VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní opory pro předmět

MATEMATIKA II

230-0202/13

BAKALÁŘSKÝ STUDIJNÍ PROGRAM
„CHYTRÉ A ZELENÉ BUDOVY V CIRKULÁRNÍM STAVITELSTVÍ“

Garant předmětu

Petr Volný

Zpracovatel studijních opor

Jana Volná, Petr Volný

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO PRŮMYSLU A OBCHODU

Studijní opora pro Matematiku II

Jana Volná, Petr Volný

Obsah

1 Integrální počet funkcí jedné proměnné

1.1 Neurčitý integrál, primitivní funkce

V předcházejícím studiu jste se seznámili s důležitým pojmem, a to *derivace funkce*. Funkci $f(x)$ jsme přiřadili novou funkci $f'(x)$. Úloha, které se budeme věnovat nyní, je v podstatě opačná. K funkci $f(x)$ budeme hledat funkci $F(x)$ tak, aby platilo $F'(x) = f(x)$. Tzn. položíme si otázku, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci $f(x)$.

Definice

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na otevřeném intervalu I. Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní** k funkci $f(x)$ na I, jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.

Věta

Nechť funkce $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na I, pak každá jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I má tvar $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Poznámka

Pokud k dané funkci existuje primitivní funkce, je jich nekonečně mnoho a liší se pouze konstantou c. Víme, že pokud sestrojíme v bodě x tečnu k dané funkci, je derivace funkce v daném bodě x směrnicí této tečny. Grafy primitivních funkcí jsou posunuty rovnoběžně ve směru osy y. Tečny ke grafům v daných bodech x jsou rovnoběžné (mají stejnou směrnici) a z toho plyne, že mají stejnou derivaci.

1.2 Definice a vlastnosti

Definice

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na I se nazývá **neurčitý integrál** funkce $f(x)$ a značí se symbolem $\int f(x)dx$. Tedy

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad x \in I.$$

Poznámka

1. Funkci $f(x)$ nazýváme **integrandem**.
2. Výraz dx je diferenciál proměnné x a v tuto chvíli je jeho význam v tom, že nám říká, jak je označená proměnná.
3. Číslo c nazýváme **integrační konstanta**.

Věta

Každá funkce $y = f(x)$ spojitá na intervalu I, má na tomto intervalu neurčitý integrál $\int f(x)dx$, který je opět spojitou funkcí na I.

Uvedeme jednoduchou (ale důležitou) větu, kterou budeme při výpočtu neurčitých integrálů neustále používat.

Věta

Existují-li na I integrály $\int f(x)dx$ a $\int g(x)dx$, pak na I existuje rovněž integrál jejich součtu, rozdílu a násobku konstantou:

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.3 Tabulkové integrály

Podobně jako pro derivování, i pro integrování existuje celá řada pravidel, kterými se při výpočtu budeme řídit.
První skupinu vzorců (1-11) dostaneme, obrátíme-li základní vzorce pro derivování. Doplníme ji o dva užitečné vzorce 12 a 13.

1. $\int 0dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1,\ x > 0$
3. $\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c,\ x \neq k\pi$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c,\ |x| < 1$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

12. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

13. $$\int f'(x)f(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

Obecné vzorce

1. $$\int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + c$$
2. $$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$
3. $$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$$
4. $$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$$
5. $$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$
6. $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$$
7. $$\int \frac{1}{\cos^2 ax}dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$$
8. $$\int \frac{1}{\sin^2 ax}dx = -\frac{1}{a}\cot ax + c$$
9. $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$

1.4 Metoda per partes

Víme, že integrál ze součtu (rozdílu) je součtem (rozdílem) integrálů. Pro součin (podíl) nic takového obecně neplatí.

$$\int f(x)\cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

Z pravidla pro derivaci součinu dostaneme velmi užitečný vztah pro integraci součinu:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \Rightarrow u\cdot v' = (u\cdot v)' - u'\cdot v$$

Po integraci dostáváme:

$$\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot v dx$$

Věta

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I, pak, pokud alespoň jeden z integrálů existuje, platí

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx.$$

Tato metoda se nazývá **metoda per partes** (po částech).

Hodí se na integrály, jejichž integrand má tvar součinu dvou odlišných funkcí. Abychom dokázali napsat pravou stranu vztahu, musíme jeden činitel na levé straně umět derivovat, což není problém, a druhý činitel musíme umět integrovat, což už může být problém. Metoda per partes integrál vypočítá jen zčásti. Zbývá vypočítat nový integrál, který by měl být jednodušší.
Buď $P(x)$ polynom. Metodou per partes integrujeme např. integrály následujících typů:

$$\int P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}dx, \int P(x)\sin(\alpha x)dx, \int P(x)\cos(\alpha x)dx$$

a

$$\int P(x)\arctan x dx, \int P(x)\ln^m x dx.$$

U první skupiny postupujeme tak, že polynom derivujeme (snížíme jeho stupeň), v případě potřeby postup opakujeme. U druhé skupiny naopak polynom integrujeme a derivujeme druhý činitel.

Poznámka

V souvislosti s metodou per partes se používá obrat, který spočívá v tom, že po integraci per partes a úpravách se nám znovu objeví výchozí integrál. Tzn. dostáváme rovnici:

$$\int f(x)dx = h(x) + \alpha \int f(x)dx,$$

kde $\alpha \neq 1$. Převedením integrálů na jednu stranu dostaneme hledaný výsledek:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{1-\alpha}h(x) + c.$$

1.5 Integrace substitucí

Seznámíme se s významnou metodou, která je jednou z nejdůležitějších a nejpoužívanějších při řešení integrálů. Bohužel neexistuje univerzální návod, kdy a jak substituci použít, proto je důležité pochopit princip substitučních metod a umět vzorce pro derivování.

Substituce typu $\varphi(x) = t$

Věta

Nechť funkce $f(t)$ má na otevřeném intervalu J primitivní funkci $F(t)$, funkce $\varphi(x)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a pro libovolné $x \in I$ platí $\varphi(x) \in J$. Potom je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na I a platí:

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + c = F\left[\varphi(x)\right] + c.$$

Z předcházející věty vidíme, jak musí vypadat integrand, aby bylo možno substituční metodu použít. Musí jít o výraz, který je složen ze součinu složené funkce a derivace vnitřní funkce. Problémem je, že potřebný součin není vždy na první pohled viditelný a je potřeba integrand vhodně upravit.

Shrnutí a praktické použití:

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x)dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x)dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t)dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci

Lineární substituce: $ax + b = t$
Jestliže má funkce $f(t)$ primitivní funkci $F(t)$, tj. $\int f(t)dt = F(t) + c$, platí, že:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Substituce typu $x = \varphi(t)$

Podle věty o 1. substituční metodě jsme převedli integrál $\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)dx$ pomocí substituce $\varphi(x) = t$ na integrál s novou proměnnou $\int f(t)dt$. Někdy je potřeba zvolit postup opačný a proměnnou nahradit vhodnou funkcí. Tzn. máme vypočítat integrál $\int f(x)dx$. S využitím substituce $x = \varphi(t)$ a $dx = \varphi'(t)dt$ se snažíme převést integrál na tvar integrálu $\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$. Abychom byli schopni nalézt primitivní funkci, musí platit, že:

1. $f(x)$ je spojitá na (a, b)
2. $x = \varphi(t)$ je na (α, β) ryze monotónní a $\varphi'(t) \neq 0$ je spojitá na (α, β).

Pokud jsou tyto předpoklady splněny, existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}(x) \neq 0$ a tedy $t = \varphi^{-1}(x)$.

Věta

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu J, nechť monotónní funkce $\varphi(t)$ má derivaci na otevřeném intervalu I různou od nuly pro každé $t \in I$ a platí $\varphi(I) = J$. Pak má $f(x)$ na intervalu J primitivní funkci $F\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ a platí:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F\left[\varphi^{-1}(x)\right] + c.$$

Substituční metodou integrujeme většinou iracionální funkce.

a) Integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$. U těchto integrálů používáme substituci $ax+b=t^n$, $adx = nt^{n-1}dt$.

b) Obsahuje-li integrovaná funkce více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax+b}$, $\sqrt[n_2]{ax+b}$, ... zavádíme substituci $ax+b=t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \ldots$

c) Integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2-b^2x^2}$. Substituce se označuje jako goniometrická, protože klademe $bx = a\sin t$ nebo $bx = a\cos t$, tzn. $dx = \frac{a}{b}\cos t dt$ případně $dx = -\frac{a}{b}\sin t dt$.

