VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

MATEMATIKA I

Pavel Burda
Radim Havelek
Radoslava Hradecká
Pavel Kreml

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016
Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

ISBN 80 – 248 – 1199 - 5

ÚVOD

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA

je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s.r.o. v Mostě, Univerzita obrany v Brně a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5.1.2006 a bude ukončen 4.1.2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese http://www.studopory.vsb.cz/.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděčni, pokud nás na ně upozorníte.

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

POKYNY KE STUDIU

V úvodu si vysvětlíme jednotnou pevnou strukturu každé kapitoly textu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci při studiu. Pro zvýraznění jednotlivých částí textu jsou používány ikony a barevné odlišení, jejichž význam nyní objasníme.

Průvodce studiem

vás stručně seznámí s obsahem dané kapitoly a s její motivací. Slouží také k instrukci, jak pokračovat dál po vyřešení kontrolních otázek nebo kontrolních textů.

Cíle

vás seznámí s učivem, které v dané kapitole poznáte a které byste po jejím prostudování měli umět.

Předpokládané znalosti

shrnují stručně učivo, které byste měli znát ještě dříve než kapitolu začnete studovat. Jsou nezbytným předpokladem pro úspěšné zvládnutí následující kapitoly.

Výklad

označuje samotný výklad učiva dané kapitoly, který je členěn způsobem obvyklým v matematice na definice, věty, případně důkazy.

Definice 1.1.1.
Zavádí základní pojmy v dané kapitole.

Věta 1.1.1.
Uvádí základní vlastnosti pojmů zavedených v dané kapitole.

Důkaz: Vychází z předpokladů věty a dokazuje tvrzení uvedené ve větě.

Poznámka

neformálně komentuje vykládanou látku..

Řešené úlohy

označují vzorové příklady, které ilustrují probrané učivo.

Příklad Uvádí zadání příkladu.

Řešení: Uvádí podrobné řešení zadaného příkladu.

Úlohy k samostatnému řešení

obsahují zadání příkladů k procvičení probraného učiva. Úlohy označené ✖ patří k obtížnějším a jsou určeny zájemcům o hlubší pochopení tématu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

obsahují správné výsledky předchozích příkladů, slouží ke kontrole správnosti řešení.

Kontrolní otázky

obsahují soubor otázek k probranému učivu včetně několika odpovědí, z nichž je vždy alespoň jedna správná.

Odpovědi na kontrolní otázky

uvádějí správné odpovědi na kontrolní otázky.

Kontrolní test

obsahuje soubor příkladů k probranému učivu.

Výsledky testu

uvádějí správné odpovědi na příklady kontrolního testu.

Literatura

obsahuje seznam knih, které byly použity při tvorbě příslušného textu a na které byly případně uvedeny odkazy k hlubšímu prostudování tématu.

Piktogram, který upozorňuje na důležité vztahy nebo vlastnosti, které je nezbytné si zapamatovat.

1. MATEMATICKÁ LOGIKA A MNOŽINY

Průvodce studiem

V následující kapitole si připomeneme některé význačné poznatky z matematické logiky a teorie množin, tvořící základ množinově logického aparátu. S celou řadou pojmů, které zde budou uvedeny, se čtenář seznámil už v průběhu studia na střední škole, a proto se zaměříme v podstatě na systematické utřídění těchto pojmů a na zdůraznění některých vzájemných souvislostí. Zatím uveďme, že ***logika*** se zabývá formami a pravidly správného myšlení a ***teorie množin*** zkoumá nejobecnější vztahy mezi souhrny (množinami) určitých předmětů (prvků). Obě dnes široce rozvinuté matematické disciplíny budeme používat jen jako vyjadřovací prostředek.

Předpokládané znalosti

V celé kapitole Matematická logika a množiny se předpokládá, že si čtenář zopakuje středoškolské znalosti z oblastí výrokové logiky, teorie množin a číselných oborů.

1.1. Některé pojmy logické výstavby matematiky

Cíle

Cílem kapitoly je opakování a rozšíření středoškolských látky z oblastí výrokové logiky a výstavby matematického vyjadřování (axiómy, definice, věty, důkazy).

Výklad

Výrokem nazveme každou vyslovenou nebo napsanou myšlenku, o níž má smysl říci, že je buď pravdivá nebo nepravdivá. Výrokem může tedy být pouze věta oznamovací. Výroky budeme označovat velkými písmeny A, B, ... , jejich ***pravdivostní hodnotu,*** tj. pravdivost, resp. nepravdivost výroku, označíme symbolem (číslicí) 1, resp. 0.

Hypotézou nazveme výrok, jehož pravdivostní hodnotu zatím neznáme; pokoušíme se ji odvodit logickými operacemi z jiných pravdivých výroků.

Z daných výroků lze vytvářet nové výroky negací, užitím logických spojek a závorek.

Negace výroku A je nový výrok, který vyjadřujeme slovy „neplatí A“ a označujeme symbolem non A. Je-li výrok A pravdivý, je výrok non A nepravdivý; je-li výrok A nepravdivý, je výrok non A pravdivý. Výroky A a non A se vzájemně vylučují, jejich pravdivostní hodnoty jsou opačné.

Řešené úlohy

<u>Příklady správné a nesprávné negace výroků</u>

Výrok A	Negace výroku A	Výroky, které nejsou negacemi výroku A
Číslo x je záporné.	Není pravda, že číslo x je záporné. Číslo x je nezáporné.	Číslo x je kladné.
Mám červený svetr.	Není pravda, že mám červený svetr. Nemám červený svetr.	Mám bílý svetr. Mám černý svetr. Mám zelený svetr.

<u>Negování výroků s údajem o počtu prvků</u>

Výrok	Negace výroku
Alespoň dva odešli.	Nejvýše jeden odešel.
Žádný nepřišel.	Alespoň jeden přišel.
Zůstaneme nejvýše tři.	Zůstaneme aspoň čtyři.
Daná rovnice má právě jeden kořen.	Daná rovnice nemá žádný kořen nebo má alespoň dva kořeny.

Výklad

Logické spojky (funktory) jsou čtyři: 1. Spojka ***a***, kterou označujeme symbolem $\wedge$; 2. spojka ***nebo*** ($\vee$); 3. spojka ***jestliže - pak*** ($\Rightarrow$); 4. spojka ***právě tehdy, když*** ($\Leftrightarrow$). Pomocí logických spojek vytváříme z výroků A, B nové výroky:

Konjunkce výroků A, B je výrok, který vyjadřujeme spojkou ***a***; označujeme jej $A \wedge B$, což čteme A ***a*** B. Konjunkce je pravdivým výrokem, právě když ***oba výroky*** A a B ***jsou pravdivé***. ***Disjunkce výroků*** A, B je výrok, který vyjadřujeme spojkou ***nebo***; označujeme jej $A \vee B$, což čteme A ***nebo*** B. Disjunkce je pravdivým výrokem, když je ***pravdivý aspoň jeden z výroků*** A, B.

Implikace výroků A, B (v daném pořadí) je výrok, který vyjadřujeme slovním spojením ***jestliže - pak***. Označujeme jej $A \Rightarrow B$, což čteme: Jestliže platí A, pak platí B. Implikace je pravdivým výrokem při všech možných pravdivostních hodnotách výroků A, B kromě případu, kdy A je pravdivým a B nepravdivým výrokem.

Ekvivalence výroků A, B je výrok, který vyjadřujeme slovním spojením ***právě tehdy, když***. Označujeme jej $A \Leftrightarrow B$, což čteme: A platí právě tehdy, když platí B. Ekvivalence je pravdivým výrokem, pokud výroky A, B jsou oba pravdivé nebo výroky A, B jsou oba nepravdivé.

Poznámka

Tabulka pravdivostních hodnot výroků odvozených z výroků A, B negací a užitím logických spojek

A	*B*	*non A*	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
0	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*

Výklad

Výroková formule je zápis z písmen A, B, ... , znaku pro negaci, logických spojek a závorek, který je sestaven tak, aby byl výrokem, pokud písmena A, B, ... označují výroky.

Zápisy konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence jsou výrokovými formulemi. I u složitějších výrokových formulí můžeme sestavit tabulku jejich pravdivostních hodnot. Využíváme přitom tabulku pravdivostních hodnot.

Řešené úlohy

Příklad Sestavme tabulku pravdivostních hodnot výrokové formule $(A \wedge B) \vee \text{non } A$.

Řešení:

A	B	$A \wedge B$	non A	$(A \wedge B) \vee \text{non } A$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Výklad

Tautologie je výroková formule, která nabývá ve všech případech pravdivostní hodnoty 1.

Výroková forma S(x) je slovní vyjádření, v němž se vyskytuje proměnná x. Toto vyjádření má tu vlastnost, že se stane výrokem, jestliže proměnnou nahradíme prvky jisté množiny, kterou označíme D a nazveme ***definičním oborem*** výrokové formy S(x). Množinu všech prvků, pro něž je S(x) pravdivým výrokem, nazveme ***oborem pravdivosti*** výrokové formy S(x) a označíme P.

Např. výroková forma „x je celé číslo“ není výrokem, neboť neznáme význam proměnné x. Teprve tehdy, nahradíme-li proměnnou x určitým číslem, dostaneme výrok, a to buď pravdivý (např. nahradíme-li x číslem 2) nebo nepravdivý (např. nahradíme-li x číslem $\frac{1}{2}$). Definičním oborem této výrokové formy je množina **R**, příp. **C**, pravdivostním oborem množina **Z**.

Podobně jsou definovány výrokové formy, které obsahují dvě a více proměnných.

Kvantifikátory. Vedle nahrazení proměnných konstantami existuje ještě jiný způsob, jak dostaneme z výrokových forem výroky. Např. výroková forma x + y = y + x je pravdivým výrokem, nahradíme-li x a y libovolnými reálnými čísly. Tento výrok vyjádříme slovy:

Pro všechna reálná čísla x, y platí x + y = y + x.

V symbolice matematické logiky píšeme tento výrok ve tvaru

$$\forall\, x, y \in \mathbf{R} : x + y = y + x\,,$$

kde ∀ označuje tzv. ***obecný kvantifikátor***.

Výroková forma x > y je pravdivým výrokem pouze pro některé dvojice reálných čísel. Tuto vlastnost vyjádříme výrokem:

Existují taková reálná čísla x, y, že platí x > y .

V symbolice matematické logiky píšeme tento výrok ve tvaru

$$\exists\, x, y \in \mathbf{R} : x > y\,,$$

kde ∃ je tzv. ***existenční kvantifikátor***. Někdy se užívá také symbol ∃!, který čteme: Existuje právě jeden ... .

Operace s výrokovými formami. Tak jako jsme z výroků tvořili nové výroky pomocí negace, logických spojek a závorek, můžeme stejným postupem vytvořit z výrokových forem nové výrokové formy. Jestliže U(x) a V(x) jsou dvě výrokové formy, zapisujeme nové výrokové formy ve tvaru:

non U(x), tj. není pravda, že platí U(x),

$U(x) \wedge V(x)$, tj. platí U(x) a V(x),

$U(x) \vee V(x)$, tj. platí U(x) nebo V(x),

$U(x) \Rightarrow V(x)$, tj. jestliže platí U(x), pak platí V(x),

$U(x) \Leftrightarrow V(x)$, tj. $U(x)$ platí právě tehdy, když platí $V(x)$.
Z těchto výrokových forem můžeme vytvářet složitější výrokové formy.

Zapamatujeme si: Rovnice, resp. nerovnice je výrokovou formou; rovnost, resp. nerovnost je výrokem.

Axiómy, definice, věty

Axióm je počátečním výrokem budované matematické teorie, jehož pravdivost předpokládáme (a nedokazujeme). Např. výrok „dvěma různými body je určena jediná přímka“ je jedním z axiómů, které zvolil Euklides pro vybudování vědeckých základů elementární geometrie. Axiomaticky lze budovat matematiku a některé části přírodních věd (např. klasickou mechaniku, speciální teorii relativity).

Definice je ekvivalence, na jejíž jedné straně je nový pojem a na druhé straně jsou jen pojmy dříve známé. Definice vystihují důležité a často se vyskytující pojmy dané teorie a umožňují stručnější vyjadřování matematických výroků. Definice nedokazujeme.

Věta je pravdivý výrok dokazatelný v dané teorii (z axiómů nebo předem známých pravdivých vět; např. Pythagorova věta je větou euklidovské geometrie).

Důkaz matematické věty. V matematice se používají nejčastěji tyto tři typy důkazů:

1. Důkaz přímý,
2. důkaz nepřímý,
3. důkaz metodou matematické indukce.

Za ***důkaz přímý*** považujeme řetězec pravdivých implikací $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_3$, ... ,

$A_{n-1} \Rightarrow A_n$ za předpokladu, že A_1 je axióm nebo platná (už dokázaná) věta.
Stručně můžeme psát

$$A_1,\ A_1 \Rightarrow A_2,\ A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n, \text{ tedy } A_n .$$

Řešené úlohy

Příklad Dokažme toto tvrzení: Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ platí:

$$a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Řešení: $a > 0 \Rightarrow (a - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow \dfrac{a^2+1}{a} \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + \dfrac{1}{a} \geq 2.$

Výklad

Za ***nepřímý důkaz*** považujeme důkaz implikace non B $\Rightarrow$ non A, která je obměnou implikace A $\Rightarrow$ B a má stejnou pravdivostní hodnotu jako původní implikace A $\Rightarrow$ B.

