Gravitační silové působení mezi tělesy je vzájemné.**

Takže jsme si řekli, co je to gravitační pole, co je gravitační síla a teď nezbývá než si velikost této síly vyjádřit. To už provedl před staletími Isaac Newton, když vyslovil **Newtonův gravitační zákon.**

**Dvě tělesa se vzájemně přitahují gravitační silou  $F_g$ , jejíž velikost je přímo úměrná součinu jejich hmotností  $m_1, m_2$  a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti  $r$ , viz. obr. 1.5-1.**



obr. 1.5-1

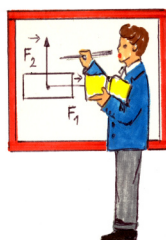
$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Konstanta úměrnosti  $\kappa$  (kappa) je **gravitační konstanta**,  $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

Gravitační konstanta je univerzální konstanta platná v celém Vesmíru. Tato konstanta nezávisí na prostředí v okolí tělesa, jehož působení sledujeme.

Gravitační síla  $F_g$  mezi dvěma tělesy působí nezměněná, i když v okolí obou těles jsou jiné hmotné objekty. Stejná gravitační síla na nás působí venku na chodníku, ale i uvnitř uzavřeného masivního betonového bunkru.

A ještě jeden fakt si musíme zdůraznit. Ačkoliv Newtonův gravitační zákon platí přesně jen pro hmotné body, můžeme ho použít i na reálné předměty. Vzdáleností  $r$  je v tomto případě vzdálenost jejich středů.



Vypočítejte, *jakou gravitační silou se přitahují* a) dva lidé o hmotnostech 80 kg, b) Země a Měsíc.

Ad a) Dosadíme do gravitačního zákona

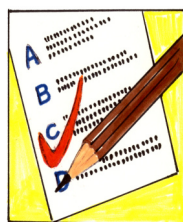
$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{80 \cdot 80}{1^2} = 4,2 \cdot 10^{-7} \text{ N. To je prakticky nezměřitelná}$$

síla.

Ad b) Opět dosadíme do gravitačního zákona

$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 7,4 \cdot 10^{22}}{(3,8 \cdot 10^8)^2} = 2 \cdot 10^{20} \text{ N.}$  To odpovídá přibližně tíze 1000000000000 letadlových lodí o výtlačku 20 000 tun.

Řešeným příkladem jsme chtěli ukázat, že gravitační síla se prakticky projevuje pouze u těles velkých hmotností.



**KO1.5.1-1.** Dva hmotné body, z nichž každý má hmotnost  $m$ , se vzájemně přitahují ze vzdálenosti  $r$  silou 36 N. *Jak velkou silou se tyto body přitahují ze vzdálenosti  $r/2$  ?*

**KO1.5.1-2.** Dva hmotné body, z nichž každý má hmotnost  $m$ , se vzájemně přitahují ze vzdálenosti  $r$  silou 36 N. *Jak velkou silou se tyto body přitahují, změní-li se hmotnost každého z nich na  $2m$  ?*



**U1.5.1-3.** Satelit obíhá kolem Země po kruhové dráze o poloměru  $6,6 \cdot 10^3$  km měřeno od jejího středu. *Jakou musí mít rychlost aby se na této dráze udržel? Počítejte s hmotností Země  $6 \cdot 10^{24}$  kg.*

**U1.5.1-4.** *Jak velkou silou působí Měsíc na  $1 \text{ m}^3$  mořské vody o hustotě  $1030 \text{ kgm}^{-3}$  ? Které jevy v důsledku tohoto působení Měsíce pozorujeme?*

## 1.5.2 Gravitace v okolí Země



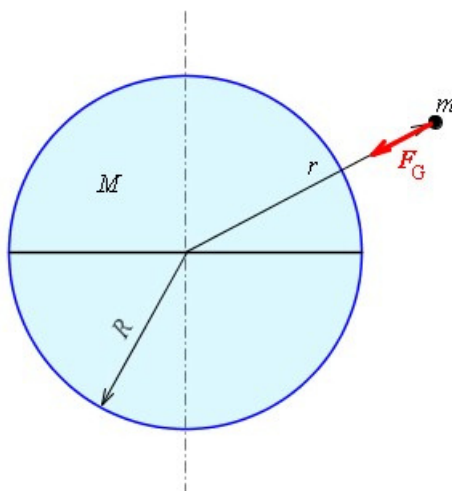
1. Vědět, že gravitační síla  $F_g$  uděluje tělesům v okolí Země zrychlení  $a_g$ .
2. Znát vztah pro velikost gravitačního zrychlení.
3. Znát přibližnou hodnotu gravitačního zrychlení na povrchu Země.
4. Umět vypočítat  $a_g$  a  $F_g$  v dané výšce  $h$  nad povrchem Země.
5. Rozlišit gravitační a tíhovou sílu, zdůvodnit čím se liší.
6. Vědět, že tíhová síla uděluje tělesům při povrchu Země zrychlení tíhové zrychlení  $g$ .
7. Vědět, proč velikost tíhového zrychlení závisí na zeměpisné šířce a nadmořské výšce.
8. Znát přibližnou hodnotu tíhového zrychlení v naší zeměpisné šířce.



Zjednodušíme si situaci. Předpokládejme, že Země je homogenní koule o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R = 6\,371 \text{ km}$ . Pak Newtonův gravitační zákon přepíšeme do tvaru :

$$F_g = \kappa \frac{M m}{r^2}.$$

Tento vztah určuje gravitační sílu, kterou Země působí na těleso hmotnosti  $m$  ve vzdálenosti  $r \geq R$  od středu Země, viz. obr. 1.5-2.



obr. 1.5-2

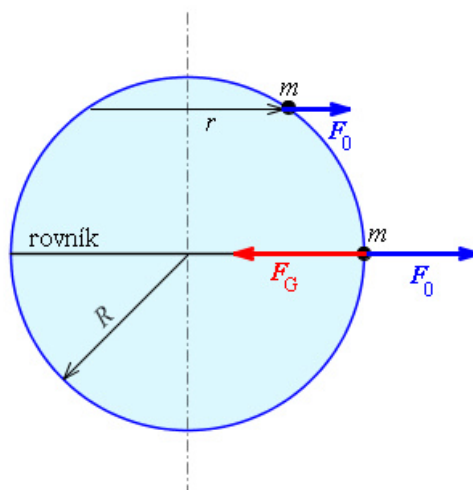
Použijeme-li Newtonův zákon síly  $F = ma$ , můžeme napsat pro gravitační sílu vztah  $F_g = m a_g$ . Symbolem  $a_g$  jsme si označili **gravitační zrychlení**. Dosadíme-li do tohoto vztahu za gravitační sílu z gravitačního zákona, dostaneme pro gravitační zrychlení výraz:

$$a_g = \kappa \frac{M}{r^2}.$$

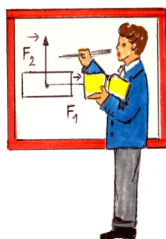
Gravitační zrychlení podle tohoto vztahu bude záviset na výšce  $h = r - R$  tělesa nad Zemí. V tabulce závislosti gravitačního zrychlení na výšce se můžete podívat, jak výrazně se mění gravitační zrychlení se vzdáleností od povrchu Země.

A teď si konečně vysvětlíme rozdíl mezi gravitačním zrychlením  $a_g$  a tíhovým zrychlením  $g$ . Zůstaňme na Zemi. Podle Newtonova gravitačního zákona na libovolné těleso na Zemi působí gravitační síla  $F_g = m a_g$ . Ve skutečnosti, ale **na těleso působí tíhová síla**  $F_G = m g$ . Velikosti tíhové a gravitační síly Země se liší a to z následujících důvodů:

- Gravitační síla závisí na vzdálenosti tělesa od středu Země. Ale země není dokonalá koule, je to elipsoid zploštěný na pólech. Tíhové zrychlení roste směrem od rovníku k pólu – mění se se zeměpisnou šířkou.
- Hustota Země se mění v jednotlivých oblastech pod povrchem Země. Proto také tíhové zrychlení je různé v různých místech Země.
- Největší vliv má ale rotace Země. Podíváme-li se na obrázek, viz. obr. 1.5-3, vidíme, že na těleso na povrchu země působí gravitační síla  $F_g$ . Ale protože Země rotuje, působí na toto těleso i odstředivá síla  $F_o = m \omega^2 r$ . Úhlová rychlost rotace Země je na všech zeměpisných šířkách stejná, ale poloměr otáčení  $r < R$  se směrem od rovníku ( $r = R$ ) zmenšuje. Výsledná tíhová síla působící na těleso je dána vektorovým součtem gravitační a odstředivé síly.



obr. 1.5-3



Určete rozdíl mezi gravitačním a tíhovým zrychlením na rovníku. Uvažujte jen vliv rotace Země.

Uvažujme těleso hmotnosti  $m$ . Na rovníku je jeho gravitační zrychlení (tabulka závislosti gravitačního zrychlení na výšce)  $a_g = 9,83 \text{ m.s}^{-2}$ . Velikost setrvačné odstředivé síly bude na rovníku  $F_o = m \omega^2 R = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R$ , kde  $T$

$= 24 \text{ h}$  je doba jednoho oběhu Země.

Tíhová síla bude rovna gravitační síle zmenšené o odstředivou sílu:

$$F_G = F_g - F_o = m a_g - m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R = m \left( 9,83 - \frac{2^2 \pi^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} 6,371 \cdot 10^6 \right) = m \cdot 9,8 \text{ N.}$$

Je tedy tíhové zrychlení na rovníku  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .



Z řešeného příkladu je vidět, že rozdíl mezi tíhovým a gravitačním zrychlením není velký. Na rovníku je tento rozdíl vlivem rotace  $0,03 \text{ m.s}^{-2}$ , postupně klesá k pólu, kde je nulový. Přihlédneme-li k jiným dříve popsaným vlivům, je ve skutečnosti naměřené tíhové zrychlení na rovníku  $9,78 \text{ m.s}^{-2}$ . Z toho všeho je vidět, že pro praktické orientační výpočty není třeba k těmto odchylkám přihlížet, běžně se počítá s hodnotou tíhového zrychlení  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ , případně  $10 \text{ m.s}^{-2}$ .



**U1.5.2-5.** Určete hmotnost Marsu, jestliže gravitační zrychlení na Marsu při jeho povrchu má velikost  $3,63 \text{ N.kg}^{-1}$  a jeho poloměr je  $3\,400 \text{ km}$ .

## 1.5.3 Pohyb těles v blízkosti povrchu Země



1. Osvojit si poznatek, že volný pád je pohyb v homogenním tíhovém poli Země s nulovou počáteční rychlostí.
2. Vědět, že vrhy těles jsou pohyby složené z rovnoměrného přímočarého pohybu rychlostí  $v_0$  a volného pádu.
3. Rozlišit podle směru počáteční rychlosti vrh svislý vzhůru (dolů), vodorovný a šikmý.



V této kapitole si budeme všimnat pohybu těles v tíhovém poli Země. Omezíme se na pohyby, jejichž dráha je krátká vzhledem k rozměrům Země. Půjde tedy například o výkop balónu na hřišti, již zmiňovaný pád květináče z okna, ale ne o vystřelenou orbitální raketu.

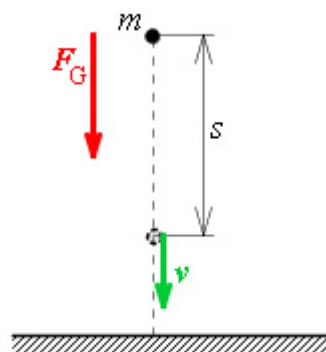
Postupně podle jednoduchosti se budeme zabývat volným pádem, vrhem svislým vzhůru a šikmým vrhem. Všechny případy budeme řešit za zjednodušených podmínek. Budeme uvažovat pouze působení jediné síly tj. tíhové síly a zanedbávat odporové síly (odpor vzduchu apod.).

### • Volný pád

O volném pádu jsme již hovořili v kinematice v kapitole 1.2.3.5 Volný pád, a tak si teď pouze zopakujeme závěry této kapitoly.

Na těleso padající volným pádem působí tíhová síla  $F_G$ , viz. obr. 1.5-4. Volný pád je pohyb rovnoměrně zrychlený charakterizovaný tíhovým zrychlením  $g$ . Rychlost a dráha volného pádu jsou popsány rovnicemi:

$$v = g t, \quad s = \frac{1}{2} g t^2.$$

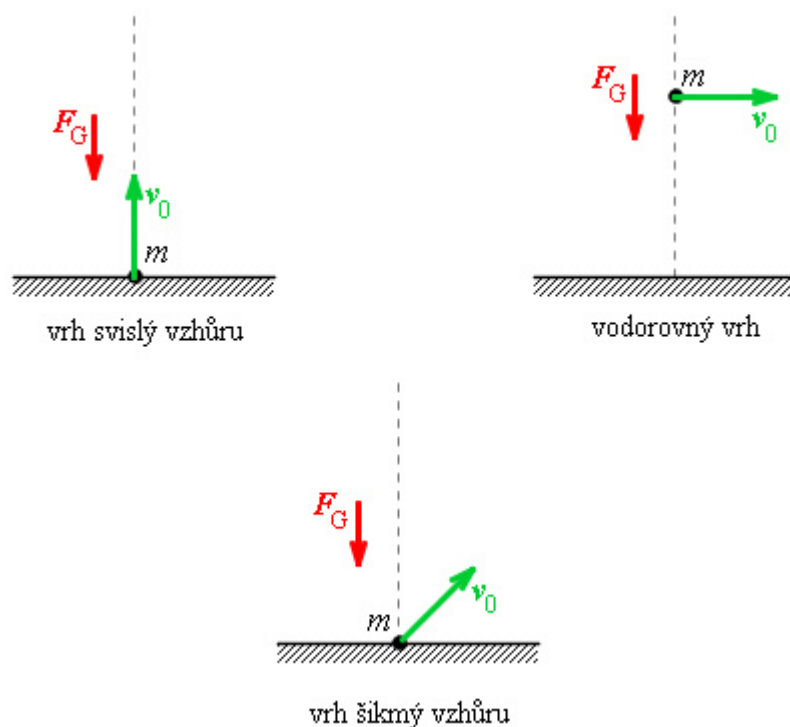


obr. 1.5-4

Všimněte si, že rychlost ani dráha nezávisí na hmotnosti tělesa. To bude platit i pro následující vrhy.

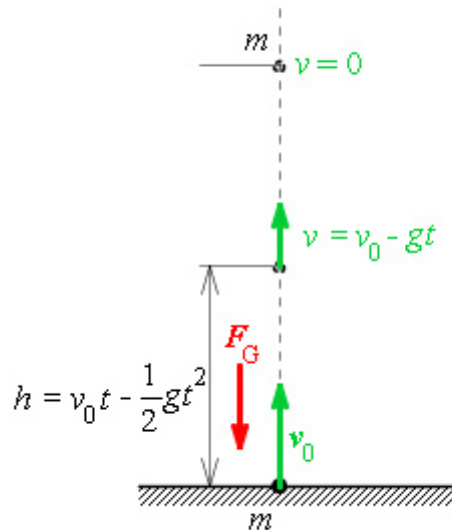
### • Vrh svislý vzhůru

Řekneme-li „vrh“, rozumíme tím, že se jedná o pohyb, který si můžeme představit složený z více pohybů. Prvním pohybem je pohyb, kdy tělesu udělíme počáteční rychlost  $v_0$ . Těleso by se pohybovalo rovnoměrně přímočarým pohybem ve směru rychlosti. Druhým pohybem je pohyb pod vlivem tíhové síly, tedy volný pád. O jaký vrh konkrétně půjde záleží na vzájemné orientaci počáteční rychlosti a orientaci tíhové síly. Jednotlivé druhy vrhů si můžete prohlédnout na obrázku, viz. obr. 1.5-5.



obr. 1.5-5

Pro svislý vrh vzhůru je charakteristické, že počáteční rychlost a tíhová síla jsou opačně orientované, viz. obr. 1.5-6. Výsledný pohyb je pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí  $v_0$  a zrychlením  $(-g)$ .



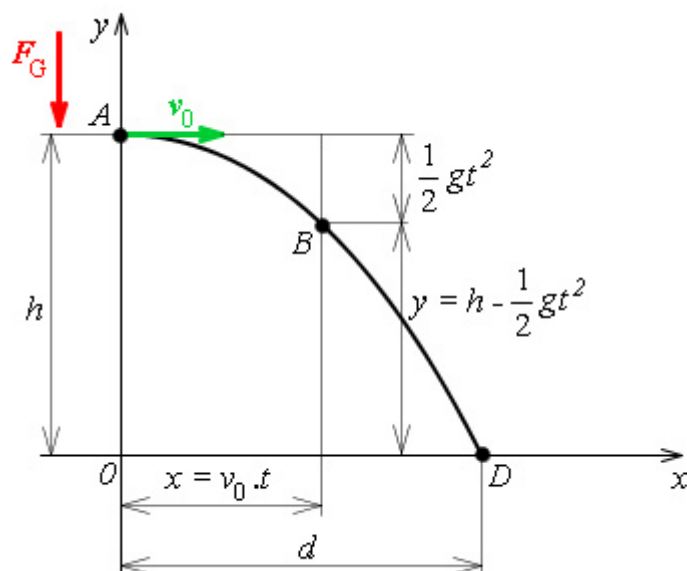
obr. 1.5-6

Použijeme-li vztahů pro rychlost a dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu z kinematiky, dostaneme pro rychlost a výšku tělesa v čase  $t$  rovnice:

$$v = v_0 - g t, \quad h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

- **Vodorovný vrh**

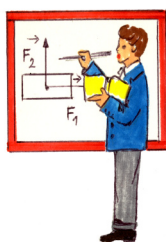
U vodorovného vrhu je počáteční rychlost orientována vodorovně (ve směru osy  $x$ ) a tíha působí ve směru svislém ( $-y$ ), viz. obr. 1.5-7. Složením rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru  $x$  a volného pádu ve směru  $y$  vznikne křivočarý pohyb. Trajektorií tohoto pohybu je část paraboly s vrcholem v místě vrhu  $A$ .



obr. 1.5-7

Pokud nás zajímá, kde bude vržené těleso za čas  $t$  (bod  $B$ ), pak si stanovíme jeho souřadnice. Souřadnice  $x$  bude dráhou pohybu rovnoměrného s počáteční rychlostí  $v_0$ , jeho souřadnice  $y$  je dána dráhou volného pádu za čas  $t$ .

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2.$$



Určete, kam až dohodíte kámen hmotnosti 0,5 kg z věže vysoké 20 m? Počáteční rychlost vašeho vrhu bude 5 m.s<sup>-1</sup>.

Hledáme vzdálenost  $d$  bodu  $D$  z obrázku, viz. obr. 1.5-7. Této vzdálenosti se říká **délka vrhu**. Co vlastně známe? V první řadě máme zadanou počáteční rychlost  $v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$ . Tu použijeme pro výpočet vzdálenost  $d$ , vlastně  $x$ -ové souřadnice hledaného bodu,  $d = v_0 t$ .

Neznáme však čas, za který kámen do bodu  $D$  dopadne. Ten získáme z rovnice pro  $y$ -ovou souřadnici bodu  $D$ . Tato souřadnice je rovna nule. Protože víme z jaké výšky  $h$  byl kámen hozen, máme v rovnici pro  $y$  pouze jednu neznámou a to hledaný čas  $t$ . V našem případě platí  $0 = h - \frac{1}{2} g t^2$ .

Z poslední rovnice vyjádříme čas  $t$  a ten dosadíme do rovnice pro hledanou délku vrhu. Dostaneme vztah

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5 \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 10 \text{ m.}$$

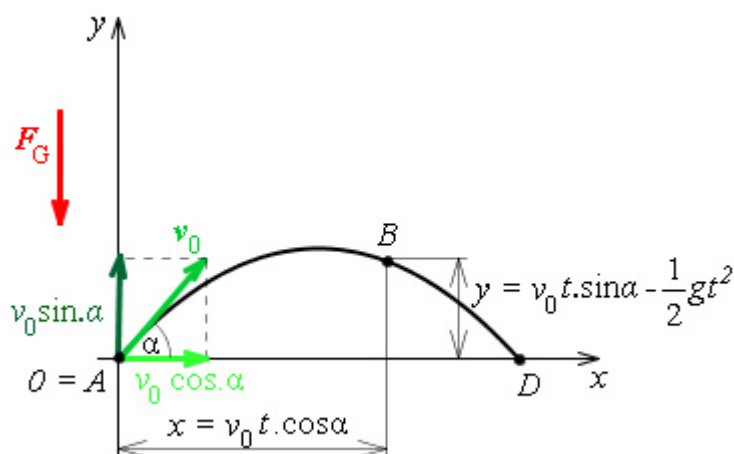


Kámen dopadne do vzdálenosti 10 m od paty věže.



### • Vrh šikmý vzhůru

Tento vrh se liší od předešlého tím, že počáteční rychlost nesměruje vodorovně, ale pod úhlem  $\alpha$  šikmo vzhůru, viz. obr. 1.5-8. Tomuto úhlu říkáme **elevační úhel**. Jinak ale budeme postupovat téměř stejně jako v předešlém případě. Tentokrát ale budeme skládat pohyby tři.



obr. 1.5-8

Prvním pohybem bude rovnoměrný pohyb ve směru osy  $x$ . Proti vodorovnému vrhu se ale uplatní pouze složka počáteční rychlosti  $v_x = v_o \cos \alpha$ . Souřadnice  $x$  libovolného bodu dráhy  $B$  bude

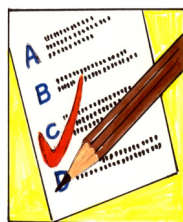
$$x = v_o t \cos \alpha.$$

Ve směru osy  $y$  se těleso bude pohybovat vrhem svislým vzhůru. Tento pohyb je složen z přímočarého rovnoměrného pohybu s počáteční rychlostí danou  $y$ -ovou složkou počáteční rychlosti  $v_y = v_o \sin \alpha$  a z volného pádu. Souřadnice bodu  $B$  ve směru osy  $y$  v čase  $t$  tedy bude dána vztahem

$$y = v_o t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Délku vrhu stanovíme stejným postupem jako v případě vodorovného vrhu.

Souřadnice  $x$  a  $y$  zadávají parabolickou trajektorii. Uvažujeme-li působení odporové síly (odpor vzduchu) pak parabola je mírně deformovaná, hovoříme o **balistické křivce**.



V následujících testových otázkách a úlohách počítejte s gravitačním zrychlením  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

**KO1.5.3-6.** Těleso padá volným pádem z výšky 40 m. Odpor prostředí neuvažujte. *Určete jeho okamžitou rychlost na konci druhé sekundy od začátku pohybu.*

**KO1.5.3-7.** Těleso padá volným pádem z výšky 40 m. Odpor prostředí neuvažujte. *Určete čas, za který těleso dopadne na podložku.*

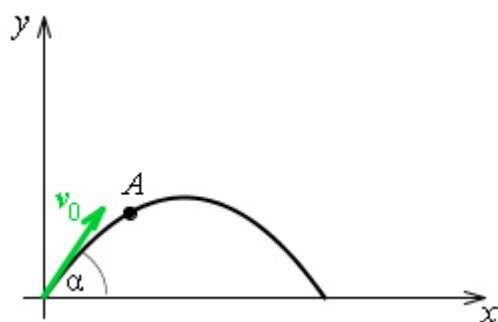
**KO1.5.3-8.** Těleso padá volným pádem z výšky 50 m. Odpor prostředí neuvažujte. *Určete dráhu, kterou těleso urazí za první tři sekundy svého pohybu.*

**KO1.5.3-9.** Těleso je vrženo v tíhovém poli Země svisle vzhůru a vystoupí do výše 10 m, odpor prostředí neuvažujte. *Jakou počáteční rychlostí bylo těleso vrženo?*

**KO1.5.3-10.** Těleso je vrženo v tíhovém poli Země svisle vzhůru počáteční rychlostí  $v_0$ , odpor prostředí neuvažujte. *Do jaké výšky těleso vystoupí?*

**KO1.5.3-11.** Těleso je vrženo v tíhovém poli Země počáteční rychlostí  $v_0$  pod elevačním úhlem  $\alpha$ , odpor prostředí neuvažujte, viz. obr. 1.5-9. *Souřadnice rychlosti tělesa v libovolném bodě A jeho dráhy jsou:*

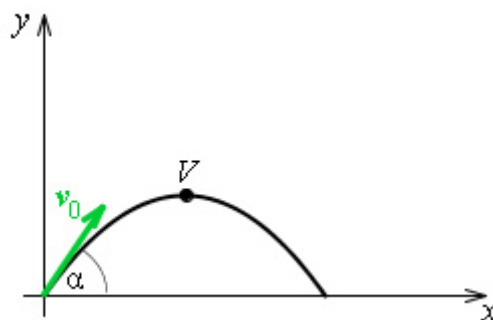
- a)  $v_x = v_0 \sin \alpha$        $v_y = v_0 \cos \alpha - g t$
- b)  $v_x = v_0 \cos \alpha$        $v_y = v_0 \sin \alpha - g t$
- c)  $v_x = v_0 \cos \alpha$        $v_y = v_0 \sin \alpha$
- d)  $v_x = v_0 \sin \alpha - g t$        $v_y = v_0 \cos \alpha$



obr. 1.5-9

**KO1.5.3-12.** Těleso je vrženo v tíhovém poli Země počáteční rychlostí  $v_0$  pod elevačním úhlem  $\alpha$ , odpor prostředí neuvažujte, viz. obr. 1.5-10. *Souřadnice rychlosti tělesa ve vrcholu V jeho dráhy jsou:*

- a)  $v_x = 0$        $v_y = v_0 \sin \alpha$
- b)  $v_x = 0$        $v_y = v_0 \cos \alpha$
- c)  $v_x = v_0 \cos \alpha$        $v_y = 0$
- d)  $v_x = v_0 \sin \alpha$        $v_y = 0$



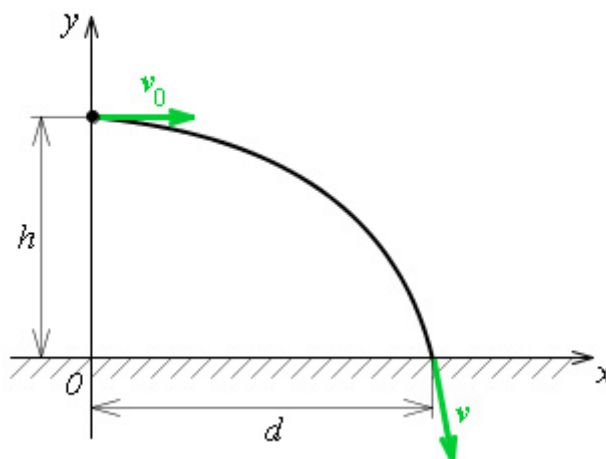
obr. 1.5-10



**U1.5.3-13.** Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí 30 m/s. *Určete a) okamžitou rychlost tělesa za dobu 3 s od okamžiku vrhu, b) výšku tělesa nad místem vrhu v tomto čase.*

**U1.5.3-14.** Určete, *jakou rychlostí byl vystřelen prakem kámen svisle vzhůru, jestliže se vrátil za 8 sekund. Vypočítejte, jaké maximální výšky kámen dosáhl.*

**U1.5.3-15.** Kámen vržený vodorovným směrem dopadl na vodorovný povrch Země ve vzdálenosti  $d = 15$  m od místa vrhu za dobu 0,6 s od okamžiku vrhu, viz. obr. 1.5-11. a) Jak velká byla počáteční rychlost kamene a s jak velkou rychlostí dopadl kámen na Zem? b) Z jaké výšky  $h$  byl kámen vržen?<sup>204)</sup>



obr. 1.5-11

**U1.5.3-16.** Z vrcholu věže 80 m vysoké je vrženo těleso vodorovným směrem počáteční rychlostí 15 m/s. Za jakou dobu a v jaké vzdálenosti od paty věže dopadne těleso na vodorovný povrch Země?

**U1.5.3-17.** Hasiči stříkají vodu pod úhlem  $60^\circ$  do vzdálenosti 100 m. Jak velkou rychlostí tryská voda z hadice?