1.6 Integrace racionální lomené funkce

Každou racionální lomenou funkci tvaru $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy libovolných stupňů, lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + R_1(x) + \ldots + R_s(x),$$

kde $S(x)$ je mnohočlen a $R_1(x), \ldots, R_s(x)$ jsou parciální zlomky.

Parciální zlomky jsou speciální racionální lomené funkce. Rozlišujeme 2 typy:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k},\ k \in \mathbb{N};\ \alpha, A \in \mathbb{R}$$

a

$$\frac{B(2x+p)+C}{(x^2+px+q)^k},\ k \in \mathbb{N};\ B, C, p, q \in \mathbb{R}; p^2-4q<0.$$

Definice

Racionální funkce $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá **ryzí**, jestliže $\deg P(x) < \deg Q(x)$, $\deg P(x)$ je stupeň polynomu $P(x)$.

Postup rozkladu ryze lomené funkce na parciální zlomky

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu:
   srovnávací metodou, dosazovací metodou nebo kombinací těchto metod.

Integrace parciálních zlomků s reálnými kořeny ve jmenovateli

Pro $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln|x-\alpha| + c.$$

Pro $k \geq 2$:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c.$$

Integrace parciálních zlomků s komplexními kořeny ve jmenovateli

Při integrování zlomku $\dfrac{B(2x+p)}{x^2+px+q}$ dostáváme:

$$\int \frac{B(2x+p)}{x^2+px+q} dx = B \ln|x^2+px+q| + c.$$

Při integrování zlomku $\dfrac{C}{x^2+px+q}$ doplníme trojčlen x^2+px+q na čtverec:

$$\int \frac{C}{x^2+px+q} dx = C \int \frac{dx}{(x+p/2)^2+a^2} = \frac{C}{a} \operatorname{arctan} \frac{x+p/2}{a} + c,$$

kde

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

1.7 Integrace goniometrických funkcí

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. Pokud je aspoň jedno z čísel m, n liché použijeme k řešení substituci:

$$\sin x = t, \text{ je-li } n \text{ liché},$$

$$\cos x = t, \text{ je-li } m \text{ liché}.$$

Pokud jsou obě liché, můžeme si vybrat.

2. Pokud jsou obě čísla m, n sudá a nezáporná, je nejvýhodnější použití vzorců pro dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

3. Pokud jsou obě čísla m, n sudá a je-li alespoň jedno z čísel záporné, použijeme substituci $\tan x = t$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \arctan t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Univerzální substituce

pro $x \in (-\pi, \pi)$, $\tan \dfrac{x}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x = 2\arctan t \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Univerzální substituce se používá při řešení integrálů typu

$$\int f(\sin x, \cos x)dx,$$

kde $f(u, v)$ je racionální funkce proměnných $u = \sin x$, $v = \cos x$. Jedná se o obecný postup (substituci) při řešení integrálů funkcí složených z goniometrických funkcí.

1.8 Určitý integrál, geometrický význam

Mějme nezápornou ohraničenou funkci $f(x)$, spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Dá se dokázat, že určitý integrál $\int\limits_a^b f(x)dx$ udává obsah rovinného obrazce P ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.

Pro obecnou funkci $f(x)$ zatím obsah obrazce P vypočítat nedovedeme. Navrhněme, jak vypočítat obsah tohoto útvaru alespoň přibližně:

1. Rozdělíme obrazec rovnoběžkami s osou y na n částí. Je zřejmé, že obsah obrazce P dostaneme jako součet obsahů jednotlivých částí. Pak platí: $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$.

2. Potřebujeme tedy určit obsah jednotlivých částí. Jelikož jsou opět ohraničeny shora funkcí $f(x)$, provedeme výpočet přibližně. A to tak, že aproximujeme plochy obdélníky. Zvolíme v jednotlivých částech body ξ_i (v mezích dané části) a v těchto bodech určíme funkční hodnoty $f(\xi_i)$. V těchto hodnotách zarovnáme odpovídající části obrazce na obdélníky (funkci jsme nahradili funkční hodnotou).
Ze znalosti vzorce pro výpočet obsahu obdélníku dostáváme (přibližný) obsah původního obrazce:

$$P \doteq (x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + ... + (b - x_{n-1})f(\xi_n).$$

3. Je zřejmé, že se dopouštíme chyby, a pokud zvolíme více dělících bodů (více částí), bude chyba menší. Obsah P tedy dostaneme jako limitu pro nekonečný počet částí.

Definice

Pokud existuje limita $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}P_i = I\right)$, pak je tato limita označována jako **Riemannův integrál** funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a píšeme

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

kde číslo a se nazývá **dolní mez**, číslo b **horní mez** a funkce $f(x)$ **integrand**.

Poznámka

Pokud je funkce $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak má Riemannův integrál. Po zobecnění dostáváme následující definici.

Definice

Nechť je $f(x)$ omezená a po částech spojitá v $\langle a, b\rangle$, pak má $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál.

Pro výpočet určitého integrálu využijeme **Newtonovu-Leibnizovu formuli**, která vyjadřuje vztah mezi primitivní funkcí a Riemannovým integrálem.

Definice

Nechť $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I. Pak pro čísla a, b z tohoto intervalu definujeme **Newtonův určitý integrál** funkce $f(x)$ v mezích od a do b vzorcem:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

1.9 Vlastnosti určitého integrálu

Věta

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, pak také součet (rozdíl) těchto funkcí a násobek funkce konstantou je integrovatelný na tomto intervalu a platí:

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx,$$

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx,\ c \in \mathbb{R}.$$

Věta

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a,b\rangle$, pak platí

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)dx|,$$

$$\text{je-li } f(x) \leq g(x), \text{ pro } \forall x \in \langle a,b\rangle, \text{ pak také } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Následující vlastnost je užitečná zejména v případech, kdy integrand nebude mít na celém intervalu $\langle a,b\rangle$ jednotný analytický předpis.

Věta

Nechť $f(x)$ je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a c je libovolné reálné číslo $a < c < b$. Pak je $f(x)$ integrovatelná na intervalech $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ a platí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Výpočet integrálu sudé a liché funkce

Pokud je na intervalu $\langle -a,a\rangle$ funkce $f(x)$ sudá resp. lichá, pak

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \quad \text{resp.} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

1.10 Substituce v určitém integrálu

Věta

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ a ryze monotónní funkce $x = \varphi(t)$ má v intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Poznámka

Postup výpočtu a zápis je obdobný jako u neurčitého integrálu, jen přibude určení nových mezí. Výhodou je, že se nemusíme po substituci vracet k původní proměnné.

1.11 Metoda per partes v určitém integrálu

Věta

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na $\langle a, b\rangle$, $a < b$, derivace, které jsou na daném intervalu integrovatelné, pak platí

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx.$$

Poznámka

Použití je analogické jako v případě neurčitého integrálu. Výhoda oproti postupu u neurčitého integrálu spočívá v průběžném dosazování mezí do částečně určené primitivní funkce. Výpočet se zkrátí a zpřehlední.

1.12 Nevlastní integrál prvního druhu

Definice

Buď funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, \infty)$, pak integrál

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx = L$$

nazýváme **nevlastním integrálem 1. druhu**. Jestliže $L \in \mathbb{R}$, říkáme, že **nevlastní integrál konverguje**. V opačném případě ($L = \infty$ nebo $L = -\infty$) říkáme, že **nevlastní integrál diverguje**.

Poznámka

- Zcela analogicky definujeme nevlastní integrál 1. druhu na intervalu $(-\infty, a)$.
- Integrujeme ohraničenou funkci na neohraničeném intervalu.
- Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a konvergují-li pro libovolné číslo a oba nevlastní integrály

$$L_1 = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad L_2 = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx, \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = L_1 + L_2.$$

1.13 Nevlastní integrál druhého druhu

Definice

Buď funkce $f(x)$ spojitá a neohraničená na intervalu $\langle a, b)$, pak integrál

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx = L$$

nazýváme **nevlastním integrálem 2. druhu**. Jestliže $L \in \mathbb{R}$, říkáme, že **nevlastní integrál konverguje**. V opačném případě ($L = \infty$ nebo $L = -\infty$) říkáme, že **nevlastní integrál diverguje**.