Řešené úlohy

Příklad Dokažme výrok: Jestliže je druhá mocnina celého čísla k číslo sudé (výrok A), pak je číslo k sudé (výrok B).

Řešení: Dokážeme obměnu této implikace, tedy výrok: Jestliže je k liché číslo (výrok non B), pak je číslo k^2 liché (výrok non A). Vyjádříme-li číslo k ve tvaru $k = 2l + 1$ (l celé), je $k^2 = 4l^2 + 4l + 1$, tj. rovněž liché číslo.

Výklad

Nepřímým důkazem je i ***důkaz sporem***. Tento důkaz provedeme ve třech krocích:

1. Vyslovíme negaci výroku A, tj. non A,
2. sestavíme řetězec implikací non A $\Rightarrow B_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ B, kde B neplatí,
3. uzavřeme, že neplatí non A, tj. platí výrok A.

Řešené úlohy

Příklad Dokažme, že číslo $\sqrt{2}$ není racionálním číslem.

Řešení: Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo p/q, kde p a $q \neq 0$ jsou nesoudělná celá čísla a žádné z nich není rovno 1. Tento předpoklad vede ke sporu. Umocněním rovnosti $\sqrt{2} = p/q$ dostaneme

$$p^2 = 2q^2,$$

p^2 je tedy číslo sudé a podle příkladu 3 je i p číslo sudé; můžeme je proto vyjádřit ve tvaru $p = 2l$ (l celé). Dosazením za p do předchozí rovnice dostaneme $p^2 = 4l^2 = 2q^2$,

$$q^2 = 2l^2,$$

což znamená, že také číslo q je sudé číslo. Došli jsme tedy k závěru, že čísla p, q jsou sudá, tj. soudělná, což odporuje našemu předpokladu, že čísla p, q nejsou soudělná. Předpoklad byl nesprávný, číslo $\sqrt{2}$ není racionální.

Výklad

Důkaz matematickou indukcí se obvykle užívá, když máme dokázat, že pro každé přirozené číslo n (popř. pro čísla začínající číslem $n_0 \geq 1$) platí jistý výrok (např. vzorec), který označme V(n). Důkaz matematickou indukcí provádíme ve dvou krocích.

1. Ověříme, že výrok V(n) platí pro určité nejmenší přirozené číslo $n_0 \geq 1$.
2. Předpokládáme, že V(n) platí pro některé přirozené číslo $n = k$ a výpočtem nezávislým na n dokážeme, že platí také pro $n = k + 1$.

Spojení obou kroků dokazuje platnost výroku V(n) pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$.

Řešené úlohy

Příklad Dokažme, že pro každé přirozené číslo n platí vzorec V(n):

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Řešení: 1. Vzorec platí pro $n = 1$, neboť $1^2 = \frac{1}{6}1(1 + 1)(2 + 1)$.

2. Předpokládejme, že vzorec platí pro $n = k$, tj.

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{1}{6}k(k + 1)(2k + 1).$$

K oběma stranám rovnice připočteme $(k + 1)^2$:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{1}{6}k(k + 1)(2k + 1) + \frac{6}{6}(k + 1)^2.$$

Úpravou pravé strany [vytknutím výrazu $\frac{1}{6}(k + 1)$] a jejím porovnáním s pravou stranou vzorce $V(n)$ pro $n = k + 1$, tj. s výrazem $\frac{1}{6}(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]$, vidíme, že vzorec $V(n)$ skutečně platí pro $n = k + 1$.

Spojení kroků 1 a 2 dokazuje platnost vzorce $V(n)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

? Kontrolní otázky ?

1. Výrokem rozumíme každou větu nebo sdělení, o kterém má smysl uvažovat, zda je pravdivý nebo nepravdivý, přičemž nastane:
   a) právě jedna z možností,
   b) alespoň jedna z možností,
   c) nenastane žádná z možností.
2. Patří předpovědi počasí mezi:
   a) hypotézy, b) výroky.
3. Tautologie je výroková formule, která nabývá ve všech případech pravdivostní hodnoty:
   a) 0), b) 1 c) 0 nebo 1.
4. Rovnice, resp. nerovnice je:
   a) výrokovou formou,
   b) výrokem,
   c) hypotézou.
5. Důkaz sporem matematické věty řadíme mezi důkazy:
   a) přímé, b) nepřímé, c) matematickou indukcí.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. a); 2. a); 3. b); 4. a); 5. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Rozhodněte, které z následujících vět jsou výroky, a pokud je to možné, určete jejich pravdivostní hodnoty: a) Máš peníze ? b) Kéž by přestalo sněžit ! c) V roce 2020 nebudeme mít žádné uhlí. d) Lagos je hlavní město Zambie. e) $4^3 - 62 = 2$. f) $4^3 - 62 = 1$. g) Druhá mocnina každého přirozeného čísla je kladná. h) $x^2 + x - 6 = 0$.

2. Rozhodněte, zda výrok: Alespoň jeden kořen této rovnice je kladný je negací výroku: Všechny kořeny této rovnice jsou záporné.

3. Vyslovte negace výroků: a) V daném trojúhelníku je nejvýše jeden tupý úhel. b) Žádné prvočíslo není sudé. c) Alespoň jeden kořen dané rovnice je kladný. d) Alespoň jeden koeficient dané rovnice není záporný. e) Alespoň tři z nás mluví španělsky. f) Nedostal žádnou knihu. g) Každý mlčel. h) Předběhl každého soupeře.

4. Rozhodněte, zda jsou pravdivé následující implikace: a) Jestliže je číslo 25 dělitelné 17, pak i číslo 471 + 7.25 je dělitelné 17. b) Jestliže i je imaginární jednotka, potom i^2 je imaginární číslo. c) Jestliže $\ln 5 = 2$, potom $\ln 10 = 3$. d) Jestliže $2 < 5$, potom má Praha více než milión obyvatel.

5. Zapište následující výroky v symbolice matematické logiky: a) Buď platí A a B, nebo neplatí A ani B. b) Platí nejvýše jeden z výroků A, B. c) Platí aspoň jeden z výroků A, B. d) Platí právě jeden z výroků A, B.

6. Sestavte tabulky pravdivostních hodnot výrokových formulí: a) $(B)\ A \Rightarrow \vee (B \Rightarrow \text{non } A)$, b) $\text{non } A \Rightarrow B$, c) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

7. Rozhodněte, které z následujících výrokových formulí jsou tautologie: a) $(A \wedge B) \Rightarrow A$, b) $(A \vee B) \Rightarrow A$, c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$.

8. Rozhodněte, které z následujících dvojic výrokových formulí jsou ekvivalentní: a) $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, b) $A \Leftrightarrow B$, $\text{non } A \Leftrightarrow \text{non } B$, c) $\text{non } (A \Rightarrow B)$, $A \wedge \text{non } B$.

9. Najděte definiční obory a obory pravdivosti výrokových forem: a) $S_1(x) : x^2 + 3x + 2 = 0$, b) $S_2(x) : x > 0 \wedge x^2 > x$, c) $S_3(x)$: x je studentem přírodovědecké fakulty UK, d) $S_4(x)$: Jestliže x je muž, potom měří více než 190 cm.

10. Přímým důkazem dokažte výrok: Jestliže celé číslo a není dělitelné třemi, pak číslo $a^2 - 1$ je dělitelné třemi.

11. Dokažte matematickou indukcí platnost vztahů: a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$,

b) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

12. Dokažte, že číslo log5 je iracionální. Zvolte důkaz sporem.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a), b), h)** nejsou výroky, **c)** je hypotéza, **e)**, **g)** jsou výroky pravdivé, **d)**, **f)** jsou výroky nepravdivé.

2. Není negací, kořeny mohou být rovny nule.

3. **a)** alespoň dva, **b)** alespoň jedno, **c)** žádný kořen, **d)** žádný koeficient, **e)** nejvýše dva, **f)** dostal alespoň jednu, **g)** alespoň jeden nemlčel, **h)** nepředběhl alespoň jednoho soupeře.

4. **b)** nepravdivá, ostatní pravdivé.

5. **a)** $A \Leftrightarrow B$, **b)** non $(A \wedge B)$, **c)** $A \vee B$, **d)** $A \Leftrightarrow$ non B, příp. non $A \Leftrightarrow B$.

7. **a).**

8. **b), c).**

9. **a)** $D_1(x) = \mathbf{R}$, $P_1 = \{-1, -2\}$, **b)** $D_2(x) = \mathbf{R}$, $P_2 = (1, \infty)$, **c)** $D_3(x)$ = množina všech lidí, P_3 = množina všech studentů přírodovědecké fakulty UK, **d)** $D_4(x)$ = množina všech lidí, P_4 = množina všech žen sjednocená s množinou všech mužů vyšších než 190 cm.

10. Návod: $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$.

Kontrolní test

1. Určete, která z následujících sdělení jsou výroky:

a) číslo x je záporné,

b) číslo 7 není prvočíslo,

c) trojúhelník ABC je rovnostranný,

d) $u - v = 6$,

e) Ostrava je hlavním městem ČR,

f) začněte se balit!

g) už je půlnoc?

2. Určete, která sdělení z bodu 1 jsou výrokovými formami.
3. Negací výroku: „V noci pršelo“ je výrok:

   a) v noci sněžilo,

   b) v noci bylo jasno,

   c) není pravda, že v noci pršelo.
4. Rozhodněte, které z následujících implikací jsou nepravdivé:

   a) jestliže $3<4$, potom má Ostrava více než tisíc obyvatel,

   b) jestliže i je imaginární jednotka, potom i^2 není imaginární číslo,

   c) jestliže číslo 15 je dělitelné 3, potom i číslo $16+4\cdot 700$ je dělitelné 3.
5. Rozhodněte, které z následujících výrokových formulí jsou tautologie:

   a) $(A\wedge B)\Rightarrow A$, b) $(A\vee B)\Rightarrow A$, c) $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(B\Rightarrow A)$,
6. Určete obor pravdivosti výrokové formy $S(X):\ x^2-x-6=0$.

   a) **R**, b) $\{3,-2\}$, c) $\varnothing$.
7. Přímým důkazem rozhodněte, že věta: „Jestliže celé číslo a není dělitelné třemi, pak číslo a^2-1 je dělitelné třemi:

   a) platí, b) neplatí, c) nelze rozhodnout.

Výsledky testu

1. b), c), e), f), g); 2. a), d); 3. c); 4. c); 5. a); 6. b); 7. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.1. znovu.

1.2. Množiny

Cíle

Cílem kapitoly je opakování a rozšíření středoškolských znalostí v oblasti teorie množin.

Průvodce studiem

Množina je jedním ze základních pojmů moderní matematiky. Teorii množin je možno budovat intuitivně nebo axiomaticky. V tomto článku se omezíme na zopakování základních pojmů intuitivního výkladu množin a jejich vlastností, které se podrobně probírají na většině středních škol.

Výklad

Základní pojmy

Množinou rozumíme souhrn (tj. skupinu, soubor) nějakých objektů, osob, věcí, abstraktních pojmů, který je vymezen tak, že o každém objektu lze rozhodnout, zda do souboru patří nebo nepatří. Objekty, které do souboru náležejí, se nazývají ***prvky*** množiny. Množiny budeme obecně označovat velkými písmeny, jejich prvky malými písmeny. To, že prvek x patří do množiny M, zapisujeme $x \in M$, zápis $a \notin M$ vyjadřuje, že a není prvkem množiny M. Množina, která neobsahuje žádný prvek, se nazývá ***prázdná množina***, označujeme ji symbolem $\emptyset$. Množina, která obsahuje alespoň jeden prvek, je ***množina neprázdná***. Množiny, které obsahují konečný počet prvků, nazýváme ***konečnými množinami*** na rozdíl od ***nekonečných množin***, které mají nekonečný počet prvků. Konečnou množinu M, která obsahuje prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$, označíme $M = \{a_1, \ldots , a_n\}$. ***Charakteristická vlastnost*** prvků dané množiny je vlastnost, kterou mají všechny prvky dané množiny a kterou nemají prvky, jež do množiny nepatří. Množinu M prvků daných charakteristickou vlastností vyjádřenou např. výrokovou formou S(x) zapisujeme ve tvaru

$$M = \{x \in D : S(x)\},$$

kde množina D je definičním oborem a množina M pravdivostním oborem výrokové formy S(x). Tak např. zápis M = {x ∈ **N** : 5 < x < 10} značí množinu M = {6, 7, 8, 9}.

Řekneme, že množina A je ***podmnožinou*** množiny B (píšeme $A \subset B$), jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B, tj. $\forall x \in A : (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$. Platnost výroku $A \subset B$ nevylučuje ***rovnost*** $A = B$, která je definována konjunkcí $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$. Připomeňme, že prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Operace s množinami

Průnik množin A, B definujeme jako množinu všech prvků, které jsou společné oběma množinám A, B. Průnik množin A, B označujeme $A \cap B$. Platí tedy

$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Dvě množiny A, B, pro něž platí $A \cap B = \emptyset$, nazýváme ***disjunktními množinami***.