## 1.5.4 Pohyb těles ve velkých vzdálenostech od povrchu Země



1. Vědět, jak závisí tvar trajektorie satelitu na jeho počáteční rychlosti.
2. Umět vypočítat první kosmickou rychlost.

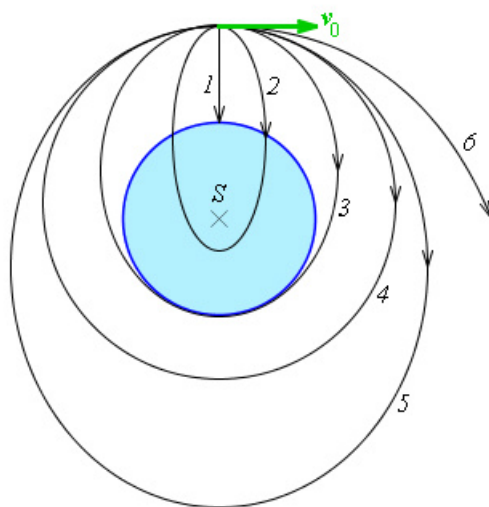


Budeme se teď zajímat o výšky, ve kterých se pohybují různé družice, kosmické sondy, planety apod. Otázka zní, proč některá tělesa, například balistické rakety se vrátí z velkých výšek na Zemi. Jiná jako komunikační družice obíhají kolem ní a kosmické sondy se od Země pořád vzdalují bez možnosti návratu.

Musíme si uvědomit, za jakých podmínek se tyto objekty pohybují. Zaprvé, ve velkých výškách (řádově stovky a tisíce kilometru) jsou gravitační síly Země poměrně malé (tabulka závislosti gravitačního zrychlení na výšce). Zadruhé, v těchto výškách je prakticky vakuum a proti pohybu nepůsobí odporové síly.

Omezíme si výpočty na minimum, výpočty drah kosmických sond zabírají super výkonným počítačům NASA stovky hodin.

Představte si, že raketoplán vynesl kosmické těleso hmotnosti  $m$  do velké výšky, řekněme 400 km, viz. obr. 1.5-12. Raketoplán teď těleso vypustí ve směru tečném k povrchu Země s počáteční rychlostí  $v_0$ . Jak se bude kosmický objekt chovat závisí právě na této rychlosti. Budeme tuto rychlost postupně zvětšovat.



obr. 1.5-12

Je-li *počáteční rychlost*:

- *Nulová*, satelit spadne na Zem (trajektorie 1).
- *Malá*, satelit se bude pohybovat po eliptické trajektorii a časem spadne na Zem (trajektorie 2).
- *„Kritická“*, satelit se bude zase pohybovat po eliptické trajektorii, ale na Zem již nespadne (trajektorie 3).
- *„Kruhová“*, satelit se bude pohybovat po kruhové trajektorii kolem Země (trajektorie 4).
- *„Eliptická“*, satelit se bude pohybovat opět po eliptické trajektorii (trajektorie 5), Země leží v jejím ohnisku.
- *„Úniková“*, satelit se odpoutá od gravitačního pole Země (trajektorie 6).

Fyzika by nebyla fyzikou bez nějakých výpočtů. Tak aspoň jeden. Vypočítáme si orientačně velikost kruhové rychlosti  $v_k$ . Aby se satelit pohyboval po kruhové dráze, musí být v rovnováze síly, které na něj působí. Gravitační síla musí být stejně velká jako setrvačná síla odstředivá

$$\kappa \frac{M m}{r^2} = \frac{m v_k^2}{r} \quad \text{a odtud} \quad v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}}.$$

Pokud bude družice obíhat nízko nad Zemí ( $r \approx R$ ), bude velikost kruhové rychlosti

$$v_1 = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}} \approx 7,9 \text{ km.s}^{-1}. \text{ Této rychlosti se říká } \mathbf{první \ kosmická \ rychlost}.$$

Důležitá je i rychlost úniková. Na obrázku je trajektorie 6 parabolická. Aby kosmické těleso bylo navedeno na tuto dráhu, musí získat tzv. parabolickou rychlost  $v_p = \sqrt{2} v_k$ . Pokud bude kosmická sonda startovat z oběžné dráhy nízko nad Zemí ( $r \approx R$ ), pak parabolická rychlost bude

$v_2 = \sqrt{2} v_1 = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$ . To je tzv. **druhá kosmická rychlost**.



**U1.5.4-18. Vypočítejte:**

a) *rychlost pohybu* Měsíce kolem Země. Předpokládejte kruhovou oběžnou dráhu.

b) *dobu oběhu* Měsíce kolem Země.

## 1.5.5 Keplerovy zákony



1. Znat slovní formulace tří Keplerových zákonů.
2. Diskutovat důsledky těchto zákonů.



Když už se zabýváme pohybem v kosmické oblasti, podívejme se ještě na pohyb planet. Astronomové již od starověku zkoumali naši sluneční soustavu a sledovali pohyby planet. Skutečně seriózně se tímto problémem zabýval v 17. století Johannes Kepler. Ze svých pozorování vyvodil své tři slavné zákony, nyní známé jako **Keplerovy zákony**.

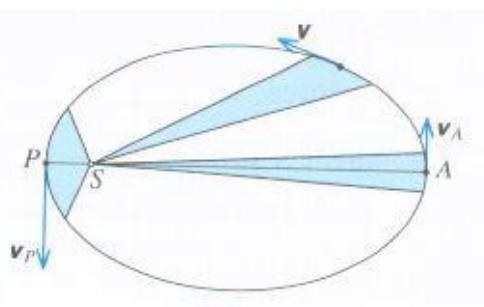
**1. Keplerův zákon. Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.**

Kepler sice formuloval své zákony pro planety obíhající kolem Slunce, ale tyto zákony platí i pro umělé družice a jiné objekty obíhající kolem Země.

Protože planety obíhají po elipsách, nebude jejich pohyb rovnoměrný. I na to myslel Kepler a zformuloval svůj další zákon.

**2. Keplerův zákon. Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za stejnou dobu jsou stejné.**

Pro vysvětlení tohoto zákona se obrátíme k obrázku, viz. obr. 1.5-13. Nejdříve co je to průvodič? Je to úsečka spojující planetu se Sluncem. Jak se planeta otáčí kolem Slunce, mění se délka průvodiče.



obr. 1.5-13

V obrázku je modře vyznačena plocha, kterou opíše průvodič za jednotku času. Z kinematiky víte, že bod urazí za jednotku času dráhu rovnající se velikosti rychlosti (tak je vlastně rychlost definována).

V našem obrázku tedy dráha s uzavírající podbarvené plochy je rovna velikosti rychlosti. Z obrázku je vidět, že planeta se nejrychleji pohybuje v blízkosti Slunce (periheliu - přísluní) a nejpomaleji v největší vzdálenosti od něj (aféliu – odsluní).

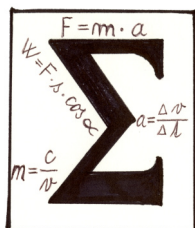
Pro Keplera již nebylo obtížné (jednoduchá matematika) vypočítat také jak závisí oběžná doba planety na vzdálenosti od Slunce.

**3. Keplerův zákon.** Poměr druhých mocnin oběžných dob  $T$  dvou planet se rovná poměru třetích mocnin délek hlavních poloos  $a$  jejich trajektorií.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



**U1.5.5-19.** Vzdálenost Země od Slunce je 1 AU. Jaká je oběžná doba Saturna, je-li jeho vzdálenost od Slunce  $1,42 \cdot 10^9$  km?



1. **Gravitační pole tělesa** je prostor v jeho okolí, ve kterém se projevují účinky gravitační síly na jiná hmotná tělesa. Gravitační silové působení mezi tělesy je **vzájemné**.

2. **Newtonův gravitační zákon** říká, že dvě tělesa se vzájemně přitahují gravitační silou  $F_g$ , jejíž velikost je přímo úměrná součinu jejich hmotností  $m_1$ ,  $m_2$  a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti jejich středů  $r$ .  $F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ,  $\kappa$  je gravitační konstanta.

3. **Gravitační zrychlení**  $a_g$  v gravitačním poli Země ve výšce  $h$  nad povrchem je úměrné hmotnosti Země  $M$  a nepřímo úměrné druhé mocnině vzdálenosti od středu Země  $r = R + h$ .

$$a_g = \kappa \frac{M}{r^2}.$$

4. **Tíhová síla**  $F_G$  působící na těleso je odlišná od gravitační síly  $F_g$ . Tíhová síla je dána součinem hmotnosti  $m$  tělesa a **tíhového zrychlení**.  $F_G = m g$ ,  $g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

5. **Volný pád** je pohyb rovnoměrně zrychlený charakterizovaný tíhovým zrychlením  $g$ . Rychlost a dráha volného pádu jsou popsány kinematickými rovnicemi.

6. **Vrh svislý vzhůru** je pohyb složený z rovnoměrného přímočarého pohybu s počáteční rychlostí  $v_0$  směřujícího vzhůru a z volného pádu. Rychlost a výška tohoto jsou popsány kinematickými rovnicemi.

7. **Vodorovný vrh** je pohyb složený z volného pádu a z rovnoměrného přímočarého pohybu s počáteční rychlostí  $v_0$  ve směru kolmém na směr pádu. Trajektorií pohybu je část paraboly, souřadnice jejich bodů jsou dány kinematickými rovnicemi.

8. **Vrh šikmý vzhůru** je pohyb složený z volného pádu a z rovnoměrného přímočarého pohybu s počáteční rychlostí  $v_0$  pod úhlem  $\alpha$ . Trajektorií pohybu je část paraboly, souřadnice jejich bodů jsou dány kinematickými rovnicemi.

**9. Trajektorie satelitu** závisí na jeho počáteční rychlosti. Rozlišujeme eliptické, kruhové a parabolické trajektorie.

**10. 1. Keplerův zákon.** Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

**11. 2. Keplerův zákon.** Obsah ploch opsaných průvodičem planety za stejnou dobu jsou stejné.

**12. 3. Keplerův zákon.** Poměr druhých mocnin oběžných dob  $T$  dvou planet se rovná poměru třetích mocnin délek hlavních poloos  $a$  jejich trajektorií. 
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



## 1.6 Tuhé těleso

V předchozích kapitolách jsme se zabývali pohybem hmotného bodu (kinematika) a jeho příčinou (dynamika). Často jsme nebyli příliš důslední. Třeba jsme počítali dráhu, rychlost a zrychlení auta na silnici ale nebrali jsme v úvahu, že velký autobus není hmotným bodem vzhledem třeba ke stometrové dráze. Při řešení většiny praktických problémů je toto zjednodušení přijatelné.

Ne však vždy. Co když autobus havaruje a začne se kutálet ze svahu. Teď už těžko popíšeme jeho pohyb jednoduchou rovnicí dráhy. Autobus se jednak pohybuje vpřed, ale také se otáčí, zkrátka koná složitý pohyb. Pokud si všimnete důkladně tohoto pohybu, zjistíte, že různé části autobusu se pohybují různou rychlostí, po odlišných trajektoriích. Někdy musíme opustit zjednodušení hmotného bodu a zabývat se tělesem s nezanedbatelnými rozměry a určitého tvaru.

Ale nebudeme si zase příliš komplikovat problém. Budeme se zabývat tzv. tuhým tělesem.

**Tuhé těleso je ideální těleso, model tělesa. Jeho tvar ani objem se působením sil nemění.**



Kinematika hmotného bodu, dynamika.



Odhadovaný čas je 90 minut.

### 1.6.1 Pohyb tuhého tělesa



1. Definovat tuhé těleso.
2. Charakterizovat postupný a otáčivý pohyb tuhého tělesa.
3. Definovat těžiště tělesa.

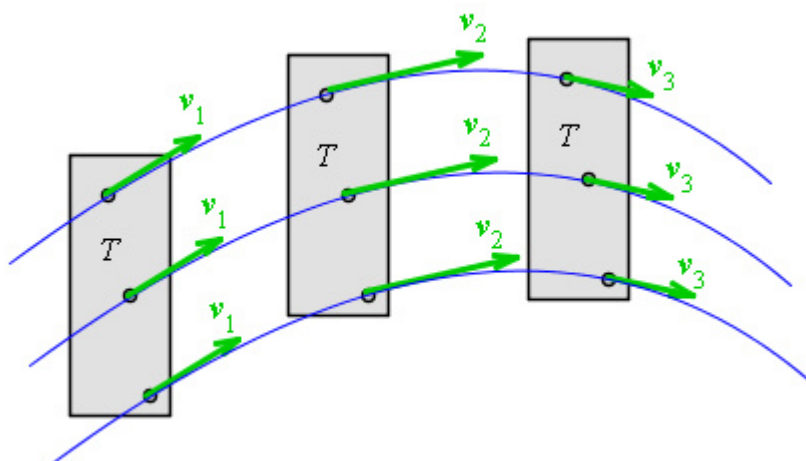


Tuhé těleso může konat dva základní druhy pohybů. Vlastně jsme si je ukázali na příkladu havarovaného autobusu. Zaprvé může konat pohyb posuvný (autobus jede po silnici). Zadruhé může konat pohyb otáčivý

(převrací se). A samozřejmě může vykonávat pohyb složený z těchto dvou pohybů (kutálí se, valí se).

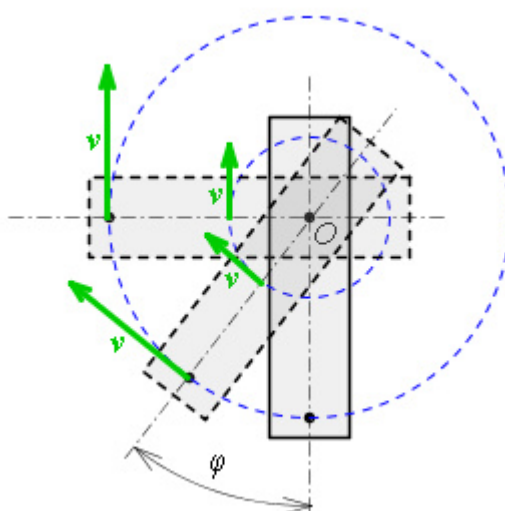
- **Posuvný pohyb**, někdy označovaný jako **translační**, vykonává těleso, které se po trajektorii **posunuje**, viz. obr. 1.6-1. Důležité je, že všechny body tělesa mají v určitém čase stejně velkou rychlost. Také směr okamžité rychlosti je stejný. Pozor, trajektorií může být zcela obecná křivka (nejen přímka) a má pro všechny body tělesa stejný tvar.

Příkladem je náš autobus. Pokud se nedostane do smyku, karoserie, cestující i řidič se pohybují stejnou rychlostí.



obr. 1.6-1

- **Otáčivý pohyb**, neboli **rotační**, koná těleso při otáčení **kolem pevné osy otáčení  $o$** . Při tomto pohybu všechny body tělesa opisují kružnice se středem na ose otáčení, viz. obr. 1.6-2. Z obrázku vidíte, že obvodové rychlosti různých bodů tělesa závisí na vzdálenosti od osy otáčení (vztah z kinematiky  $v = \omega r$ ). Přece však všechny body tělesa mají něco společného, a to je úhlová rychlost  $\omega$ . Ve stejném čase opíší také stejnou úhlovou dráhu  $\varphi$ .

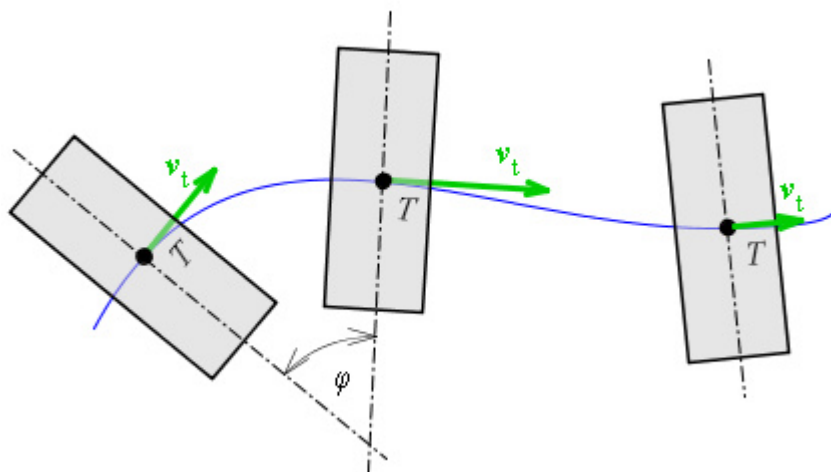


obr. 1.6-2

A zase jako příklad autobus. Rotačním pohybem se pohybují jeho kola je-li na zvedáku, některé části jeho motoru atp.

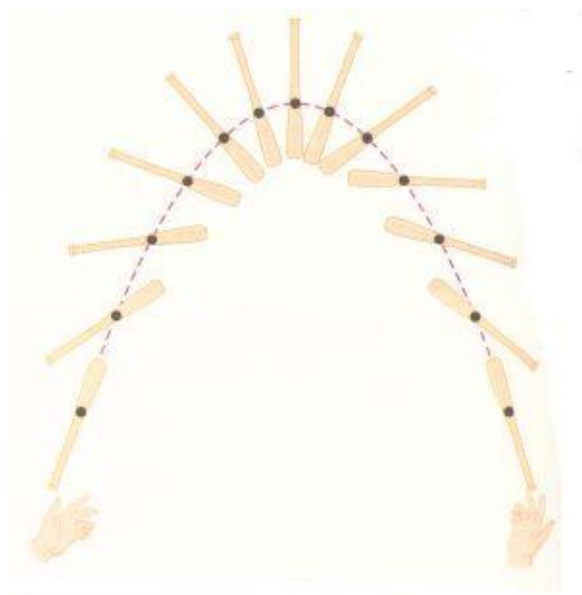
Ted' ale můžete namítnout, že kola autobusu se za jízdy jednak otáčejí, ale spolu s celým autobusem se pohybují vpřed. Máte pravdu, kola za jízdy vykonávají složený pohyb.

- **Složený pohyb** je pohyb složený z posuvného a rotačního pohybu. Složený pohyb je znázorněn na obrázku, viz. obr. 1.6-3. Těleso se pohybuje posuvným pohybem rychlostí  $v$  a navíc se těleso otáčí úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem okamžité osy otáčení (její poloha se v čase mění). U tohoto pohybu nenajdeme žádnou veličinu, která by pro všechny body tělesa nabývala stejných hodnot.



obr. 1.6-3

Nenajdeme sice žádnou společnou fyzikální veličinu, ale můžeme si označit jeden význačný bod. Podívejte se na obrázek, viz. obr. 1.6-4. Na obrázku jsou znázorněny jednotlivé fáze pohybu cvičebního kužele (baseballové pálky chcete-li). Vidíte, že černý bod se pohybuje po jednoduché trajektorii. Trajektorie ostatních bodů kužele jsou značně komplikovanější. Černý bod se nazývá těžiště tělesa. **Pohyb celého tělesa (kužele) si můžeme nahradit pohybem těžiště  $T$ .** Musíme si ale do těžiště soustředit veškerou hmotnost tělesa.

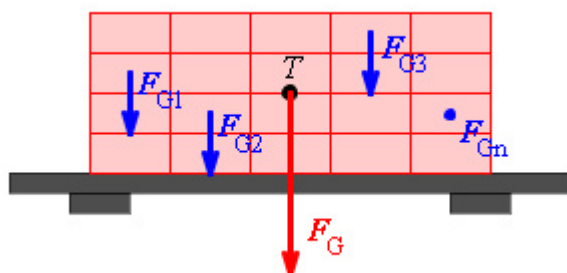


obr. 1.6-4

**Těžiště tělesa je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmotnost tělesa.**

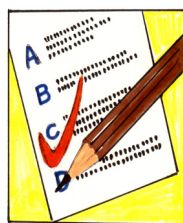
Těžiště se častěji definuje poněkud jinak. Představte si, že tuhé těleso je složené z velkého počtu hmotných bodů. Například přepravní paleta s cihlami, nebo jděte ve své představivosti dále. Každé těleso je složeno z atomů či molekul což jsou skutečně pro nás hmotné body. Ale vraťme se raději k cihlám.

Na všechny hmotné body tělesa (cihly) působí v tíhovém poli Země tíhové síly  $F_{G1}$ ,  $F_{G2}$ ,  $F_{G3}$ ,...  $F_{Gn}$ , viz. obr. 1.6-5. Tyto síly jsou rovnoběžné a mají stejný směr. Výslednicí všech těchto tíhových sil působících na jednotlivé části tělesa je tíhová síla  $F_G$ , kterou působí Země na celé těleso (naloženou paletu). Působíště této síly je v těžišti tělesa.



obr. 1.6-5

**Těžiště tělesa je působíště výslednice všech tíhových sil působících na jednotlivé hmotné body tvořící dané těleso.**



**KO1.6.1-1.** Jaké je zrychlení  $a$  různých bodů tělesa pohybujícího se posuvným pohybem?

**KO1.6.1-2.** U rotačního pohybu tělesa se některé body nepohybují. Které?

**KO1.6.1-3.** Z následujícího soupisu pohybů *vyberte posuvné pohyby*:

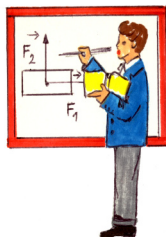
- a) pohyb pístu v motoru auta,
- b) pohyb řezného kotouče cirkulárky,
- c) otevírání okna,
- d) pohyb kola jedoucího automobilu
- e) pohyb automobilu v zatáčce
- f) pohyb Země kolem Slunce

**KO1.6.1-4.** Z následujícího soupisu pohybů *vyberte otáčivé pohyby*:

- a) pohyb pístu v motoru auta,
- b) pohyb řezného kotouče cirkulárky,
- c) otevírání okna,
- d) pohyb kola jedoucího automobilu
- e) pohyb automobilu v zatáčce
- f) pohyb Země kolem Slunce

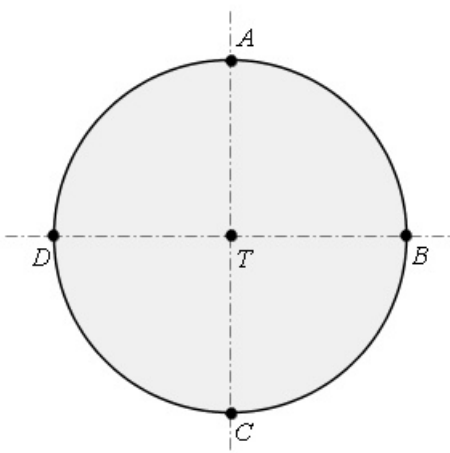
**KO1.6.1-5.** Z následujícího soupisu pohybů *vyberte složené pohyby*:

- a) pohyb pístu v motoru auta,
- b) pohyb řezného kotouče cirkulárky,
- c) otevírání okna,
- d) pohyb kola jedoucího automobilu
- e) pohyb automobilu v zatáčce
- f) pohyb Země kolem Slunce

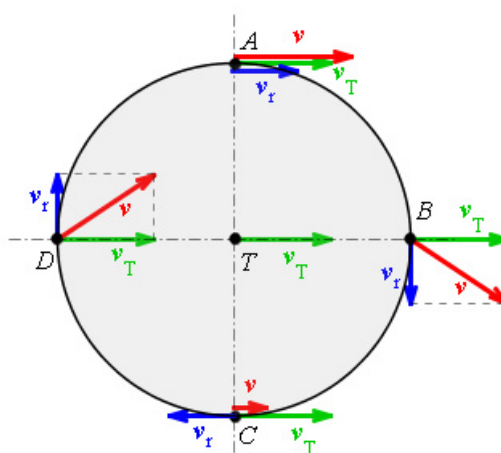


Válec poloměru  $R$  se valí po vodorovné rovině. Jeho těžiště se pohybuje dopředu rychlostí  $v_T$ . Úhlová rychlost rotace válce je  $\omega$ . *Jaké jsou rychlosti obvodových bodů A, B, C a D?*, viz. obr. 1.6-6. Řešte pouze graficky.

Zkuste si nejdříve vyřešit úlohu sami. Vycházejte z toho, že skládáte pohyb posuvný a pohyb rotační kolem osy procházející těžištěm. Valení je složený pohyb. Také rychlost jednotlivých bodů se bude skládat. Translační pohyb přispěje rychlostí, která je rovna rychlosti těžiště  $v_T$ . Druhou složkou výsledné rychlosti  $v$  bude rychlost otáčivého pohybu  $v_r = \omega R$ . Obě složky musíme složit **vektorově**. Výsledná rychlost bude obecně dána vztahem  $v = v_T + v_r$ . A teď bude záležet ve kterém bodě budeme hledat výslednou rychlost. V každém z bodů A, B, C a D bude jiný směr rychlosti otáčivého pohybu, viz. obr. 1.6-7.



obr. 1.6-6



obr. 1.6-7

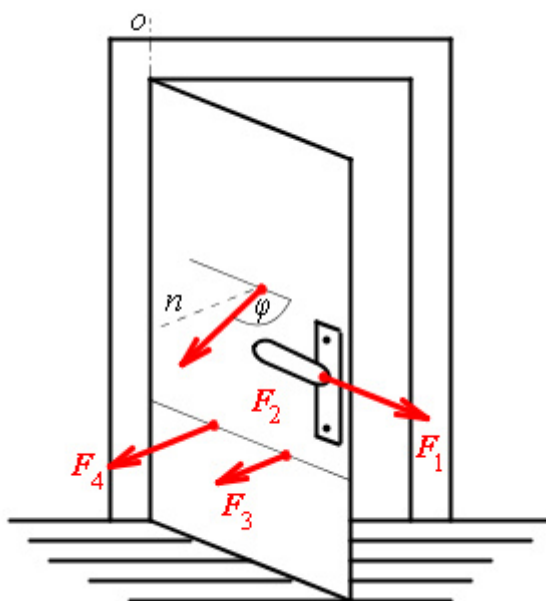
## 1.6.2. Otáčivé účinky síly, moment síly



1. Vědět, že moment síly je příčinou změny pohybového stavu tělesa z hlediska rotačního pohybu, stejně jako síla je příčinou změny pohybového stavu tělesa při posuvném pohybu.
2. Vědět, na čem závisí otáčivý účinek síly.
3. Znat vztah  $M = F d = F r \sin \varphi$  pro velikost momentu síly, vědět, co je rameno síly  $d$ .



Snad každý učitel začíná výklad momentu síly příkladem otevírání dveří. Tahá za kliku ve směru ležícím v rovině dveří ( $F_1$  na obrázku, viz. obr. 1.6-8) a demonstruje, že takto sebe větší silou dveřmi nepohne. Postupně působí svou silou  $F_2$  ve směru více a více odkloněném od roviny dveří, až nakonec ukazuje ideální působení ve směru kolmém na rovinu dveří  $F_3$ . Při pokračování pokusu se pak přibližuje s působišťem síly k ose otáčení (ta prochází panty dveří). Předvádí, že čím blíže je síla  $F_4$  ose otáčení, tím musí vynaložit větší sílu k dosažení stejných otáčivých účinků. A pokus zpravidla končí působení síly v ose otáčení – opět dveřmi nepohne.



obr. 1.6-8

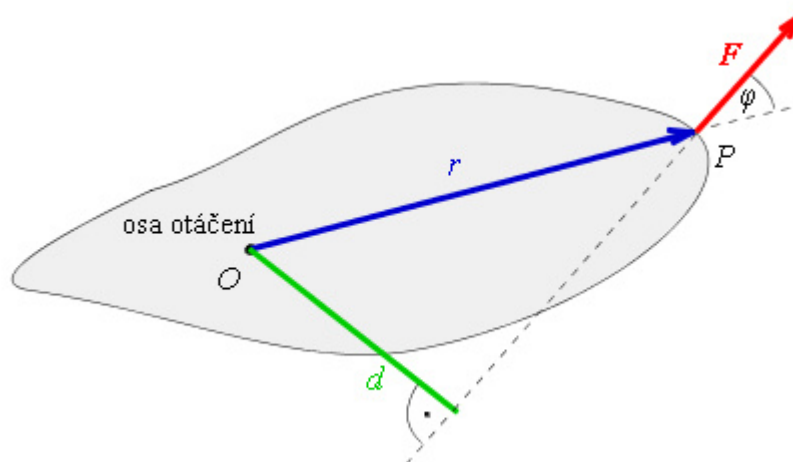
Shrneme-li tento pokus pak dojdeme k závěru:

**Otáčivý účinek síly působící na těleso závisí na velikosti síly, na jejím směru a orientaci a na poloze jejího působišťe.**

To, co jsme si vyslovili si nyní zapíšeme pomocí rovnice. Otáčivý účinek síly si vyjadřujeme veličinou **moment síly vzhledem k ose otáčení**  $M$ . Je to součin působící síly a **ramena síly**  $d$ .

$$M = F d$$

Rameno síly je kolmá vzdálenost vektorové přímky  $p$  síly od osy otáčení. To zní dosti komplikovaně, raději se podívejte na vysvětlující obrázek, viz. obr. 1.6-9.



obr. 1.6-9

Pokud budeme působit na dveře silou v jiném směru než kolmém bude se vám těžko hledat a odměřovat rameno síly. Proto je výhodnější vyjadřovat moment síly pomocí polohového vektoru  $r$  působíště síly a úhlu  $\varphi$ . I tyto veličiny jsou na obrázku, viz. obr. 1.6-9.