Poznámka

- Zcela analogicky definujeme nevlastní integrál 2. druhu na intervalu $(a, b\rangle$.
- Integrujeme neohraničenou funkci na omezeném intervalu.
- Má-li funkce $f(x)$ více bodů, v nichž je neohraničená, rozdělíme interval integrace na odpovídající počet podintervalů tak, aby v každém z nich byl právě takový bod. Budou-li nevlastní integrály na dílčích intervalech konvergovat, bude konvergovat i integrál na celém intervalu, záskáme jej jako součet dílčích hodnot jednotlivých integrálů. Naopak stačí, aby alespoň jeden dílčí integrál divergoval, a nevlastní integrál bude divergovat jako celek.

1.14 Obsah rovinného útvaru

1. Pokud se jedná o rovinný útvar omezený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem spojité, nezáporné funkce $y = f(x)$, pak je jeho obsah dán určitým integrálem, jak bylo uvedeno u geometrické interpretace určitého integrálu:

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

V případě, že funkce $y = f(x)$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ záporná, je integrál rovněž záporný. Vzhledem k tomu, že obsah každého obrazce je vždy nezáporné číslo, použijeme pro libovolnou funkci ve výpočtu obsahu její absolutní hodnotu:

$$P = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Jestliže funkce $y = f(x)$ nabývá v intervalu $\langle a, b\rangle$ jak kladných, tak i záporných hodnot, potom tento interval rozdělíme na dílčí intervaly, ve kterých funkce nabývá pouze nekladných hodnot resp. nezáporných hodnot, a vypočteme obsahy podle předcházejícího. Tzn. pokud bychom počítali integrál $\int_a^b f(x)dx$ na celém $\langle a, b\rangle$, kladné a záporné části by se odečítaly.

2. Pokud je rovinný útvar ohraničený dvěma funkcemi (křivkami) $y = f(x)$ a $y = g(x)$, přičemž platí $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, a přímkami $x = a$, $x = b$, je jeho obsah určen:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

V případě, že je rovinný útvar ohraničený pouze dvěma funkcemi, musíme nejdříve určit x-ové souřadnice průsečíků křivek $\big($tzn. řešíme rovnici $f(x) = g(x)\big)$.

3. Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, kde funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná na $\langle \alpha, \beta\rangle$ a funkce $\varphi(t)$ má na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ derivaci $\dot{\varphi}(t)$ různou od nuly a $\dot{\varphi}(t)$ je integrovatelná na $\langle \alpha, \beta\rangle$, platí pro obsah útvaru ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$:

$$P = \left| \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\dot{\varphi}(t) dt \right|.$$

1.15 Délka rovinné křivky

Věta

Je-li funkce $y = f(x)$ definovaná na $\langle a, b\rangle$ a má zde spojitou derivaci, pak pro délku jejího grafu platí:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Nyní se podíváme na obecnější případ, kdy křivka nemusí být grafem funkce (může se jednat o trajektorii nakreslenou bodem spojitě se pohybujícím v rovině). Tzn. zadáme křivku pomocí parametrických rovnic $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Z fyzikálního pohledu je délka křivky vlastně dráhou, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β. Pro délku křivky dané parametrickými rovnicemi lze dokázat následující tvrzení:

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt.$$

1.16 Objem rotačního tělesa

Necháme-li rovinný útvar rotovat kolem osy x, vznikne rotační těleso, jehož objem můžeme vypočítat pomocí určitého integrálu.

Věta

Nechť je funkce $y = f(x)$ spojitá a nezáporná na $\langle a, b\rangle$. Pak rotační těleso vzniklé rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x v intervalu $\langle a, b\rangle$ má objem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Poznámka

1. Obdobný vzorec platí, je-li osou rotace osa y. Objem tělesa, které vznikne rotací spojité křivky $x = h(y)$ pro $y \in \langle c, d \rangle$ kolem osy y, vypočteme pomocí vztahu:

$$V = \pi \int_c^d h^2(y)dy.$$

2. Pokud získáme těleso rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$, přičemž platí $f(x) \geq g(x)$, kolem osy x na $\langle a, b \rangle$, pak objem takového tělesa je

$$V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx.$$

Věta

Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro objem tělesa, které vznikne rotací útvaru kolem osy x:

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)|\dot{\varphi}(t)|dt.$$

1.17 Obsah rotační plochy

Pomocí určitého integrálu vypočítáme i obsah pláště rotačního tělesa.

Věta

Nechť je funkce $y = f(x)$ spojitá a nezáporná na $\langle a, b \rangle$ a má zde spojitou derivaci. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x v intervalu $\langle a, b \rangle$, platí:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Poznámka

Rotace kolem osy y: $S = 2\pi \int_c^d h(y)\sqrt{1 + (h'(y))^2}dy.$

Věta

Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro obsah rotační plochy, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2}dt,\ \psi(t) \geq 0.$$

2 Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

2.1 Funkce dvou proměnných

Definice

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$ množina. **Funkcí dvou proměnných** na M rozumíme každé zobrazení

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad M \ni [x, y] \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme ji D_f.

Množina $\mathbb{R}^2$ je kartézským součinem množiny $\mathbb{R}$ se sebou, tedy $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, jejími prvky a také prvky její podmnožiny M jsou tzv. uspořádané dvojice.

Poznámka

- V analogii s označením používaným pro funkci jedné proměnné, $y = f(x)$, budeme pro označení funkce dvou proměnných používat $z = f(x, y)$.
- Proměnné x a y budeme nazývat **nezávislé proměnné**. Proměnnou z budeme nazývat **závislou proměnnou**.
- Není-li specifikován definiční obor, automaticky uvažujeme maximální přípustnou podmnožinu v $\mathbb{R}^2$.
- Pro funkci tří a případně více proměnných máme zcela analogickou definici, přidáváme v podstatě pouze nezávislé proměnné.
- Prvek množiny M nazýváme bod z definičního oboru, obvykle se pro jeho označení používají velká písmena, tj. např. $A \in M$. Bod A je určen dvěma složkami, $A = [x_0, y_0]$.
- Hodnota $z = f(A) = f(x_0, y_0)$ se nazývá **funkční hodnota**.

Princip hledání definičního oboru pro funkci dvou proměnných je zcela analogický jako pro funkci jedné proměnné. Sestavíme a vyhodnotíme jednotlivé omezující podmínky.

2.2 Graf funkce dvou proměnných

Definice

Grafem funkce dvou proměnných rozumíme množinu $G_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,|\, [x, y] \in D_f, z = f(x, y)\}$.

Poznámka

- Množina G_f je podmnožinou v $\mathbb{R}^3$, $G_f \subset \mathbb{R}^3$. Nejčastěji budeme pracovat s funkcemi, jejichž grafy jsou nějaké dvojrozměrné plochy v trojrozměrném prostoru.
- Nakreslit graf funkce dvou proměnných tzv. „v ruce“ je poměrně obtížné, a často to

vůbec není možné. Jednou z možností, kterou máme k dispozici, je využít průsečnice grafu zadané funkce s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami, především s půdorysnou rovinou.

- K vizualizaci grafů se používá výpočetní technika, existuje řada komerčních i volně šiřitelných programů (Gnuplot, Maple, Matematika, Matlab, Wolfram atd.).
- Grafem funkce tří proměnných je plocha v $\mathbb{R}^4$, tzv. nadplocha. Nelze ji ovšem graficky znázornit.

Definice

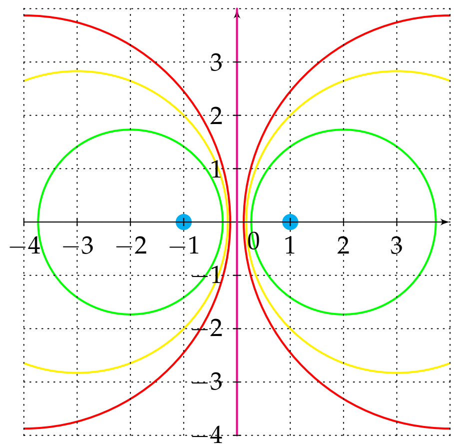
Řezy grafu funkce $z = f(x, y)$ rovinami rovnoběžnými s půdorysnou rovinou se nazývají **vrstevnice**. **Vrstevnicovým grafem** rozumíme průměty vrstevnic do půdorysné roviny $z = 0$.