Sjednocení množin A, B definujeme jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny prvky množiny A a právě všechny prvky množiny B. Sjednocení množin A, B označujeme $A \cup B$. Platí tedy $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

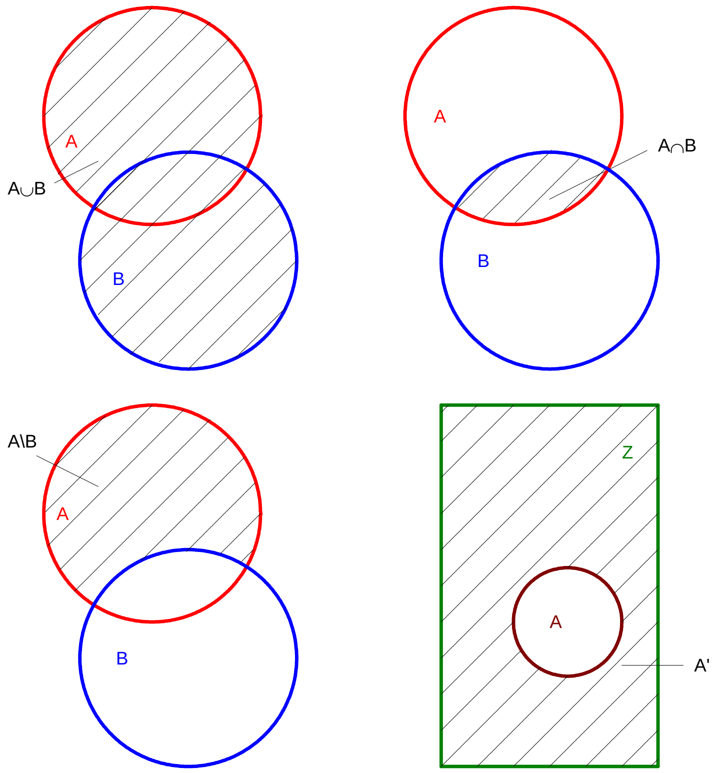
Rozdíl množin A, B v daném pořadí definujeme jako množinu všech prvků, které jsou prvky množiny A a nejsou prvky množiny B. Rozdíl množin A, B označujeme A - B nebo $A \setminus B$. Platí tedy $A - B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.

Doplněk množiny A ***v množině*** Z. Nechť $A \subset Z$. Doplňkem množiny A v množině Z nazýváme podmnožinu množiny Z, která obsahuje prvky, které nepatří do množiny A.

Označujeme A' a platí

$$A' = Z - A = \{x : (x \in Z) \wedge (x \notin A)\}.$$

Uvedené pojmy budeme ilustrovat na obr. 1.



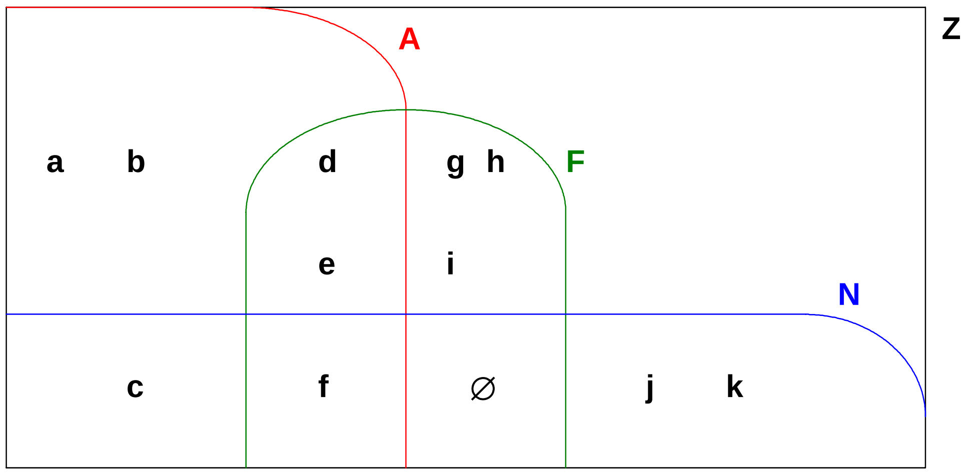
Obr. 1

Vennovy diagramy

Vztahy mezi množinami a operace s množinami znázorňujeme pomocí diagramů, ve kterých množiny představují kruhy, popř. jiné geometrické obrazce (např. obdélníky) a jejich části (viz obr. l, příklad 1, obr. 2).

Řešené úlohy

Příklad Diagram na obr. 2 znázorňuje množinu osob Z = {a, ... , k}, ovládajících cizí jazyky. A = {a, b, c, d, e, f} je množina lidí, kteří mluví anglicky, F = {d, e, f, g, h, i} je množina lidí, kteří mluví francouzsky, a lidé v množině označené N = {c, f, j, k} mluví německy. Určeme množinu W lidí, kteří mluví francouzsky a nemluví německy, a množinu Y lidí, kteří mluví všemi třemi jazyky.



Obr. 2

Řešení: Podle diagramu na obr. 2 platí $W = F - N = \{d, e, g, h, i\}$,
$Y = A \cap F \cap N = \{f\}$.

Výklad

Uspořádanou dvojicí (a, b) prvků $a, b \in M$ nazýváme dvojici, u které záleží na pořadí prvků a, b, přičemž prvek a je první člen, prvek b druhý člen dvojice (a, b). Pro $a \neq b$ je $(a, b) \neq (b, a)$.

Kartézským součinem $A \times B$ neprázdných množin A, B (v tomto pořadí) nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$.

Zapisujeme $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Je-li alespoň jedna z obou množin A, B prázdná, potom $A \times B = \emptyset$.

Je-li $A = B$, nazveme součin $A \times A$ (druhou) kartézskou mocninou množiny A, označujeme A^2.

Řešené úlohy

Příklad Nechť A = {a, c}, B = {b, d, c}. Utvořme součiny $A \times B$, $B \times A$.

Řešení: $A \times B = \{(a, b), (a, d), (a, c), (c, b), (c, d), (c, c)\}$.

$B \times A = \{(b, a), (b, c), (d, a), (d, c), (c, a), (c, c)\}$.

Poznámka

1. *Kartézský součin $A \times B$ není komutativní operací, protože obecně platí $A \times B \neq B \times A$.*
2. *Obecně lze zavést kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ jako množinu všech uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.*

   Je-li $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, budeme značit $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\text{-krát}} = A^n$.

Výklad

Binární relací mezi libovolnými neprázdnými množinami A, B nazýváme každou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$, tj. $R \subset A \times B$.

Je-li $R \subset A \times A$, nazveme relaci R **relací na množině** A.

Je-li R binární relace na množině A, $x, y \in A$, $(x, y) \in R$, říkáme, že prvek x je v relaci R s prvkem y a označujeme xRy. Jestliže $(x, y) \notin R$, píšeme $x\overline{R}y$.

Zápis xRy nazýváme ***přiřazením prvku y v relaci*** R ***k prvku x.***

Poznámka

Binární relaci $R \subset A \times B$, jejíž prvky (x, y) vyhovují dané výrokové formě f(x, y), zapíšeme ve tvaru $R = \{(x, y) \in A \times B : f(x, y)\}$.

Řešené úlohy

Příklad Nechť **Q** je množina všech racionálních čísel a relace R = {(x, y) ∈ **Q** × **Q**: x + y ∈ **Z**} (**Z** je množina všech celých čísel). Zjistěme, zda $\frac{2}{3}\,R\,\frac{1}{7}$, $\frac{3}{8}\,R\,\frac{5}{8}$.

Řešení: Platí

$$\frac{2}{3}\,\overline{R}\,\frac{1}{7},\ \text{protože}\ \frac{2}{3}+\frac{1}{7}=\frac{17}{21}\notin \mathbf{Z},$$
$$\frac{3}{8}\,R\,\frac{5}{8},\ \text{protože}\ \frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1\in \mathbf{Z}.$$

Výklad

Mezi důležité binární relace R v množině A patří relace ***ekvivalence*** a relace ***uspořádání***.

Relace ***ekvivalence*** splňuje podmínky:

P1: $\forall x \in A : xRx$ *reflexivnost,*

P2: $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$ *symetrie,*

P3: $\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ *tranzitivnost.*

Relace ***uspořádání*** splňuje podmínky P1, P3 a podmínky:

P4: $\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ *antisymetrie,*

P5: $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$ *srovnatelnost.*

Řešené úlohy

Příklad Základním příkladem relace ekvivalence je relace R_m definovaná pro každé m ∈ **N** v množině **Z** (**N**, **Z** jsou po řadě množiny přirozených a celých čísel) tak, že pro každé x, y ∈ **Z** platí xR_my právě tehdy, když dělením číslem m dávají čísla x, y týž zbytek.

Výklad

Základním příkladem relace uspořádání v množině reálných čísel je uspořádání $\leq$ reálných čísel definované tak, že pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ (množina reálných čísel) platí $x \leq y$ právě tehdy, když číslo $y - x$ je nezáporné.

Znázornění relací

Relaci $R \subset A \times B$ znázorňujeme obdobně jako kartézský součin $A \times B$, kde A, B jsou podmnožiny reálných čísel, tedy v kartézské soustavě souřadnic v rovině (O, +x, +y).

Poznámka

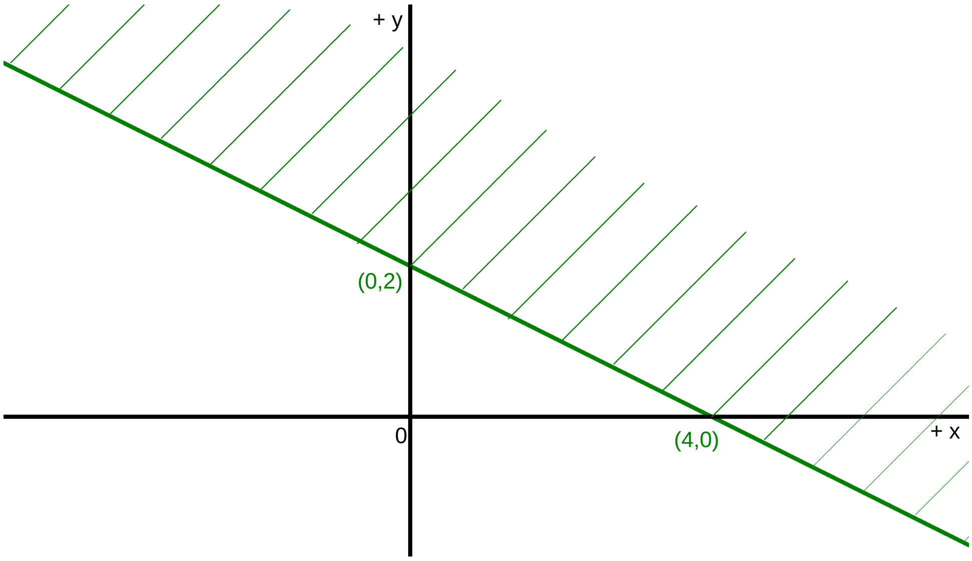
*V tomto případě říkáme, že jsme relaci R znázornili pomocí **kartézského grafu**. Často však znázorňujeme relaci R pomocí tzv. **šachovnicového grafu** nebo **uzlového grafu**.*

Řešené úlohy

Příklad Binární relaci $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 2y - 4 = 0\}$ lze znázornit grafem přímky $x + 2y - 4 = 0$ v rovině (O, +x, +y).

Příklad Polorovina znázorněná na obr. 3 je grafem binární relace

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 2y - 4 \geq 0\}$.



Obr. 3

Výklad

Zobrazením množiny A ***do množiny*** B nazýváme relaci $F \subset A \times B$, pro kterou platí $F = \{(x, y) \in A \times B : \forall\, x \in A\ \exists!\ y \in B : (x, y) \in F\}$.

Relace F tedy přiřazuje každému prvku $x \in A$ právě jeden prvek $y \in B$ tak, že $(x, y) \in F$.

Zobrazení F zapisujeme $F : A \to B$. Množinu A nazýváme ***definičním oborem*** zobrazení F. Prvek $y \in B$ značíme často $F(x)$ a nazýváme jej ***obrazem vzoru*** $x \in A$ v zobrazení F, zapisujeme $x \to F(x)$.

Rovnost dvou zobrazení F, G, $F = G$ platí právě tehdy, když F i G mají stejný definiční obor A a $F(x) = G(x)$ pro každé $x \in A$.

Řešené úlohy

Příklad Posloupnost čísel $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ můžeme chápat jako zobrazení $F : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$,

$x \to \frac{1}{x}$, tedy

$$F = \left\{(1,1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \ldots\right\}.$$

Výklad

Zobrazením množiny A ***na množinu*** B nazýváme zobrazení $F \subset A \times B$, pro které platí

$F = \{(x, y) \in A \times B : \forall\, y \in B\ \exists\, x \in A : (x, y) \in F\}$,

tedy každé $y \in B$ je obrazem některého $x \in A$.