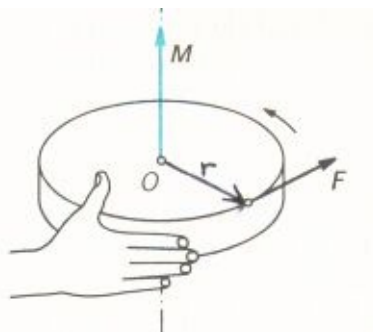
Zkráceně můžeme moment síly vyjádřit jako „míru otáčivého účinku síly“ na těleso.

$$M = F r \sin \varphi$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že jednotkou momentu síly je newtonmetr (N.m).

Na tuhé těleso otáčivé kolem pevné (nehybné) osy může působit více sil s různými otáčivými účinky. Je zřejmé, že momenty těchto sil se nějakým způsobem sčítají. Ale jakým? Algebraickým nebo vektorovým? To záleží na tom, je-li moment síly skalár nebo vektor.

Roztáčíme-li kolo, bude záležet na tom, kterým směrem síla ruky působí. Podle toho se bude kolo otáčet jedním nebo druhým směrem. Abychom vystihli směr otáčení, **definuje se moment síly jako vektor**, jehož velikost je dána vztahem uvedeným o tři odstavce výše. Směr a orientace tohoto vektoru je pak dán pravidlem pravotočivého šroubu. Otáčíme-li šroubem proti směru hodinových ručiček, šroub se zavrtává směrem nahoru. Náš ilustrační případ kola je znázorněn na obrázku, viz. obr. 1.6-10.



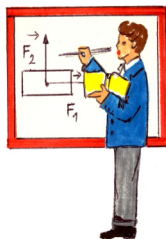
obr. 1.6-10

**Výsledný moment sil současně působících na těleso je roven vektorovému součtu momentů jednotlivých sil vzhledem k dané ose otáčení.**

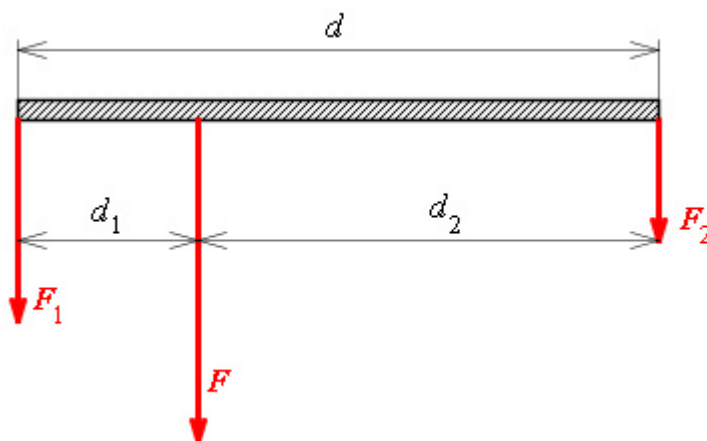


Prakticky mohou momenty jednotlivých sil působit ve směru s jednou nebo opačnou orientací. Může dojít k situaci, že se otáčivé účinky jednotlivých sil navzájem vyruší. To vyjadřuje tzv. **momentová věta**.

Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso se navzájem ruší, je-li vektorový součet momentů všech sil vzhledem k dané ose roven nule.



Na koncích tyče délky 80 cm působí kolmo k tyči dvě rovnoběžné síly o velikostech 50 N a 30 N, viz. obr. 1.6-11. *Ve kterém místě musíte tyč podepřít, aby se neotáčela? Jak velkou tlakovou silou působí tyč na podpěru?* Hmotnost tyče neuvažujte.



obr. 1.6-11

Označíme si veličiny symboly:  $F_1 = 50 \text{ N}$ ,  $F_2 = 30 \text{ N}$ ,  $d = 0,8 \text{ m}$ ,  $F = ?$ ,  $d_2 = ?$

Velikost tlakové síly působící na podpěru tyče je rovna výslednici daných rovnoběžných sil:

$$F = F_1 + F_2 = 50 + 30 = \underline{80 \text{ N}}.$$

Aby se tyč neotáčela, musí být výsledný moment obou sil nulový:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2.$$

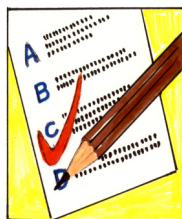
Ale my známe délku tyče, bude výhodnější dosadit za  $d_2 = d - d_1$ , tedy:

$$F_1 d_1 = F_2 (d - d_1),$$

a odtud hledaná vzdálenost:

$$d_1 = \frac{F_2 d}{F_1 + F_2} = \frac{30 \cdot 0,8}{80} = \underline{0,3 \text{ m}}.$$

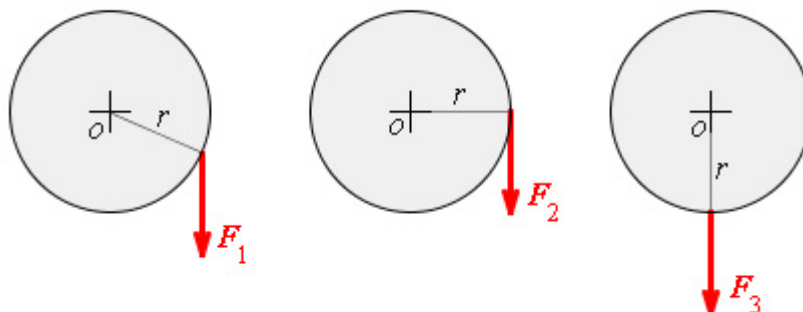
Tyč musíme podepřít ve vzdálenosti 30 cm od působistě větší síly. Tyč působí na podpěru tlakovou silou 80 N.



**KO1.6.2-6.** Napište jednotku momentu síly v základních jednotkách soustavy SI.

**KO1.6.2-7.** Kotouč o poloměru  $r$  je otáčivý kolem nehybné osy jdoucí jeho středem. Na kotouč působí síly  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , které mají stejný směr i velikost, viz. obr. 1.6-12. Která síla má na kotouč největší otáčivý účinek?

- a)  $F_1$       b)  $F_2$       c)  $F_3$       d) všechny stejný

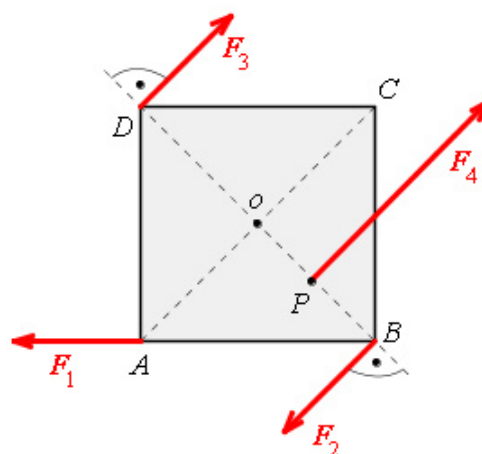


obr. obr. 1.6-12



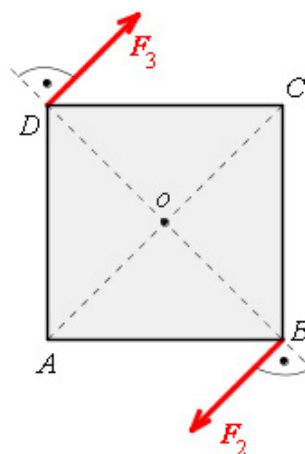
**U1.6.2-8.** Čtvercová deska o straně  $a = 2$  m je otáčivá kolem pevné osy  $o$ , viz. obr. obr. 1.6-13.

Ve vrcholech  $A, B, D$  čtverce působí síly  $F_1 = F_2 = F_3 = 10$  N. V bodě  $P$ , který je středem úsečky  $OB$ , je působiště síly  $F_4 = 20$  N. Jaké jsou velikosti momentů sil  $F_1$  až  $F_4$  vzhledem k dané ose?



obr. 1.6-13

**U1.6.2-9.** Čtvercová deska o straně  $a = 2$  m je otáčivá kolem pevné osy  $o$ , viz. obr. 1.6-14. Ve vrcholech  $B, D$  čtverce působí síly  $F_2 = F_3 = 10$  N. Jaká je velikost momentu dvojice sil  $F_2, F_3$ ?



obr. 1.6-14

## 1.6.3 Skládání sil působících na těleso



1. Složit síly působící na těleso v jednom bodě.
2. Umět graficky i početně složit různoběžné síly působící na těleso v různých bodech.
3. Vypočítat výslednici rovnoběžných sil stejné i opačné orientace působících v různých bodech tělesa. Umět vypočítat polohu jejího působíště.
4. Definovat dvojici sil, uvést praktické příklady.
5. Vypočítat velikost momentu dvojice sil.



Skládání a rozkládání sil jsme již probírali v úvodu celé mechaniky v kapitole o sčítání vektorů. Nezaškodí, když si pravidla zopakujete. Tyto znalosti si nyní rozšíříme, síly nám totiž nepůsobí jen na jeden hmotný bod, ale na rozměrné tuhé těleso.

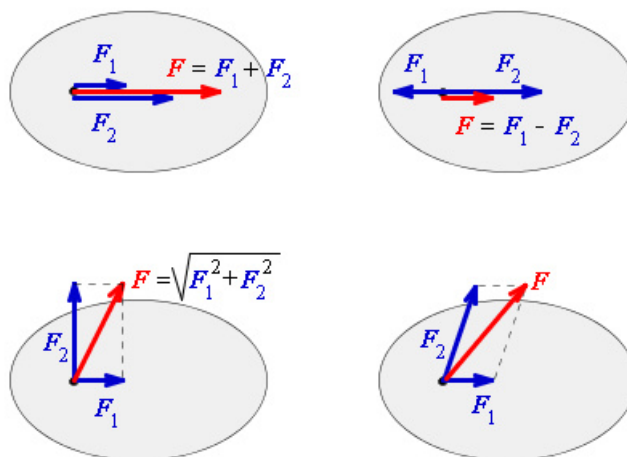
Problematika se nám totiž u tělesa trochu zkomplikuje. Příklad: potřebuje v bytě posunout úzkou vysokou knihovnu. Tlačíme-li na ni ve spodní části, knihovnu posouváme. Zatlačíme-li však nahoře, můžeme ji převrhnout. V prvním případě knihovna koná posuvný pohyb, v druhém pohyb rotační. Záleží tedy na místě působíště síly. Samozřejmě, je-li knihovna těžká, musí nás být na její přemístění více, působíme více silami, které skládáme.

**Skládat síly působící na těleso znamená nahradit je silou jedinou, která má na těleso stejný pohybový účinek.**

A teď k působíšti skládaných sil. Mohou nastat dvě situace. Buď síly působí v jednom bodě tělesa, nebo v bodech různých.

### • *Síly působící v jednom bodě tělesa.*

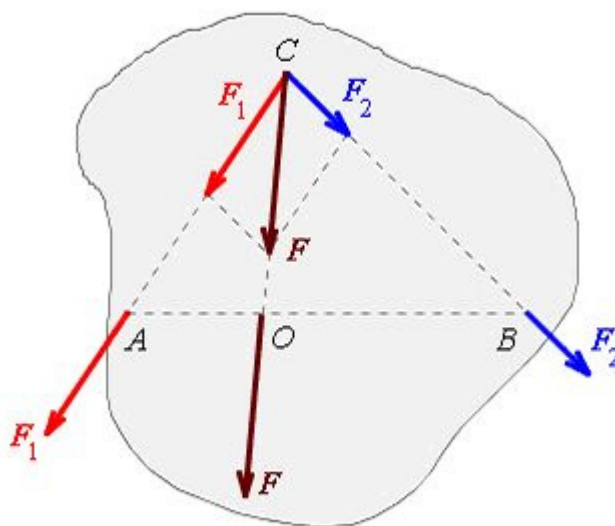
Tyto síly skládáme stejným způsobem, se kterým jste se již seznámili v úvodu. Různé možné situace jsou na obrázku, viz. obr. 1.6-15. Na obrázku jsou zakresleny dvě působící síly. Na situaci se nic nezmění, je-li působících sil více. Síly skládáme postupně po dvojicích.



obr. 1.6-15

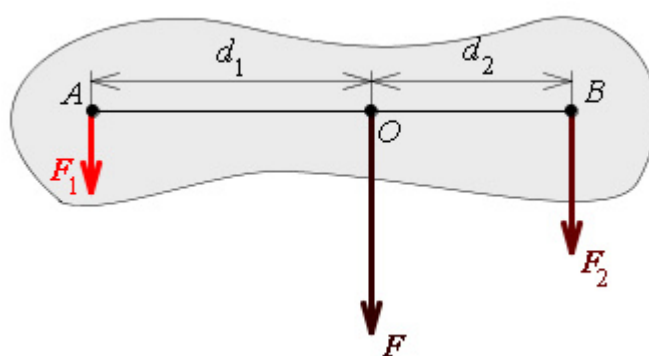
- **Síly působí v různých bodech tělesa.**

Nejjednodušeji se skládají dvě působící **různoběžné síly**  $F_1$  a  $F_2$ . Jak dostaneme jejich výslednici  $F$  je znázorněno na obrázku, viz. obr. 1.6-16. Každou z těchto sil posuneme po přímkách, na kterých leží do společného působíště  $O$ . Tam je složíme podle pravidla o vektorovém součtu,  $F = F_1 + F_2$ . Působíště výsledné síly můžeme libovolně posunout po přímce  $p$ . Nejlépe je výslednici posunout do působíště  $P$ , do bodu, který je průsečíkem vektorových přímk sil  $F_1$  a  $F_2$ . Pak výslednice  $F$  v tomto bodě má stejný pohybový účinek na těleso jako složky  $F_1$  a  $F_2$  působící v bodech  $A$  a  $B$ .



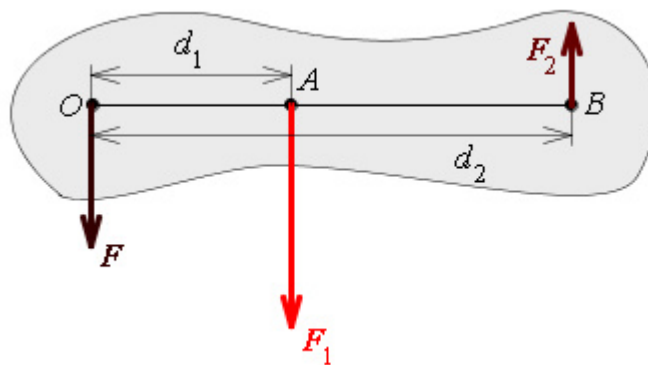
obr. 1.6-16

Když působí na těleso dvě **rovnoběžné síly**  $F_1$  a  $F_2$  **stejně orientace** pak jejich výslednice  $F$  má stejnou orientaci jako působící síly. Její velikost je rovna součtu velikostí obou sil  $F = F_1 + F_2$ . Pro polohu působíště výslednice platí  $F_1 d_1 = F_2 d_2$  (momenty obou sil jsou stejné), viz. obr. 1.6-17.



obr. 1.6-17

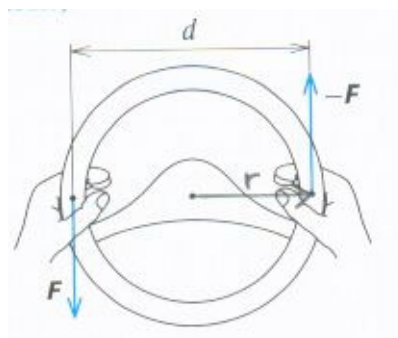
A ještě poslední situace. Na těleso teď působí **rovnoběžné síly**  $F_1$  a  $F_2$ , ale **opačného směru**, viz. obr. 1.6-18. Výslednice  $F$  má zase stejný směr jako působící síly. Její velikost je rovna rozdílu velikostí obou sil  $F = F_1 - F_2$ . Pro polohu působíště výslednice platí stejně jako v předešlém případě  $F_1 d_1 = F_2 d_2$ .



obr. 1.6-18

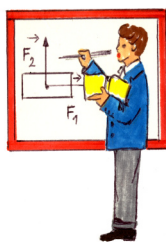
- **Dvojice sil.**

Zvláštním případem dvou rovnoběžných sil opačné orientace je dvojice sil. Jsou to například síly rukou řidiče působící na volant, viz. obr. 1.6-19. Výsledkem působení těchto sil je otáčení se tělesa, tedy volantu.



obr. 1.6-19

**Dvojici sil** tvoří dvě stejně velké rovnoběžné síly  $F$  a  $F'$  opačné orientace, které působí ve dvou různých bodech tělesa otáčivého kolem pevné osy.



Určete výsledný moment dvojice sil působících na volant. Řidič působí každou rukou silou 50 N, volant má průměr 40 cm.

Protože obě síly způsobují otáčení volantu ve stejném směru, bude výsledný moment dvojice sil dán součtem momentů obou sil.

$$D = M_1 + M_2 = F r + F' r.$$

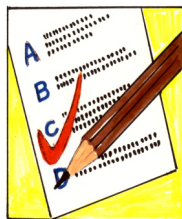
Protože velikosti obou sil jsou stejné, můžeme napsat pro **velikost momentu dvojice sil** vztah

$$D = F d$$

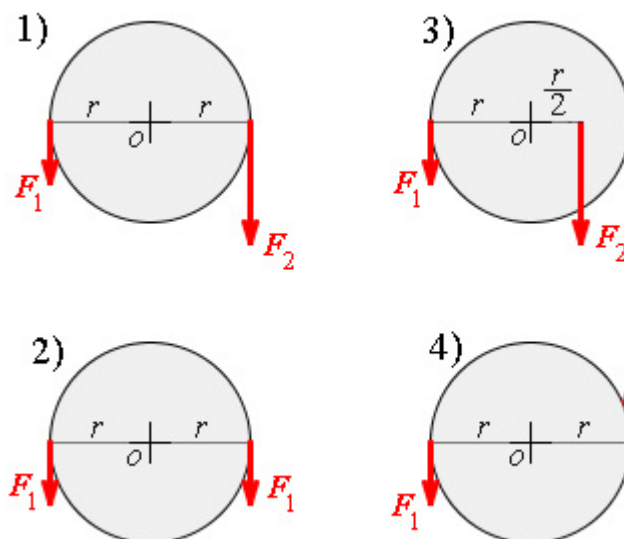
kde  $d$  je kolmá vzdálenost vektorových přímkou obou sil označovaná jako **rameno dvojice sil**.

Dosadíme-li numerické hodnoty dostaneme:

$$D = 50 \cdot 0,4 = 20 \text{ N.m.}$$



**KO1.6.3-10.** Na kotouč o poloměru  $r$ , který je otáčivý kolem nehybné osy jdoucí jeho středem, působí dvě rovnoběžné síly. Čtyři různé případy působení těchto sil jsou znázorněny na obrázku, viz. obr. 1.6-20. Síly  $F_1$  a  $F_1$  mají stejnou velikost  $F$ , síla  $F_2$  má velikost  $2F$ . Ve kterých případech se otáčivé účinky sil navzájem ruší?



obr. 1.6-20

- a) v žádném případě    b) jen v případě 2    c) v případech 2 a 3    d) jen v případě 4

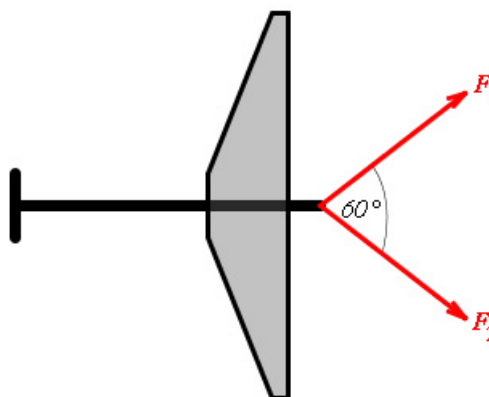
**KO1.6.3-11.** Na kotouč o poloměru  $r$ , který je otáčivý kolem nehybné osy jdoucí jeho středem, působí dvě rovnoběžné síly. Čtyři různé případy působení těchto sil jsou znázorněny na obrázku, viz. obr. 109. Síly  $F_1$  a  $F_1$  mají stejnou velikost  $F$ , síla  $F_2$  má velikost  $2F$ . Ve kterých případech tvoří síly dvojici sil?

- a) ve všech případech    b) jen v případě 2    c) v případech 2 a 4    d) jen v případě 4



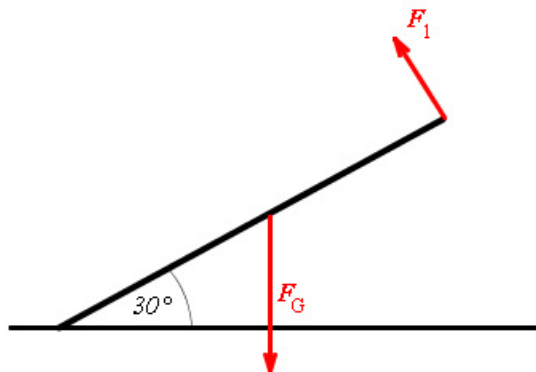
**U1.6.3-12.** Jak velkou silou je tažen větroň, viz. obr. 1.6-21, jestliže síly napínající dvě lana svírají úhel  $60^\circ$  a každá z nich má velikost

1000 N?



obr. 1.6-21

**U1.6.3-13.** Dělník zvedá za jeden konec trám o délce 4,0 m a hmotnosti 40 kg. Při určité poloze, jak je vidět na obrázku, viz. obr. 1.6-22, svírá trám s vodorovným směrem úhel  $30^\circ$ . Určete velikost síly  $F_1$ , kterou působí dělník na trám v dané poloze. Síla  $F_1$  je kolmá k trámu ( $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ ).



obr. 1.6-22

## 1.6.4 Rovnováha tuhého tělesa



1. Umět definovat podmínky rovnováhy tuhého tělesa.
2. Rozlišit stabilní, labilní a volnou rovnováhu tělesa, uvést příklady.



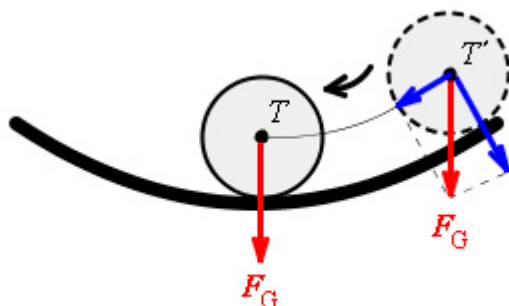
Řekneme-li, že **těleso je v rovnovážné poloze** (v rovnováze), znamená to, že **výslednice sil i výsledný moment sil na něj působících je nulový a těleso je v klidu**.

Uveďme si příklady. V jedné televizní reklamě tlačí dvě party pivařů auto. Jedna skupina zepředu a druhá zezadu. Pokud se auto nepohne, znamená to, že výslednice sil jedné skupiny je stejně velká jako výsledná síla vyvinutá druhou skupinou. Říkáme, že auto je v rovnovážné poloze.

Jiný příklad, tentokrát na výsledný moment síly. Chceme se dostat do pootevřených dveří. Působíme na dveře momentem své síly. Člověk na druhé straně dveří nám brání vstoupit. Pokud je moment jeho síly stejně velký jako je můj, dveře se nepohnou, jsou v rovnováze.

Vraťme se ještě k autu. Auto stojí v dolíku, je v klidu, je v rovnovážné poloze. Zatlačíme-li na něj, posuneme jej nahoru. Když přestaneme působit silou, auto se vrátí do původní polohy. Situace je vidět na obrázku, pro jednoduchost je auto nahrazeno kuličkou, viz. obr. 1.6-23. Tuto rovnovážnou polohu označujeme jako stálou nebo stabilní rovnovážnou polohu.

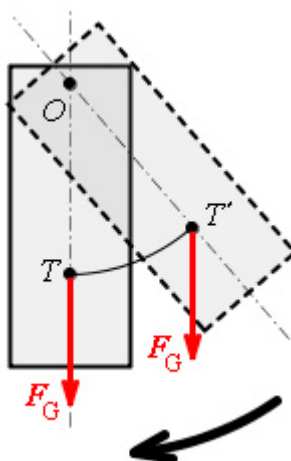




obr. 1.6-23

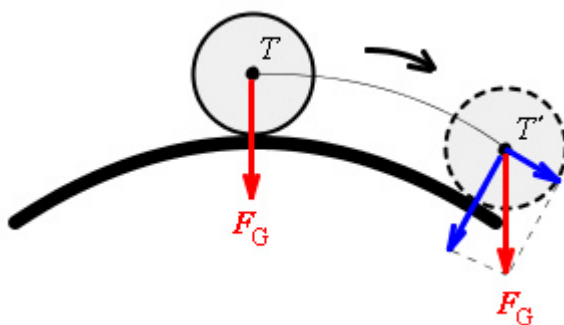
**Stabilní rovnovážnou polohu** má těleso, které se po vychýlení z této polohy opět do ní vrací.

Stabilní rovnovážnou polohu má také těleso, které je otáčivé kolem osy **umístěné nad** svým **těžištěm**. Vychýlíme-li toto těleso působením momentu síly, těleso se vrací zpátky do stabilní polohy. Situaci máme znázorněnu na obrázku, viz. obr. 1.6-24.



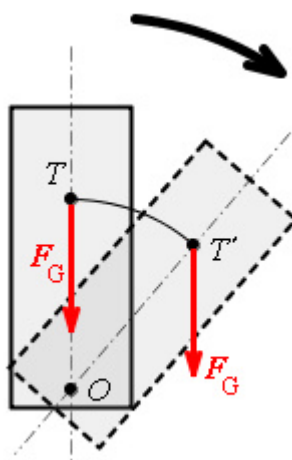
obr. 1.6-24

Naopak tlačíme-li auto stojící na vrcholu kopce, po vychýlení z rovnovážné polohy se auto již pohybuje „samo“. V tomto případě se auto nevrací do výchozí rovnovážné polohy. Na obrázku, viz. obr. 1.6-25 je zase znázorněna modelová situace kuličky.



obr. 1.6-25

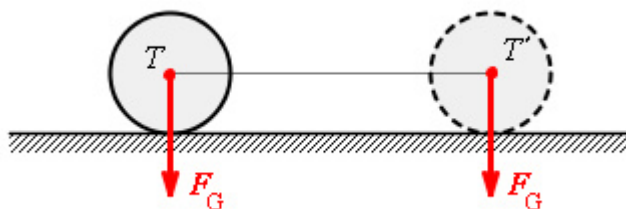
Podobně je to také s tělesem, které se může otáčet kolem osy umístěné pod svým těžištěm jako je vidět na obrázku, viz. obr. 1.6-26. V obou posledních dvou případech těleso zaujímá tzv. vratkou neboli labilní polohu.



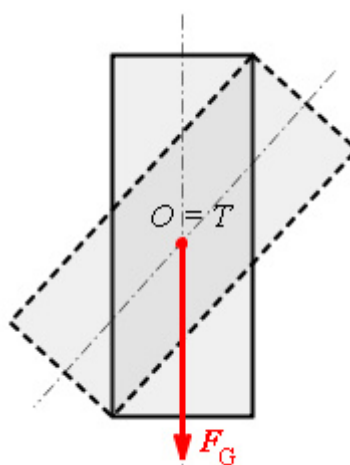
obr. 1.6-26

**Labilní rovnovážnou polohu** má těleso, které se po vychýlení z této polohy do ní nevrací. Těleso po vychýlení přechází do nové stabilní polohy.

A konečně může mít těleso rovnovážnou polohu, kterou označujeme jako volnou neboli indiferentní rovnovážnou polohu. Tu má naše kulička na vodorovné rovině, viz. obr. 1.6-27 nebo kvádr, jehož osa otáčení prochází jeho těžištěm, viz. obr. 1.6-28.