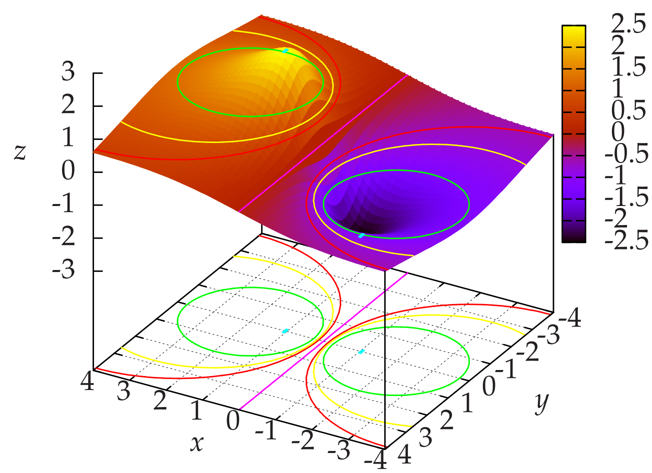
Vrstevnice je množina bodů se stejnou funkční hodnotou. S vrstevnicemi se můžeme setkat především na turistických mapách, kde vrstevnice (obvykle šedé křivky) reprezentují množiny bodů se stejnou nadmořskou výškou.

Na obrázku se nachází turistická mapa okolí Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava.

Zdroj:
`http://mapy.cz/#!x=18.151648&y=49.832078&z=14&l=16`.

Vrstevnicový graf a graf funkce $z = \dfrac{5x}{x^2 + y^2 + 1}$.





2.3 Limita a spojitost

Limita a spojitost funkce dvou proměnných je definována úplně stejně, jako v případě funkcí jedné proměnné.

Definice

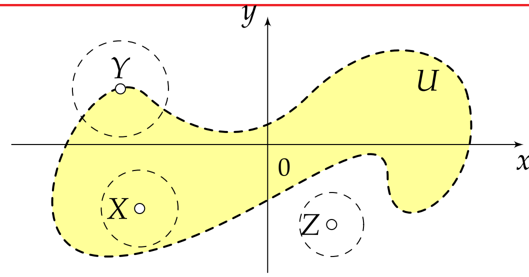
Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v hromadném bodě $P = [x_0, y_0]$ **limitu** $a \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $X \in \mathring{\mathcal{O}}_\delta(P)$ platí $|f(X) - a| < \epsilon$.

Pojem okolí bodu je zobecněn, v případě funkcí jedné proměnné se jedná o otevřený interval, pro funkce dvou proměnných se jedná o otevřený kruh (kruh bez hraniční kružnice).

Okolí $\mathring{\mathcal{O}}_\delta(P)$ je tzv. **deltové prstencové okolí** v bodě P, jedná se o otevřený kruh se středem v bodě P bez bodu P o poloměru δ.

Definice

Buď $U \subset \mathbb{R}^2$, bod $P \in \mathbb{R}^2$ se nazývá **hromadný bod** množiny U, jestliže každé jeho prstencové okolí $\mathring{\mathcal{O}}(P)$ má s množinou U neprázdný průnik, $\mathring{\mathcal{O}}(P) \cap U \neq \emptyset$.



Body X a Y jsou hromadné body množiny U. Bod Z není hromadným bodem množiny U.

V případě funkcí jedné proměnné vyšetřujeme chování funkce (počítáme limitu) na levé resp. pravé části okolí (otevřeného intervalu). Zkoumáme pouze dva případy. Problém u funkcí dvou proměnných je ten, že se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby. Limity funkcí dvou proměnných řešíme většinou přímým dosazením limitního bodu. Řeší se spíše jiný typ úlohy, dokazuje se, že limita v daném bodě neexistuje.

Používaná notace:

$$\lim_{X \to P} f(X) = a, \qquad \lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x,y) = a.$$

Definice

Řekneme, že funkce $z = f(x,y)$ je **spojitá** v bodě $P = [x_0, y_0] \in D_f$, jestliže platí

$$\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Funkce je spojitá v bodě, jestliže existuje limita v tomto bodě, kterou určíme přímým dosazením limitního bodu, tj. jako funkční hodnotu v tomto bodě.

2.4 Parciální derivace

Definice

Řekneme, že má funkce $z = f(x,y)$ **parciální derivaci podle** x (prvního řádu) v bodě $A = [x_0, y_0]$, jestliže existuje vlastní limita

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Analogicky definujeme **parciální derivaci podle** y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Poznámka

- Označení parciálních derivací: $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(A)$, $f_x(A)$, $f'_x(A)$, atd.
- Parciální derivace v obecném bodě, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou opět funkce dvou proměnných.
- Zcela analogicky se definují parciální derivace funkce tří a více proměnných.
- Když určujeme parciální derivaci podle x, pak vše co není x ve funkci $z = f(x, y)$ chápeme jako konstantu. Tzn. takovou funkci derivujeme jako funkci jedné proměnné, proměnné x. U parciálních derivací podle y postupujeme stejně, co není y chápeme jako konstantu.

Výpočet parciálních derivací funkcí dvou proměnných se ve skutečnosti redukuje na výpočet derivací funkcí jedné proměnné, přičemž pro derivování používáme stejné formule a pravidla jako v případě funkcí jedné proměnné.

Věta

Nechť existují parciální derivace funkcí $f(x, y)$ a $g(x, y)$ podle $x = x_1$ a $y = x_2$ na $Q \subseteq D_f \cap D_g$ v bodě X. Pak platí pro každé $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(f \pm g)(X) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(X), \\
\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g)(X) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) + f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X), \\
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(X) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) - f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X)}{g^2(X)}.
\end{aligned}$$

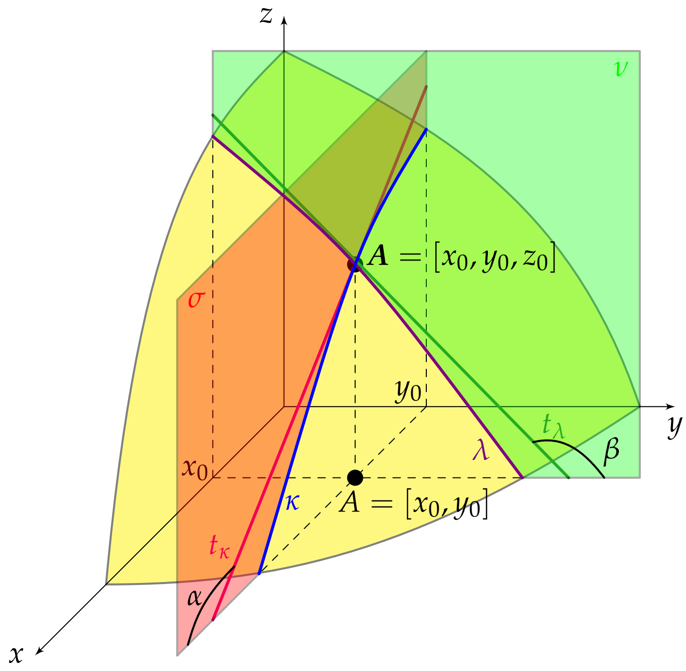
2.5 Geometrický význam parciálních derivací

Geometrický význam parciálních derivací je stejný, jako v případě derivace funkce jedné proměnné. Jedná se o směrnici tečny sestrojené v daném bodě.

Rovina σ určená rovnicí $y = y_0$ je rovnoběžná s rovinou xz (rovina xz je určena rovnicí $y = 0$). Průnikem roviny σ s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka κ. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $A = [x_0, y_0]$, je směrnice tečny ($\tan \alpha$) t_κ ke křivce κ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$.

Rovina ν určená rovnicí $x = x_0$ je rovnoběžná s rovinou yz (rovina yz je určena rovnicí $x =$

0). Průnikem roviny ν s grafem funkce $z = f(x,y)$ je křivka λ. Parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$, $A = [x_0, y_0]$, je směrnice tečny ($\tan\beta$) t_λ ke křivce λ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$.



Definice

Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x,y)$ jsou definovány:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Schwarzova věta

Věta

Jsou-li smíšené parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A)$.

2.6 Diferenciál

Definice

Řekneme, že funkce $z = f(x,y)$ je v bodě $A = [x_0, y_0]$ **diferencovatelná**, nebo má v tomto bodě **diferenciál**, jestliže je možné její přírůstek Δz na okolí bodu A vyjádřit jako

$$\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \mathcal{A}h + \mathcal{B}k + \rho\tau(h,k),$$

kde $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou konstanty, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ a $\lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h,k) = 0$. Funkce $z = f(x,y)$

se nazývá **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru.

Věta

Je-li funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná v bodě A, pak v bodě A existují parciální derivace prvního řádu a platí

$$\mathcal{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad \mathcal{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(A).$$

Poznámka

Číslo h představuje přírůstek na ose x, k je přírůstek na ose y a bývá zvykem tyto přírůstky značit $h = dx$ resp. $k = dy$. Pro přírůstek na ose z v bodě A při známé hodnotě dx a dy pak dostáváme

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(A)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A)dy + \rho\tau(dx, dy).$$

Definice

Je-li funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

diferenciál funkce $z = f(x,y)$.