Řešené úlohy

Příklad Rozdělení výroků na pravdivé a nepravdivé je zobrazení F množiny všech výroků na množinu $\{0, 1\}$.

Výklad

Prostým zobrazením nazýváme zobrazení F množiny A do množiny B, pro které platí: $F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B\ \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F : x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2\}$, tedy každý obraz $y \in B$ má nejvýše jeden vzor $x \in A$.

Poznámky

1. Prosté zobrazení množiny A na množinu B se nazývá ***vzájemně jednoznačné zobrazení****.*

2. Říkáme, že množina A je ***ekvivalentní*** *s množinou B, právě když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B, popřípadě jsou-li obě množiny A, B prázdné, zapisujeme* $A \sim B$.

Řešené úlohy

Příklad Zobrazení $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to x^3$, které zapisujeme ve tvaru $y = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, je vzájemně jednoznačné, protože ke každému $y \in \mathbf{R}$ existuje jediný vzor $\sqrt[3]{y} \in \mathbf{R}$.

Výklad

Operací (přesněji binární operací) na množině A nazýváme zobrazení $F : A \times A \to A$. Taková operace přiřazuje každé uspořádané dvojici $(x, y) \in A^2$ jednoznačně prvek

$z = F(x, y)$.

Příkladem operace je sčítání (respektive násobení) přirozených, celých, racionálních nebo reálných čísel.

Kontrolní otázky

1. Množinou rozumíme souhrn (soubor apod.) prvků, které:

   a) nemají žádnou společnou vlastnost,

   b) nemusí mít společnou vlastnost,

   c) mají tzv. charakteristickou vlastnost prvků dané množiny.

2. Tvrzení: „Jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B“ definuje:

   a) $A \subset B$, b) $A \vee B$, c) $A \wedge B$.

3. Diagramy znázorňující vztahy mezi množinami a operacemi mezi nimi se nazývají

   a) Leninovy, b) Klemovy, c) Vennovy.

4. Množinu $M = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ nazveme:

   a) průnikem množin A, B,

   b) doplňkem množiny A v množině B,

   c) rozdílem množin A, B.

5. Je-li alespoň jedna z množin A, B prázdná, potom pro kartézský součin $A \times B$ množin A, B platí:

   a) $A \times B = B \times A$, b) $A \times B = A^2$, c) $A \times B = \emptyset$.

6. Platí-li pro každou množinu R a libovolné neprázdné množiny A, B vztah $R \subset A \times B$, nazveme množinu R:

   a) distanční relací, b) disjunktní množinou, c) binární relací.

7. Je sčítání přirozených čísel binární operací na množině N?

   a) ano, b) ne.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c), 2. a), 3. c), 4. c), 5. c), 6. c), 7. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Utvořte všechny podmnožiny množiny M = {3, -4, 5}.

2. Stanovte, kolik podmnožin má množina A = {O, 1, 2, 3}, zobecněte pro případ, kdy množina A má n prvků.

3. Jsou dány množiny A = {1, 2, 4, 7, 11, 16}, B = {1, 3, 7, 13}, C = {1, 6, 11, 19}. Určete a) $A \cup B$, b) $B \cup C$, c) $A \cup B \cup C$, d) $A \cap B$ e) $A \cap C$, f) $A \cap B \cap C$, g) A - B.

4. Uvažte, zda a) množina úhlů v trojúhelníku je podmnožinou množiny trojúhelníků, b) množina prvočísel je podmnožinou množiny lichých čísel, c) množina lichých čísel je podmnožinou množiny prvočísel, d) množina rovnostranných trojúhelníků je podmnožinou množiny rovnoramenných trojúhelníků.

5. Je možné, aby někdy platilo a) A - B = A, b) $A - B = \emptyset$?

6. Určete prvky množin A, B, C, které jsou definovány ve tvaru $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : (x - 1)^2 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 2x^2 - x = -2\}$.

7. Najděte množinu, kterou tvoří všechna řešení rovnice a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$, b) $\sin \pi x = 0$.

8. Základní množina je Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} a množiny A = {1, 3, 5, 7}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {3, 4, 7, 8}. Určete a) $A \cup B'$, b) $A' \cap B$, c) $B' \cap C$.

9. Užitím Vennových diagramů rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny dané základní množiny Z platí: a) $(A \cap B') \cup B = A \cup B$, b) $A' \cup B' = (A \cup B)'$, c) $C' \cap (A \cap B) = (A \cap C') \cap (C' \cap B)$.

10. Ve škole byla sestavena statistika zájmové činnosti žáků v tělesné výchově. Ve skupině označené L (lehká atletika) je 34 žáků, ve skupině P (plavání) je 32 žáků a ve skupině O (odbíjená) je 25 žáků. 9 žáků je v lehkoatletické i plavecké skupině, 5 žáků je činných v lehké atletice a v odbíjené, 7 žáků je ve skupině odbíjené a plavání, 2 žáci jsou ve všech třech skupinách a 34 žáků se neúčastní zájmové tělovýchovné činnosti. Nakreslete Vennův diagram podle uvedených údajů a určete celkový počet žáků ve škole.

11. Jsou dány množiny $P = \{1, 2, 3\}$ a $Q = \{a, b\}$. Utvořte kartézské součiny a) $P \times Q$, b) $Q \times P$, c) $P \times P$, d) $Q \times Q$.

12. Nechť $A = \{-1, 2, 5, 7\}$, $B = \{0, 2\}$, určete $A \times B$.

13. V rovině (O, +x, +y) zakreslete kartézský součin $A \times B$, jestliže $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : -2 < x \leq 3\}$.

14. Je dána množina $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, výčtem prvků zapište binární relaci $B = \{(x, y) \in A \times A,\ x > y\}$.

15. V rovině (O, +x, +y) zakreslete binární relace: a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < y\}$, b) $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, c) $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x\,y < 1\}$.

16. Nechť $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozhodněte, které z následujících množin definují zobrazení množiny M do $\mathbf{R}$: $M_1 = \{(3, 3), (1, 8), (4, 3), (2, 3)\}$, $M_2 = \{(1, 5), (4, \pi), (1, 8), (2, 4)\}$, $M_3 = \{(2, 3), (1, 3), (3, 5), (5, 7)\}$, $M_4 = \{(3, 4), (2, -2), (1, \pi), (4, 0)\}$.

17. Rozhodněte, zda daná zobrazení $F: A \to B$ jsou např. zobrazení do množiny B, na množinu B, zobrazení prostá, zobrazení vzájemně jednoznačná: a) F(x) je obec, v níž má x trvalé bydliště, A je množina všech obyvatel ČR, B množina všech obcí v ČR, b) F(x) je počet obyvatel státu x, A je množina všech států, B je množina všech přirozených čísel, c) F(x) je manželka muže x, A je množina všech ženatých mužů, B množina všech provdaných žen.

18. Každý, kdo v šatně odevzdá plášť, dostane lístek s určitým číslem. Popište tuto situaci jako zobrazení množiny do množiny a vysvětlete, ve kterém případě by šlo o vzájemně jednoznačné zobrazení množiny na množinu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Prázdná množina $\emptyset$, tři podmnožiny o jednom prvku, tři podmnožiny o dvou prvcích, daná množina M.
2. 16; 2^n.
3. a) {1, 2, 3, 4, 7, 11, 13, 16}, b) {1, 3, 6, 7, 11, 13, 19}, c) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 13, 16, 19}, d) {1, 7}, e) {1, 11}, f) {1}, g) {2, 4, 11, 16}.
4. **a)** Ne, **b)** ne, **c)** ne, **d)** ano.
5. **a)** Ano, je-li $A \cap B = \emptyset \vee B = \emptyset$, **b**) ano, je-li $A \subset B$.
6. A = {-1, 1}, B = {1}, C = {-1, 1, 2}.
7. **a)** Všechna lichá celá čísla, **b)** všechna celá čísla.
8. **a)** {1, 3, 5, 7}, **b)** {2, 4, 6, 8}, **c)** {3, 7}.
9. Platí **a)**, **c)**.
10. 106.
11. $P \times Q$ = {(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)}, $Q \times P$ = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}, $P \times P$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}, $Q \times Q$ = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)}.
12. {(-1, 0), (-1, 2), (2, 0), (2, 2), (5, 0), (5, 2), (7, 0), (7, 2)}.
13. Obdélník, dvě jeho strany do množiny $A \times B$ nepatří.
14. B = {(-1, -2), (0, -1), (0, -2), (1, 0), (1, -1), (1, -2), (2, 1), (2, 0), (2, -1), (2, 2)}.
15. **a)** Dolní polorovina omezená přímkou y = x, jež do množiny nepatří, **b)** vnitřek kruhu, **c)** část roviny mezi osami souřadnic a větvemi hyperboly xy = 1.
16. M_1 a M_4.
17. **a)** Zobrazení na množinu, **b)** pravděpodobně prosté, **c)** vzájemně jednoznačné ve společnosti, v níž je uzákoněna monogamie.
18. Označme A množinu plášťů, B množinu lístků s čísly. V případě, kdy šatna není plně obsazena, jde o zobrazení množiny A do množiny B, v němž každému vzoru a je přiřazen právě jeden obraz b. Je-li šatna plně obsazena, jde o vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B.

Kontrolní test

1. Určete, která z odpovědí obsahuje všechny podmnožiny množiny $A = \{1,4\}$.

   a) $\emptyset$, b) $\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}$, c) $\emptyset, \{1,4\}$.

2. Stanovte, kolik podmnožin má množina: $A = \{2,4,16,64\}$.

   a) 2^4, b) 2^2, c) 5.

3. Najděte množinu, kterou tvoří všechna řešení rovnice $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$:

   a) všechna lichá celá čísla,

   b) všechna reálná čísla,

   c) všechna celá čísla.

4. Určete $A \cup B'$, je-li $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, kde základní množina je $Z = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

   a) $\{1,3,5,7\}$, b) $\{2,4,6,8\}$, c) $\{1,3,5,7\}$.

5. V rovině $(0,+x,+y)$ zakreslete binární relaci $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

   a) vnitřek kruhu,

   b) vnitřek elipsy,

   c) nelze zobrazit.

6. Rozhodněte užitím Vennových diagramů, zda pro libovolné podmnožiny dané základní množiny Z platí: $(A \cap B') \cup B = A \cup B$.

   a) ano, b) ne, c) nelze rozhodnout.

Výsledky testu

1. b), 2. a), 3. a), 4. a), 5. a), 6.a)

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.2. znovu.

1.3. Číselné množiny

Cíle

Cílem kapitoly je seznámení čtenáře s axiomy číselných oborů a jejich podmnožin (intervalů) a zavedení nových pojmů, které nejsou náplní středoškolských osnov.

Průvodce studiem

Vývoj matematiky lze ilustrovat na vývoji pojmu čísla. Nejdříve vznikla v jazycích slova jeden, dva, mnoho a postupně vznikla slova označující vlastnost skupin předmětů stejného počtu, další číslovky. Dále byly zavedeny různé druhy znaků pro přirozená čísla. Většina z nich se však přestala užívat a dnes užíváme pro počítání výhradně arabské číslice. Studium zákonitostí počítání s přirozenými čísly bylo umožněno až další abstrakcí, označením libovolného čísla písmenem.

Výklad

Vlastní pojem **přirozeného čísla** zavádíme pomocí tzv. **Peanových axiómů**. Množina $\mathbf{N}$, ve které ke každému prvku $x \in \mathbf{N}$ přiřadíme prvek $x'(x' = x + 1)$, tzv. **následovník prvku x,** tak, že platí následující (Peanovy) axiómy, se nazývá ***množina přirozených čísel.***

(P1) $1 \in \mathbf{N}$,

(P2) $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists$ právě jeden následovník $y = x'$,

(P3) 1 není následovníkem žádného prvku $x \in \mathbf{N}$,

(P4) $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists$ nejvýše jedno $y \in \mathbf{N}$ tak, že platí $x = y'$(různé prvky množiny $\mathbf{N}$ mají různé následovníky),

(P5) pro každou množinu M s vlastnostmi

(1) $1 \in M$,

(2) $\forall x \in M$ je i $x' \in M$,

platí $\mathbf{N} \subset M$ (princip matematické indukce).

Další vývoj v myšlení lidí si vynutil vznik čísel celých a racionálních. Protože např. rovnice $x^2 = 3$ nemá v množině racionálních čísel řešení, pokračoval vývoj pojmu čísla zavedením čísel reálných. Řešení např. rovnice $x^2 = -1$ si vynutilo vznik čísel komplexních. Existují další číselné množiny, které však nacházejí použití jen ve speciálních partiích matematiky, a proto se jimi nebudeme zabývat. Nyní nadefinujeme číselné množiny pomocí některých jejich známých vlastností, které budeme v definici považovat za axiómy.