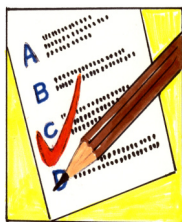


obr. 1.6-27



obr. 1.6-28

**Volnou rovnovážnou polohu** má těleso, které po vychýlení zůstává v jakékoliv nové opět stabilní poloze.



**KO1.6.4-14.** Jak daleko od osy otáčení houpačky musí sedět otec hmotnosti 90 kg, chce-li se houpat se synem „vážícím“ 15 kg? Dítě sedí ve vzdálenosti 3 m od osy otáčení houpačky.

**KO1.6.4-15.** V jaké vzdálenosti musí dělník zvedající bednu o hmotnosti 200 kg podložit páku? Páka má délku 2 m. Dělník je schopen zvednout přímo těleso hmotnosti 50 kg.

## 1.6.5 Kinetická energie tuhého tělesa



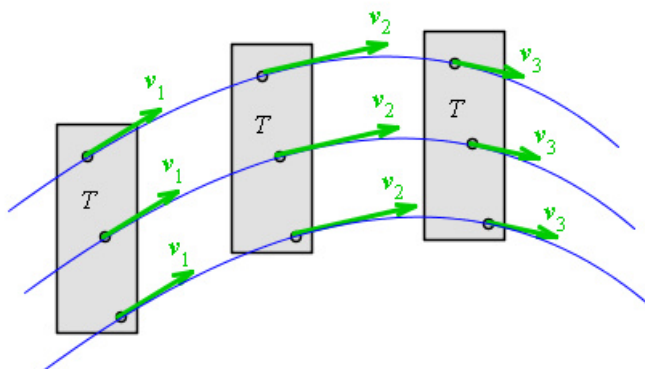
1. Rozlišit kinetickou energii posuvného a otáčivého pohybu.
2. Znat vztah pro kinetickou energii posuvného pohybu tělesa.
3. Znat vztah pro kinetickou energii otáčivého pohybu tělesa.
4. Umět vysvětlit pojem moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení.
5. Vědět, jak se vypočítá kinetická energie složeného pohybu



Pro kinetickou energii hmotného bodu hmotnosti  $m$  pohybujícího se rychlostí  $v$  jsme si uváděli vztah  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ . S kinetickou energií tuhého tělesa je to poněkud složitější. Musíme se vrátit k začátku této kapitoly, kde jsme si rozlišovali dva základní pohyby tělesa – posuvný a rotační.

### • Kinetická energie posuvného pohybu.

Podívejte se ještě jednou na obrázek, viz. obr. 1.6-29 znázorňující translační pohyb tělesa. Pro tento pohyb je charakteristické, že všechny body tělesa se pohybují stejnou rychlostí  $v$ . Kinetickou energii tělesa dostaneme, sečteme-li kinetické energie všech jednotlivých  $n$  hmotných bodů tělesa  $m_i$ .



obr. 1.6-29

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}m_3v^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nv^2.$$

Na pravé rovnice vytkneme výraz  $\frac{1}{2}v^2$ .

$$E_k = \frac{1}{2}v^2(m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n).$$

Součet hmotností jednotlivých bodů tělesa (výraz v závorce) je celková hmotnost tělesa  $m$ .

Kinetická energie tělesa při posuvném pohybu se tedy vyjádří stejně jako kinetické energie hmotného bodu. Vlastně nahrazujem naše tuhé těleso hmotným bodem celkové hmotnosti tělesa umístěným do jeho těžiště.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

### • Kinetická energie otáčivého pohybu.

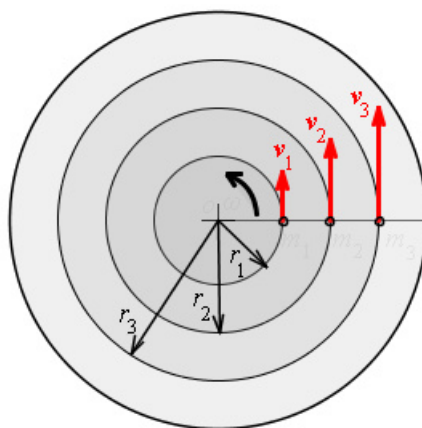
Při určování kinetické energie rotujícího tělesa budeme postupovat obdobně jako u pohybu posuvného. To znamená, že si vyjádříme kinetické energie jednotlivých bodů tělesa a pak je sečteme.

Vydeme z obrázku, viz. obr. 1.6-30. Zde je nakresleno rotující těleso ve tvaru kotouče otáčející se úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy jdoucí středem. Na obrázku jsou znázorněny hmotné body jejichž kinetická energie se mění v závislosti na vzdálenosti od osy otáčení. Důležité je, že všechny body mají stejnou úhlovou rychlost. Energie j-tého hmotného bodu je dána výrazem  $E_{kj} = \frac{1}{2}m_jv_j^2 = \frac{1}{2}m_j\omega^2r_j^2$ . Opět sečteme kinetické energie všech bodů tvořících otáčející se těleso.

$$E_k = \frac{1}{2}m_1\omega^2r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2r_2^2 + \frac{1}{2}m_3\omega^2r_3^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n\omega^2r_n^2.$$

Po vytknutí společného výrazu  $\frac{1}{2}\omega^2$  dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \dots + m_nr_n^2).$$



obr. 1.6-30

Výraz v závorce se označuje jako **moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení** a označuje se  $J$ . Takže kinetickou energii otáčejícího se tělesa vyjádříme vztahem:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Podívejme se ještě jinak na tento vztah a srovnáme ho se vztahem pro kinetickou energii posuvného pohybu  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ . Začneme od poslední veličiny v těchto vztazích. U posuvného pohybu máme druhou mocninu rychlosti pohybu  $v^2$ . U rotačního pohybu je zase druhá mocnina úhlové rychlosti  $\omega^2$ . O úhlové rychlosti jsme si řekli, že charakterizuje rychlost rotačního pohybu.

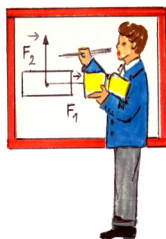
Jdeme dál. Druhý člen ve vztahu pro kinetickou energii posuvného pohybu je hmotnost tělesa  $m$ . Hmotnost nám určuje setrvačné vlastnosti tělesa při posuvném pohybu. Obdobný význam by měl mít i moment setrvačnosti. A skutečně **moment setrvačnosti  $J$  určuje setrvačné vlastnosti tělesa při rotačním pohybu**. Moment setrvačnosti je schopnost tělesa „setrvávat“ v rotačním pohybu.

Můžeme si vliv momentu setrvačnosti vyzkoušet sami. Zkuste zastavit lehké kolo jízdního kola a těžké kolo nákladáku o stejném poloměru. Když budou obě kola vykonávat stejný počet otáček za minutu (mají stejnou úhlovou rychlost) asi podstatně snáze zastavíme jízdní kolo.

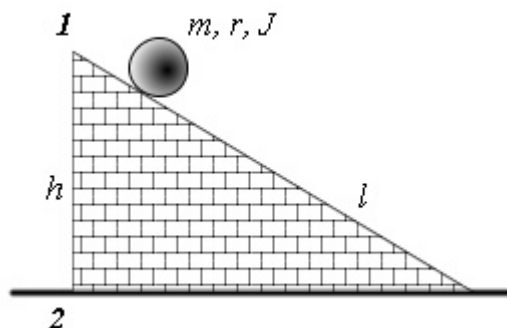
- **Kinetická energie složeného pohybu.**

Vyřešit tento problém už nebude tak těžké, uvědomíme-li si, že tento pohyb vzniká složením posuvného a rotačního pohybu. Protože kinetická energie je skalární veličina, jednoduše sečteme kinetickou energii posuvného a rotačního pohybu.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2.$$



Po nakloněné rovině o délce 5 m se začne valit bez prokluzování válec tak, že jeho těžiště sníží svoji polohu o 1 m. *Určete velikost rychlosti, s níž se těleso pohybuje na konci daného úseku, viz. obr. 1.6-31.*



obr. 1.6-31

Označíme si veličiny:  $l = 5$  m,  $h = 1$  m,  $J_T = m r^2 / 2$ ,  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>,  $v = ?$

Využijeme zákona zachování mechanické energie. Válec v horní poloze má potenciální energii  $E_{p1} = m g h$ , v dolní poloze  $E_{p2} = 0$ . Kinetická energie v horní poloze je nulová,  $E_{k1} = 0$  a v dolní poloze je dána kinetickou energií posuvného pohybu a kinetickou energií rotačního pohybu

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_T \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m r^2 \right) \left( \frac{v^2}{r^2} \right)$$

Vyjádříme-li si ze zákona zachování energie  $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$  velikost rychlosti, dostáváme

$$v = \sqrt{\left( \frac{4}{3} g h \right)} = \sqrt{\left( \frac{4}{3} 9,8,1 \right)} = \underline{3,6 \text{ m/s}}$$

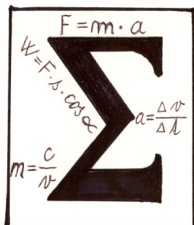
Velikost rychlosti válce ve spodní poloze je 3,6 m/s.



**U1.6.5-16.** Rotor elektromotoru s hmotností 110 kg má moment setrvačnosti  $2 \text{ kgm}^2$  a koná 20 otáček za sekundu. *Jak velkou má kinetickou energii?*

**U1.6.5-17.** Válec o hmotnosti 2 kg se valí bez prokluzování po vodorovné podložce stálou rychlostí velikosti 4 m/s. *Určete kinetickou energii válce.*

**U1.6.5-18.** Koule ( $J_T = 2mr^2/5$ ) o hmotnosti 0,25 kg a průměru 6 cm se valí bez klouzání po vodorovné podložce, přičemž frekvence otáčení je 4 Hz. *Určete kinetickou energii koule.*



1. Tuhé těleso může vykonávat:

- **Posuvný (translační) pohyb**, při kterém všechny body tělesa mají v určitém čase rychlosti stejné velikosti, stejného směru i stejné orientace.
- **Otáčivý (rotační) pohyb** kolem osy otáčení. Při tomto pohybu mají všechny body tělesa stejnou úhlovou rychlost.
- **Složený (kombinovaný) pohyb** složený z posuvného a otáčivého pohybu.

2. Pohyb celého tělesa si můžeme nahradit pohybem těžiště. **Těžiště tělesa** je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna všechna hmotnost tělesa.

Těžiště tělesa je působiště výslednice všech tíhových sil působících na jednotlivé hmotné body tvořící dané těleso.

3. Otáčivý účinek síly je dán **momentem síly** vzhledem k ose otáčení:  $M = F r \sin \varphi$ .

4. **Síly** působící na těleso **můžeme skládat**. Při skládání sil využíváme pravidel vektorového počtu. Je třeba přihlížet také k jejich působišti.

5. Dvojice sil působí na těleso **momentem dvojice** sil  $D = F d$ .
6. Těleso je v **rovnovážné poloze**, když výslednice sil i výsledný moment sil na něj působících je nulový a těleso je v klidu.
7. **Rovnovážná poloha** může být:
- **Stabilní**, tuto polohu má těleso, které se po vychýlení z této polohy opět do ní vrací.
  - **Labilní**, kterou má těleso, které se po vychýlení z této polohy do ní nevrací. Těleso po vychýlení přechází do nové stabilní polohy.
  - **Volnou polohu** má těleso, které po vychýlení zůstává v jakékoliv nové poloze.
8. **Kinetická energie posuvného pohybu** je dána vztahem  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ .
9. **Kinetická energie otáčivého pohybu** se vyjádří jako  $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ . Fyzikální veličina  $J$  je **moment setrvačnosti** vůči ose otáčení. Moment setrvačnosti vyjadřuje setrvačné vlastnosti tělesa při rotačním pohybu.
10. **Kinetická energie složeného pohybu** je dána **součtem** kinetické energie rotačního a translačního pohybu  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ .



## 1.7. Struktura a deformace pevné látky



Odhadovaný čas je 45minut



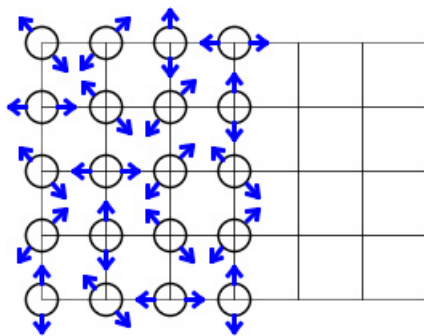
1. Znat způsob rozlišování pevných, kapalných a plyných látek podle změn vyvolaných působením vnějších sil.
2. Umět definovat krystalickou a amorfni látku.
3. Rozlišovat a definovat pružnou a plastickou deformaci.
4. Znat různé druhy namáhání pevného tělesa.
5. Umět definovat normálové napětí, relativní a absolutní deformaci.
6. Vyslovit Hookův zákon, vědět oblast jeho aplikace.
7. Umět popsat jednotlivé význačné body křivky závislosti relativní deformace na napětí.

### 1.7.1 Struktura pevných látek



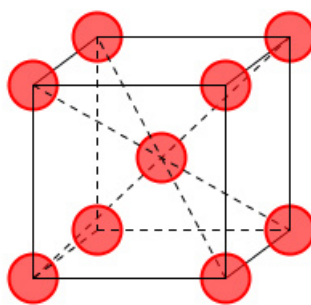
Základní vlastností pevných látek je to, že si zachovávají svůj tvar, pokud na ně nepůsobí vnější síly. Tím se liší od kapalných těles, které jsou tekuté a zachovávají svůj objem, ale ne tvar. A zcela se liší plynná tělesa, která se rozpínají do okolního prostoru a mění tak svůj tvar i objem.

V pevných látkách jsou molekuly případně atomy nebo ionty pevně vázány na svá místa a mohou vykonávat jen kmitavý pohyb kolem svých rovnovážných poloh, viz. obr. 1.7-1. Pevné látky dělíme do dvou základních skupin - na látky krystalické a amorfni.



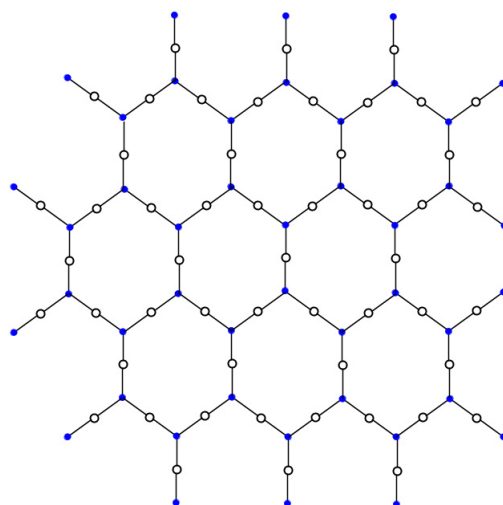
Obr. 1.7-1

**Krystalické látky** jsou charakterizovány pravidelným uspořádáním částic ze kterých se skládají do prostorové geometrické mřížky, viz. obr. 1.7-2.



obr. 1.7-2

Vytvářejí tak **krystalickou mřížku**, která se periodicky opakuje v celém krystalu, hovoříme o **dalekodosahovém uspořádání**, viz. obr. 1.7-3.



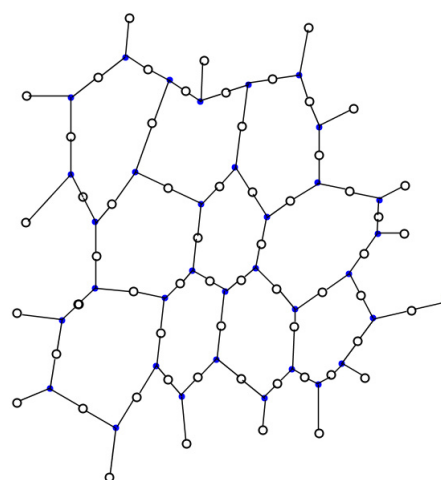
○ atom kyslíku ● atom boru

obr. 1.7-3

Krystalické látky mohou být ve formě **monokrystalu** at' už přírodního – křemen, ametyst (barevná odrůda křemene), kamenná sůl, vápenec nebo uměle vyrobeného (současné kameny ve špercích – umělé drahokamy jako safír, rubín). Také v polovodičové technice se používá uměle vyrobených monokrystalů germania a křemíku.

Většina krystalických látek je však tvořena velkým množstvím drobných krystalků nazývaných **zrna**. Jejich velikost se pohybuje od 10  $\mu\text{m}$  do několika mm. Hovoříme o **polykrystalech**. Polykrystaly jsou kovy, různé zeminy atp. Uvnitř zrn jsou částice uspořádány v mřížce, vzájemná poloha sousedních zrn je však zcela nahodilá.

**Amorfní látky** mají nepravidelné uspořádání částic, které se vyznačuje **krátkodosahovým uspořádáním**, viz. obr. 1.7-4.



○ atom kyslíku ● atom boru

obr. 1.7-4

To znamená že v malé oblasti jsou částice přibližně pravidelně uspořádány, tato uspořádanost se s rostoucí vzdáleností porušuje. Amorfními látkami jsou například vosk, asfalt, většina plastů, sklo atp.

Zvláštní skupinou amorfních látek jsou **polymery**, látky organického původu tvořící dlouhé makromolekuly často navzájem propleteny, vytvářejí sítě, jsou stočeny do klubek atd. Polymery jsou například celulóza, bílkoviny, termoplasty jako PVC, polyepoxidové pryskyřice.

Mezi částicemi pevné látky působí **vazebné síly**, které jak napovídá název, vážou k sobě částice ze kterých se skládá krystalová mřížka. Vazebné síly dávají vzniknout různým způsobům **vazeb**, ze kterých vyplývají typické vlastnosti daných krystalů.

## 1.7.2. Deformace pevného tělesa



Začnou-li působit na pevné těleso vnější síly, začne se pohybovat nebo dojde k jeho deformaci. Pod pojmem deformace tělesa rozumíme změny jeho rozměrů, tvaru a objemu.

Deformace může být **pružná (elastická)** jestliže pevné těleso po ukončení působení vnější deformační síly získá původní tvar. Tak gumový míček po stlačení rukou a následujícím uvolnění působení ruky obnoví svoji velikost

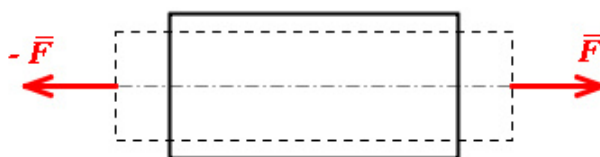
i tvar.

Při deformaci jsou částice tělesa působením vnějších sil vychylovány ze svých rovnovážných poloh. Vychylování brání síly vzájemného působení mezi částicemi pevného tělesa, vznikají **síly pružnosti**  $F_p$ . Schopnost tělesa obnovit své rozměry, tvar i objem po přerušení působení deformačních sil se nazývá **pružnost**.

Deformace tělesa, která trvá po ukončení působnosti deformačních vnějších sil, se označuje jako **trvalá deformace (tvárná, plastická)**. Stlačíme-li rukou nyní kuličku z plastelíny, pak uvolníme-li stisk plastelína zůstane v deformovaném stavu.

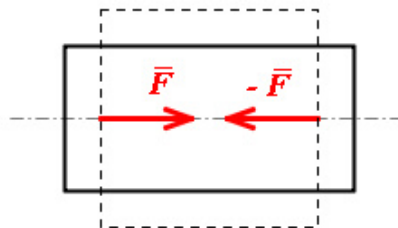
Pružná deformace tělesa může být výsledkem tahu, tlaku, ohybu, smyku nebo kroucení.

Při **tahu** působí na těleso dvě stejně veliké síly směrem ven, viz. obr. 1.7-5. Těleso zvětší svou délku a svůj objem.



obr. 1.7-5

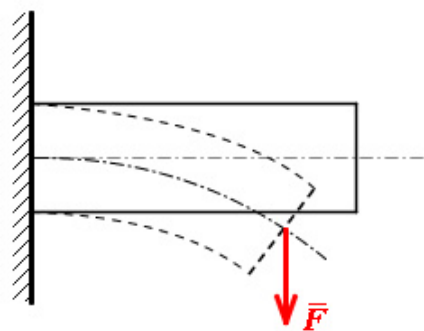
Při **tlaku** působí na těleso dvě stejně veliké síly směrem dovnitř tělesa, viz. obr. 1.7-6. Těleso se zkrátí a zmenší svůj objem.



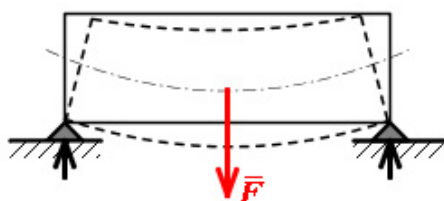
obr. 1.7-6

Při namáhání **ohybem** působí na upevněné (podepřené) těleso síla kolmá k jeho podélné ose, viz. obr. 1.7-7a, obr.1.7-7b. Spodní vrstvy tělesa se při tomto ději zkracují (jsou namáhány

tlakem), horní vrstvy se prodlužují (namáhány tahem) a konečně střední vrstva svou délkou nemění – označujeme ji jako neutrální vrstvu.

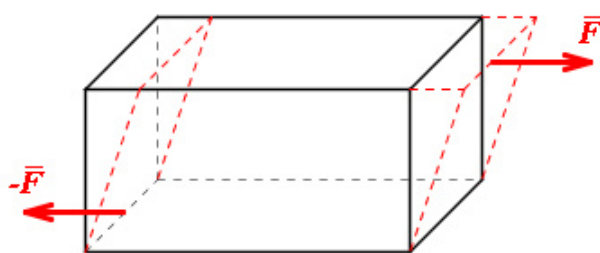


obr. 1.7-7a



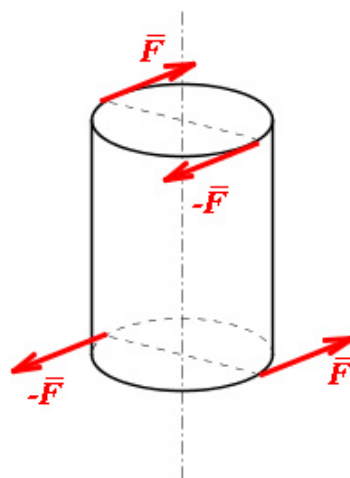
obr.1.7-7b

Při **smyku** působí na protilehlé podstavy tělesa tečné síly a těleso se zkosí (změní tvar), ale nezmění svůj objem, viz. obr. 1.7-8.



obr. 1.7-8

A konečně při namáhání **kroucením** působí na těleso dvě dvojice sil, jejich momenty jsou stejně velké a opačného směru, viz. obr. 1.7-9. Těleso mění svůj tvar.

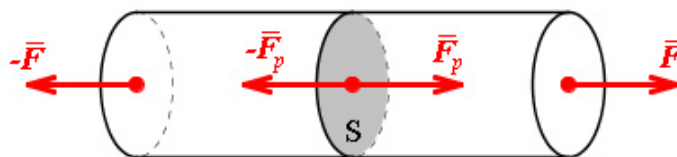


obr. 1.7-9

### 1.7.3. Normálové napětí, Hookův zákon



V předchozí kapitole se mluvilo o silách pružnosti vyvolaných vnějšími silami. Podívejme se na obrázek struny namáhané na tah silami  $F$ , viz. obr. 1.7-10.



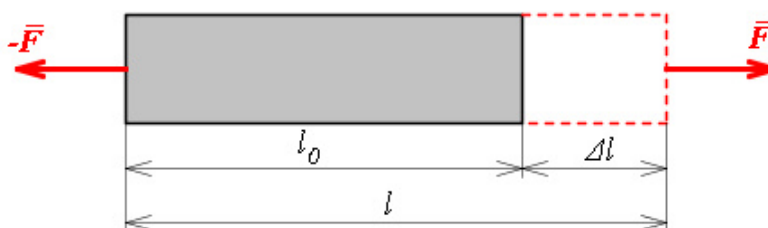
obr. 1.7-10.

Vnější tahové síly  $F$  a  $F'$  vyvolají uvnitř struny síly pružnosti  $F_p$  a  $F_p'$  působící kolmo na plochu  $S$  příčného řezu strunou. Podíl velikosti síly pružnosti  $F_p$  a kolmé plochy  $S$  nazýváme **normálové napětí**

$$\sigma_n = \frac{F_p}{S}$$

s jednotkou  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa}$  (pascal).

Zůstaňme ještě u naší struny. Působením tahových sil se její původní délka  $l_0$  změní na délku  $l$ , viz. obr. 1.7-11.

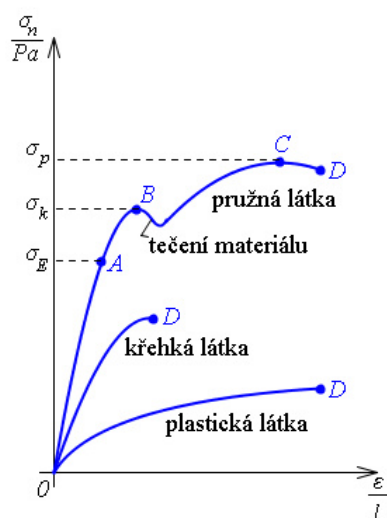


obr. 1.7-11

Struna se prodlouží o  $\Delta l = l - l_0$ . Názornější je porovnávat prodloužení tělesa s jeho původní délkou. Zavedeme tedy veličinu **poměrné prodloužení**  $\varepsilon$  definované vztahem

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Poměrné prodloužení je tahovým namáhání závislé na mechanickém napětí. Křivka této závislosti se zkoumá v technické praxi a je měřítkem vlastností zkoumaného materiálu.



$\sigma_E$  ... mez pružnosti, platí Hookeův zákon  
 $\sigma_k$  ... mez kluzu  
 $\sigma_p$  ... mez pevnosti  
 bod D ... těleso ztrácí soudržnost

při

obr. 1.7-12

Často se záznam této křivky označuje jako deformační diagram. Na obrázku, viz. obr. 1.7-12 jsou vyneseny tři křivky závislosti normálového napětí  $\sigma_n$  na poměrném prodloužení  $\varepsilon$ , každá pro zcela odlišný materiál.

Na křivkách jsou vidět a písmeny označeny význačné, charakteristické body.

Podívejme se nejdříve na křivku pro **pružnou látku** jako je např. ocel, železo apod. Až do bodu A je závislost přímková, lineární odpovídající přímé úměrnosti mezi normálovým napětím a poměrným prodloužením.

$$\sigma_n = E\varepsilon$$

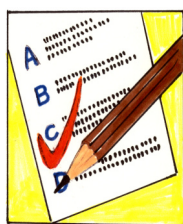
Toto je tzv. **Hookeův zákon** pro pružnou deformaci tahem. Veličina  $E$  je látková konstanta, nazývá se **modul pružnosti v tahu** a charakterizuje materiál z pohledu jeho deformace tahem. Hookův zákon platí po tzv. **mez pružnosti**  $\sigma_E$ , tedy v oblasti kde dochází k pružné deformaci - lineární část diagramu. Překročí-li normálové napětí mez pružnosti, pak dochází k trvalé deformaci tělesa i po odstranění vnějších deformujících sil.

Pokračujeme-li ve sledování křivky pak vidíme, že mezi body A a B již křivka není přímková.

Po zmenšení vnější síly zůstane těleso trvale deformováno, dochází k **plastické deformaci**.

V následující části křivky mezi body B a C se projevují výrazné trvalé deformace. Důležitý je bod C. Napětí v tomto bodě se označuje jako **mez pevnosti**  $\sigma_p$ . Při překročení tohoto napětí poruší se soudržnost materiálů, při tahovém namáhání dochází k přetržení tělesa.

Druhá křivka je charakteristická pro **křehkou látku**. Takovou křehkou látkou je například litina, sklo, porcelán atp. Na křivce je podstatné to, že lineární oblast je velmi rychle následována mezí pevnosti, kdy dochází k porušení materiálu. Prakticky zde není oblast plastické deformace.



Třetí křivka pak je typická pro plastickou látku jakou je plastelína, vosk atp. Při namáhání tohoto materiálu dochází pouze k plastické deformaci.

Hookův zákon platí i pro pružnou deformaci tlakem. Také moduly pružnosti v tahu a tlaku jsou pro většinu látek stejné. Výjimku tvoří látky jako beton, žula, litina.