Věta

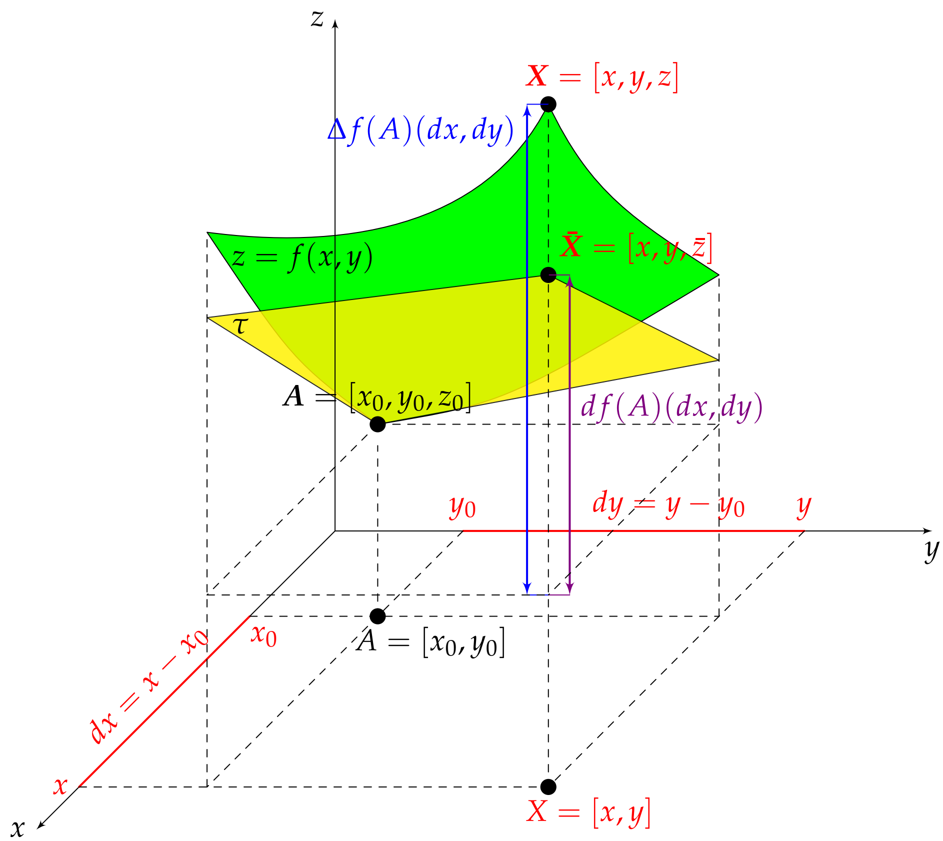
Je-li funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná v bodě A, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta

Jsou-li parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x,y)$ spojité v A, pak je funkce $z = f(x,y)$ v bodě A diferencovatelná (a tedy i spojitá).

2.7 Geometrický význam diferenciálu

Diferenciál funkce $z = f(x,y)$ v bodě A při známých přírůstcích dx a dy je přírůstek na tečné rovině ke grafu funkce f v bodě $\boldsymbol{A}$.



Poznámka

- *Diferenciál funkce* $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

- *Diferenciál funkce* z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0).$$

- *Diferenciál funkce* z v bodě $A = [x_0, y_0]$ při známých přírůstcích dx, dy,

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}.$$

- *Diferenciál druhého řádu funkce* $z = f(x, y)$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

- Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy).$$

2.8 Tečná rovina, normála, Taylorův polynom

Věta

Nechť je funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$. Pak v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ existuje **tečná rovina** ke grafu funkce $z = f(x,y)$ určená rovnicí

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Přímka n kolmá k tečné rovině procházející bodem $\boldsymbol{A}$ se nazývá **normála** grafu funkce $z = f(x,y)$. Její směrový vektor je kolineární s normálovým vektorem roviny, $\vec{s}_n = \vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1\right)$.

Věta

Normála ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$ je určena parametrickými rovnicemi

$$n: \quad x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(A)t, \quad y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)t, \quad z = z_0 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Věta

Nechť je funkce $z = f(x,y)$ na okolí bodu $A \in D_f$ alespoň $(m+1)$-krát spojitě diferencovatelná. Pak v bodě $X \in \mathcal{O}(A)$ platí

$$f(X) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^m f(A)}{m!} + R_m, \text{ kde}$$
$$R_m = \frac{d^{m+1} f(A + \kappa(X - A))}{(m+1)!}, \kappa \in (0,1).$$

Definice

Výraz z předchozí věty nazýváme **Taylorovým rozvojem** funkce f na okolí bodu A. Hodnota R_m se nazývá **Lagrangeův zbytek** Taylorova rozvoje. Polynom

$$T_m(X) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^m f(A)}{m!}$$

se nazývá **Taylorův polynom** m**-tého řádu** funkce f v bodě A. Je-li $A = [0,0]$, hovoříme o **MacLaurionovu polynomu**.

2.9 Implicitní funkce a její derivace

Definice

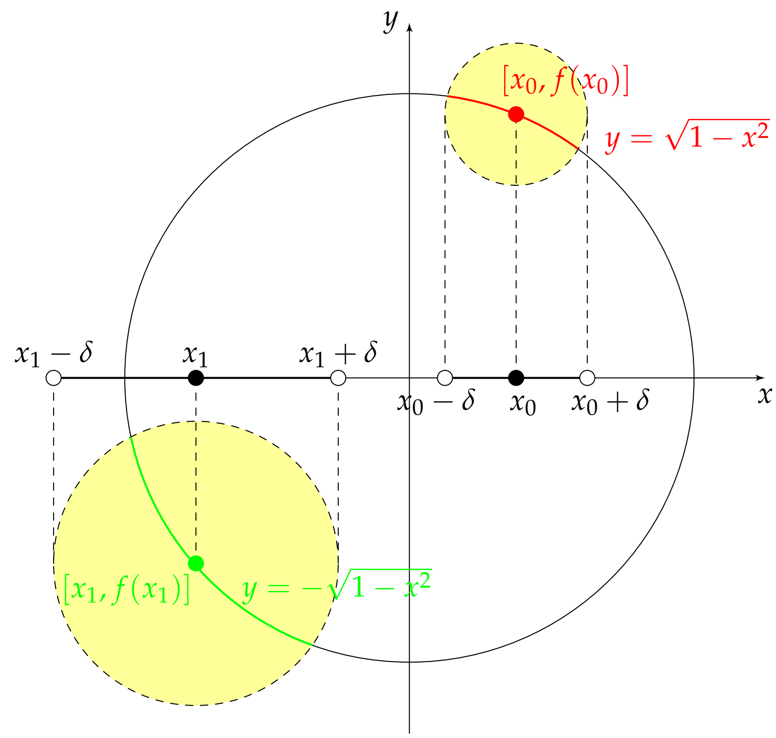
Buď $z = F(x,y)$ funkce dvou proměnných. Uvažujme křivku

$$M = \{[x,y] \in D_F \mid F(x,y) = 0\}.$$

Nechť $A = [x_0, y_0] \in M$ je bod, $\mathcal{O}_\delta(A) \subset \mathbb{R}^2$ je deltové okolí bodu A, $\delta > 0$. Jestliže je rovnicí $F(x,y)=0$ na okolí bodu A určena funkce $y=f(x)$ taková, že platí

$$F(x,f(x))=0, \quad \forall\ [x,f(x)]\in \mathcal{O}_\delta(A),$$

pak říkáme, že funkce f je na okolí bodu A definována **implicitně** rovnicí $F(x,y)=0$.



Na obrázku je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1,

$$x^2+y^2-1=0 \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow |y|=\sqrt{1-x^2},\ x\in\langle -1,1\rangle.$$

Na intervalu $(-1,1)$ jsou rovnicí určeny dvě implicitní funkce, $y=\sqrt{1-x^2}$ (horní půlkružnice) a $y=-\sqrt{1-x^2}$ (spodní půlkružnice). V bodech $[1,0]$ a $[-1,0]$ implicitní funkce neexistuje, každé okolí těchto bodů obsahuje body jak horní, tak spodní půlkružnice.

Poznámka

Ne ke každé rovnici $F(x,y)=0$ existuje jediná implicitní funkce.