Neprázdná množina **R**, na které jsou definovány operace + a . , tj. zobrazení $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \to x + y$, $(x, y) \to x.y$, a relace uspořádání $\leq$, které splňují následující skupiny axiómů, se nazývá ***množina reálných čísel.***

A. Axiómy pro sčítání

(A1)	$\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x + y = y + x$	*komutativní zákon,*
(A2)	$\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x + y) + z = x + (y + z)$	*asociativní zákon,*
(A3)	$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists\, 0 \in \mathbf{R}: \ x + 0 = x$	*existence nuly,*
(A4)	$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists\, y \in \mathbf{R}: \ x + y = 0$	*existence opačného čísla.*

B. Axiómy pro násobení

(B1)	$\forall x, y \in \mathbf{R}: \ xy = yx$	*komutativní zákon,*
(B2)	$\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (xy)z = x(yz)$	*asociativní zákon,*
(B3)	$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists\, 1 \in \mathbf{R} - \{0\} : x.1 = x$	*existence jedničky,*
(B4)	$\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}\ \exists\, y \in \mathbf{R} : x.y = 1$	*existence převráceného čísla,*
(B5)	$\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x + y)z = xz + yz$	*distributivní zákon.*

C. Axiómy uspořádání

(C1)	$\forall x, y \in \mathbf{R} : (x \leq y \vee y \leq x)$	*srovnatelnost,*
(C2)	$\forall x, y \in \mathbf{R} : ((x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y)$	*antisymetrie,*
(C3)	$\forall x, y, z \in \mathbf{R} : ((x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$	*tranzitivnost,*
(C4)	$\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$	*monotonie pro sčítání,*
(C5)	$\forall x, y \in \mathbf{R} : (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq xy)$.	

D. Cantorův-Dedekindův axióm (axióm o vložených úsečkách)

Pro každé dvě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ čísel z **R**, tj. zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \to x_n$ a zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \to y_n$, s vlastností $\forall n \in \mathbf{N}$ je $x_n \le y_n$ sestrojíme množiny $I_n = \{x \in \mathbf{R} : x_n \le x \le y_n\}$. Jestliže $\forall n \in \mathbf{N} : I_{n+1} \subset I_n$, pak $\exists\, y \in \mathbf{R}\ \forall\, n \in \mathbf{N} : y \in I_n$.

Poznámka

Geometrická interpretace tohoto axiómu ukazuje, že pro každou posloupnost uzavřených úseček, ve které je každá úsečka částí předcházející úsečky, existuje alespoň jeden bod společný všem úsečkám.

Výklad

Zvolíme-li $1 \in \mathbf{R}$ jako jedničku množiny přirozených čísel a definujeme $x' = x + 1$, dá se ukázat, že existuje podmnožina v **R** splňující Peanovy axiómy přirozených čísel a tedy $\mathbf{N} = \{1, 1+1 = 2, 2+1 = 3, \dots\} \subset \mathbf{R}$. Dále, dá se ukázat, že ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno číslo $-x \in \mathbf{R}$, tj. $x + (-x) = 0$. Množinu $\mathbf{Z} = \{0\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x \in \mathbf{N} \vee -x \in \mathbf{N}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \subset \mathbf{R}$ nazýváme **množinou celých čísel**. Množinu $\mathbf{Q} = \{x \in \mathbf{R} : \exists\, n \in \mathbf{N}\ \exists\, p \in \mathbf{Z} : n \,.\, x = p\}$, nazýváme **množinou čísel racionálních**. Množina **R** - **Q** se nazývá **množina čísel iracionálních**.

Znázornění racionálních čísel na číselné ose

Racionální čísla znázorňujeme na přímce, zvané ***číselná osa***. Obvykle ji volíme vodorovnou, popř. svislou. Nejprve na ní zvolíme některý bod za tzv. ***počátek***, označíme jej písmenem O (první písmeno latinského slova origo = počátek) a přiřadíme mu číslo 0. Danou přímku pak **orientujeme,** tj. zvolíme určité pořadí jejích bodů, a to u přímky vodorovné obvykle zleva doprava, kdežto u přímky svislé zdola nahoru. Orientaci číselné osy značíme šipkou. Počátkem O se orientovaná číselná osa rozdělí na dvě části, ***kladnou*** a ***zápornou***. Pak zvolíme na kladné části bod J a úsečku OJ = j stanovíme jako jednotkovou, takže bod J má od počátku vzdálenost rovnou číslu 1. Přiřadíme mu proto číslo 1. Na takto určené číselné ose můžeme nyní znázornit libovolné racionální číslo $k = \pm p/q$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla. Provedeme to např. tak, že nejdříve určíme q-tý díl jednotkové úsečky a potom jej naneseme p-krát napravo, popř. nalevo od počátku O podle toho, zda číslo k je kladné, popř. záporné.

Znázornění iracionálních čísel na číselné ose

To, že také každé iracionální (a tedy každé reálné) číslo je možno znázornit na číselné ose, plyne z Cantorova - Dedekindova axiómu o vložených úsečkách.

Poznámka

Z výše uvedeného plyne, že každému reálnému číslu x odpovídá (na číselné ose) právě jeden bod a obráceně, že každému bodu na číselné ose odpovídá právě jedno reálné číslo x. Proto budeme často používat pro reálné číslo x také název ***bod*** *a pro množinu* ***R*** *všech reálných čísel název* ***(reálná) číselná osa****. Dále každou podmnožinu množiny* ***R*** *všech reálných čísel budeme nazývat* ***číselnou množinou****.*

Výklad

Obecnějším pojmem než množina reálných čísel je **množina čísel komplexních** $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ spolu s operacemi + a . , tj. zobrazení $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $(z_1, z_2) \to z_1 + z_2$, $(z_1, z_2) \to z_1 \,.\, z_2$, které je definováno následujícím způsobem. Nechť $z_1 = (a_1, b_1)$ a $z_2 = (a_2, b_2)$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, pak

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \qquad z_1 . z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Je-li $z = (a, b) \in \mathbf{C}$, pak a nazýváme **reálnou částí**, b **imaginární částí komplexního čísla** z**.**
V množině komplexních čísel je nula číslo (0, 0) a jednička číslo (1, 0). Pro $z = (a, b) \in \mathbf{C}$ je opačné číslo $-z = (-a, -b)$ a pro $z \neq (0, 0)$ je převrácené číslo

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right), \qquad \text{tj.} \quad z.z^{-1} = (1, 0).$$

Zavedeme-li označení (a, 0) = a, (0, 1) = i, pak i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1, i^3 = i^2. i = (-1, 0)(0, 1) = (0, -1) = -i a $i^4 = i^3$. i = (0, -1)(0, 1) = (1, 0) = 1. Matematickou indukcí lze pro n ∈ **N** dokázat, že $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

Nyní snadno dostaneme často používaný tvar komplexního čísla

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib,$$

se kterým můžeme počítat jako s algebraickým výrazem.

Poznámka

Mezi definovanými množinami čísel je vztah, který můžeme zapsat ve tvaru

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

*Navíc pro množinu **N** platí axiómy A1, A2, B1, B2, B3, B5, C. Pro množinu **Z** platí axiómy A, B1, B2, B3, B5, C, pro množinu **Q** axiómy A, B, C a pro množinu **C** axiómy A, B.*

Výklad

Intervaly a okolí bodů

Mezi nejdůležitější číselné množiny patří intervaly a okolí bodů. Intervaly rozeznáváme ohraničené a neohraničené.

Definice ohraničených intervalů

Nechť a, b jsou libovolná reálná čísla, přičemž je a < b. Pak

1. uzavřený interval ⟨a, b⟩ značí všechna čísla x ∈ **R**, pro která platí $a \le x \le b$,
2. otevřený interval (a, b) značí všechna čísla x ∈ **R**, pro která platí $a < x < b$,
3. polouzavřený interval ⟨a, b) značí všechna čísla x ∈ **R**, pro která platí $a \le x < b$,
4. polootevřený interval (a, b⟩ značí všechna čísla x ∈ **R**, pro která platí $a < x \le b$.

Přitom kladné číslo b - a se nazývá délka intervalu.

Interval $\langle a, b)$ se nazývá ***uzavřený zleva a otevřený zprava***. Podobně interval $(a, b\rangle$ nazýváme ***otevřeným zleva a uzavřeným zprava***.

Definice neohraničených intervalů

Pro každé reálné číslo a interval tvaru

1. $\langle a, +\infty)$ značí všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, pro která platí $x \geq a$,
2. $(a, +\infty)$ značí všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, pro která platí $x > a$,
3. $(-\infty, a\rangle$ značí všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, pro která platí $x \leq a$,
4. $(-\infty, a)$ značí všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, pro která platí $x < a$,
5. $(-\infty, +\infty\rangle$ značí množinu $\mathbf{R}$ všech reálných čísel.

Poznámka

Zvláštními případy intervalů jsou okolí bodů. Definujeme je takto:

Jestliže a je libovolné reálné číslo a $\delta > 0$ je reálné číslo, nazýváme

1. *levým okolím bodu a každý interval tvaru $(a - \delta, a\rangle$; značíme je $U(a-)$;*
2. *pravým okolím bodu a každý interval $\langle a, a + \delta)$; značíme je $U(a+)$;*
3. *okolím bodu a každý interval tvaru $(a - \delta, a + \delta)$; značíme je stručně též $U(a; \delta)$, popř. pouze $U(a)$;*
4. *neúplným okolím bodu a sjednocení $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, tj. okolí $U(a; \delta)$ s vyloučením bodu a; stručně je značíme $\tilde{U}(a; \delta)$, popř. pouze $\tilde{U}(a)$.*

Výklad

Absolutní hodnota reálného čísla

Absolutní hodnotou čísla $x \in \mathbf{R}$ rozumíme nezáporné číslo, které značíme $|x|$ a které definujeme vztahy:

a) $|x| = x$ pro $x \geq 0$,

b) $|x| = -x$ pro $x < 0$.

Poznámka

Klademe $\sqrt{x^2} = |x|$.

Absolutní hodnota reálného čísla má následující vlastnosti:

jsou-li $a, b, a_1, a_2, \dots, a_n$ *reálná čísla, pak*

1. $|a| = |-a|$,
2. $\pm a \leq |a|$,
3. $|ab| = |a| . |b|$,
4. $|a_1 a_2 \dots a_n| = |a_1| . |a_2| . \dots . |a_n|$,
5. $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$,
6. $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$,
7. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ *pro* $b \neq 0$.

Výklad

Supremum a infimum množiny

Neprázdná číselná množina M se nazývá:

1. ***ohraničená shora***, existuje-li takové číslo $h \in \mathbf{R}$, zvané *horní závora množiny* M, že pro $\forall x \in M$ je $x \leq h$,

2. ***ohraničená zdola***, existuje-li takové číslo $d \in \mathbf{R}$, zvané *dolní závora množiny* M, že pro $\forall x \in M$ je $x \geq d$,

3. ***ohraničená***, je-li ohraničená shora i zdola,

4. ***neohraničená***, není-li ohraničená shora nebo zdola. Místo ***ohraničená*** se také používá názvu ***omezená***.

Největší, resp. nejmenší číslo množiny M se nazývá ***maximum***, resp. ***minimum*** množiny M, označujeme max M, resp. min M.

Definujeme nyní supremum a infimum množiny M.

1. Má-li neprázdná číselná množina M *nejmenší horní závoru* h, pak se číslo h nazývá ***supremum množiny*** M a značí se sup M.

2. Má-li neprázdná číselná množina M *největší dolní závoru* d, pak se číslo d nazývá ***infimum množiny*** M a značí se inf M.

1. ***Supremum číselné množiny*** M ***má tyto dvě vlastnosti***:

a) Pro každé číslo $x \in M$ platí $x \leq \sup M$,

b) v každém levém okolí suprema leží aspoň jedno číslo $x \in M$.

2. ***Infimum číselné množiny*** M ***má tyto dvě vlastnosti:***

a) Pro každé číslo $x \in M$ platí $x \geq \inf M$,

b) v každém pravém okolí infima leží alespoň jedno číslo $x \in M$.

Poznámka

I když číselná množina M má supremum (popř. infimum), nemusí číslo h = sup M (popř. číslo d = inf M) do množiny M patřit.

Má-li však číselná množina M maximální prvek, pak nutně existuje sup M a platí sup M = max M.

Podobně, má-li číselná množina M minimální prvek, pak nutně existuje inf M a platí inf M = min M.

Je nasnadě, že sup M (popř. inf M) může existovat, aniž existuje max M (popř. min M).

Výklad

Dá se dokázat následující tvrzení:

1. Každá neprázdná číselná množina M ohraničená shora má supremum,
2. každá neprázdná číselná množina M ohraničená zdola má infimum.

Řešené úlohy

Příklad 1. Interval (0, ∞) je množina ohraničená zdola, má infimum inf (0, ∞) = 0, nemá minimum, supremum a maximum. Množina M = $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ je množina ohraničená shora i zdola, inf M = 0, min M neexistuje, sup M = max M = 1.

Kontrolní otázky

1. Který ze vztahů platí pro množiny **Z** celých a **R** racionálních čísel:

   a) $\mathbf{Z} = \mathbf{R}$, b) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, c) $\mathbf{R} \subset \mathbf{Z}$.

2. Existují celá čísla, která jsou nekladná i nezáporná, která to jsou:

   a) všechna, b) neexistují, c) ano, 0.

3. Kolik různých racionálních čísel je zapsáno: $\frac{18}{8}$; $2\frac{2}{8}$; $2,25$; $\frac{9}{4}$; $\frac{126}{56}$; $\frac{-72}{-32}$; $2+\frac{1}{4}$:

   a) 0, b) 1, c) 2.