**KO1.7.3-1.** Mezi krystalické látky *nepatří*:

- a) jantar   b) grafit   c) modrá skalice   d) rubín   e) diamant   f) kaučuk

**KO1.7.3-2.** U tyče z materiálu o modulu pružnosti v tahu  $E$  bylo při normálovém napětí  $\sigma_n$  naměřeno relativní prodloužení 0,2 %. Jaké je *relativní prodloužení* tyče při dvojnásobném normálovém napětí?

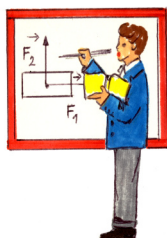
- a) 0,1%   b) 0,2%   c) 0,4%   d) 0,8%

**KO1.7.3-3.** U tyče z materiálu o modulu pružnosti v tahu  $E$  bylo při normálovém napětí  $\sigma_n$  naměřeno relativní prodloužení 0,2 %. Jaké je *relativní prodloužení* této tyče při stejném normálovém napětí, je-li délka tyče dvojnásobná?

- a) 0,1%   b) 0,2%   c) 0,4%   d) 0,8%

**KO1.7.3-4.** U tyče z materiálu o modulu pružnosti v tahu  $E$  bylo při normálovém napětí  $\sigma_n$  naměřeno relativní prodloužení 0,2 %. Jaké je *relativní prodloužení* této tyče při stejném normálovém napětí, je-li tyč o dvojnásobném modulu pružnosti v tahu?

- a) 0,1%   b) 0,2%   c) 0,4%   d) 0,8%





Kovová válcová trubka délky 1m s vnějším průměrem 20cm a s tloušťkou stěny 1cm byla stlačena normálovou silou o velikosti 16kN. Trubka je zhotovena z materiálu modulu pružnosti 120GPa. Určete *normálové napětí, poměrné zkrácení trubky a zkrácení trubky*.

Vyjdeme z definičního vztahu pro normálové napětí  $\sigma_n = \frac{F_p}{S}$  a nejdříve vypočteme obsah příčného řezu trubky, na který síla působí. Ten je dán plochou mezikruží  $S = \frac{\pi(d_1^2 - d_2^2)}{4}$ , kde  $d_1$  je vnější průměr a  $d_2$  vnitřní průměr trubky.

Normálové napětí tak bude vyjádřeno vztahem  $\sigma_n = \frac{4F_p}{\pi(d_1^2 - d_2^2)}$ . Po dosazení získáme normálové napětí velikosti  $\sigma_n = \frac{4 \cdot 16 \cdot 10^3}{3,14(0,2^2 - 0,18^2)} = 2,68 \text{ MPa}$ .

Z Hookova zákona vyplývá pro poměrné zkrácení výraz  $\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E}$  a po dosazení

$$\varepsilon = \frac{2,68 \cdot 10^6}{1,2 \cdot 10^{11}} = 2,2 \cdot 10^{-5}. \text{ Poměrné zkrácení trubky je } 0,002\%.$$

A konečně zkrácení trubky plyne z definičního vztahu relativní změny jako  $\Delta l = \varepsilon l = 2,2 \cdot 10^{-5} \cdot 1 = 22 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ .



**U1.7.3-5.** Železná tyč průřezu  $2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , délky 1m je namáhána v tahu silou  $1,962 \cdot 10^4 \text{ N}$ . Vypočtete *napětí materiálu, absolutní a relativní prodloužení*, je-li modul pružnosti v tahu  $E = 1,962 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .

**U1.7.3-6.** Tyč kruhového průřezu o průměru  $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  a délky 2 m se vlivem síly  $3,082 \cdot 10^4 \text{ N}$  prodloužila o  $10^{-3} \text{ m}$ . Určete *modul pružnosti v tahu*.

**U1.7.3-7.** Určete *modul pružnosti v tahu* zkušební tyče průměru  $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ , délky 0,2m, jestliže při zatížení silou  $3,92 \cdot 10^3 \text{ N}$  je absolutní prodloužení  $= 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ .

**U1.7.3-8.** Dřevěný trámek délky 3m se zkrátil působením tlakové síly kolmé k průřezu o 4mm. Vypočtete *délku trámu po zatížení a jeho poměrné zkrácení*.

**U1.7.3-9.** *Jakou silou* musí být napínáno gumové vlákno o průřezu  $8 \text{ mm}^2$ , aby se prodloužilo na dvojnásobek původní délky? Modul pružnosti v tahu je 1 MPa.

**U1.7.3-10.** Zkušební vzorek z jehličnatého dřeva má tvar krychle s délkou hrany 40 mm. Rozdrť se silou 54,5 kN. Vypočítejte *mez pevnosti* zkoušeného dřeva.



## 1.8 Mechanické kmitání

S mechanickým kmitáním (oscilacemi) se denně setkáváte a to nejen ve formě přímo viditelné jako je poutňová opice na gumě nebo kyvadlo hodin, viz. obr. 1.8-1 či rozechvěný dům po průjezdu těžkého nákladáku. Model oscilátorů lze aplikovat třeba i na kmitání elektronů ve vysílací anténě radiového vysílače či na kmitání uzlového bodu krystalové mřížky pevné látky, které vnímáme jako teplotu. Kmitavý pohyb vykonávají molekuly vzduchu při přenosu zvukového vlnění atp.



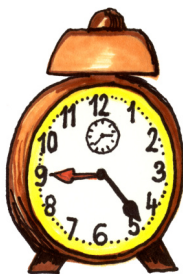
obr. 1.8-1

V přírodě je kmitání obvykle **tlumené**. Kmitání opice na gumě se vlivem odporu vzduchu časem zastaví. Kmitavý pohyb kyvadla hodin by také ustal, kdybychom nedodávali energii ať už mechanickým pérem nebo z baterie. V tomto případě mluvíme o **vynuceném kmitání**. V ideálním případě hovoříme o **netlumeném kmitání**, které však prakticky neexistuje, používá se jen jako model.

Z předešlého je patrné, že trajektorie kmitavého pohybu mohou být různé. Nejčastěji je trajektorií přímka (závaží na pružině) a kružnice (čočka kyvadla hodin).



Kinematika hmotného bodu, kruhový pohyb.



Odhadovaný čas je 60 minut



1. Vysvětlit princip periodického pohybu a harmonického kmitání.
2. Znat základní pojmy harmonického kmitání jako kmitočet, perioda, úhlová frekvence, výchylka, amplituda, fáze, počáteční fáze.
3. Znat vztahy pro okamžitou výchylku, okamžitou rychlost a okamžité zrychlení, vědět významy veličin v nich se vyskytujících.
4. Diskutovat extrémy těchto veličin tj. jejich minimální a maximální hodnoty..

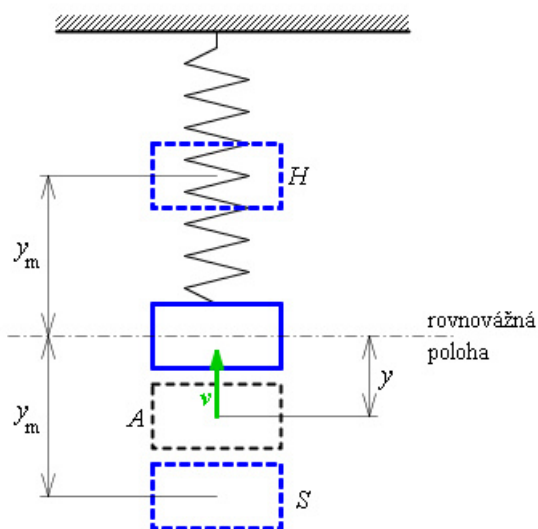
5. Vysvětlit souvislost harmonického pohybu s rovnoměrným pohybem po kružnici.
6. Umět sestavit graf závislosti okamžité výchylky na čase a umět v tomto grafu číst. Rozlišit tyto grafy pro netlumené a tlumené kmitání.
7. Znat vztah pro sílu pružnosti, která je příčinou kmitání.
8. Umět odvodit vztah pro periodu kmitů.
9. Vysvětlit pojem tuhost pružiny.
10. Umět odvodit vztah pro dobu kmitu kyvadla.

## 1.8.1 Harmonický pohyb



Představte si závaží zavěšené na pružině, jak je vidíte na obrázku, viz. obr. 1.8-2. Zatažením za závaží pružinu rozkmitáme. Závaží se

bude pohybovat po přímce. Začneme sledovat závaží v libovolné poloze, na obrázku označené jako A. Vzdálenost bodu A od **rovnovážné polohy** (tam je závaží v klidu) si označíme  $y$  a nazveme ji **výchylkou** (okamžitou výchylkou).



obr. 1.8-2

Závaží postupně projde horní polohou  $H$  (**bod vratu**), po změně směru pohybu projde spodní polohou  $S$  (druhý bod vratu) a vrací se do bodu  $A$ .

Hovoříme, že závaží vykonalo jeden **kmit**. Času za který se kmitající objekt vrátí do počáteční polohy  $A$  říkáme **perioda** kmitání  $T$ . S periodou souvisí **frekvence** neboli **kmitočet**  $f$ . Frekvence udává, kolik kmitů vykoná kmitající objekt za jednu sekundu.

Mezi frekvencí a periodou je jednoduchá souvislost daná vztahem:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Jednotkou frekvence je hertz (Hz).  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ kmit za sekundu} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

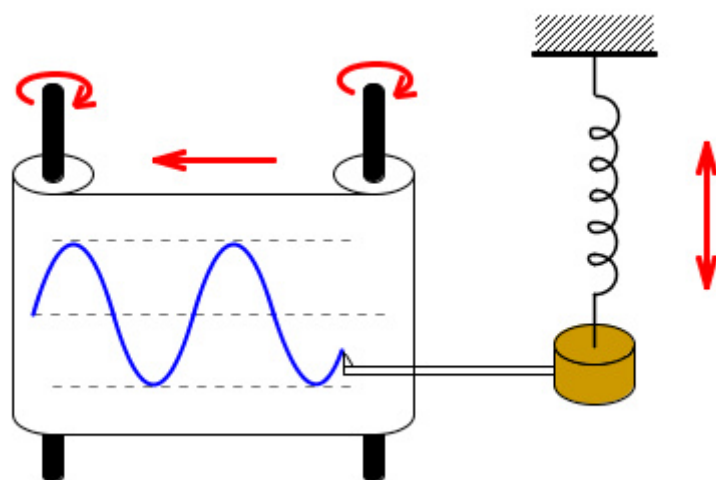
Popsaný pohyb závaží se opakuje v pravidelných intervalech a nazývá se **kmitavý pohyb**.

Možná jste již někdy viděli váš kardiogram. Kardiogram je vlastně záznam kmitů srdce (směr  $y$ ) rozvedený v čase (osa  $x$ ) jak je vidět na obrázku, viz. obr. 1.8-3.



obr. 1.8-3

Proveďme si obdobný časový záznam výchylky našeho kmitajícího závaží. K tomu nám vyhovuje jednoduché zařízení z obrázku, viz. obr. 1.8-4.



obr. 1.8-4

Na kmitající závaží je připevněna tužka, která zapisuje polohu závaží na roli papíru pohybujícího se konstantní rychlostí. Tužka nám vykreslí sinusoidu. Průběh této křivky si zapíšeme rovnicí pro okamžitou výchylku v závislosti na čase:

$$y = y_m \sin \omega t$$

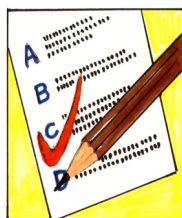
Veličina  $y_m$  je **amplituda výchylky**. Jak je vidět na obrázku, viz. obr. 1.8-2, je to maximální výchylka kmitavého pohybu. Symbolem  $\omega$  jsme si označili **úhlovou frekvenci kmitů**, kterou již známe z pohybu po kružnici. U kruhového pohybu jsme si ji však nazývali úhlová rychlost.

Stejně jako u kruhového pohybu souvisí úhlová frekvence s periodou a frekvencí kmitání vztahem

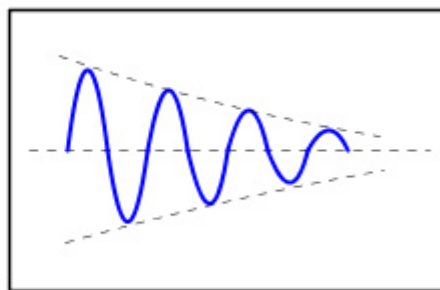
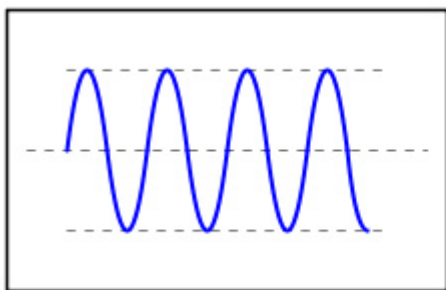
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Jednotkou kruhové frekvence je radián za sekundu  $\text{rad.s}^{-1}$  (resp.  $\text{s}^{-1}$ ).

Kmitavý pohyb, jehož časový diagram má podobu sinusoidy (kosinusoidy), nazýváme **harmonický pohyb** nebo také **harmonické kmitání**.



**KO1.8.1-1.** Určete, který z grafů na obrázku zobrazuje časový záznam kmitavého pohybu netlumeného a tlumeného? Viz. obr. 1.8-5



obr. 1.8-5

**KO1.8.1-2.** V jakých jednotkách měří lékař tep vašeho srdce?

**KO1.8.1-3.** Vysvětlete rozdíl mezi kmitavým pohybem a harmonickým pohybem.

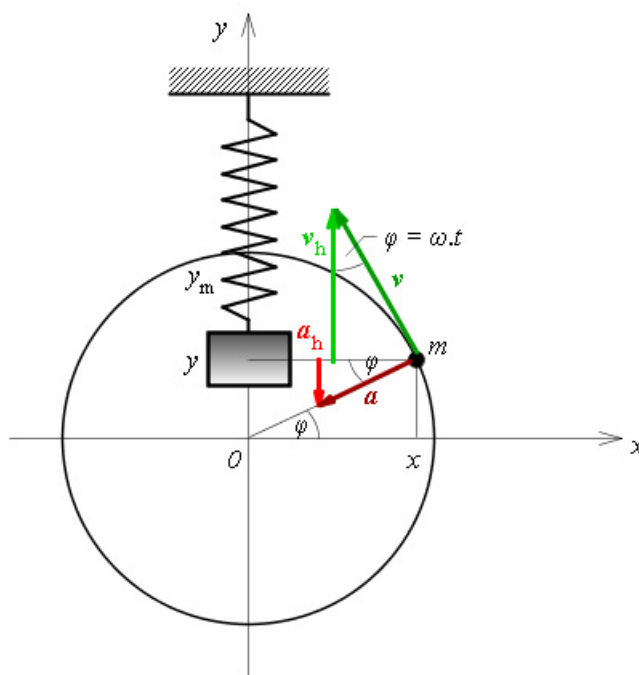
**KO1.8.1-4.** V hudbě se jako základ hudební stupnice používá tón  $a^1$  (tzv. komorní  $a$ ) o frekvenci 440 Hz. Určete periodu tohoto kmitání.

**KO1.8.1-5.** Jaká je perioda procesoru počítače o frekvenci 1 GHz?



Představte si kmitající závaží na pružině (obr. 1.8-6) a myšlenkově sledujte jeho pohyb nebo si to zkuste. Všimněme si nyní rychlosti a zrychlení pohybu závaží.

Pokud se podíváme pozorně, zjistíme, že největší rychlost pohybu je v rovnovážné poloze. V bodě obratu při dosažení amplitudy se závaží zastaví a orientace pohybu se obrátí. Rychlost se postupně zvětšuje.



obr. 1.8-6

V této fázi pohybu je zrychlení největší. Jak tedy závisí rychlost a zrychlení na čase?

Až budete umět derivovat nebude, nic jednoduššího než provést prvou derivaci rovnice pro výchylku podle času a obdržíte rovnici pro rychlost. Teď na to půjdeme jinak.

Vyjďeme z analogií mezi rovnoměrným pohybem po kružnici a harmonickým pohybem kmitavým. Rovnoměrný kruhový pohyb je vlastně taky harmonický pohyb, splňuje všechny podmínky harmonického pohybu. Můžeme tedy použít řadu vztahů známých z kruhového pohybu i pro popis harmonického kmitání. Například ojnice přenáší přímočarý pohyb pístu automobilového motoru na kruhový pohyb kol automobilu.

Vraťme se teď k našemu problému. Máme stanovit rychlost  $v$  kmitajícího závaží. Podívejme se na obrázek, viz. obr. 1.8-6, kde je znázorněna souvislost obou pohybů. Závaží hmotnosti  $m$  se pohybuje kmitavým pohybem na pružině. Stejně závaží rovnoměrně obíhá po kružnici o poloměru rovném amplitudě výchylky  $y_m$ .

Úhlová frekvence  $\omega$  kmitajícího závaží je stejná jako úhlová rychlost závaží rotujícího. V jistém čase má kmitající závaží výchylku  $y$ , která odpovídá poloze závaží na kružnici určenou úhlem  $\varphi$ . Zkuste si představit, že se díváte na rotující závaží ve směru osy  $x$ . Nevidíte kruhový pohyb, ale z vašeho pohledu závaží kmitá.

Rychlost závaží obíhajícího po kružnici je  $v$ . Při pohledu z boku však pozorujeme tento pohyb jako by se závaží pohybovalo jen rychlostí  $v_h$ . V horním bodě je rychlost  $v_h$  nulová, při pokračování pohybu zase narůstá. Tato složka rychlosti  $v_h$  je právě hledaná rychlost kmitavého pohybu. Určeme si její velikost.

Obvodová rychlost  $v$  kruhového pohybu je dána vztahem  $v = r \omega$ , v našem případě  $v = y_m \omega$ . My potřebujeme vyjádřit jen její složku  $v_h = v \cos \varphi = y_m \omega \cos \varphi$ . A zbývá nám ještě vyjádřit velikost rychlosti jako funkci času. S časem se mění velikost úhlu  $\varphi$ . A zase se obrátíme ke

kruhovému pohybu, ke vztahu definujícímu úhlovou rychlost  $\omega = \frac{\varphi}{t}$ . Z tohoto vztahu vyjádříme úhlovou dráhu  $\varphi$  a dosadíme do výrazu pro **rychlost harmonického pohybu**:

$$v_h = y_m \omega \cos \omega t$$

Obdobným způsobem si určíme zrychlení harmonického pohybu. Z obrázku vidíme, že zrychlení harmonického pohybu  $a_h$  je složkou dostředivého zrychlení rotačního pohybu,  $a_h =$

$a_d \sin \varphi = a_d \sin \omega t$ . Vztah pro dostředivé zrychlení již také známe,  $a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{y_m}$ . Využitím

vztahu  $v = r \omega = y_m \omega$  po úpravách dostaneme vztah pro **zrychlení harmonického pohybu**:

$$a_h = -y_m \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y$$

Znaménko mínus ve vztahu znamená, že zrychlení má opačný směr než je směr výchylky.

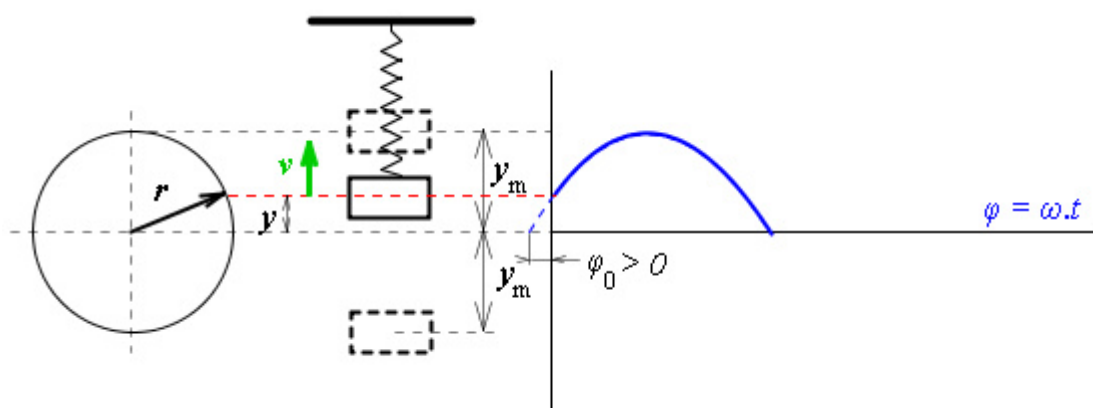
Výraz  $(\omega t)$  nám v rovnici pro výchylku, rychlost i zrychlení určuje, jak se tyto veličiny mění s časem. Tento výraz se nazývá **fáze** pohybu  $\varphi$ . Obecně se fáze zapisuje výrazem:

$$\varphi = (\omega t + \varphi_0),$$

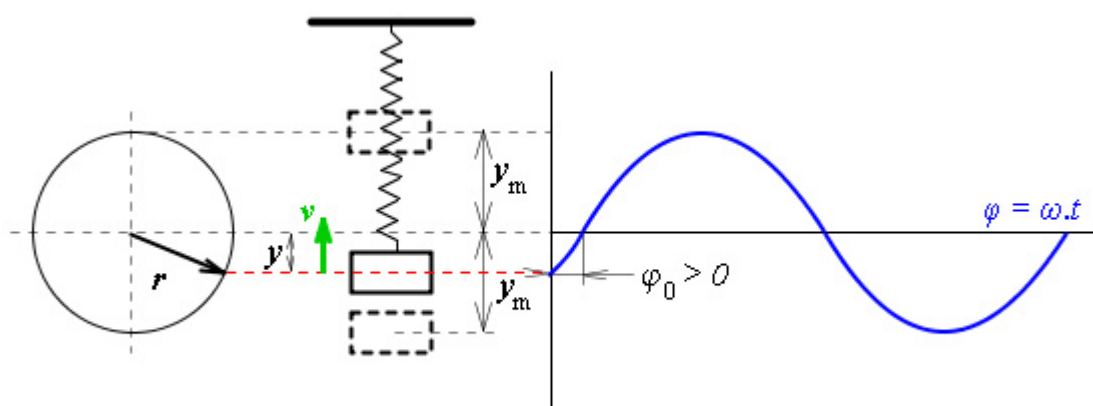
kde  $\varphi_0$  označuje **počáteční fázi**. Její hodnota závisí na výchylce pohybu v čase  $t = 0$ . V předchozích vztazích pro výchylku, rychlost a zrychlení jsme tedy uvažovali počáteční fázi nulovou,  $\varphi_0 = 0$ .

Počáteční fáze může mít kladnou i zápornou hodnotu jak je vidět na sérii obrázků. Na každém obrázku vidíte závaží na pružině, odpovídající polohu závaží při kruhovém pohybu a časový rozvoj obou pohybů. V prvním případě a) pohyb začíná nad rovnovážnou polohou, viz. obr. 1.8-7, v druhém b) pod touto polohou, viz. obr. 1.8-8. Poslední situace c) znázorňuje „start“ pohybu v krajní poloze, viz. obr. 1.8-9.

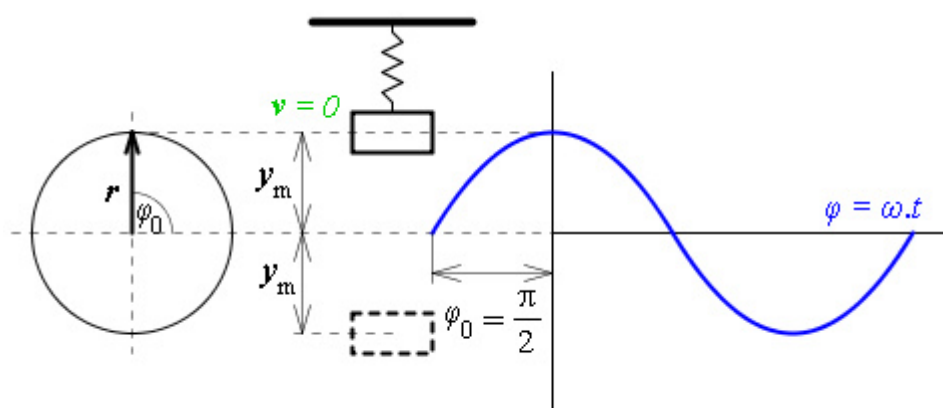




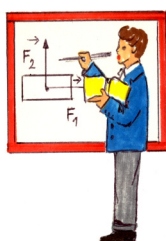
obr. 1.8-7



obr. 1.8-8

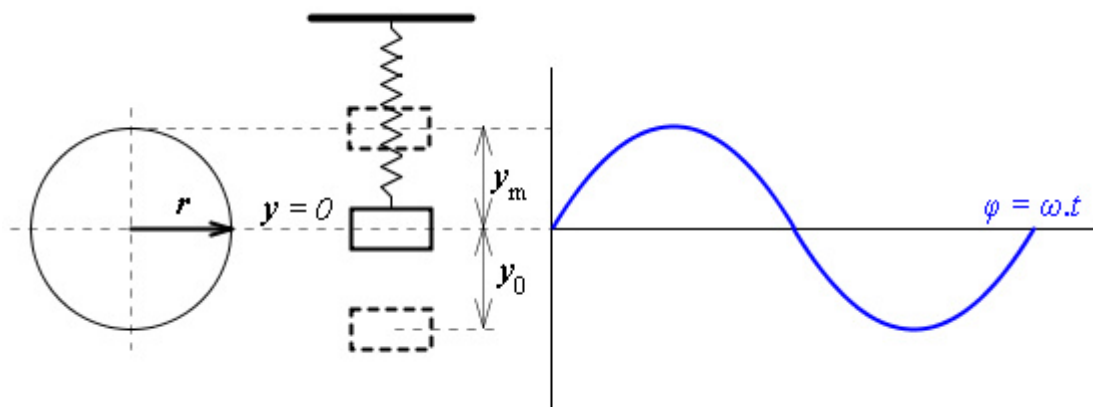


obr. 1.8-9



Z kterého místa začínal pohyb našeho závaží na pružině, když jsme uvažovali počáteční fázi nulovou? Jaká je v tomto místě rychlost a jaké zrychlení? Jaký tvar má vztah pro výchylku v obecném případě, kdy počáteční fáze je nenulová?

Pohyb začínal z rovnovážné polohy. Nakreslíme-li si obrázek obdobný třem předchozím, musí sinusoida začínat v počátku souřadnic, viz. obr. 1.8-10.



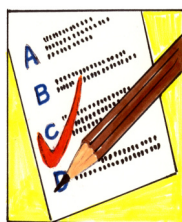
obr. 1.8-10

Rychlost je v tomto bodě maximální. Lehce to zjistíme, dosadíme-li do vztahu do rychlost čas  $t = 0$ ,  $v_h = y_m \omega \cos \omega t = y_m \omega \cos 0 = y_m \omega$ . Zrychlení bude nulové ve stejném čase,

$$a_h = -y_m \omega^2 \sin \omega t = -y_m \omega^2 \sin 0 = 0.$$

Do vztahu pro výchylku pouze rozšíříme fázi  $\varphi = \omega t$  o počáteční fázi  $\varphi_0$ ,

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$



**KO1.8.1-6.** Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice:

$$y = 2 \sin(20t + \pi/4) \quad (\text{m,s})$$

Čemu je rovna úhlová frekvence tohoto pohybu?

**KO1.8.1-7.** Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice:

$$y = 2 \sin(20t + \pi/4) \quad (\text{m,s})$$

Určete frekvenci pohybu.

**KO1.8.1-8.** Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice:

$$y = 2 \sin(20t + \pi/4) \quad (\text{m,s})$$

Napište, čemu je rovna fáze a počáteční fáze.

**KO1.8.1-9.** Těleso konající netlumený harmonický pohyb má maximální rychlost

a) v bodě vratu                      b) v rovnovážné poloze

**KO1.8.1-10.** Kdy má těleso konající netlumený harmonický pohyb nulovou rychlost?

a) v bodě vratu                      b) v rovnovážné poloze                      c) nikdy

**KO1.8.1-11.** Zrychlení tělesa konajícího netlumený harmonický pohyb je nulové

a) v rovnovážné poloze                      b) v bodě vratu                      c) nikdy



**U1.8.1-12.** Těleso koná netlumený harmonický pohyb s amplitudou 3 m, frekvencí 4 Hz a v čase  $t = 0$  s se nachází ve vzdálenosti 1,5 m od rovnovážné polohy. Napište rovnici pro výchylku tělesa.