Věta

Nechť je funkce $z=F(x,y)$ spojitá na okolí bodu $A=[x_0,y_0]$ a $F(A)=0$. Nechť F má v A spojitou parciální derivaci $\dfrac{\partial F}{\partial y}(A)$ a platí $\dfrac{\partial F}{\partial y}(A)\neq 0$. Pak existuje okolí bodu A, na kterém je rovnicí $F(x,y)=0$ definována jediná spojitá implicitní funkce $y=f(x)$.

Poznámka

Podmínka na nenulovost parciální derivace funkce F je pouze podmínkou postačující pro existenci implicitní funkce. Z rovnice $y^3 - x = 0$ plyne $F(x,y) = y^3 - x$ a v bodě $[0,0]$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 3y^2|_{[0,0]} = 0$. Přesto na okolí bodu $[0,0]$ existuje jediná implicitní funkce $y = \sqrt[3]{x}$.

2.10 Derivace implicitní funkce

Věta

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Nechť existují spojité parciální derivace funkce F. Pak má implicitní funkce f, která je na okolí bodu A dána rovnicí $F(x,y) = 0$, derivaci f' v bodě x_0 a platí

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)}.$$

Věta

Tečna t resp. **normála** n k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x,y) = 0$ v bodě A je určena rovnicí

$$t: \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) = 0,$$
$$n: \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(A)(y - y_0) = 0.$$

2.11 Lokální extrémy

Definice

Řekneme, že funkce $z = f(x,y)$ má v bodě $A \in D_f$ **lokální maximum**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq D_f$ bodu A takové, že $\forall X \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(X) \leq f(A)$. Platí-li $f(X) \geq f(A)$, jedná se o **lokální minimum** v bodě A (v případě ostrých nerovností hovoříme o ostrém lokálním maximu resp. minimu).

Definice

Řekneme, že bod $A \in D_f$ je **stacionárním bodem** funkce f, jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

Fermatova věta - nutná podmínka existence extrému

Věta

Nechť má funkce f v bodě A lokální extrém a nechť v A existují všechny parciální derivace prvního řádu. Pak je bod A stacionárním bodem funkce f.

Poznámka

- Fermatova věta nevylučuje možnost existence extrému v bodě, který není stacionárním bodem funkce f, protože některá z parciálních derivací neexistuje.
- Podmínka pro stacionární body je ekvivalentní s podmínkou $df(A) = 0$, platí-li ovšem, že $df(A) \neq 0$, pak lokální extrém v A neexistuje.

Věta

Nechť existují alespoň spojité parciální derivace druhého řádu funkce f ve stacionárním bodě A, pak platí-li

- $d^2 f(A) < 0,$ funkce f má v bodě A **ostré lokální maximum**,
- $d^2 f(A) > 0,$ funkce f má v bodě A **ostré lokální minimum**.

Postačující podmínka pro existenci extrému

Věta

Nechť je funkce f na okolí bodu A dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť A je stacionární bod. Jestliže

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)\right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v A ostrý lokální extrém. Platí-li navíc

- $D_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0,$ funkce f má v bodě A **ostré lokální maximum**,
- $D_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0,$ funkce f má v bodě A **ostré lokální minimum**.

Poznámka

Jestliže $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Toto lze v některých případech vyřešit prověřením lokálního chování funkce f na okolí bodu A.

2.12 Vázané extrémy

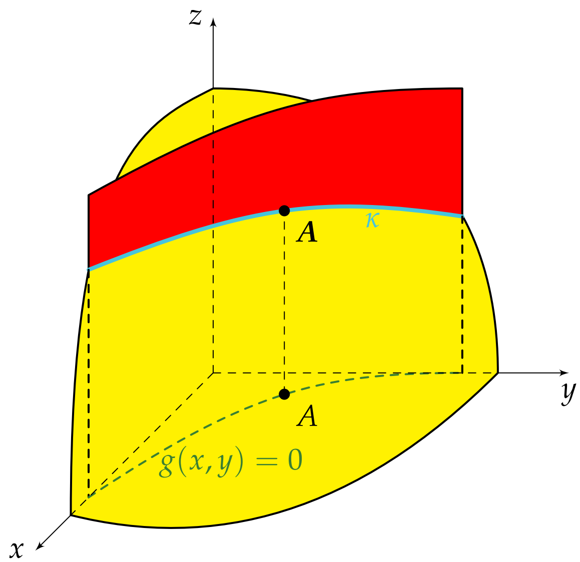
Definice

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0]$ **lokální extrém vázaný podmímkou** $g(x, y) = 0$, jestliže $\forall X \in \mathcal{O}(A) \subset D_f$, které vyhovuje uvedené podmínce, platí

- $f(X) \leq f(A)$, funkce f má v bodě A **vázané lokální maximum**,
- $f(X) \geq f(A)$, funkce f má v bodě A **vázané lokální minimum**.

Geometrický význam vázaných extrémů

Vázaný extrém může nastat pouze v bodech z definičního oboru funkce f, které leží na křivce $g(x, y) = 0$. Těmto bodům odpovídají body na ploše $z = f(x, y)$ tvořící prostorovou křivku κ, průsečnici plochy s válcovou plochou $g(x, y) = 0$. Z geometrického hlediska se jedná o lokální extrémy prostorové křivky.



Lagrangeova metoda

Věta

Buď dána funkce $z = f(x, y)$ a podmínka $g(x, y) = 0$. Jestliže má funkce

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce f v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$.

Poznámka

- Funkce Φ se nazývá **Lagrangeova funkce**, číslo λ **Lagrangeův multiplikátor**.
- Stacionární body určíme jako řešení soustavy rovnic,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

- Pokud lze jednoznačně z rovnice vyjádřit $y = \varphi(x)$ resp. $x = \psi(y)$, pak vázané lokální extrémy hledáme jako lokální extrémy funkce $z = f(x, \varphi(x))$ resp. $z = f(\psi(y), y)$.

2.13 Globální extrémy

Definice

Řekneme, že funkce $z = f(x,y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0]$ **globální extrém** na uzavřeném definičním oboru D_f, jestliže $\forall X \in D_f$ platí

- $f(X) \leq f(A)$, funkce f má v bodě A **globální maximum**,
- $f(X) \geq f(A)$, funkce f má v bodě A **globální minimum**.

Poznámka

- V případě ostrých nerovností hovoříme o **ostrých globálních extrémech**.
- Množina D_f se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body. **Hraničním bodem** množiny D_f je takový bod, jehož každé okolí obsahuje body X takové, že $X \in D_f$ a současně obsahuje body Y takové, že $Y \notin D_f$.
- Na rozdíl od lokálních extrémů, které hledáme na okolích bodů, hledáme globální extrémy na celém D_f.

Postup určování globálních extrémů

- určíme definiční obor D_f funkce $z = f(x,y)$,
- nalezneme lokální extrémy této funkce na množině D_f, ze které vyloučíme hranici $g(x,y) = 0$,
- určíme vázané extrémy této funkce vzhledem k podmínce $g(x,y) = 0$,
- porovnáme funkční hodnoty všech extrémů, bod s největší funkční hodnotou bude globálním maximem, bod s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimem.

3 Obyčejné diferenciální rovnice

3.1 Diferenciální rovnice n-tého řádu

Definice

Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x) = 0$ se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice** n**-tého řádu** pro neznámou funkci $y = y(x)$. Speciálně pro $n = 1$ je

$$F(y', y, x) = 0 \quad \text{nebo} \quad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.
Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace neznáme funkce $y(x)$, který se v rovnici vyskytuje.
Řešením (integrálem) diferenciální rovnice na intervalu I je každá funkce $y(x)$, která má spojité derivace až do řádu n včetně a dané diferenciální rovnici vyhovuje.
Křivka, která znázorňuje některé řešení diferenciální rovnice se nazývá **integrální křivkou** této diferenciální rovnice.

Z hlediska obecnosti rozlišujeme následující typy řešení

- **obecné řešení** rovnice n-tého řádu představuje množinu funkcí tvaru
$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \quad \text{nebo} \quad y = \phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
tj. množina funkcí obsahující n konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$,
- **partikulární řešení** je konkrétní řešení, které získáme z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$,
- **výjimečné řešení** je řešení, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

3.2 Některé metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

Definice

Diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými rozumíme každou rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru

$$Q(y)y' = P(x), \quad \text{tj.} \quad Q(y)dy = P(x)dx,$$

pokud nahradíme derivaci y' podílem $\frac{dy}{dx}$.