4. Pro který interval platí $\forall x \in \mathbf{R} : a \le x < b$:

   a) polootevřený $(a, b>$, b) uzavřený $<a, b>$, c) polozavřený $<a, b)$.

5. Patří vztah $|ab| = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$ mezi vlastnostmi absolutní hodnoty reálných čísel a, b:

   a) ano, b) ne, c) ano, je-li $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

6. Pro infimum číselné množiny M platí jedna z vlastností:

   a) $\forall x \in M$ platí $x \ge \inf M$, b) $\forall x \in M$ platí $x < \inf M$, c) $\exists x \in M$, tak, že platí $x < \inf M$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b), 2. c), 3. b), 4. c), 5. b), 6. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Zjistěte, zda je možné, aby součin dvou reálných čísel byl a) větší, b) menší než jakýkoliv jeho činitel. Kdy to nastane ?

2. Zjistěte, zda je možné, aby součet dvou čísel byl menší než a) některý, b) každý jeho sčítanec. Kdy to nastane ?

3. Kterým reálným číslům vyhovují následující výrazy ? Zapište pomocí intervalů!

a) $\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$, b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$, c) $\dfrac{3}{4-x^2}$.

4. Najděte maximum, minimum, supremum, infimum množin (pokud existují):

a) (0, 1),

b) < 0, 1>,

c) množina všech záporných čísel.

5. Najděte maximum, minimum, supremum, infimum množiny M, jejíž prvky tvoří čísla tvaru $\dfrac{n+2}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

6. Vypočtěte $\dfrac{x+|x|}{2}$.

7. Je-li a) $|a| \le 2$, $|b| \le 4$, b) $-2 < a < 5$, $|b| \le 1$, co platí pro $|a + b|$?

8. Najděte podmínku vyjádřenou pomocí absolutní hodnoty, kterou splňují čísla x, je-li jejich vzdálenost

a) od 0 menší než 5,

b) od 0 rovna 3,

c) od -2 menší nebo rovna 3.

9. Řešte rovnice (využijte vlastností absolutní hodnoty reálného čísla):

a) $|(x - 2)(x - 4)| = (x - 2)(x - 4)$,

b) $\left|\dfrac{3-x}{x-2}\right| = \dfrac{3-x}{x-2}$.

10. Řešte nerovnice:

a) $|2x - 8| < 3x - 12$,

b) $|x + 3| \le |x - 5|$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $a > 1, b > 1$ nebo $a < 0, b < 0$,

b) $a > 0, b < 1$ nebo $a < 0, b > 1$.

2. a) Je-li některý sčítanec záporný,

b) jsou-li oba sčítance záporné.

3. a) $(1, \infty)$, **b)** $< 2, 5 >$, **c)** $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

4. a) neexistuje, neexistuje, 1, 0, **b)** 1, 0, 1, 0, **c)** neexistuje, neexistuje, 0, neexistuje.

5. $\max M = \sup M = \frac{3}{2}$, $\min M$ neexistuje, $\inf M = 1$.

6. $x \geq 0 : x$, $x < 0 : 0$.

7. a) $|a + b| \leq 6$, **b)** $|a + b| < 6$.

8. a) $|x| < 5$, **b)** $|x| = 3$, **c)** $|x + 2| \leq 3$.

9. a) $x \in (-\infty; 2 > \cup < 4, \infty)$, **b)** $x \in (2, 3 >$.

10. a) $x \in (4, \infty)$, **b)** $x \in (-\infty; 1 >$.

Kontrolní test

1. Určete maximální ciferný součet trojciferného čísla:

   a) 999, b) 27, c) 1000.

2. Určete, pro která reálná čísla x má interval $< \frac{x-1}{2}, 3 >$ neprázdný průnik s intervalem $(-\infty, x+2)$:

   a) $x \in (-5, 7 >$, b) $x \in (-5, \infty)$, c) $x \in (-\infty, 7 >$.

3. Zapište pomocí intervalů množinu reálných čísel, která vyhovují výrazu:

   $V = \sqrt{\frac{3}{x-2}} + \sqrt{3-x} + \frac{x}{6}$:

   a) $(2, \infty)$, b) $(2, 3)$, c) $(2, 3 >$.

4. Určete, zda existuje minimum množiny $M = \left\{ \frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbf{N} \right\}$:

   a) existuje, b) neexistuje, c) nelze určit.

5. Najděte podmínku vyjádřenou pomocí absolutní hodnoty, kterou splňují čísla x, je-li jejich vzdálenost od -2 menší nebo rovno 3:

   a) $|x+2| \le 3$, b) $|x-2| \le 3$, c) $|x-3| \le 2$.

6. Řešte rovnici : $|x+1| + 3|x-1| = 2|x| + 3 - x$.

   a) $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{5}{3}$, b) nemá řešení, c) $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = \frac{5}{3}$.

7. Řešte nerovnici: $|x+2| + 3|x-1| - 2|x-3| > 0$.

   a) $x \in (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{7}{6}, +\infty)$, b) nemá řešení, c) $x \in \langle -\frac{5}{2}, \frac{7}{6} \rangle$.

Výsledky testu

1. b), 2. a), 3. c), 4. b), 5. a), 6.a), 7.a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.3. znovu.

2. LINEÁRNÍ ALGEBRA

Průvodce studiem

Mnoho důležitých úloh v matematice vyžaduje znalost řešení soustav lineárních rovnic. Okolo 75 procent všech matematických problémů ve vědeckých nebo průmyslových aplikacích vede k jejich řešení na různých úrovních. Lineární systémy se objevují v oblastech jako je obchod, ekonomika, sociologie, ekologie, demografie, genetika, elektronika, fyzika a inženýrství v různých technických oblastech. Pro studenty všech technických oborů je proto důležité seznámit se s těmi základními matematickými pojmy a jejich vlastnostmi, které umožňují pochopit řešení soustav lineárních rovnic.

2.1. Vektorové prostory

Cíle

Cílem této části textu je seznámit čtenáře zejména s pojmem vektorového prostoru, který se již intuitivně používal při studiu středoškolské matematiky.

Výklad

V mnoha různých oblastech matematiky se používá operace sčítání spolu s operací násobení skalárem. Matematické systémy takového typu se nazývají vektorové prostory nebo lineární prostory. Před definicí vektorového prostoru uvedeme příklady.

Řešené úlohy

Příklad Množina všech orientovaných úseček v rovině s počátečním bodem O vzhledem ke sčítání orientovaných úseček a jejich násobení reálnými čísly je vektorový prostor.

Příklad Množina $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}$, kde $i = 1, \dots, n$; $n \in \mathbf{N}\}$, v níž jsou operace definovány vztahy

$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$,

$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$, $k \in \mathbf{R}$,

je vektorový prostor, jehož prvky, vektory, jsou uspořádané n-tice reálných čísel

$(x_1, \dots, x_n)$.

Výklad

Oba příklady ukazují nejběžnější typy vektorových prostorů. První z nich je ***geometrický model vektorového prostoru***, druhý z nich nazýváme obvykle ***aritmetický vektorový prostor***.

Definice 2.1.1.

Množinu V spolu s operacemi $+ : V \times V \to V$ a $. : \mathbf{R} \times V \to V$,
tedy uspořádanou trojici (V, +, .) nazveme **vektorovým prostorem**, jsou-li splněny následující axiómy:

V1. $x + y = y + x$ pro každé $x, y \in V$,

V2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ pro každé $x, y, z \in V$,

V3. existuje prvek $o \in V$ tak, že $x + o = x$ platí pro každé $x \in V$,

V4. pro každé $x \in V$ existuje prvek $-x \in V$ tak, že $x + (-x) = o$,

V5. $a . (x + y) = a.x + a.y$ pro každé $x, y \in V$ a $a \in \mathbf{R}$,

V6. $(a + b) . x = a . x + b . x$ pro každé $x \in V$ a $a, b \in \mathbf{R}$,

V7. $(ab) . x = a . (b . x)$ pro každé $x \in V$ a $a, b \in \mathbf{R}$,

V8. $1 . x = x$ pro každé $x \in V$.

Poznámka

__1.__ Prvky z V se nazývají **_vektory_**, *reálná čísla se nazývají* **_skaláry_**. *Množina skalárů může být obecně jiná, než je množina reálných čísel, musí však tvořit algebraickou strukturu zvanou komutativní těleso, v níž sčítání a násobení splňují stejné axiómy jako sčítání a násobení v množině reálných čísel.*

__2.__ Sčítání v množinách V a **_R_** *splňuje tytéž axiómy*, *a proto v nich nebudeme označení „ + “ rozlišovat. Z podobných důvodů lze stejně jako v množině* **_R_** *vynechat označení operace „ . “ a budeme psát ax místo a .* **_x_**.

__3.__ Prvek o ∈ V, pro který platí axióm V3, nazveme **_nulový vektor_**. *Prvek* **_- x_** *∈ V opačný k prvku* **_x_** *∈ V, pro který platí axióm V4, nazveme* **_opačný vektor_** *k vektoru* **_x_**.

__4.__ Vektorový prostor značíme **_V_** *= (V, +, .) nebo jen V. Písmenem V tedy budeme často značit jak množinu V, tak množinu V spolu s operacemi „ + “ a „ . “ .*

Řešené úlohy

Příklad Nechť C < a, b > je množina všech funkcí jedné proměnné definovaných a spojitých na uzavřeném intervalu < a, b > a nechť sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem je definováno vztahy

$$(f + g) (x) = f (x) + g(x),$$

$$(k.f) (x) = k.f (x),$$

pro všechna x ∈ < a, b >. Množina C < a, b > spolu s operacemi „ + “ a „ . “ je ***vektorovým prostorem všech funkcí jedné proměnné, definovaných a spojitých v uzavřeném intervalu*** < a, b >. Spojitost funkcí f a g implikuje spojitost funkcí f + g a kf. Čtenář si může ověřit, že uvedené operace splňují axiómy V1 - V8 vektorového prostoru.

Věta 2.1.1. Nechť V je vektorový prostor a $x \in V$, pak platí

1. $0 . x = o$,

2. z rovnosti $x + y = o$ vyplývá $y = -x$ (jednoznačnost existence opačného vektoru),

3. $(-1) x = -x$.

D ů k a z :

1. Z axiómů V6 a V8 vyplývá

$$x = 1x = (1 + 0)x = 1x + 0x = x + 0x.$$

Užitím předchozího výsledku a axiómu V2 dostaneme

$$-x + x = -x + (x + 0x) = (-x + x) + 0x.$$

Z platnosti axiómů V1, V3 a V4 je

$$-x + x = o , \quad \text{a tedy} \quad o = o + 0x = 0x.$$

2. Předpokládejme $x + y = o$. Pak platí

$$-x = -x + o = -x + (x + y).$$

Z předchozího vztahu a platnosti axiómů V1, V2, V3 a V4 dostaneme

$$-x = (-x + x) + y = o + y = y.$$

3. Z 1. tvrzení věty 1. a V6 vyplývá

$$o = 0x = (1 + (-1))x = 1x + (-1)x .$$

Podle V8 je

$$x + (-1)x = o$$

a z 2. tvrzení věty 1. vyplývá

$$(-1) x = -x .$$

Výklad

Uvažujme nyní trojici vektorů $x = (1, -1, 2)$, $y = (-2, 3, 1)$ a $z = (-1, 3, 8)$ z vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$. Existují reálná čísla 3, 2 a -1 tak, že

$$3x + 2y - 1z = (3, -3, 6) + (-4, 6, 2) + (1, -3, -8) = (0, 0, 0) = o.$$

Pro jinou trojici vektorů $x = (1, -1, 2)$, $y = (-2, 3, 1)$ a $u = (-1, 3, 7)$ je však podobná rovnice splněna pouze v případě, že všechna tři reálná čísla jsou rovna 0, t.j.

$$0x + 0y + 0u = o .$$

Tato skutečnost nás vede k rozlišení skupin vektorů, z nichž lze získat nulový vektor součtem jejich nenulových násobků nebo pouze součtem jejich nulových násobků.

Definice 2.1.2.

Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ nazýváme **lineárně nezávislé**, jestliže rovnice

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = o \qquad (1)$$

je splněna pouze v případě, že skaláry $c_1, \dots, c_n$ jsou všechny rovny 0. Jestliže je rovnice (1) splněna a alespoň jeden ze skalárů $c_1, \dots, c_n$ je různý od nuly, říkáme, že vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou **lineárně závislé.**

Poznámka

*Levou stranu rovnice (1) nazýváme **lineární kombinací** vektorů $v_1, \dots, v_n$. V případě, že $c_1, \dots, c_n$ jsou všechna rovna 0, hovoříme o **triviální kombinaci vektorů** $v_1, \dots, v_n$.*

Řešené úlohy

Příklad Vektory (1, 1, 1), (1, 1, 0) a (1, 0, 0) jsou lineárně nezávislé. Najít čísla c_1, c_2, c_3 splňující rovnici

$$c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0) = (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1) = (0, 0, 0)$$

vede k řešení soustavy

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$c_1 + c_2 \quad = 0,$$

$$c_1 \qquad = 0,$$

která má jediné řešení $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$.