**U1.8.1-13.** Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice:

$$y = 2 \sin(3t) \quad (\text{m,s})$$

Napište rovnici pro rychlost tělesa.

**U1.8.1-14.** Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice:

$$y = 2 \sin(3t) \quad (\text{m,s})$$

Napište rovnici pro zrychlení tělesa.

**U1.8.1-15.** Nakreslete schematický graf závislosti rychlosti kmitavého pohybu na čase.

Počáteční fáze je rovna nule. Do stejného grafu nakreslete i průběh výchylky. Viz. obr. 1.8-11.



## 1.8.2 Dynamika harmonického pohybu



V předchozí kapitole jsme se věnovali kinematice kmitání. Teď nás bude zajímat dynamika – tedy jaké jsou příčiny tohoto pohybu, které síly na oscilátor působí.

Vraťme se ještě jednou k naší pružině, ale k pokusu použijeme posilovací péra. Kdo jste s nimi cvičili víte, že když je natahujete, pak zpočátku to jde lehce, čím více je roztáhnete tím větší sílu musíte vynaložit. Samozřejmě nesmíme roztahovat péra donekonečna. Při jistém roztážení se péra nevrátí do původní polohy.

Jaký je závěr tohoto pokusu? Zprv je úměrná výchylce. Za druhé síla působí opačným směrem než je orientována výchylka. Za třetí nesmíme překročit jistou tzv. pružnou (elastickou deformaci) pružiny.

Matematický zápis tedy pro sílu pružnosti pružiny způsobující kmitavý pohyb bude vypadat následovně:

$$F = -k y$$

Konstanta  $k$  se nazývá **tuhost** pružiny. Tuhost pružiny můžeme definovat jako sílu nutnou k prodloužení (stlačení) pružiny o jednotku délky. Její jednotkou bude tedy  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Sílu pružnosti si můžeme zapsat pomocí druhého Newtonova zákona jako  $F = m a$ . Dosadíme-li za zrychlení kmitavého pohybu, dostaneme sílu pružnosti ve tvaru:

$$F = -m \omega^2 y.$$

Srovnáním obou vztahů pro sílu pružnosti  $-k y = -m \omega^2 y$  dostaneme vztah pro úhlovou frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ a z něho si vyjádříme frekvenci harmonického kmitavého pohybu ve tvaru}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Frekvence kmitání závisí na tuhosti pružiny a hmotnosti kmitajícího objektu. Nezávisí na amplitudě kmitů.



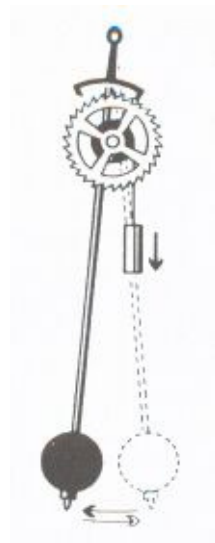
**U1.8.2-16.** Mechanický oscilátor je tvořen pružinou o tuhosti  $1 \text{ N/m}$  a závažím o hmotnosti  $100 \text{ g}$ . *Určete periodu kmitání oscilátoru.*

**U1.8.2-17.** Na pružinu bylo zavěšeno závaží o hmotnosti  $1 \text{ kg}$  a pružina se při tom prodloužila o  $1,5 \text{ cm}$  a začala kmitat. *Určete frekvenci kmitání vzniklého oscilátoru.*

## 1.8.3 Kyvadlo



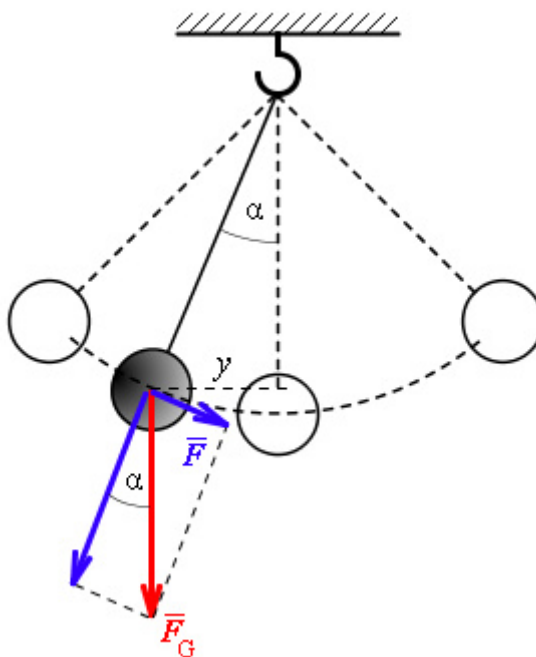
Až do doby moderních hodin systému Quartz, systém který využívá jako normálu času periodu kmitání křemenného krystalu vybuzeného piezoelektrickým jevem, bylo měření času založeno na kmitavém pohybu kyvadla. U kyvadla se totiž dá nastavit perioda kmitu změnou délky kyvadla.



obr. 1.8-12

Princip kyvadlových hodin je jednoduchý. Podívejte se na obrázek, viz. obr. 1.8-12. Vidíte, že základem je kyvadlo složené z lehké tyče délky  $l$  a „čočky“ hmotnosti  $m$ . Toto kyvadlo svým pohybem řídí otáčení soustavy ozubených kol spojených s hodinovými ručičkami. Jak je to vlastně s pohybem kyvadla, vždyť vlastně nekoná harmonický přímočarý pohyb.

Pro jednoduchost vyjdeme opět z modelové situace. Tyč budeme uvažovat nehmotnou, čočku za hmotný bod. Takovéto kyvadlo se označuje jako matematické kyvadlo. Je sice pravda, že pohyb závaží (čočky) kyvadla probíhá po kruhové trajektorii. Ale pro malé výchylky kyvadla ( $\alpha < 5^\circ$ ) můžeme považovat kruhový oblouk za úsečku. V obrázku, viz. obr. 1.8-13 je tato úsečka označena jako  $y$ .



obr. 1.8-13

Příčinou kmitání kyvadla je složka  $F$  tíhové síly  $F_G$ , která vzniká při vychýlení kyvadla z rovnovážné (svislé) polohy. Určeme si velikost této síly:

$$F = F_G \sin \alpha \cong F_G \frac{y}{l} = \frac{mg}{l} y .$$

Srovnáme pravou stranu rovnice s rovnicí pro sílu pružnosti  $F = -k y$ . Výraz  $\frac{mg}{l}$  odpovídá tuhosti pružiny  $k$ . Dosadíme-li tento výraz za  $k$  do rovnice pro periodu kmitavého pohybu

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , dostaneme po úpravách vztah pro **periodu kyvadla**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

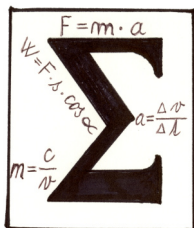
Vidíme, že perioda kmitavého pohybu kyvadla nezávisí na hmotnosti tělesa ani na výchylce z rovnovážné polohy. Protože tíhové zrychlení je konstantní, je perioda dána jen délkou závěsu.



**U1.8.3-18.** Kyvadlo, které vykoná jeden kyv (pohyb z jedné krajní polohy do druhé) za jednu sekundu, se nazývá sekundové. *Určete délku sekundového kyvadla.*

**U1.8.3-19.** Kyvadlo tvořené kuličkou zavěšenou na tenké niti má dobu kmitu  $T$ . *Jak se změní tato doba, zkrátíme-li závěs na polovinu?*

**U1.8.3-20.** Kyvadlové hodiny vyneseme raketou na měsíc. *Budou ukazovat stejný čas?*



1. Pohyb, který se opakuje v pravidelných intervalech – periodě  $T$  nazýváme **kmitavý pohyb**.
2. **Výchylka harmonického kmitavého pohybu**  $y$  je dána rovnicí  $y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ , kde  $y_m$  je **amplituda výchylky**. Veličina  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  je **úhlová frekvence** kmitů,  $t$  čas,  $f$  frekvence a  $\varphi_0$  je **počáteční fáze**.
3. Výraz  $\omega t + \varphi_0$  se nazývá **fáze** pohybu a určuje, jak se výchylka, rychlost a zrychlení harmonického pohybu mění s časem.
4. **Rychlost** harmonického pohybu vyjadřuje vztah  $v_h = y_m \omega \cos \omega t$ .
5. **Zrychlení** harmonického pohybu se mění s časem podle rovnice  $a_h = -y_m \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y$ .
6. **Síla pružnosti** způsobující kmitavý pohyb pružně deformovatelných těles se vyjádří výrazem  $F = -k y$ . Konstanta  $k$  je **tuhost**.
7. Úhlovou frekvenci harmonického kmitání můžeme stanovit pomocí vztahu  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .  
Frekvence je tedy dána vztahem  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ .
8. U kyvadla je příčinou harmonického pohybu tíhová síla. **Perioda kyvadla** (doba kmitu) je dána vztahem  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Perioda závisí na tíhovém zrychlení  $g$  a na délce kyvadla  $l$ .

## 1.9 Mechanické vlnění a zvuk

S fyzikálním pojmem vlnění se denně setkáváme, i když si to často neuvědomujeme. Vlnění má podobu mořských vln, vlnivým pohybem se odplazí had. Jistě vám není neznám pojem zvuková vlna, televizní a rozhlasové vysílání se k vám dostane pomocí elektromagnetických vln. Také světlo je vlnění, jak se dozvíte ve čtvrtém modulu tohoto kurzu.

Vyjmenované příklady vlnění mají různou fyzikální podstatu, ale celou řadu společných zákonitostí. Ty si objasníme v této kapitole na mechanickém vlnění. Ukážeme si také souvislost mezi mechanickým kmitáním a mechanickým vlněním.



Mechanické kmitání.



Odhadovaný čas je 45 minut.



1. Umět popsat vznik vlnění v pružném látkovém prostředí.
2. Znat rozdíl mezi vlněním podélným a příčným.
3. Znat vztahy mezi periodou, frekvencí, vlnovou délkou a rychlostí šíření.
4. Vědět, že okamžitá výchylka je funkcí fáze, tj. času a souřadnice polohy. Umět odvodit různé tvary rovnice pro okamžitou výchylku libovolného bodu, do kterého vlnění dospěje.
5. Umět vysvětlit interferenci dvou vlnění.
6. Znat podmínky pro vznik interferenčních maxim a minim.
7. Znat souvislost dráhového rozdílu s fázovým rozdílem.
8. Umět vysvětlit vznik stojatého vlnění, charakterizovat uzly a kmitny.
9. Vědět, že zvuk je mechanické vlnění, umět frekvenčně rozlišit zvuk, infrazvuk a ultrazvuk.
10. Vědět, že rychlost šíření zvuku je závislá na teplotě.
11. Znat vztah pro intenzitu zvuku, umět definovat hladinu intenzity zvuku.

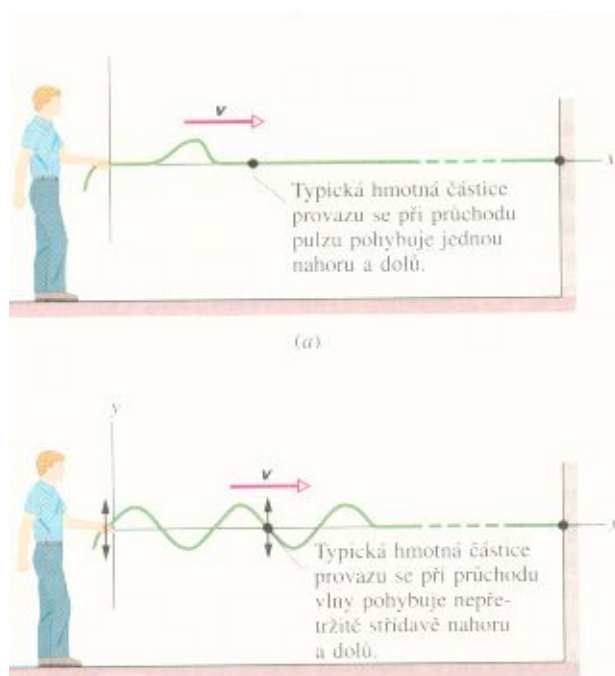
## 1.9.1 Popis mechanického vlnění



Začneme jednoduchým pozorováním. Hodíme kámen svrchu do vody. Po nárazu na klidnou vodní hladinu se začnou od místa dopadu šířit vlny. Vzniklé vlnění vyvolal dopad kamene. Kámen rozkmital molekuly vody.

Tento kmitavý rozruch se postupně šíří hmotným prostředím (vodou) ve formě vlnění do okolí místa dopadu.

Udělejme si ještě jiný pokus znázorněný na obrázku, viz. obr. 1.9-1. Připevníme jeden konec pružné hadice na stěnu a druhým koncem trhneme nahoru a dolů (část a) obrázku). Hadicí se začne šířit vlna v podobě pulsu. Tento puls se šíří díky tomu, že výchylka, kterou vyvoláme na konci hadice, se s jistým časovým zpožděním přenáší na další části hadice vlivem pružných vazeb mezi jednotlivými částmi hadice.

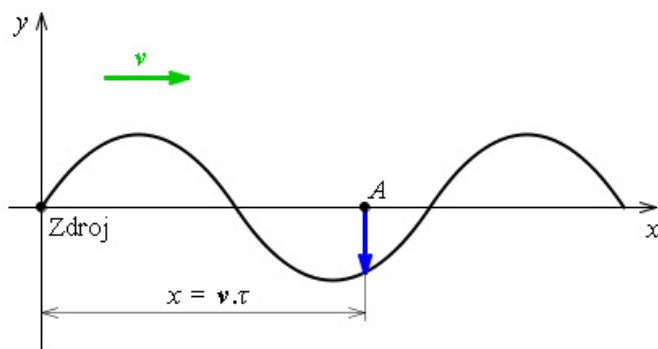


obr. 1.9-1

Když kmitáme rukou nahoru a dolů, pak se hadicí šíří jedna vlna za druhou (část b) obrázku). Pokud je pohyb rukou harmonický (sinusový), budou i vlny vytvářet sinusoidu.

**Mechanické vlnění** je děj, při kterém se kmitání látky přenáší prostředím. Šíření vln není spojeno s přenosem látky, ale pouze s přenosem energie.

Výchylky kmitavého pohybu vlnění  $y$  v libovolném bodu, do kterého vlnění dospěje, bude podobně jako u kmitání záležet na fázi. U kmitání byla fáze dána výrazem  $\varphi = \omega t$ , měnila se jen s časem. U vlnění musíme vzít ještě v úvahu, že výchylka bude záviset také na vzdálenosti od zdroje kmitavého pohybu. Obrátme se na pomoc k obrázku obr. 1.9-2. Vyšetřujeme fázi v libovolném bodě označeném A. Do tohoto bodu se kmitavý pohyb dostane s jistým zpožděním, tedy za čas  $\tau$ . Fáze v tomto bodě bude tedy dána výrazem  $\varphi = \omega(t - \tau)$ .



obr. 1.9-2

Vlnění se bude šířit konstantní rychlostí  $v$  (tzv. fázovou rychlostí). Vyjádříme si nyní pomocí této rychlosti vzdálenost  $x$  vyšetřovaného bodu A od místa vzniku vlnění  $x = v \tau$ . Z tohoto vztahu stanovíme čas  $\tau$  a dosadíme do rovnice pro **fázi**  $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ . Toto vyjádření fáze již

zahrnuje jak závislost na čase, tak na poloze vyšetřovaného bodu. Okamžitá **výchylka** v obecném bodě  $A$  bude tedy dána rovnicí

$$y = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

Této rovnici se také říká **rovnice vlny**.

Pojmy jako je úhlová frekvence  $\omega$ , frekvence  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ), perioda  $T$  ( $T = \frac{1}{f}$ ) a amplituda

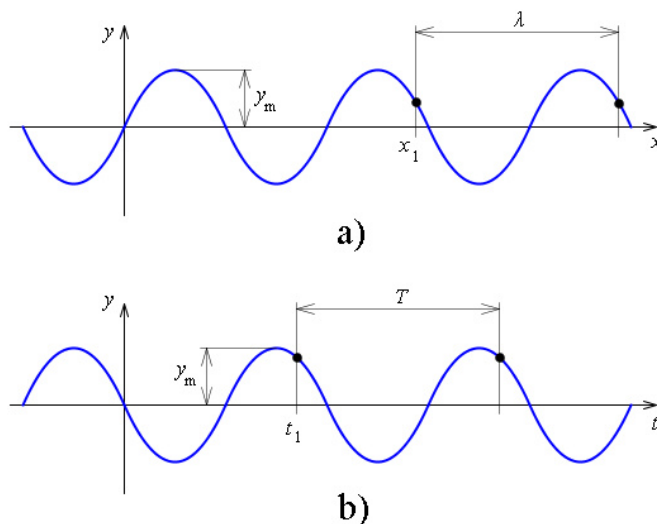
výchylky  $y_m$  mají u vlnění stejný význam jako u kmitavého pohybu. Budeme tedy teď pracovat s úhlovou frekvencí vlny, periodou vlny a amplitudou vlny.

Pouze jednu novou veličinu si přidáme.

Když se znovu podíváte na některý z předchozích obrázků, všimněte si, že se fáze po určité vzdálenosti opakuje.

Této vzdálenosti říkáme **vlnová délka**  $\lambda$ .

Názorně ji máto zobrazenou na obrázku 1.9-3.



obr. 1.9-3

**Vlnová délka  $\lambda$  je vzdálenost dvou nejblížejších bodů, které kmitají se stejnou fází.** Je to vzdálenost, do které se vlnění rozšíří za periodu  $T$  kmitání zdroje vlnění.

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

Lépe se tento vztah pamatuje ve tvaru:

$$v = \lambda f$$



**U1.9.1-1.** Vyjádřete rovnici vlny pomocí periody a vlnové délky. Vlnění, jehož perioda je  $T$  a frekvence  $f$ , se šíří rychlostí  $v$ .

**U1.9.1-2.** Které z následujících definic jsou správné pro definici vlnové délky  $\lambda$ ?

a)  $\lambda = v \cdot T$

b)  $\lambda$  je nejmenší vzdálenost dvou bodů kmitajících se stejnou fází

c)  $\lambda$  je vzdálenost, o kterou postoupí fáze za dobu jedné periody

d)  $\lambda = v/f$

**U1.9.1-3.** Ve směru osy  $x$  se šíří vlna vlnové délky  $\lambda$ . Čemu je rovna nejkratší vzdálenost  $d$  dvou bodů prostředí, které kmitají s opačnou fází?

**U1.9.1-4.** Ve stejnorodém prostředí se šíří vlna  $y = 0,5 \sin 20\pi(t - x/30)$ . Vypočítejte její vlnovou délku.

**U1.9.1-5.** V homogenním prostředí se šíří vlna.  $y = 0,5 \sin 20\pi(t - x/30)$ . Vypočítejte frekvenci vlny.

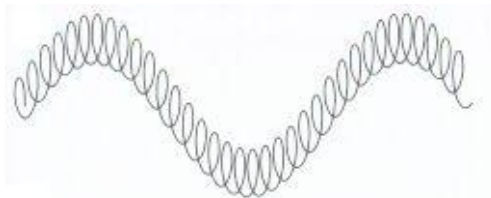
**U1.9.1-6.** Ve směru osy  $x$  se šíří postupná vlna vlnové délky 1 m. Najděte fázový rozdíl dvou kmitajících bodů, které jsou od sebe vzdáleny 2 m.

**U1.9.1-7.** Může se mechanické vlnění šířit vakuem?





Vezměme si k pokusům pružinu, kterou jsme používali ve výkladu kmitání. Rozkmitáme pružinu na jejím začátku ve směru osy  $x$  obdobně jak jsme tak dělali s hadicí. Pružinou postupuje vlnění ve směru kolmém na směr kmitání – ve směru osy  $x$ , viz. obr. 1.9-4. Takovému vlnění, kdy vlnění postupuje ve směru kolmém na směr kmitání bodů prostředí, říkáme **postupné vlnění příčné**.



obr. 1.9-4

Ted' pružinu na jednom konci stlačíme a vyvoláme střídavé zhuštění a zředění závitů, viz. obr. 1.9-5. V tomto případě se výchylka mění ve stejném směru v jakém vlnění postupuje, hovoříme tedy o **postupném vlnění podélném**. Typickým příkladem podélného vlnění je zvuk. U zvukového vlnění se molekuly vzduchu nebo jiného pružného prostředí střídavě zhušťují a zředňují a přenášejí tak zvuk.



obr. 1.9-5

Výše uvedená rovnice vlny (rovnice pro výchylku) platí pro vlnění příčné, i podélné. Jen je nutné si uvědomit, že u podélného vlnění má výchylka stejný směr, jakým se vlnění šíří.



**U1.9.1-8.** Podélné vlnění má vlnovou délku 0,5 m a šíří se rychlostí 36 km/h ve směru osy  $z$ . Amplituda vlnění je 1 cm. Napište rovnici této vlny.

**U1.9.1-9.** Které z následujících vlnění je vlnění podélné?

- a) zvukové
- b) mořské vlny
- c) vlnění šířící se vagónem vzniklé při nárazu dvou nárazníků brzdícího vlaku

vlaku

- d) vlnění vzniklé tlčením na radiátor ústředního topení s něčím nespokojeným sousedem

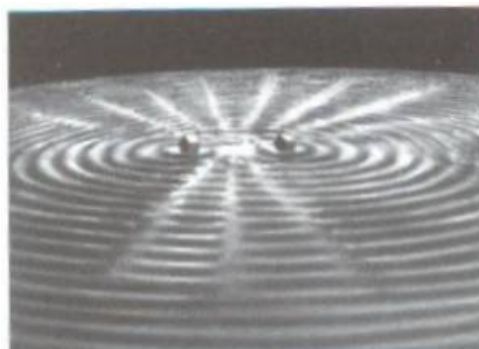
## 1.9.2 Interference vlnění



S interferencí, česky skládáním vlnění, se detailně seznámíte v Optice, v modulu 4. Tam budete zkoumat interferenci světla.

Výklad mechanického vlnění jsme začínali pádem kamene na klidnou hladinu vody. Sledovali jsme vlny šířící se od místa dopadu kamene. Co se teď stane, hodíme-li do vody poblíž sebe současně kameny dva? Od každého kamene se bude šířit vlnění. V místech, kde se tato vlnění setkají, se budou zesilovat nebo zeslabovat. Velice pěkně je možné vidět tuto interferenci vln na obrázku, viz. obr. 1.9-6. Zejména

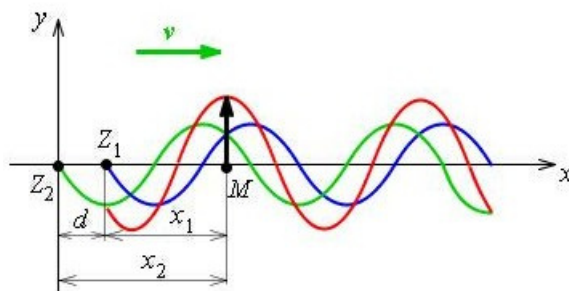
jasně jsou zde vidět světlé pruhy, kde se vlnění zcela vyruší.



obr. 1.9-6



Uvažujme nejjednodušší příklad skládání vlnění. Máme dva zdroje vlnění  $Z_1$  a  $Z_2$ , ze kterých se šíří ve směru osy  $x$  vlnění stejné vlnové délky  $\lambda$  a stejné amplitudy  $y_m$ . Výklad nám přiblíží obrázek, viz. obr. 1.9-7. Výsledné vlnění budeme zkoumat v bodě  $P$ .



obr. 1.9-7

Napišeme si rovnice pro výchylku v bodě  $P$ . Prvé vlnění bude popsáno rovnicí

$$y_1 = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right), \text{ druhé pak rovnicí}$$

$$y_2 = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right).$$

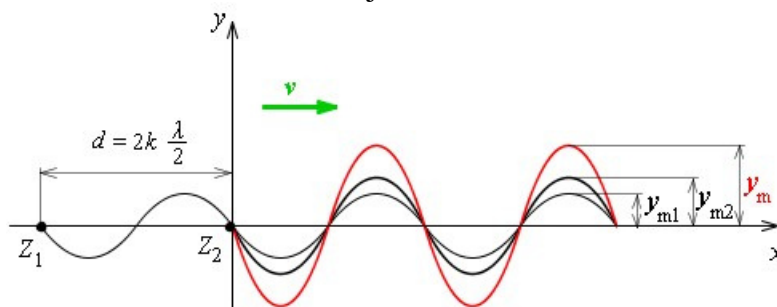
Jak bude vypadat výsledné vlnění **rozhoduje fázový rozdíl**  $\Delta\varphi$ . Vyjádřeme si ho:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) - 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} d.$$

Z tohoto zápisu je vidět, že fázový rozdíl  $\Delta\varphi$  je přímo úměrný vzdálenosti  $d$ , tzv. **dráhovému rozdílu** obou vlnění.

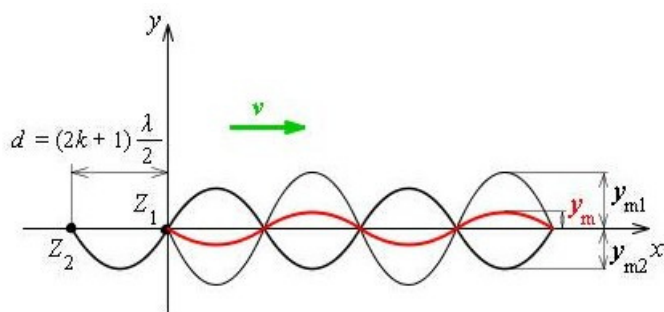
Všimněme si dvou extrémů fázového rozdílu v závislosti na vzájemném vztahu dvou veličin: dráhového rozdílu a vlnové délky.

- **Dráhový rozdíl je roven sudému počtu půlvln**,  $d = 2k \frac{\lambda}{2}$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Situaci máte znázorněnu na obrázku, viz. obr. 1.9-8. Vidíte, že obě interferující vlnění se setkávají v každém bodě se **stejnou fází**. Výsledné vlnění (červená sinusoida) má amplitudu rovnou **součtu** amplitud skládajících se vlnění,  $y_m = y_{m1} + y_{m2}$ . Vzniká **interferenční maximum**, vlnění se zesilují.



obr. 1.9-8

- **Dráhový rozdíl je roven lichému počtu půlvln**,  $d = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Situaci máte nyní na obrázku, viz. obr. 1.9-9. Je vidět, že obě interferující vlnění se setkávají v každém bodě s **opačnou fází**. Výsledné vlnění (červená sinusoida) má amplitudu rovnou **rozdílu** amplitud skládajících se vlnění,  $y_m = y_{m1} - y_{m2}$ . Vzniká **interferenční minimum**, vlnění se zeslabují.

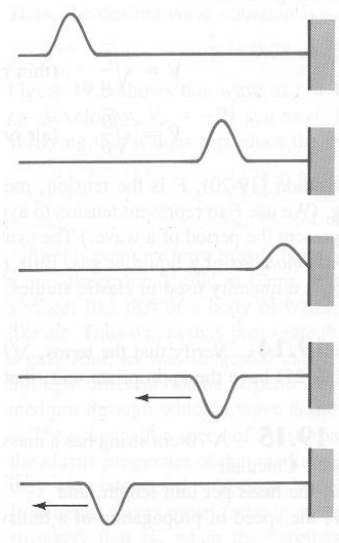


obr. 1.9-9

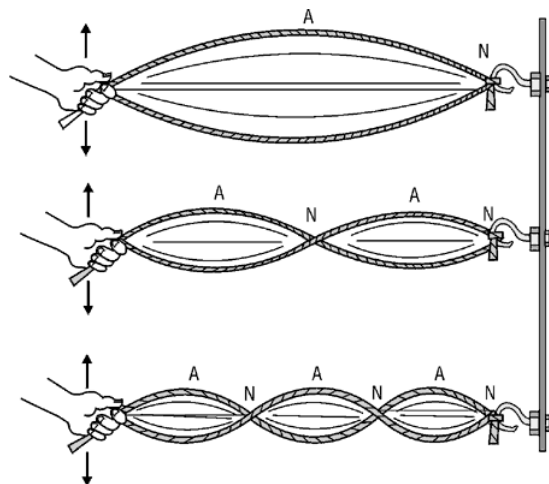
Interferencí dvou stejných vlnění vzniká výsledné vlnění, jehož amplituda je maximální v místech, kde se vlnění setkávají se stejnou fází. V místech, kde se setkávají vlnění s opačnou fází, má výsledné vlnění minimální amplitudu.