Na první pohled vidíme, že zde jsou proměnné odděleny (separovány) na jednotlivé strany rovnice a je možné provést integraci, která vede přímo k řešení

$$\int Q(y)dy = \int P(x)dx + C.$$

Primitivním funkcím na obou stranách rovnosti správně náleží dvě integrační konstanty, které se však spojují do jedné, kterou zpravidla zapisujeme k výrazu s nezávislou proměnnou.

3.3 Separovatelné diferenciální rovnice

V praxi se můžeme setkat s řadou úloh, které lze pomoci jednoduchých operací převést na diferenciální rovnici separovanou. Takové rovnice se označují jako rovnice **separovatelné**. K těmto rovnicím řadíme následující typy rovnic:

- $y' = P(x)Q(y)$,
- $y' = f(ax + by + c)$,
- $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogenní dif. rovnice).

3.4 Diferenciální rovnice typu $y' = P(x)Q(y)$

Rovnici typu $y' = P(x)Q(y)$ lze za předpokladu, že $Q(y) \neq 0$ a užitím identity $y' = \frac{dy}{dx}$ upravit na tvar

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx,$$

což je již diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Její obecné řešení lze za daných předpokladů zapsat ve tvaru

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C.$$

3.5 Diferenciální rovnice typu $y' = f(ax + by + c)$

Diferenciální rovnici tvaru $y' = f(ax + by + c)$, kde $b \neq 0$, lze převést substitucí $u(x) = ax + by + c$ na rovnici se separovanými proměnnými. Nejprve rovnost derivujeme podle proměnné x, tedy

$$u' = a + by' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u' - a}{b}.$$

Dosazením do dané diferenciální rovnice obdržíme rovnici

$$\frac{u' - a}{b} = f(u) \quad \Rightarrow \quad u' = a + bf(u).$$

Pro $a + bf(u) \neq 0$ dostaneme

$$\frac{1}{a + bf(u)} u' = 1,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro funkci $u = u(x)$.

3.6 Homogenní diferenciální rovnice

Definice

Diferenciální rovnice $F(x, y, y') = 0$ se nazývá **homogenní**, pokud ji lze pro $x \neq 0$ upravit na tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Homogenní diferenciální rovnici převedeme substitucí $y = zx$, kde $z = z(x)$, na diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro novou neznámou funkci $z(x)$. Ze substituce $y = zx$, tj. $z = \frac{y}{x}$ plyne po derivování $y' = z'x + z$. Dosazením do zadané homogenní diferenciální rovnice dostaneme

$$z'x + z = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z - f(z)} z' = -\frac{1}{x},$$

pro $z - f(z) \neq 0$, což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro funkci $z = z(x)$. Připomeňme si, kdy se funkce $f(x, y)$ na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ **nazývá homogenní stupně** k a ukážeme si, jak tento pojem souvisí s homogenní diferenciální rovnicí.

Definice

Funkce $f(x, y)$ se nazývá **homogenní funkce stupně** k, $k \in \mathbb{N}$, na oblasti Ω právě tehdy, když v každém bodě $[x, y] \in \Omega$ pro libovolné $t \neq 0$ platí

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Budeme-li předpokládat, že funkce $P(x, y), Q(x, y)$ jsou homogenní stejného stupně k, potom rovnice $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ je homogenní diferenciální rovnicí. Tedy

$$P(tx, ty) = t^k P(x, y) \quad \wedge \quad Q(tx, ty) = t^k Q(x, y)$$
$$\frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} = \frac{t^k P(x, y)}{t^k Q(x, y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Rovnici $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ lze pro $Q(x, y) \neq 0$ upravit na tvar

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)},$$

a z této rovnice pro $t = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ dostaneme

$$y' = -\frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} \quad \Rightarrow \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

což je homogenní diferenciální rovnice.

3.7 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu (zkráceně LDR) nazýváme každou rovnici tvaru

$$y' + yp(x) = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité funkce na určitém intervalu $\langle a, b \rangle$. Dále

1. je-li $q(x) = 0$, hovoříme o **zkrácené LDR**,
2. je-li $q(x) \neq 0$, hovoříme o **nezkrácené (úplné) LDR**.

Věta

Obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice má tvar

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x),$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární diferenciální rovnice.

Funkce $v(x)$ bývá také nazývána jako **partikulární integrál úplné lineární diferenciální rovnice.**

Obecné řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Věta

Zkrácená LDR $y' + yp(x) = 0$ má na intervalu $\langle a, b\rangle$ obecné řešení tvaru

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Rovnice $y' + yp(x) = 0$ je diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými, tedy

$$\frac{dy}{dx} + yp(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = -p(x)dx, \text{ pro } y \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}dy = -\int p(x)dx + K \quad \Rightarrow \quad \ln|y| &= -\int p(x)dx + K \\ |y| &= e^K e^{-\int p(x)dx}, \\ y &= \pm e^K e^{-\int p(x)dx}. \end{aligned}$$

Obecné řešení hledáme ve tvaru

$$y = \pm e^K e^{-\int p(x)dx}.$$

Označíme-li $C = \pm e^K$, potom obecné řešení lze psát ve tvaru

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení úplné lineární DR 1. řádu

Věta

Úplná LDR 1. řádu $y' + yp(x) = q(x)$ má obecné řešení ve tvaru

$$y = \frac{1}{E(x)}\left[\int E(x)q(x)dx + K\right],$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Důkaz věty je konstruktivní, tj. ukazuje způsob řešení úplné LDR, který vede k uvedenému vzorci. Níže uvedený postup se nazývá **Metoda variace konstanty.**

1. Určíme obecné řešení zkrácené LDR $y' + p(x)y = 0$, které označíme $\hat{y}$:

$$\hat{y} = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

2. Obecné řešení úplné LDR hledáme ve tvaru

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

tzn. v obecném řešení zkrácené rovnice jsme konstantu C nahradili zatím neurčenou funkcí $C(x)$. Tuto funkci určíme z předpokladu, že $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$ je řešením úplné LDR. Dosadíme funkci y a její derivaci

$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}p(x)$$

do úplné LDR 1. řádu a dostaneme

$$\underbrace{C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}}_{y(x)}p(x) = q(x).$$

Na levé straně rovnice se vždy musí odečíst dva členy obsahující $C(x)$. V rovnici zůstane $C'(x)$ jen ve formě derivace.

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x) \quad \Rightarrow \quad C'(x) = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}.$$

Označíme-li $E(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)dx}$, obdržíme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $C(x)$ ve tvaru

$$C'(x) = q(x)E(x).$$

Její obecné řešení lze psát ve tvaru

$$C(x) = \int q(x)E(x)dx + K$$

a dosazením do $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$ dostaneme

$$y = \frac{1}{E(x)}\left[\int q(x)E(x)dx + K\right],$$

což je hledané řešení úplné lineární diferenciální rovnice.

Poznámka

Pokud bychom roznásobili obdržené řešení úplné lineární diferenciální rovnice a dosadili za $E(x)$ výraz $\mathrm{e}^{\int p(x)dx}$, viděli bychom, že obdržené řešení je dáno součtem řešení zkrácené rovnice a partikulárního integrálu

$$y(x) = \underbrace{K\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}}_{v(x)}.$$

3.8 Vlastnosti lineárních diferenciálních rovnic

Definice

Lineární diferenciální rovnicí (LDR) n-tého řádu nazýváme rovnici tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y = b(x),$$

kde funkce $a_i(x), b(x), i = 0, 1, \ldots, n$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $a(x) \neq 0$.
Je-li $b(x) = 0$, mluvíme o **zkrácené (homogenní)** LDR, je-li $b(x) \neq 0$, jde o **úplnou (nehomogenní)** LDR. Je-li $a_n(x) = 1$, jedná se o **normovanou** LDR.

Dále budeme používat označení pro tzv. diferenciální operátor levé strany:

$$L^n(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y,$$

$$\tilde{L}^n(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y.$$

Diferenciální operátory L^n a $\tilde{L}^n$ jsou **lineární**, neboť pro libovolné n-krát diferencovatelné funkce $u(x)$, $v(x)$ a konstantu c platí

$$L^n(cu) = cL^n(u), \qquad L^n(u+v) = L^n(u) + L^n(v).$$

Tedy lineární diferenciální rovnici n-tého řádu můžeme nyní zapsat ve tvaru $L^n(y) = b(x)$, resp. normovanou rovnici ve tvaru $\tilde{L}^n(y) = b(x)$.

Věta

(věta o snížení řádu LDR) Nechť je dána lineární diferenciální rovnice $L^n(y) = b(x)$. Známe-li jedno nenulové řešení $y_1(x)$ zkrácené rovnice $L^n(y) = 0$, potom substitucí

$$y = y_1(x) \int v(x)dx,$$

kde $v(x)$ je spojitá funkce, přejde rovnice $L^n(y) = b(x)$ v LDR řádu $n-1$ pro novou neznámou funkci $v(x)$.

3.9 Struktura řešení zkrácené LDR n-tého řádu

Z lineární algebry je známo, že množina všech funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří lineární prostor. V této souvislosti má smysl vymezení pojmů jako jsou lineární závislost resp. lineární nezávislost.

Definice

Řekneme, že funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou na intervalu I **lineárně závislé**, jestliže existují konstanty $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ takové, že

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0,$$

přičemž alespoň jedno z čísel C_i je různé od nuly. V opačném případě jsou funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ na intervalu I **lineárně nezávislé**.

V praxi bývá poměrně často potřeba nezávislost funkcí ověřovat a k tomu využijeme tzv. Wronského determinant.

Definice

Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ mají na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace až do $n-1$ řádu včetně. Potom determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \ldots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

se nazývá **Wronského determinant (wronskián)** příslušný k $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Vztah mezi Wronského determinantem a řešeními zkrácené LDR n-tého řádu je takový, že jsou-li funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ lineárně závislá řešení normované rovnice $\tilde{L}^n(y) = 0$ na intervalu I, ve kterém jsou koeficienty $a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ spojité funkce, potom jejich wronskián $W(x) = 0$ pro všechna $x \in I$. Množina všech řešení LDR $L^n(y) = 0$ tvoří vektorový prostor, jehož dimenze je rovna řádu dané diferenciální rovnice a každou n-tici lineárně nezávislých řešení této rovnice nazýváme **fundamentálním systémem řešení**. Fundamentální systém řešení tvoří bázi prostoru řešení.
Tedy tvoří-li funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fundamentální systém řešení rovnice $L^n(y) = 0$, potom obecné řešení této rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou libovolné konstanty.

3.10 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Definice

Lineární diferenciální rovnice (LDR) druhého řádu má tvar

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

kde funkce (nebo konstanty) $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ jsou koeficienty rovnice a funkci $b(x)$ nazýváme pravou stranou rovnice. Dále

1. je-li $b(x) = 0$, hovoříme o **zkrácené LDR,**
2. je-li $b(x) \neq 0$, hovoříme o **nezkrácené (úplné) LDR**.

Definice

Počáteční (Cauchyho) úlohou pro rovnici

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

nazýváme úlohu najít takové řešení $y(x)$ této rovnice, která splňuje podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Poznámka

Při řešení počáteční úlohy postupujeme tak, že dosazením zadaných podmínek do obecného řešení a do jeho první derivace dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých pro konstanty C_1 a C_2.

Řešíme-li konkrétní problémy z praxe, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi, často zjišťujeme, že jednotlivé parametry (hmotnost, hustota, frekvence, atd.), které vystupují jako koeficienty diferenciálních rovnic, jsou konstanty. Takovéto úlohy tvoří základní skupinu mezi LDR druhého řádu.

Zaměříme se nejprve na zkrácené LDR druhého řádu s konstantními koeficienty ve tvaru

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

3.11 Charakteristická rovnice

Lze ukázat, že existují řešení rovnice $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ ve tvaru $y = \mathrm{e}^{rx}$, kde r je konstanta, která vystupuje jako neznámá v algebraické rovnici

$$a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0.$$

Tuto rovnici označujeme jako **charakteristickou rovnici** LDR druhého řádu. Ta může mít reálné i komplexní kořeny s různou násobností, a podle toho rozlišujeme následující případy:

- má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny r_1, r_2, potom **fundamentální systém řešení** je e^{r_1x}, e^{r_2x} a její obecné řešení je

  $$y = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x},$$

  kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

- má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen r, potom **fundamentální systém řešení** je e^{rx}, $x\mathrm{e}^{rx}$ a její obecné řešení je

  $$y = C_1\mathrm{e}^{rx} + C_2x\mathrm{e}^{rx},$$

  kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

- má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, potom **fundamentální systém řešení** je $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ a její obecné řešení je

  $$y = C_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + C_2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

  kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3.12 Metoda variace konstant

Věta

(Variace konstant pro LDR 2. řádu) Obecné řešení rovnice

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$$

s konstantními koeficienty a_0, a_1, a_2 lze vyjádřit ve tvaru

$$y = \hat{y}(x) + y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx,$$

kde $\hat{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ je obecné řešení příslušné zkrácené rovnice, $W(x)$ wronskián jejího fundamentálního systému a $W_1(x)$, $W_2(x)$ jsou determinanty, vytvořené z wronskiánu $W(x)$ nahrazením 1. (resp. 2.) sloupce vektorem pravých stran $(0, b/a_2)$.

Úplnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$$

budeme řešit za předpokladu, že známe řešení zkrácené rovnice $\hat{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Dále předpokládáme, že obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice druhého řádu bude mít stejný tvar jako řešení zkrácené rovnice, avšak ve vzorci nahradíme konstanty C_1, C_2 neznámými funkcemi $C_1(x), C_2(x)$. Provedeme tzv. **variaci konstant**. Hledáme tedy řešení ve tvaru

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

takže

$$y' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'.$$

Volba nových funkcí $C_1(x), C_2(x)$ umožňuje stanovit vhodnou doplňující podmínku, a tou je požadavek, aby

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0.$$

Odtud potom je

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' \qquad \text{a} \qquad y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''.$$

Získaný vztah pro funkci $y(x)$ a její derivace dosadíme do úplné rovnice a po úpravě obdržíme

$$C_1(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + C_2(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) + a_2(C_1'y_1' + C_2'y_2') = b.$$

Protože y_1, y_2 jsou řešení příslušné zkrácené rovnice, musí být výrazy v závorkách rovny nule a dostaneme $C_1'y_1' + C_2'y_2' = \dfrac{b}{a_2}$. Tím jsme obdrželi druhou podmínku pro derivace neznámých funkcí $C_1(x), C_2(x)$ a můžeme řešit soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= \frac{b}{a_2}. \end{aligned}$$

Její determinant je wronskiánem funkcí y_1, y_2, který je různý od nuly, neboť obě funkce jsou podle předpokladu lineárně nezávislé. Soustava má tedy jediné řešení, které nalezneme pomoci **Cramerova pravidla** pro řešení soustav lineárních rovnic

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \qquad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}.$$

Po integraci těchto vztahů dostaneme

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + K_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx + K_2,$$

kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li do předpokládaného řešení, potom po roznásobení dostaneme obecné řešení zadané rovnice v požadovaném tvaru

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx.$$

3.13 Metoda neurčitých koeficientů

Ve fundamentálním systému LDR s konstantními koeficienty se mohou vyskytovat pouze polynomy, přirozené exponenciální funkce a funkce goniometrické, případně jejich součiny. Je-li také pravá strana $b(x)$ v diferenciální rovnici polynom, exponenciální nebo goniometrická funkce, popřípadě jejich součin, lze partikulární integrál nalézt jednodušší metodou, než je variace konstant.
Postupujeme tak, že partikulární integrál zvolíme předem, a to stejného typu jako je pravá strana rovnice, ale s obecnými koeficienty, které určíme dosazením partikulárního integrálu do původní rovnice a porovnáním jejich obou stran. Podrobněji nám o tom pojednává následující věta.

Věta

(Metoda neurčitých koeficientů) Jestliže má pravá strana LDR s konstantními koeficienty tvar

$$b(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}(p_m(x)\cos \omega x + q_n(x) \sin \omega x),$$

kde $p_m(x)$, $q_n(x)$ jsou polynomy stupňů m, n se zadanými koeficienty. Dále je-li číslo $\bar{r} = \lambda \pm \mathrm{i}\omega$ k-násobným kořenem její charakteristické rovnice, potom volíme partikulární integrál ve tvaru

$$v(x) = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}(P_M(x)\cos \omega x + Q_M(x) \sin \omega x),$$

kde $M = \max\{m, n\}$. Koeficienty polynomů $P_M(x)$ a $Q_M(x)$ určíme porovnávací metodou po dosazení partikulárního integrálu do původní rovnice.

Reference

[1] Morávková, Z., Paláček, R., Schreiberová, P., Volný, P.: Matematika II: Pracovní listy, VŠB - TUO, 2014, ISBN 978-80-248-3324-8.