Vlnění šířící se prostředím se nejen skládají, ale může dojít i k jejich **odrazu** či **lom**u na rozhraní dvou prostředí. Oba tyto jevy si však probereme detailněji až ve čtvrtém modulu – Optice. Závěry, ke kterým tam dospějeme jsou použitelné i u mechanického vlnění.

Velice pěkně se demonstruje interference na vzniku **stojatého vlnění**. Vraťme se k pokusu s rozkmitanou hadicí. Zavěsme tuto hadici a rozkmitáme ji dole v příčném směru, viz. obr. obr. 1.9-10. Vlnění se bude šířit hadicí až dojde na její konec. Zde se odrazí a vrazí se zpět. Pokud hadicí stále kmitáme, postupují hadicí dvě stejná vlnění, každé však opačným směrem.



obr. 1.9-10



obr. 1.9-11

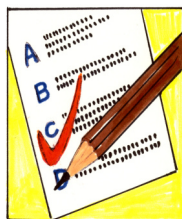
Obě vlnění budou interferovat. Pokus je zobrazen na obrázku, viz. obr. 1.9-11. Při pokusu pozorujeme (i na obrázku vidíme), že amplituda jednotlivých kmitajících bodů je různá. Některé z bodů nekmitají vůbec – označujeme je jako **uzly**. Jiné body kmitají stále s maximální amplitudou – **kmitny**. Celkový obrazec vlnění budí dojem jako by „stál“. Proto toto vlnění označujeme jako **stojaté vlnění**. Odlišujeme ho tak od **postupného** vlnění, kdy všechny body kmitají postupně se stejnou amplitudou.

Vzdálenost dvou sousedních kmiten a dvou sousedních uzlů je rovna polovině vlnové délky  $\lambda$  stojatého vlnění. Stojaté vlnění může být opět příčné nebo podélné.



obr. 1.9-12

Typickým představitelem příčného stojatého vlnění je rozkmitaná struna hudebního nástroje (housle, kytara), viz. obr. 1.9-12. Podélné stojaté vlnění pak vzniká v dutinách dechových nástrojů (trubka, klarinet, flétna).



**TO1.9.2-10.** Prostředím postupují dvě vlny. *K interferenci může dojít*

- a) jen u podélných vln
- b) jen u příčných vln
- c) jak u příčných tak i podélných vln

**TO1.9.2-11.** *Stojaté vlnění vzniká*

- a) interferencí dvou vlnění stejné frekvence, stejné vlnové délky a stejné amplitudy, postupujících stejným směrem, je-li jejich fázový rozdíl roven celistvému násobku  $2\pi$
- b) interferencí vlnění stejné frekvence, postupujících stejným směrem různou rychlostí
- c) interferencí podélného vlnění s příčným vlněním stejné frekvence
- d) interferencí dvou vlnění stejné amplitudy a stejné vlnové délky postupujících v určitém prostředí proti sobě

**TO1.9.2-12.** *Vzdálenost dvou sousedních kmiten stojatého vlnění je*

- a) rovna vlnové délce interferujících vln
- b) rovna polovině vlnové délky interferujících vln
- c) nezávislá na vlnové délce interferujících vln.

### 1.9.3 Zvukové vlnění



Zvukové vlnění snad není třeba přibližovat na příkladech. Ale měli bychom si vysvětlit, jak vlastně vzniká a jak to, že jej „slyšíme“.

**Nejdříve si zopakujeme, že zvukové vlnění (to co slyšíme) je mechanické postupné podélné vlnění.**

Zvukem označujeme každé mechanické vlnění, které je schopno vyvolat

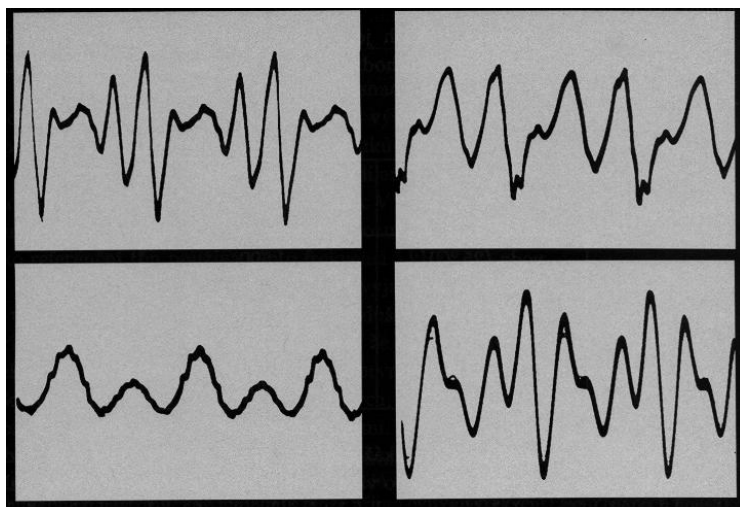
**v lidském uchu sluchový vjem.**

Zdrojem zvukového vlnění, krátce zvuku, je chvění pružných těles. Těmi pružnými tělesy může být rozkmitaná membrána reproduktoru, rozkmitaná lidské hlasivky nebo skřípot kol brzdícího vlaku.

Pokud jsou zvuky periodické, označujeme je jako hudební zvuky nebo **tóny**. Základní charakteristikou tónu je jeho

**frekvence**  $f = \frac{v}{\lambda}$ . Jestliže je

zvuková vlna neperiodická, hovoříme o **hluku**.



obr. 1.9-13

Mezi hudební zvuky samozřejmě patří zvuky hudebních nástrojů. I lidská řeč je složena z hudebních zvuků, ale jen samohlásky. Podívejte se, jak vypadá časový diagram, viz. obr. obr. 1.9-13, samohlásek *a*, *e*, *i*, *o*. Pozorujeme, že zvuk je periodický, ale ne harmonický. Souhlásky mají neperiodický průběh.

Zvuková vlna přichází do lidského ucha, konkrétně dopadá na část ucha nazývanou bubínek. To je vlastně membrána, která se rozkmitá po nárazu s frekvencí dopadající zvukové vlny. Že pak zvukové vlnění vnímáme příslušným způsobem, to je už záležitost fyziologie ucha.

Lidské ucho slyší zvuky v frekvenčním rozsahu přibližně od 16 Hz (nejnižší tóny – basy) až po 16 kHz (nejvyšší tóny – výšky). Zvuky o nižší frekvenci než 16 Hz se označují jako **infrazvuk**, zvuky s frekvencí vyšší než 16 KHz nazýváme **ultrazvuky**.

Ultrazvuk nalezl široké použití v technice a lékařství. Ultrazvukem se vyhledávají skryté vady materiálu, vyšetřují se vnitřní orgány lidského těla. Obraz těchto „ukrytých“ objektů se získá díky různé pohltivosti zvuku jejich částí.

Vedle **vlnové délky** zvukového vlnění  $\lambda$  je nejdůležitější charakteristikou **rychlost zvuku** v daném prostředí. Je to materiálová konstanta, která je závislá na celé řadě faktorů jako je hustota, teplota, vlhkost apod. Nejvíce však rychlost zvuku závisí na teplotě. Tak například pro rychlost zvuku ve vzduchu se uvádí vztah

$$v_t = (331,82 + 0,61t) \text{ m.s}^{-1}.$$

Důležité je, že **rychlost zvuku nezávisí na frekvenci**. Rychlost zvuku v některých materiálech může najít v tabulce rychlostí zvuku.

Při vnímání zvuku je vedle jeho frekvence důležitá i jeho **hlasitost**. Pro měření hlasitosti zvuku slouží veličina **intenzita zvuku**  $I$ . Intenzita zvuku je definována jako poměr výkonu zvukového vlnění  $P$  a obsahu plochy  $S$ , kterou vlnění prochází.

$$I = \frac{P}{S}$$

Jednotkou intenzity zvuku je  $\text{W.m}^{-2}$ .

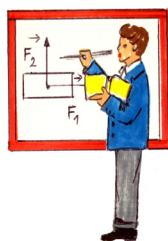
Rozsah intenzit zvuku, které je lidské ucho schopno registrovat je obrovský:  $10^{12}$ . Proto se hodnoty intenzit vynášejí v logaritmické stupnici pomocí jednotky, kterou určitě znáte - decibelu. Jak je tedy veličina, jejíž jednotkou je decibel definována?

Tato fyzikální veličina se označuje jako **hladina intenzity zvuku**  $L$  a je definována vztahem

$$L = 10 \log \frac{I}{I_o}$$

Jednotkou hladiny intenzity zvuku je decibel (dB).

Intenzita zvuku označená jako  $I_o$  odpovídá intenzitě, kterou je průměrné lidské ucho ještě schopno zachytit. Její hodnota je  $I_o = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ .



Určete, o kolik se zvýšila intenzita zvuku, zvětšila-li se hladina intenzity o 1 dB?

Vyjdeme z definičního vztahu pro hladinu intenzity zvuku, do kterého dosadíme:

$$1 = 10 \log \frac{x I_o}{I_o}. \text{ Hledáme poměr } x \text{ zvýšené a původní intenzity. Po}$$

odlogaritmování vyjde hledaný nárůst jako

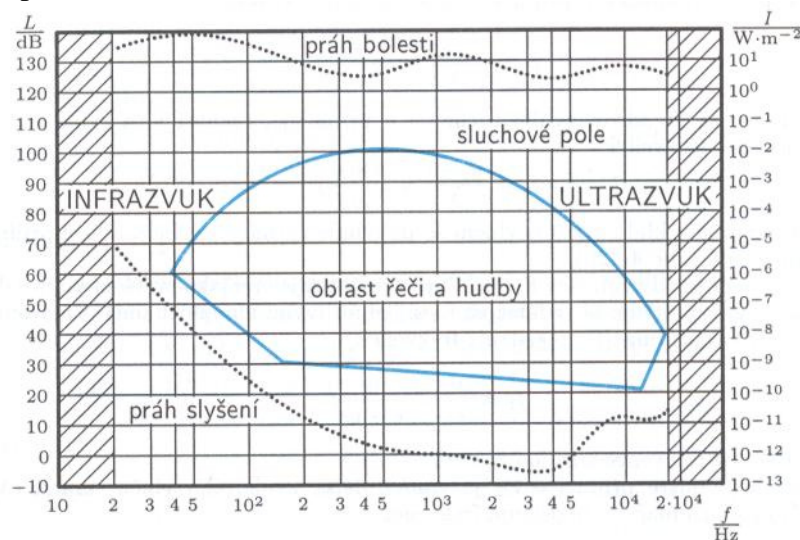
$$x = \sqrt[10]{10} = 1,26. \text{ Intenzita zvuku se zvýší o 26\%.}$$



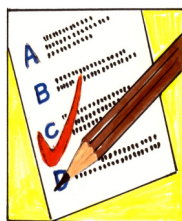
Asi jste již zažili pocit, kdy zvuk vám „trhá uši“. Může to být způsobeno jak „nepříjemnou“ frekvencí zvuku, tak jeho velkou intenzitou. Ucho je totiž **různě citlivé na různé frekvence**. V grafu, viz. obr. obr. 1.9-14, je



zobrazeno tzv. **sluchové pole**. Vidíte zde vyznačen **práh slyšení**. Ten určuje nejmenší intenzitu zvuku, kterou je lidské ucho při dané frekvenci ještě schopno vnímat. Jsou zde vyznačeny oblasti ultrazvuku a infrazvuku, které lidské ucho nevnímá. A konečně zde vidíte důležitý **práh bolesti**. Intenzity zvuku překračující tyto hodnoty způsobují pocit bolesti. Při překročení těchto hodnot může dojít k trvalému poškození sluchu. Příklady hladin intenzity zvuku si můžete prohlédnout v tabulce intenzit zvuku.



obr. 1.9-14



**TO1.9.3-13.** Lidské ucho vnímá přibližně frekvence 20 Hz až 20 000 Hz. V jakém intervalu leží příslušné vlnové délky? ( $v = 340$  m/s)

**TO1.9.3-14.** Mohli by se astronauti na povrchu Měsíce dorozumívat zvukovými signály?

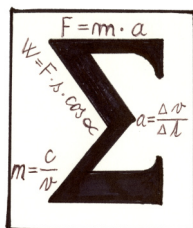
**TO1.9.3-15.** Jak je třeba změnit intenzitu zvuku  $I_1$ , má-li se hladina intenzity  $L_1 = 70$  dB snížit na  $L_2 = 60$  dB?

**TO1.9.3-16.** Intenzita určitého zvuku je  $10^{-2} \text{ Wm}^{-2}$ . Najděte hladinu intenzity tohoto zvuku.



**U1.9.3-17.** Rychlost zvuku v Zemi (u povrchu) je 13 krát větší než ve vzduchu. Ve vzdálenosti 1,7 km od pozorovatele vybuchla na povrchu Země nálož. Určete dobu, která uplyne mezi záchvěvem půdy v místě pozorovatele a okamžikem, kdy uslyší explozi.

**U1.9.3-18.** Turista, který stojí na okraji propasti, uslyší zvuk dopadu kamene na její dno po uplynutí doby 4 s od začátku pádu kamene. Velikost rychlosti zvuku ve vzduchu je 330 m/s, kámen padá volným pádem. Jak hluboká je propast?



1. **Mechanické vlnění** je děj, při kterém se kmitání látky přenáší prostředím.
2. Okamžitá **výchylka** vlny je dána vztahem  $y = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ . Výraz  $\omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$  vyjadřuje **fázi vlnění**.
3. **Vlnová délka**  $\lambda$  je vzdálenost dvou nejbližších bodů, které kmitají se stejnou fází.
4. Rychlost mechanické vlny  $v$ , její vlnová délka  $\lambda$  a frekvence vlnění, respektive perioda  $T$ , jsou svázány vztahem  $v = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$ .
5. Mechanické vlnění rozdělujeme na **vlnění příčné a podélné**. Jiné dělení je na vlnění **postupné a stojaté**.
6. Mechanická vlnění se mohou skládat – **interferovat**. Jak bude vypadat výsledné vlnění **rozhoduje fázový rozdíl**  $\Delta\varphi$ .  

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) - 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} d.$$
7. Fázový rozdíl  $\Delta\varphi$  je přímo úměrný vzdálenosti  $d$ , tzv. **dráhovému rozdílu** obou vlnění.
8. Je-li **dráhový rozdíl roven sudému počtu půlvln**,  $d = 2k \frac{\lambda}{2}$ , kde  $k = 0, 1, 2$ , pak vzniká **interferenční maximum**, vlnění se zesilují.
9. Je-li **dráhový rozdíl roven lichému počtu půlvln**,  $d = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , pak vzniká **interferenční minimum**, vlnění se zeslabují.
10. Interferencí dvou vlnění stejné frekvence, která se šíří v opačném směru vzniká **stojaté vlnění**. Pro toto vlnění je charakteristické, že některé z bodů nekmitají vůbec – **uzly**. Jiné body kmitají s maximální amplitudou – **kmitny**.
11. **Zvukové vlnění** je mechanické postupné podélné vlnění, které je schopno vyvolat v lidském uchu sluchový vjem.
12. Lidské ucho vnímá zvuky v frekvenčním rozsahu 16 Hz až po 16 kHz. Zvuky o nižší frekvenci než 16 Hz se označují jako **infrazvuk**, zvuky s frekvencí vyšší než 16 KHz jsou **ultrazvuky**.
13. **Rychlost zvuku**  $v$  závisí na teplotě. Rychlost zvuku ve vzduchu je dána vztahem  $v_t = (331,82 + 0,61t) \text{ m.s}^{-1}$ .
14. **Intenzita zvuku**  $I$  je definována jako poměr výkonu zvukového vlnění  $P$  a obsahu plochy  $S$ , kterou vlnění prochází  $I = \frac{P}{S}$ . Jednotkou intenzity zvuku je  $\text{W.m}^{-2}$ .
15. **Hladina intenzity zvuku**  $L$  je definována vztahem  $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ . Jednotkou hladiny intenzity zvuku je decibel (dB).
16. Ucho je **různě citlivé na různé frekvence**. **Práh slyšení** je určen nejmenší intenzitou zvuku, kterou je lidské ucho při dané frekvenci ještě schopno vnímat. Při dosažení **prahu bolesti** intenzity zvuku způsobují pocit bolesti.

# Klíč k modulu 1

## 1.1. Úvodní pojmy

### 1.1.1 Soustava fyzikálních veličin a jednotek

**U1.1.1-1.**  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Při odvozování vyjdeme z 2. Newtonova pohybového zákona, který definuje sílu jako součin hmotnosti a zrychlení:  $F = m a \rightarrow \text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$

**U1.1.1-2.**  $\text{min} = 60 \text{ s}$

$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$

$1 \text{ t} = 1\,000 \text{ kg}$

$1 \text{ l} = 0,001 \text{ m}^3$

**U1.1.1-3.**  $0,2 \text{ g/cm}^3 = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

**U1.1.1-4.**  $1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$

$1 \text{ GJ} = 10^6 \text{ J}$

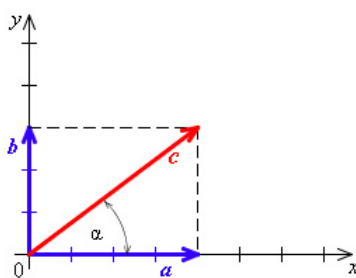
$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

$1 \mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V}$

$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$

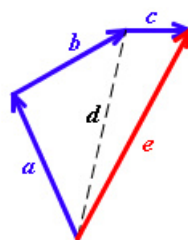
### 1.1.2 Skalární a vektorové fyzikální veličiny

**U1.1.2-5.**  $c = 5 \text{ m}$ ,  $c = (4, 3, 0)$ ,  $\text{tg } \alpha = 3/4$ , viz obr. 1.1-5



obr. 1.1-5

**U1.1.2-6.** viz. obr. 1.1-7



obr. 1.1-7



**U1.1.2-7.**  $F_1 + F_2 = 0$ , viz. obr. 1.1-8



obr. 1.1-8

**U1.1.2-8.** a)  $a \cdot b = a b$

b)  $a \cdot b = 0$

**U1.1.2-9.** a)  $|a \times b| = 0$  ( $\alpha = 0$ )

b)  $|a \times b| = a b$  ( $\alpha = 90^\circ$ ), výsledný vektor je kolmý na rovinu tvořenou oběma vektory.

## 1.2. Kinematika hmotného bodu

### 1.2.1 Hmotný bod, mechanický pohyb

**KO1.2.1-1.** ano, ne, ano, ano, ano

**KO1.2.1-2.** Tyto veličiny nelze absolutně určit, vždy záleží na volbě vztažné soustavy.

**KO1.2.1-3.** V klidu vůči autu, v pohybu vůči Zemi.

### 1.2.2 Polohový vektor, trajektorie, dráha

**U1.2.2-4.**  $r [4 \text{ m}, 1 \text{ m}, 0]$ , nebo dostačuje  $r [4 \text{ m}, 1 \text{ m}]$ .  $r = \sqrt{4^2 + 1^2} = 4,1 \text{ m}$ .

$$\sin \alpha = \frac{1}{4,1}, \sin \beta = \frac{4}{4,1}$$

**KO1.2.2-5.** přímočaré, křivočaré

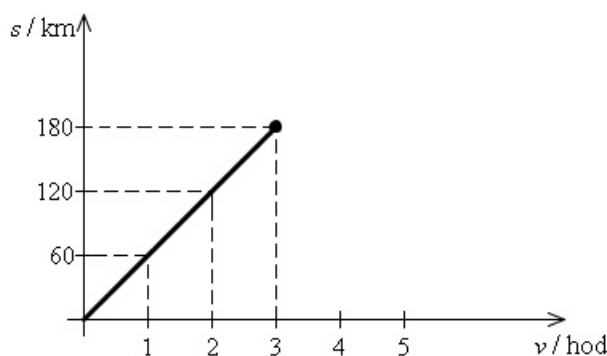
**KO1.2.2-6.** křivočarý, křivočarý, přímočarý, přímočarý, křivočarý, křivočarý, křivočarý

**KO1.2.2-7.** oblouk kružnice, bod, spirálu

**U1.2.2-8.**  $5s = 35 \text{ m}$ ,  $10s = 70 \text{ m}$

**U1.2.2-9.** v případě b)

**U1.2.2-10.** Grafem závislosti dráhy na čase bude přímka, viz. obr. 1.2-6.



obr. 1.2-6

## 1.2.3 Rychlost hmotného bodu

U1.2.3-11.  $v = 90 \text{ km/h} = 90 \frac{1000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$

U1.2.3-12. 5 km

U1.2.3-13. 36 minut

## 1.2.4 Zrychlení hmotného bodu

U1.2.4-14.  $0,5 \text{ m.s}^{-2}$

U přímočarého pohybu nedochází ke změně směru rychlosti, proto **normálové zrychlení je vždy nulové**. U přímočarého pohybu je celkové zrychlení rovno tečnému zrychlení.

## 1.2.5 Přímočarý pohyb hmotného bodu

KO1.2.5-15. d

KO1.2.5-16. c

KO1.2.5-17. b

KO1.2.5-18. a

KO1.2.5-19. a

KO1.2.5-20. c

U1.2.5-21.  $2 \text{ m.s}^{-1}$

U1.2.5-22.  $6 \text{ m.s}^{-1}$ , počáteční dráhu,  $s_o = 1 \text{ m}$ .

U1.2.5-23.  $v = v_o - a t$

KO1.2.5-24. b

KO1.2.5-25. a, vycházíme ze směrnice úsečky,  $a = \Delta v / \Delta t$

KO1.2.5-26. d,  $v = a t$

KO1.2.5-27. b,  $v = v_o - a t$

KO1.2.5-28. b,  $s = v_o t - \frac{1}{2} a t^2$

U1.2.5-29. a)  $v = v_o + a t$ ,  $s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$

b) 16 s, vyjdeme z rovnice pro rychlost  $40 = 8 + 2 t$

c) 7 s, vyjdeme z rovnice pro dráhu  $110 = 5 + 8 t + \frac{1}{2} 2 t^2$

U1.2.5-30. 33,3 s, vyjdeme z rovnice pro rychlost  $20 = 0,6 t$

330 m, vyjdeme z rovnice pro dráhu  $s = \frac{1}{2} 0,6 t^2$

U1.2.5-31. 26 m

Vycházíme z rovnic  $s = \frac{1}{2} g t^2$  a  $v = g t$ . Z druhé rovnice vyjádříme čas, dosadíme ho do první a vypočítáme dráhu. Pozor na jednotku rychlosti.

**U1.2.5-32.** o 9,81 m/s, 24,5 m

Nejdříve si stanovíme změnu rychlosti od druhé do třetí sekundy.  $\Delta v = v_3 - v_2$ , dolním indexem označujeme čas, ve kterém určujeme rychlost. Stejným způsobem vypočítáme uraženou dráhu  $\Delta s = s_3 - s_2$ .

## 1.2.6 Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici

**U1.2.6-33.**  $2\pi$

**U1.2.6-34.**  $\varphi = \omega t + \varphi_o$

Vydeme ze vztahu pro úhlovou rychlost  $\omega = \frac{\varphi - \varphi_o}{t - t_o}$ , který upravíme ( $t_o=0$ ) na tvar

$\omega = \frac{\varphi - \varphi_o}{t}$ . Z něj pak vyjádříme úhlovou dráhu  $\varphi$  v čase  $t$ .

$s = v t + s_o$	$\varphi = \omega t + \varphi_o$
-----------------	----------------------------------

**KO1.2.6-35.** průvodičem, úhlovou dráhou a úhlovou rychlostí, rychlostí, frekvencí a periodou, dostředivým zrychlením

**KO1.2.6-36.** nemění se velikost, jen směr

**KO1.2.6-37.** a,  $\omega = v/r$

**U1.2.6-38.** hodinová ručička: 3600 s,  $1/3600 \text{ s}^{-1}$ . minutová ručička: 60 s ;  $1/60 \text{ s}^{-1}$

**U1.2.6-39.** 0,16 s

Vydeme ze vztahu vyjadřujícího úhlovou rychlost pomocí periody  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Z něj vyjádříme periodu (dobu oběhu) a za úhlovou rychlost dosadíme ze vztahu udávajícího souvislost rychlosti a úhlové rychlosti  $v = r \omega$ .

**U1.2.6-40.**  $10 \text{ s}^{-1}$ , 0,1 s ; 63 rad/s

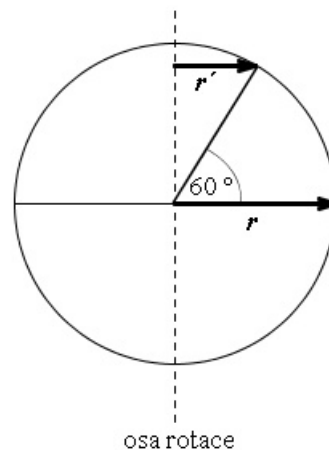
**U1.2.6-41.** 1,67 rad/s ; 7,9 m/s

**U1.2.6-42.** a) 465 m/s

Počítáme ze vztahu pro rychlost v závislosti na úhlové rychlosti  $v = r \omega$ . Do něj dosadíme ze vztahu pro úhlovou rychlost jako funkci periody  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Za periodu dosadíme jeden den v sekundách ;

b) 233 m/s

Počítáme stejně, pouze předmět se nyní neotáčí na poloměru rovníku, ale na rovnoběžce, jejíž poloměr si stanovíme podle obrázku, viz. obr. 1.2-19. Z obrázku plyne, že poloměr na kterém se otáčí bod na  $60^\circ$  zeměpisné šířky je  $r' = r \sin 30^\circ$



obr. 1.2-19

## 1.3. Dynamika

### 1.3.1 Síly

U1.3.1-1. deformací  $F_3$ , posuvem  $F_1$ , otáčením kvádrů  $F_2$ ?

### 1.3.2 Newtonovy pohybové zákony

KO1.3.2-2. Při klopýtnutí se nohy zastaví, ale těleso setrvačností pokračuje v pohybu. Při uklouznutí naopak se pohybují nohy dopředu a tělo zůstává v původním pomalejším pohybu.

KO1.3.2-3. Posádka auta setrvačností pokračuje v pohybu v původním směru.

KO1.3.2-4. Obojí bezpečnostní prvky mají za úkol zabrzdit pohyb osoby dopředu při čelním nárazu auta na překážku. Pohyb dopředu je způsoben setrvačností při náhlém zpomalení auta.

KO1.3.2-5. c

KO1.3.2-6. a

KO1.3.2-7. b

Vyjdeme z druhého Newtonova zákona

KO1.3.2-8. a) dvojnásobné, b) poloviční

Vyjdeme z druhého Newtonova zákona

U1.3.2-9. 1) pořadí je a), d), c), b)

2) pořadí je stejné

U1.3.2-10.  $10 \text{ m.s}^{-1}$ , 2,4 kN

Pro výpočet brzdící síly podle zákona síly potřebujeme znát zpoždění pohybu  $a$ . Vráťme se proto ke kinematice. Napíšeme si vztah pro uraženou dráhu automobilem do zastavení  $s = -\frac{1}{2} a t^2 + v_o t$  a vztah pro konečnou rychlost (je nulová)  $v = -a t + v_o$ . Řešením obou

rovníc dostaneme vztah pro dráhu  $s = \frac{1}{2} v_o t$ . Čas známe, uraženou dráhu také, takže můžeme po dosazení vypočítat hledanou počáteční rychlost.

Z rovnice pro konečnou rychlost  $0 = -a t + v_o$  po dosazení vypočítané počáteční rychlosti vypočítáme zpoždění pohybu ( $2 \text{ m.s}^{-2}$ ). Při známé hmotnosti auta dosazením do zákona síly vypočítáme brzdící sílu.

U1.3.2-11. 7,5 kN, 125 m

Vycházíme ze stejných rovnic jako v předešlé úloze. Jenom je třeba si dát pozor na převod rychlosti do jednotky soustavy SI.,

KO1.3.2-12. 981 N, 981/6 N

KO1.3.2-13. Tíha je stejná jak plyne z její definice.

KO1.3.2-14. 461 N

Protože pohyb je rovnoměrný, výsledná síla působící na těleso je nulová. Síla, kterou působí dělník se musí rovnat odporové síle smykového tření.

**KO1.3.2-15.** statická odporová síla smykového tření je podstatně větší než odporová síla valivého odporu

**KO1.3.2-16.** a

**KO1.3.2-17.** a

**KO1.3.2-18.** c

**KO1.3.2-19.** snižuje velikost odstředivé síly

**KO1.3.2-20.** sniží se velikost odstředivé síly

**U1.3.2-21.** 0,17

Mezní součinitel smykového tření odpovídá třecí síle, která je právě tak velká jako je setrvačná síla působící na bednu při brždění auta. Stanovte si proto ze změny rychlosti  $\Delta v$  zpoždění  $a$  auta. Z tohoto zpoždění vypočítejte brzdnou sílu a ta musí být rovna třecí síle. Z této rovnice pak stanovíte součinitel smykového tření  $f$ .

**U1.3.2-22.** 98,1/24,5

Aby se bedna pohybovala rovnoměrným pohybem, musí být výsledná síla, která na ní působí rovna nule. Jinak řečeno, musíme působit silou rovnou odporové síle. V případě smykového tření bude síla  $F_t = f m g = 0,2 \cdot 50 \cdot 9,81 = 98,1$  N. V případě valení bude odporová síla  $F_v = 0,005 \cdot 50 \cdot 9,81 / 0,1 = 24,5$  N,

**U1.3.2-23.** 47 km/h

Nejdříve si nakreslete obrázek nakloněné roviny pod úhlem  $\alpha = 10^\circ$ . Raději si úhel nakreslete větší, ať je

obrázek přehlednější. Do obrázku zakreslete směr tíhy kola  $G$ . Pak vyznačte směr odstředivé síly  $F_o$ . Ta musí být vykompenzována složkou tíhy v opačném směru. Výslednice sil  $G$  a  $F_o$  musí být kolmá na rovinu dráhy (aby cyklista nespádl).

Bude platit rovnice  $m \frac{v^2}{r} = m g \sin \alpha$ . Z té pak vypočítáte hledanou rychlost.

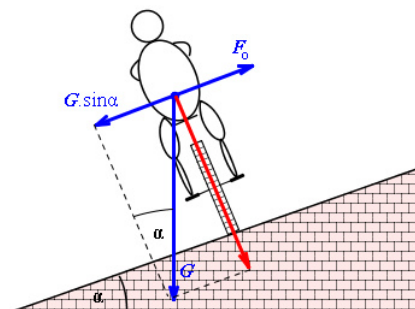
**U1.3.2-24.** Síly akce a reakce vznikají a zanikají současně. Proto není podstatné, kterou označíme jako sílu akce či reakce. Obvykle se označuje za sílu akce ta, která je příčinou vzniku reakce. V našem případě to tedy bude tíha knihy. Viz. obr. 1.3-19.

### 1.3.3 Síla v neinerciální soustavě

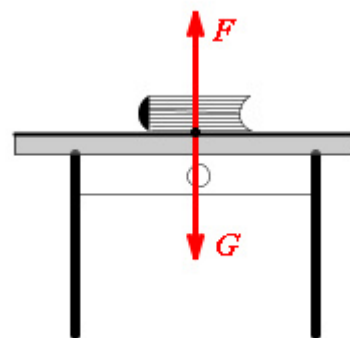
**KO1.3.3-25.** a, b, c

**KO1.3.3-26.** c

**KO1.3.3-27.** b



obr. 1.3-17



obr. 1.3-19

**KO1.3.3-28.**

Název síly	symbol
odstředivá síla	$F_2$
síla akce	$F_3$ ( $F_1$ )
síla reakce	$F_1$ ( $F_3$ )
dostředivá síla	$F_3$

**KO1.3.3-29. c, d**

První podmínka vymezuje kruhový pohyb, druhá říká, že pohyb je rovnoměrný.

**U1.3.3-30.** Přetížení při startu kosmické lodi. Loď se pohybuje s obrovským zrychlením, astronauté vlivem setrvační síly jsou „zamáčknuti“ do sedadel.

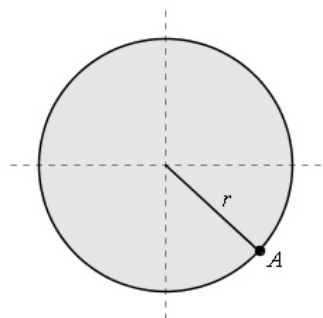
**U1.3.3-31.** 0 N

**U1.3.3-32.** 18 N

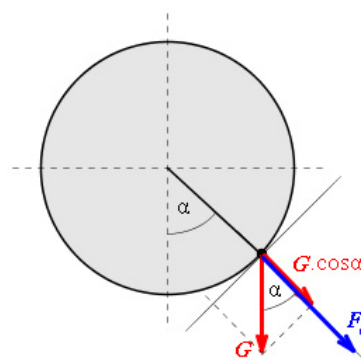
Jedná se o odstředivou sílu.

**U1.3.3-33.** a)  $m v^2/l - m g$ , b)  $m v^2/l + m g$ , c)  $m v^2/l + m g \cos \alpha$

Uvědomte si, že na kámen působí jednak odstředivá síla, ta je ve všech případech stejná. Působí ale také tíhová síla, která v případě a) má opačný směr než odstředivá síla, v případě b) má směr stejný. V případě c) pak ve směru odstředivé síly působí jen složka tíhové síly jak ukazuje obr. 1.3-26 a 1.3-27.



obr. 1.3-26



obr. 1.3-27

## 1.3.4 Hybnost tělesa

**KO1.3.4-34.** směr bude stejný. Z matematického hlediska násobíme vektor  $\Delta v$  reálným číslem  $m$ .

**KO1.3.4-35.** Stejně

Impuls síly bude v obou případech stejný  $50.0,02 = 1.1$ .

**KO1.3.4-36.** Platí zákon zachování hybnosti. Hybnost vody je velká díky vysoké rychlosti stříkající vody.

**U1.3.4-37.** 500 N

Vyjdeme ze vztahu pro impuls síly. Změna rychlosti bude  $\Delta v = v - 0$ . Pozor na jednotky rychlosti.

**U1.3.4-38.**  $3,2 \text{ m.s}^{-1}$

To odpovídá asi 12 km/h. Počítáme ze zákona zachování hybnosti. Nehledejte jak uplatnit údaj o čase za který prolétla střela hlavní. Je nadbytečný.

**U1.3.4-39.**  $300 \text{ m.s}^{-1}$

Počítáme ze zákona zachování hybnosti.

## Práce, energie, výkon

### 1.4.1 Mechanická práce

**U1.4.1-1.**  $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$

Vyjdeme z definičního vztahu

**KO1.4.1-2.** a.  $\cos 0^\circ = 1$

**KO1.4.1-3.** c.  $\cos 90^\circ = 0$

**KO1.4.1-4.** b, c jen v případě, že síla působí ve směru pohybu

**KO1.4.1-5.** 50N

**U1.4.1-6.** a) 78,5 N. Síla musí překonat po dráze 1 m tíhovou sílu  $m g$ .

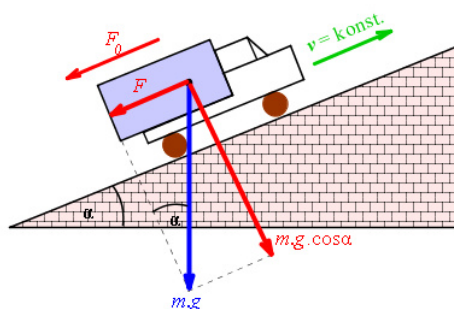
b) 0 N. Síla nepůsobí po dráze.

c) 0N. Zanedbáme-li odpor prostředí nepůsobí nám ve směru pohybu žádná síla.

**U1.4.1-7.** a) 60 kJ, b) 30 kJ

**U1.4.1-8.** 7,06 MJ

Nejdříve vypočítáme sílu motoru, která udržuje rovnoměrný pohyb automobilu. Ta musí být právě tak veliká, ale opačného směru než je síla odporu  $F_o = f m g \cos \alpha$  a složka tíhy působící proti pohybu  $F = m g \sin \alpha$ . Pak vynásobíme dráhou. Viz. obr. 1.4-2.



obr. 1.4-2

### 1.4.3 Výkon

**KO1.4.2-9.** b, c

Je to vlastně joule.  $W = J/s \rightarrow J = W.s$

**KO1.4.2-10.** b

**KO1.4.2-11.** a



**U1.4.2-12.**  $1,37 \text{ kW} \cdot \frac{m g h}{t}$

**U1.4.2-13.**  $6 \text{ W} \cdot P = F v$

**U1.4.2-14.**  $26 \text{ min}$

Počítáme z práce, která je rovna změně potenciální energie vody po vyčerpání  $\Delta W = S d \rho g$ , z definice účinnosti  $\eta = \frac{\Delta W}{P}$  a definice výkonu  $P = \frac{\Delta W}{t}$ .

**U1.4.2-15.**  $0,83$ , tj.  $83\%$

Vyjdeme z definice účinnosti:  $\eta = \frac{P}{P_o} = \frac{\frac{W}{t}}{\frac{W_o}{t_o}}$ .

**U1.4.2-16.**  $3,6 \text{ MJ}$ .  $1 \text{ kWh} = 10^3 \cdot 3600 = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$

## 1.4.3 Mechanická energie

**KO1.4.3-17.** b

V nejvyšším bodě dráhy se těleso zastaví ( $v = 0$ ) než začne padat.

**KO1.4.3-18.** c

Těleso bude jednak na nejvyšším bodě své dráhy, tedy bude mít potenciální energii. Bude se také pohybovat vpřed, tedy bude mít energii kinetickou.

**KO1.4.3-19.**  $15,3 \text{ N}$

Vycházíme ze zákona zachování mechanické energie. Kinetická energie vrženého kamene  $\frac{1}{2} G/g v^2$  se bude rovnat hledané energii potenciální v horním bodě jeho dráhy. V tomto bodě bude jeho kinetická energie nulová.

**KO1.4.3-20.**  $v^2/2g$

Vycházíme ze zákona zachování mechanické energie.  $\frac{1}{2} m v^2 = m g h$ .

**KO1.4.3-21.** b

Počítáme ze vztahu pro kinetickou energii, rychlostí je rychlost tělesa vzhledem k vagónu.

**KO1.4.3-22.** a

Počítáme ze vztahu pro kinetickou energii, rychlostí je součet rychlostí tělesa vzhledem k vagónu a pohybu vagónu.

**KO1.4.3-23.** b

Počítáme ze vztahu  $E_p = m g h$

**KO1.4.3-24.** a

Počítáme ze vztahu  $W = \Delta E_p = m g h$

**U1.4.3-25.**  $39,2 \text{ kJ}$ ,  $39,2 \text{ kJ}$

Počítáme ze vztahu  $\Delta E_p = m g \Delta h$ . Změna potenciální energie je rovna vykonané práci motorem.

**U1.4.3-26.**  $9$  krát

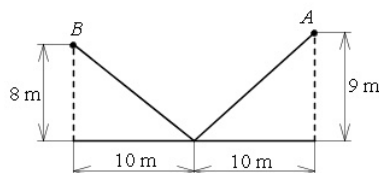
Rychlost se zvětšila 3 krát. Protože rychlost je ve vztahu pro kinetickou energii na druhou, pak za jinak stejných podmínek se musela kinetická energie zvětšit  $3^2 = 9$ .

**U1.4.3-27.** 98,1 J

Počítáme ze vztahu  $\Delta E_p = m g \Delta h$ . Nezáleží na tom, po jaké dráze jsme se pohybovali, podstatný je rozdíl výšek.

**U1.4.3-28.** 981 J

Práce musela být vynaložena pouze na překonání výškového rozdílu 1 m, viz. obr. 1.4-12.



obr. 1.4-12

## 1.5. Gravitační pole

### 1.5.1 Newtonův gravitační zákon

**KO1.5.1-1.** 144 N

**KO1.5.1-2.** 144 N

**U1.5.1-3.**  $7,8 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

Vycházíme z toho, že aby se satelit udržel na své kruhové dráze, musí na něj působit dvě stejně velké síly opačného směru. Silami jsou síla odstředivá  $F_o = m_s \cdot v^2/r$  a gravitační síla  $F_g = \kappa \cdot (m_s \cdot m_Z)/r^2$ . Z rovnosti obou sil vypočítáme  $v$ .

**U1.5.1-4.** 0,03 N

Vznikají slapové jevy – příliv a odliv.

### 1.5.3 Gravitace v okolí Země

**U1.5.2-5.**  $6,29 \cdot 10^{23} \text{ kg}$

Hmotnost Marsu je asi 10 krát menší než Země.

### 1.5.3 Pohyb těles v blízkosti povrchu Země

**KO1.5.3-6.**  $20 \text{ m.s}^{-1}$ .  $v = g t$

**KO1.5.3-7.** 2,83 s

Vydeme ze vztahu pro dráhu volného pádu.  $h = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} =$

**KO1.5.3-8.** 45 m.  $s = \frac{1}{2} g t^2$

**KO1.5.3-9.**  $14,1 \text{ m.s}^{-1}$

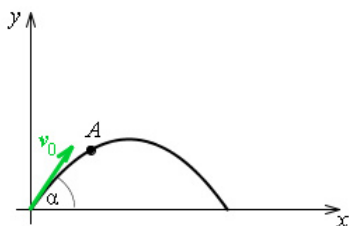
Vydeme z rovnice pro rychlost, která je v nejvyšším bodě nulová. Z této rovnice stanovíme dobu výstupu. Tento čas dosadíme do rovnice pro dráhu a z ní vypočítáme počáteční rychlost.

**KO1.5.3-10.**  $\frac{v_o^2}{2g}$

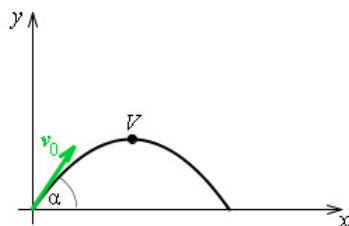
Vyjdeme z rovnice pro rychlost, která je v nejvyšším bodě nulová. Z této rovnice stanovíme dobu výstupu. Tento čas dosadíme do rovnice pro hledanou dráhu

**KO1.5.3-11. b**

viz. obr. 1.5-9, 1.5-10



obr. 1.5-9



obr. 1.5-10

**KO1.5.3-12. c**

**U1.5.3-13.**  $0 \text{ m.s}^{-1}$ , 45 m

Vyjdeme z rovnice pro rychlost do které dosadíme zadaný čas. Vyjde nám nulová rychlost. Z toho vyplývá, že těleso se dostalo do nejvyššího bodu své dráhy. Pak začne padat dolů. Tento čas tedy dosadíme do rovnice pro dráhu – výšku tělesa v tomto čase.

**U1.5.3-14.**  $40 \text{ m.s}^{-1}$ , 80 m

Označíme si dobu výstupu  $t_1$ , dobu pádu  $t_2$ . Řešíme rovnice pro rychlost a výšku vrhu svislého vzhůru v čase  $t_1$  a pro dráhu volného pádu za čas  $t_2$ . Zjistíme, že oba časy  $t_1$  a  $t_2$  jsou stejné. Z doby výstupu vypočítáme počáteční rychlost a nejvyšší bod dráhy.

**U1.5.3-15.**  $25 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $25,26 \text{ m.s}^{-1}$ , 1,8 m

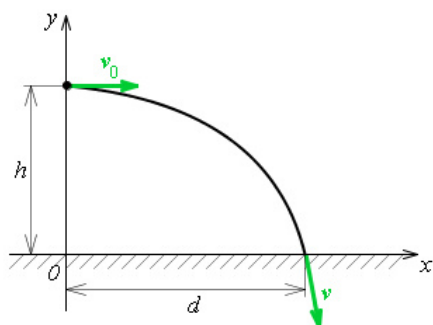
Jedná se o pohyb složený z rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru osy  $x$  a volného pádu ve směru osy  $y$ . Vzdálenost dopadu je souřadnice  $x$  v daném čase, použijeme tedy rovnici pro ni.

Hledáme-li rychlost v bodě dopadu, musíme si uvědomit, že rychlost bude mít dvě složky. Prvou bude  $x$ -ová složka rovna počáteční rychlosti. Druhou složkou bude rychlost volného pádu za daný čas  $v_y = g t$ . Obě složky vektorově sečteme.

Výšku stanovíme z dráhy volného pádu.  $h = \frac{1}{2} g t^2$ .

**U1.5.3-16.** 4 s, 60 m

Zase jde o pohyb složený z přímočarého rovnoměrného v ose  $x$  a z volného pádu. Hledaný čas si stanovíme z dráhy volného pádu. Místo dopadu pak z dráhy rovnoměrného pohybu v ose  $x$ . Viz. obr. 1.5-11.



obr. 1.5-11

**U1.5.3-17.**  $34 \text{ m.s}^{-1}$

Vyjdeme z rovnice pro x-ovou a y-ovou složku místa dopadu vody.

## 1.5.4 Pohyb těles ve velkých výškách od povrchu Země

**U1.5.4-18.**  $1 \text{ km.s}^{-1}$ , 27 dní 11 hodin

Rychlost vypočítáme z rovnosti gravitační a setrvačné odstředivé síly:  $\frac{m_M v_M^2}{r} = \kappa \frac{M m_M}{r^2}$ .

Oběžnou dobu stanovíme jako podíl dráhy měsíce a jeho rychlosti:  $T = \frac{2 \pi r}{v_M}$ .

## 1.5.5 Keplerovy zákony

**U1.5.5-19.** 29,7 roku

Počítáme ze třetího Keplerova zákona. Jedna AU (astronomická jednotka) je rovna průměrné vzdálenosti Země – Slunce.  $1 \text{ AU} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

## 1.6. Mechanika tuhého tělesa

### 1.6.1 Pohyb tuhého tělesa

**KO1.6.1-1.** Pokud se těleso pohybuje pohybem zrychleným, je zrychlení všech bodů stejné.

**KO1.6.1-2.** Body, kterými prochází osa otáčení.

**KO1.6.1-3.** a, e

**KO1.6.1-4.** b, c

**KO1.6.1-5.** d, f

### 1.6.2. Otáčivé účinky síly, moment síly

**KO1.6.2-6.**  $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$

**KO1.6.2-7.**  $F_2$

**U1.6.2-8.** 10 N.m, 14,1 N.m, 14,1 N.m, 7,07 N.m

**U1.6.2-9.** 28,3 N.m

### 1.6.3 Skládání sil působících na těleso

**KO1.6.3-10.** c

**KO1.6.3-11. d**

**U1.6.3-12. 1700 N**

Vektorově obě síly sečteme. Viz. obr. 112 - 117

**U1.6.3-13. 170 N**

Vycházíme z momentové věty. Moment síly dělníka  $F d$  musí být roven momentu tíhy trámu  $m g \cos \alpha d/2$  působící v těžišti (polovina délky trámu  $d$ ).

## 1.6.4 Rovnováha tuhého tělesa

**KO1.6.4-14. 0,5 m**

Chceme, aby houpačka byla ve stabilní poloze. Momenty síly otce a dítěte vzhledem k ose otáčení musí být stejné.

**KO1.6.4-15. 0,5 m**

Počítáme stejně jako v předešlé otázce.

## 1.6.5 Kinetická energie tuhého tělesa

**U1.6.5-16. 15,8 kJ. .  $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J (2\pi f)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2.3,14 \cdot 20)^2$**

**U1.6.5-17. 24 J**

Kinetická energie bude složena z kinetické energie posuvného pohybu těžiště pohybujícího se rychlostí  $v = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a z kinetické energie otáčivého pohybu se stejnou obvodovou

rychlostí.  $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m r^2 \right) \left( \frac{v}{r} \right)^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 2 \cdot r^2 \cdot \frac{4^2}{r^2}$ . Všimněte

si, že energie válce nezávisí na jeho poloměru.

**U1.6.5-18. 0,1 J**

$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m (2\pi f r)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} m r^2 \right) (2\pi f)^2 = \frac{1}{2} 0,25 \cdot (2.3,14 \cdot 4 \cdot 0,03)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} 0,25 \cdot 0,03^2 \cdot (2\pi \cdot 4)^2$

Rychlost pohybu těžiště (je stejná jako obvodová rychlost povrchového bodu) se vypočítá z otáčivého pohybu ze vztahu  $v = \omega r = 2\pi f \cdot r$ .

## 1.7. Struktura a deformace pevné látky

### 1.7.3. Normálové napětí, Hookův zákon

**KO1.7.3-1. a, f**

**KO1.7.3-2. c)**

**KO1.7.3-3. a)**

**KO1.7.3-4. a)**

**U1.7.3-5.  $\sigma = 9,81 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ ,  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta l = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$**

**U1.7.3-6.  $E = 1,96 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$**

**U1.7.3-7.  $E = \frac{3,92 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{3,14 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$**

**U1.7.3-8.** 2,996m, 0,13%

**U1.7.3-9.** 8 N

**U1.7.3-10.**  $\sigma_p = 34$  MPa

## 1.8. Mechanické kmitání

### 1.8.1 Harmonický pohyb

**KO1.8.1-1.** pravý obrázek je tlumený pohyb, amplituda výchylky se zmenšuje s časem.

**KO1.8.1-2.** v počtu tepů za minutu, tedy běžných 60 tepů za minutu je frekvence srdce  $f = 60 \text{ min}^{-1} = 1 \text{ Hz}$

**KO1.8.1-3.** Harmonický pohyb je zvláštní druh pohybu periodického. Podstatné je to, že jeho rovnici pro výchylku je sinusoida nebo kosinusoida.

**KO1.8.1-4.** 2,3 ms

**KO1.8.1-5.**  $1 \text{ ns} = 10^{-6} \text{ s}$

**KO1.8.1-6.**  $20 \text{ rad.s}^{-1}$

Výsledek dostaneme srovnáním s obecnou rovnicí pro výchylku  $y = y_m \sin(\omega t + \varphi_o)$ .

**KO1.8.1-7.** 3,18 Hz

Výsledek dostaneme srovnáním s obecnou rovnicí pro výchylku  $y = y_m \sin(\omega t + \varphi_o)$  a užitím vztahu  $\omega = 2 \pi f$ .

**KO1.8.1-8.**  $\varphi = 20t + \pi/4$ ,  $\varphi_o = \pi/4$

Výsledek dostaneme srovnáním s obecnou rovnicí pro výchylku  $y = y_m \sin(\omega t + \varphi_o)$

**KO1.8.1-9.** b

**KO1.8.1-10.** a

**KO1.8.1-11.** a

**U1.8.1-12.**  $y = 3 \sin(8\pi t + \pi/6)$

Dosadíme známé hodnoty do obecné rovnice pro výchylku  $y = y_m \sin(\omega t + \varphi_o)$ . Počáteční fázi určíme také z obecné rovnice pro výchylku dosazení příslušných hodnot  $1,5 = 3 \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_o)$

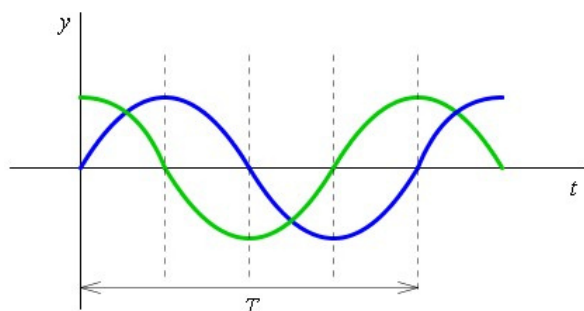
**U1.8.1-13.**  $6 \cos(3t)$

Ze zadané rovnice pro výchylku si stanovíme amplitudu, kruhovou frekvenci a fázi. Tyto hodnoty dosadíme do rovnice pro rychlost  $v_h = y_m \omega \cos \omega t$ .

**U1.8.1-14.**  $-18 \sin(3t)$

Ze zadané rovnice pro výchylku si stanovíme amplitudu, kruhovou frekvenci a fázi. Tyto hodnoty dosadíme do rovnice pro zrychlení  $a_h = -y_m \omega^2 \sin \omega t$ .

**U1.8.1-15.** Grafem průběhu rychlosti bude kosinusoida. Obě křivky budou posunuty o  $T/4$ . Viz. obr. obr. 1.8-11.



obr. 1.8-11

## 1.8.2 Dynamika harmonického pohybu

**U1.8.2-16.** 4 s

Počítáme ze vztahu pro frekvenci a relace mezi frekvencí a periodou  $T = 1/f$ .

**U1.8.2-17.** 4,1 Hz

Nejdříve si určíme tuhost pružiny ze vztahu  $F = -k y$ . Působící silou je tíha závaží, která způsobí zadané prodloužení. Tuhost dosadíme do vztahu pro výpočet frekvence a relace mezi frekvencí a periodou  $T = 1/f$ .

## 1.8.3 Kyvadlo

**U1.8.3-18.** 0,994 m. Vyjdeme ze vztahu pro dobu kmitu. Ale hledáme pouze dobu jednoho kyvu, tedy poloviny kmitu. Počítáme tedy  $T/2$ .

**U1.8.3-19.** doba kmitu bude 0,7 původní doby

Počítáme ze vztahu pro dobu kmitu kyvadla.

**U1.8.3-20.** Nebudou, na Měsíci je jiné tíhové zrychlení. Hodiny půjdou pomaleji.

## 1.9. Mechanické vlnění

### 1.9.1 Popis mechanického vlnění

**U1.9.1-1.**  $y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

Vyjdeme ze základní rovnice  $y = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ . Použijeme vztahů  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  a  $\lambda = vT$ .

**U1.9.1-2.** všechny

**U1.9.1-3.**  $\lambda/2$

**U1.9.1-4.** 3 m

Srovnáme s obecnou rovnicí vlny  $y = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$  a použijeme vztahy  $\omega = 2\pi f$  a  $v = \lambda f$ .

**U1.9.1-5.** 10 Hz



Srovnáme s obecnou rovnicí vlny  $y = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$  a užijeme vztah  $\omega = 2\pi f$

**U1.9.1-6.**  $4\pi$

Kmitající body jsou od sebe vzdáleny  $2\lambda$ . Podle definice vlnové délky je to vzdálenost kam se rozšíří vlnění za periodu nebo vzdálenost fáze se změní o  $2\pi$ .

**U1.9.1-7.** Nemůže

Mechanické vlnění potřebuje ke svému šíření látku, kterou se přenáší kmitavý rozruch.

**U1.9.1-8.**  $z = 0,01 \sin 20\pi \left( t - \frac{z}{10} \right)$

Dosazujeme do obecné rovnice vlny. Úhlovou frekvenci  $\omega$  určíme ze vztahu  $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda}$ .

Pozor na převod jednotek.

**U1.9.1-9.** a, c,

## 1.9.2 Interference vlnění

**TO1.9.2-10.** c

**TO1.9.2-11.** d

**TO1.9.2-12.** b

## 1.9.3 Zvukové vlnění

**TO1.9.3-13.** 17 m až 17 mm

Vycházíme ze vztahu  $v = \lambda f$ .

**TO1.9.3-14.** Ne, na Měsíci je vzduchoprázdno, kterým se mechanické zvukové vlnění nešíří.

**TO1.9.3-15.**  $I_2 = \frac{I_1}{10}$

**TO1.9.3-16.** 100 dB

**U1.9.3-17.** 4,5 s

Nejdříve si vypočítáme rychlost zvuku ve vzduchu při teplotě  $20^\circ \text{C}$ . Rozdíl časů bude dán různými rychlostmi šíření ve vzduchu  $v_v$ , v Zemi  $v_z$  a uraženou dráhou  $s$ .

$$t_v - t_z = \frac{s}{v_v} - \frac{s}{v_z} = \frac{1700}{344} - \frac{1700}{344.13} = 4,52 \text{ m.s}^{-1}$$

**U1.9.3-18.** 70 m. Zadaný čas  $t = 4 \text{ s}$  je dán dobou volného pádu kamene  $t_k$  a dobou šíření zvuku  $t_z$ .  $t = t_k + t_v$ . Hledanou hloubku propasti si označíme jako  $s$ . Pro volný pád kamene platí

vztah pro dráhu  $s = \frac{1}{2} g t_k^2$ . Stejnou dráhu urazí zvuk rychlostí zvuku. Platí  $s = v t_v$ .

Srovnáním obou rovnic dostaneme rovnici pro dvě neznámé – časy  $\frac{1}{2}gt_k^2 = vt_v$ . Z této rovnice a prvé rovnice pro čas  $t$  můžeme vyjádřit některý z časů  $t_k$  nebo  $t_v$ . Ten dosadíme do příslušné rovnice pro dráhu  $s$ .