Příklad Vektory (1, 2, 4), (2, 1, 3) a (4, -1, 1) jsou lineárně závislé. Nalezení čísel c_1, c_2, c_3 splňujících rovnici

$c_1(1, 2, 4) + c_2(2, 1, 3) + c_3(4, -1, 1) = (c_1 + 2c_2 + 4c_3, 2c_1 + c_2 - c_3, 4c_1 + 3c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$

vede nyní k řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 2c_2 & + & 4c_3 & = & 0, \\ 2c_1 & + & c_2 & - & c_3 & = & 0, \\ 4c_1 & + & 3c_2 & + & c_3 & = & 0, \end{array}$$

která má například řešení $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, $c_3 = 1$. Takových řešení je nekonečně mnoho tvaru $c_1 = 2t$, $c_2 = -3t$, $c_3 = t$, $t \in \mathbf{R}$.

Výklad

Je zřejmé, že geometrická interpretace vektorových prostorů $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ je různá. Vektory $\mathbf{R}^2$ lze umístit do roviny, vektory $\mathbf{R}^3$ do prostoru. Rozdělíme nyní vektorové prostory z tohoto pohledu.

Definice 2.1.3.

Vektorový prostor V se nazývá **n-dimenzionální** nebo také **prostor dimenze n** ($n > 0$), existuje-li ve V n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ a platí-li, že každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Poznámka

Sama množina reálných čísel $\boldsymbol{R}$ *je 1-dimenzionální vektorový prostor. Rozmyšlení ponecháváme čtenáři s tím, že v příkladu 2 položí n = 1. Pro úplnost můžeme definovat množinu {* $\boldsymbol{o}$ *} jako 0-dimenzionální vektorový prostor. Vektorový prostor dimenze n budeme označovat* V_n.

Řešené úlohy

Příklad Uvažujme aritmetický vektorový prostor $\mathbf{R}^n$. Označíme-li $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, pak pro každé $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ platí $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n$. Je snadno vidět, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou lineárně nezávislé a tedy $\mathbf{R}^n$ je vektorový prostor dimenze n .

Výklad

Mějme vektorový prostor V, ve kterém jsou vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ lineárně nezávislé. Předpokládejme, že r je maximální počet lineárně nezávislých vektorů. Pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in V$ jsou pak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ lineárně závislé, t.j. existuje netriviální kombinace $c\mathbf{u} + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r = o$, kde $c \neq 0$. Můžeme psát

$$\mathbf{u} = (-c^{-1})(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r),$$

$\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů vektorového prostoru V je tedy roven dimenzi r .

Definice 2.1.4.

Každou množinu n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V_n$ nazýváme **bází** ve V_n a zapisujeme $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$.

Řešené úlohy

Příklad Vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ z příkladu 6 této části jsou bází aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$.

Výklad

Věta 2.1.2. Nechť V_n je vektorový prostor a $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$ jeho báze. Vyjádření každého vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ ve tvaru lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ je jednoznačné.

D ů k a z : Nechť

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n, \quad \mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n$$

jsou dvě vyjádření vektoru $\mathbf{u}$. Po odečtení dostaneme

$$o = (a_1 - b_1)\,\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\,\mathbf{v}_2 + \dots + (a_n - b_n)\,\mathbf{v}_n ,$$

což v důsledku lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ znamená, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $a_i - b_i = 0$, t.j. $a_i = b_i$.

Poznámka

Říkáme, že každá báze $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$ vektorového prostoru V_n určuje ***soustavu souřadnic.*** *Zobrazení $V_n \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \to (u_1, u_2, \dots, u_n)$, definované vztahem*

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{v}_1 + u_2\mathbf{v}_2 + \dots + u_n\mathbf{v}_n,$$

určuje ***souřadnice*** *$u_1, u_2, \dots, u_n$* ***vektoru u*** *vzhledem k dané bázi prostoru V_n.*

Řešené úlohy

Příklad Určete souřadnice vektoru **a =** (1, 2) z $V_2 = \mathbf{R}^2$

a) vzhledem k bázi < (1, 1), (-1, 0) >,

b) vzhledem k bázi < (1, 0), (0, 1) >.

Řešení:

a) Platí $(1, 2) = a_1(1, 1) + a_2(-1, 0)$,

$1, 2) = (a_1, a_1) + (-a_2, 0)$,

$(1, 2) = (a_1 - a_2, a_1)$,

tj. $a_1 - a_2 = 1$, $a_1 = 2$.

V dané bázi má vektor a souřadnice 2, 1.

b) Podobně $(1, 2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1)$. Upravíme a dostaneme $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. V bázi < (1, 0), (0, 1) > lze aritmetický vektor ztotožnit s uspořádanou dvojicí jeho souřadnic. Výsledek příkladu 8b lze snadno rozšířit pro aritmetické vektorové prostory V_n s bází $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ... , $e_n = (0, ..., 0, 1)$.

Výklad

Pro úplnost budeme definovat pojem podprostoru vektorového prostoru V.

Definice 2.1.5.

Jestliže $V' \subset V$ a jsou splněny podmínky:

(1) $kx \in V'$ pro všechna $x \in V'$ a $k \in \mathbf{R}$,

(2) $x \ + y \in V'$ pro všechna $x, y \in V'$,

pak V′ nazveme vektorovým **podprostorem** vektorového prostoru V.

Poznámka

Množinu { o } nazýváme nulovým podprostorem; celý prostor V je svým podprostorem.

Řešené úlohy

Příklad Nechť $V' = \{(x_1, x_2, x_3,) : x_1 = x_2,\ x_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,3\}$, pak V' je podprostorem prostoru $\mathbf{R}^3$.

Platí:

(1) Jestliže $x = (a, a, b) \in V'$, pak $kx = (ka, ka, kb) \in V'$.

(2) Jestliže $(a, a, b), (c, c, d) \in V'$, pak $(a, a, b) + (c, c, d) = (a + c, a + c, b + d) \in V'$.

Příklad Nechť $V' = \{(x, 1); x \in \mathbf{R}\}$, pak V' není podprostorem prostoru $\mathbf{R}^2$.

Platí:

(1) $k(x, 1) = (kx, k) \notin V'$, pro $x \in \mathbf{R}$,

(2) $(x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin V'$, pro $x, y \in \mathbf{R}$.

Kontrolní otázky

1. Která z uvedených číselných množin spolu s uvedenou operací tvoří vektorový prostor ?
   a) Množina N přirozených čísel spolu s operací sčítání +,
   b) množina R reálných čísel spolu s operacemi sčítání + a násobení ⊔,
   c) množina C celých čísel spolu s operacemi sčítání + a násobení ⊔.
2. Kolik nulových vektorů o existuje v daném vektorovém prostoru ?
   a) Nekonečně mnoho, b) dva, c) jeden.
3. Kolik opačných vektorů - **x** existuje v daném vektorovém prostoru k vektoru **x** ?
   a) Jeden, b) dva, c) nekonečně mnoho.

4. Vektory $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ jsou lineárně závislé, jestliže rovnice

   $c_1\mathbf{v_1} + c_2\,\mathbf{v_2} + \dots + c_n\,\mathbf{v_2} = o$ je splněna

   a) pouze, když $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou všechny rovny nule,

   b) pro alespoň jedno číslo $c_1, c_2, \dots, c_n$ různé od nuly,

   c) každé z čísel $c_1, c_2, \dots, c_n$ musí být různé od nuly.

5. Vektorový prostor se nazývá n-dimenzionální, jestliže

   a) existuje v tomto prostoru n lineárně nezávislých vektorů a každý vektor prostoru lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci

   b) každý vektor prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci $n+1$ lineárně nezávislých vektorů prostoru,

   c) každý vektor prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou vektorů.

6. Báze n-dimenzionálního vektorového prostoru je

   a) každá množina n lineárně závislých vektorů prostoru,

   b) každá množina n lineárně nezávislých vektorů prostoru,

   c) každá množina $n-1$ lineárně nezávislých vektorů prostoru.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. a); 4. b); 5. a); 6. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete aritmetický vektor x , pro který platí:

a) x = 3a + 5b - c, je-li a = (4, 1, 3, -2), b = (1, 2, -3, 2), c = (16, 9, 1, -3),

b) x = -a + 4b - 6c + 2d, je-li a = (1, 1, -1, -1), b = (0, 0, 0, 0), c = ($\frac{1}{2}$, 0, 1, 4),

d = (-1, -1, 1, 1),

c) x = a + 2(b - 3c) - 3(c - 5a), je-li a = (2, 0, 1), b = (3, 2, 1), c = (0, 0, 1),

d) a + 2**b** + 3**c** - 4**x** = **o**, kde **a** = (5, -8, -3, 2), **b** = (2, -1, 4, -3), **c =** (-3, 2, -5, 4),

e) a - **x** + $\frac{1}{3}$(**b** + **x**) - $\frac{1}{4}$ (2**a** - **b**) = **o**, kde **a** = (1, 1, -1), **b** = (2, 0, 2),

f) 5**u** - 4**x** - 3**v** + **x** + 2**w** = **u** + 2**x**, kde **u** = (1, -1, 1, 1), **v** = (0, 2, 2, 2),

w = (3, -3, 3, -3).

2. Zjistěte, zda daná množina V spolu s operací sčítání uspořádaných n-tic a násobením n-tice reálným číslem tvoří vektorový prostor, v kladném případě určete jeho nulový vektor.

a) $V = \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbf{R}\}$,

b) $V = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) \ : \ x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$,

c) $V = \{(x, 2) \ : \ x \in \mathbf{R}\}$.

3. Určete, která z následujících množin funkcí spolu s operací sčítání funkcí a operací násobení funkce reálným číslem tvoří vektorový prostor:

a) množina funkcí ohraničených na $< a, b >$,

b) množina funkcí rostoucích na $< a, b >$,

c) množina funkcí monotonních na $< a, b >$,

d) množina sudých funkcí na $< -a, a >$, $a > 0$.

4. Určete, které z číselných množin při sčítání a násobení reálným číslem definovanými přirozeným způsobem tvoří vektorový prostor a v kladném případě určete jeho nulový vektor:

a) množina komplexních čísel **C**,

b) množina reálných čísel **R**,

c) množina kladných reálných čísel $\mathbf{R}^+$,

d) množina racionálních čísel **Q**.

5. Nechť P je množina posloupností reálných čísel spolu s operací sčítání (součet posloupností) a násobení reálným číslem (násobení posloupnosti reálným číslem). Zjistěte, zda P tvoří vektorový prostor, jestliže:

a) P je množina všech posloupností, které mají limitu 0,

b) P je množina všech posloupností, které mají limitu 1,

c) P je množina všech konvergentních posloupností.

6. Najděte všechny hodnoty t, pro které je možno vektor u vyjádřit jako lineární kombinace vektorů a, b, c :

a) $u = (5, 3, t)$, $a = (1, 0, 2)$, $b = (0, 1, 1)$, $c = (4, 1, 9)$,

b) $u = (4, 3, t)$, $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, -1, 1)$, $c = (1, 7, 8)$,

c) $u = (t, 6, 7)$, $a = (1, 4, 5)$, $b = (3, 8, 10)$, $c = (0, -4, -5)$,

d) $u = (1, 3, 5)$, $a = (1, 3, 4)$, $b = (2, 8, -2)$, $c = (3, 11, t)$.

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:

a) $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 6, 7)$,

b) $a = (4, -2, 6)$, $b = (6, -3, 9)$,

c) $a = (5, 4, 3)$, $b = (3, 3, 2)$, $c = (8, 1, 3)$,

d) $a = (0, 1, 0, 3)$, $b = (3, 0, 1, 0)$, $c = (0, 3, 0, 1)$.

8. Určete číslo t tak, aby vektory **u**, v, w byly lineárně závislé:

a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (1, 2, -5)$, $w = (3, 0, t)$,

b) $u = (1, 2, 2)$, $v = (2, t, 3)$, $w = (2, 5, 4)$,

c) $u = (-1, t, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (3, 0, t)$,

d) $u = (4, 5, 2)$, $v = (2, 2t, t)$, $w = (2, 10-6t, 4-3t)$.

9. Nechť V je vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých v daném intervalu. Zjistěte, zda jsou funkce (vektory) v daném intervalu lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $a = e^x$, $b = x$, $x \in \mathbf{R}$,

b) $a = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $b = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$, $c = x^2 + x - 2$, $x \in \mathbf{R}$,

c) $a = \sin x$, $b = \cos x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

d) $a = 2\cos^2 x$, $b = -\cos 2x$, $c = -1$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

10. Mezi danými vektory najděte maximální počet lineárně nezávislých a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci:

a) $a = (1, 2, 0, 0)$, $b = (1, 2, 2, 4)$, $c = (3, 6, 0, 0)$,

b) $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 4)$, $c = (3, 2, 3)$, $d = (4, 3, 4)$, $e = (1, 1, 1)$,

c) $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (2, 1, 1, -1)$, $w = (1, -1, 0, -1)$, $x = (1, 0, -1, 2)$.

11. Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$. V kladném případě vyjádřete vektor $a = (1, 1, 2)$ jako jejich lineární kombinaci a stanovte souřadnice vektoru a v dané bázi:

a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 0, 0)$,

b) $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 2, -2)$, $u_3 = (1, 1, 3)$,

c) $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 3)$.

12. Z daných vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých a doplňte je vhodně na bázi příslušného vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$:

a) $a_1 = (2, 1, -1, 4)$, $a_2 = (-1, 3, 0, -1)$, $a_3 = (-1, -4, 1, -3)$, $a_4 = (3, -2, -1, 5)$,

b) $b_1 = (4, -1, 5, 3, 1)$, $b_2 = (3, -2, 1, 4, 0)$, $b_3 = (1, 0, -2, 4, -3)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** (1, 4, -7, 7), **b)** (-6, -3, -3, -21), **c)** (38, 4, 9), **d)** $(0, -1, -\frac{5}{2}, 2)$, **e)** $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}, 1)$,

f) $(2, -\frac{16}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$.

2. **a)** ano, o = (0, 0), **b)** ano, o = (0, 0, 0), **c)** ne.

3. **a)** ano, **b)** ne, je-li f rostoucí, pak rf pro r < 0 není rostoucí, **c)** ne, např. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x$, jsou monotónní na $< 0,1 >$, ale $f_1 - f_2$ není monotónní na $< 0,1 >$, **d)** ano.

4. **a)** ano, o = 0, **b)** ano, o = 0, **c)** ne, pro $x \in \mathbf{R}^+$ a $k \in \mathbf{R}$ nemusí platit $kx \in \mathbf{R}^+$, **d)** ne, pro $x \in \mathbf{Q}$ a $k \in \mathbf{R}$ nemusí platit $kx \in \mathbf{Q}$.

5. **a)** ano, **b)** ne, **c)** ano.

6. **a)** t = 13, **b)** t = 7, **c)** pro žádné t, **d)** $t \neq 2$.

7. **a)** nezávislé, **b)** závislé, $b = \frac{3}{2}a$, **c)** závislé, c = 7a - 9b, **d)** nezávislé.

8. **a)** t = 11, **b)** neexistuje, **c)** $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, **d)** t libovolné.

9. **a)** nezávislé, **b)** závislé, např. 2a - 3b - c = 0, **c)** nezávislé, **d)** závislé, např. a + b + c = 0.

10. **a)** a, b; c = 3a + 0b nebo b, c; $a = 0b + \frac{1}{3}c$, **b)** mimo trojic a, b, e; c, d, e jsou libovolné tři trojice lineárně nezávislé. Např. a, b, c; d = - a + b + c, e = - a + b + 0c, **c)** např. u, v, w; x = 2u - v + w.

11. **a)** ano, $a = 2u_1 - u_2$, a má souřadnice (2, -1, 0), **b)** ne, **c)** ano, $a = u_1 - u_2 + \frac{2}{3} u_3$, a má souřadnice $(1, -1, \frac{2}{3})$.

12. **a)** např. $a_2, a_3, a_5 = (0, 0, 1, 0)$, $a_6 = (0, 0, 0, 1)$, b) $b_1, b_2, b_3, b_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $b_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

Kontrolní test

1. Určete aritmetický vektor x, pro který platí $\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{x}+2\mathbf{b}=\mathbf{c}$, je-li

   $\mathbf{a}=(1,0,0)$, $\mathbf{b}=(0,1,0)$, $\mathbf{c}=(0,0,1)$.

   a) $\mathbf{x}=(0,0,0)$, b) $\mathbf{x}=(2,4,-2)$, c) $\mathbf{x}=(2,2,-2)$.

2. Najděte všechny hodnoty t, pro které je možno vektor $\mathbf{u}=(1,0,t)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}=(1,1,1)$, $\mathbf{b}=(1,0,0)$, $\mathbf{c}=(0,0,1)$.

   a) pro všechna t, b) pro $t \neq 0$, c) pro žádné t.

3. Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{a}=(1,-1,1)$, $\mathbf{b}=(1,1,0)$, $\mathbf{c}=(0,1,1)$ lineárně závislé, v kladném případě vyjádřete vektor $\mathbf{a}$ jako lineární kombinaci $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

   a) $\checkmark=\frac{1}{2}\checkmark-\ulcorner$, b) $\mathbf{a}=\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{c}$, c) jsou lineárně nezávislé.

4. Určete číslo t tak, aby vektory $\mathbf{a}=(1,0,0)$, $\mathbf{b}=(0,1,0)$, $\mathbf{c}=(0,0,t)$ byly lineárně závislé.

   a) pro všechna t, b) pro $t \neq 0$, c) pro $t=0$.

5. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a}=(1,1,0)$, $\mathbf{b}=(1,0,1)$, $\mathbf{c}=(0,1,1)$ tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ a v kladném případě vyjádřete vektor $\mathbf{u}=(0,0,1)$ jako jejich lineární kombinaci.

   a) $\mathbf{u}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$, b) netvoří bázi, c) $\mathbf{u}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$.

Výsledky testu

1\. b); 2. a); 3. c); 4. c); 5. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 3 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.1. znovu.

2.2. Matice

Cíle

Cílem této kapitoly je uvedení pojmu matice a jejich speciálních typů. Čtenář se seznámí se základními vlastnostmi matic a s operacemi s maticemi

Předpokládané znalosti

Předpokladem zvládnutí předloženého tématu je dobrá znalost pojmů a jejich vlastností z kapitoly Vektorové prostory.

Definice 2.2.1.

Schéma m.n reálných (komplexních) čísel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ nazýváme **maticí $\mathbf{A}$ typu (m, n)**.

Poznámka

1. Čísla a_{ij} jsou prvky matice. Přitom a_{ij} značí prvek, který leží v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$. Index i se proto nazývá řádkový index prvku a_{ij} a j sloupcový index prvku a_{ij}.

2. Je-li $m = n$, pak matici $\mathbf{A}$ nazýváme čtvercovou maticí řádu n.

3. Je-li $\mathbf{A}$ matice řádu n, pak aritmetický vektor (a_{11}, a_{22}, a_{nn}) se nazývá její hlavní diagonála a aritmetický vektor $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1})$ její vedlejší diagonála.

4. Každý z m řádků matice $\mathbf{A}$ můžeme chápat jako n-rozměrný aritmetický vektor, každý z n sloupců můžeme chápat jako m-rozměrný aritmetický vektor.

5. Matice budeme označovat velkými písmeny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ... nebo (a_{ij}).

6. Prvky matice $\mathbf{A}$ mohou být také funkce, matice, vektory atd. Příslušné množiny prvků však musí, vzhledem ke sčítání a násobení, splňovat axiomy vektorového prostoru.

Výklad

Pro některé druhy matic zavádíme následující názvy.

1. ***Nulová matice*** $\mathbf{0}$ je matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule.

2. ***Jednotková matice*** $\mathbf{E}$ je čtvercová matice řádu n, jejíž všechny prvky v hlavní diagonále se rovnají 1 ($a_{ii} = 1$) a ostatní prvky jsou rovny 0 ($a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$).

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - jednotková matice 3. řádu.

3. ***Maticí transponovanou*** k matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) rozumíme matici typu (n, m), kterou značíme $\mathbf{A}^T$ a získáme ji z matice $\mathbf{A}$ výměnou řádků za sloupce, tj. $a'_{ij} = a_{ji}$, kde $\mathbf{A}^T = (a'_{ij})$.

4. **Matice** $\mathbf{A}$ se nazývá ***symetrická***, platí-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$. Je to tedy čtvercová matice, jejíž prvky symetricky umístěné vzhledem k hlavní diagonále jsou stejné.

5. **Matice** $\mathbf{A}$ typu (m, n), která má pod, resp. nad diagonálními prvky a_{ii} samé nuly, takže $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, resp. $i < j$, se nazývá ***trojúhelníková***.

Výklad

Základní operace s maticemi

Definice 2.2.2.

Dvě **matice** $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejného typu (m, n) **považujeme za sobě rovné** a píšeme

$\mathbf{A} = \mathbf{B}$, mají-li všechny odpovídající prvky stejné, tj. $a_{ij} = b_{ij}$, pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Definice 2.2.3.

Nechť **matice** $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, jsou téhož typu (m, n). Pak jejich **součtem** rozumíme matici $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Definice 2.2.4.

Součinem matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m, n) a **reálného čísla** k nazýváme matici

$\mathbf{B} = k \,.\, \mathbf{A}$, kde $b_{ij} = ka_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Pro sčítání matic a násobení matice reálným číslem platí:

1. Komutativní zákony

   $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, $\quad k.\mathbf{A} = \mathbf{A}.k$, $\quad k \in \mathbf{R}$.
2. Asociativní zákony

   $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$, $\quad k.(l.\mathbf{A}) = (k.l).\mathbf{A}$, $\quad k, l \in \mathbf{R}$.
3. Distributivní zákony

   $k.(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k.\mathbf{A} + k.\mathbf{B}$, $\quad (k + l)\mathbf{A} = k.\mathbf{A} + l.\mathbf{A}$, $\quad k, l \in \mathbf{R}$.
4. Existence nulové matice

   Existuje taková matice $\mathbf{0}$, že pro každou matici $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.
5. Existence opačné matice

   Ke každé matici $\mathbf{A}$ existuje taková matice $-\mathbf{A}$, že $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Poznámka

Je vidět, že množina všech matic typu (m, n) tvoří vzhledem k operacím sčítání matic a násobení matice reálným číslem vektorový prostor.

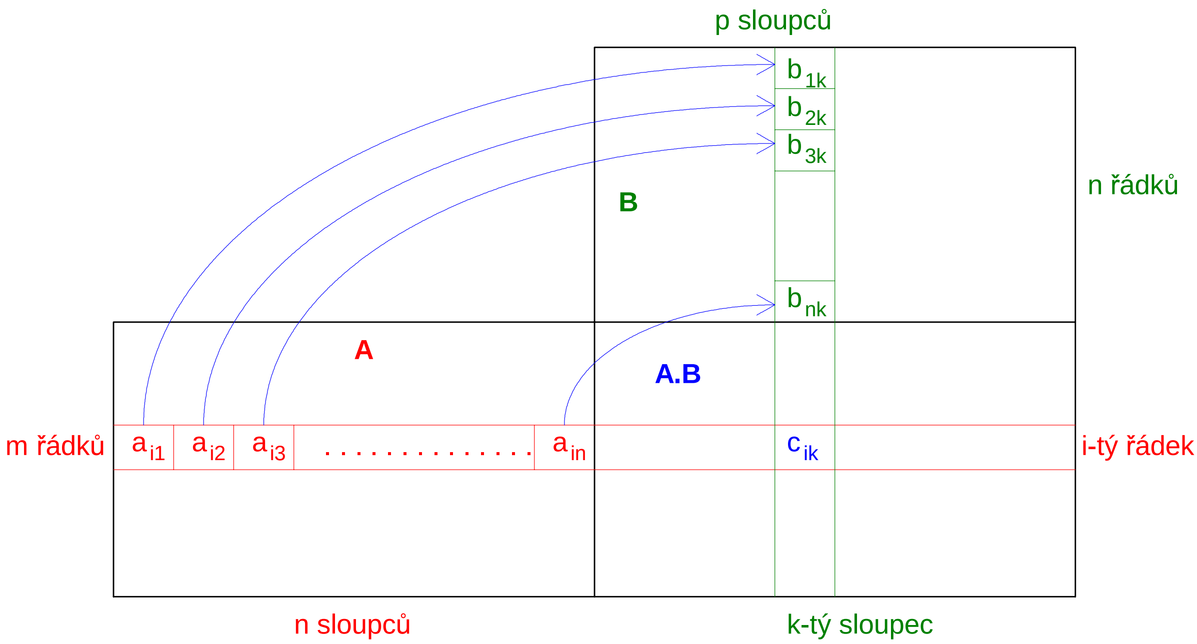
Definice 2.2.5.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je maticí typu (m, n) a $\mathbf{B} = (b_{jk})$ je matice typu (n, p). **Součinem matic** $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ (v tomto pořadí) je matice $\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{B} = (c_{ik})$ typu (m, p), kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \dots + a_{in}.b_{nk}.$$

Výklad

Pro výpočet prvků c_{ik} matice $\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{B}$ je výhodné tzv. ***multiplikační schéma***.



Poznámka

Pro násobení matic platí:

1. *Asociativní zákon*

   $(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}).\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C})$.

2. *Distributivní zákony*

   $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}).\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}$ *(pro násobení zprava),*

   $\boldsymbol{C}.(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}.\boldsymbol{B}$ *(pro násobení zleva).*

3. *Existuje jednotková matice* $\boldsymbol{E}$, *že* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ *pro každou čtvercovou matici* $\boldsymbol{A}$ *řádu n.*

4. *Pro nulovou matici* $\boldsymbol{O}$ *je vždy* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

5. *Je-li* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$, *pak nemusí být ani* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, *ani* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

6. *Obecně neplatí komutativní zákon, tj. obecně* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A}$.

7. *Existuje-li součin matic* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$, *pak* $(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T.\,\boldsymbol{A}^T$.

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte součin matic $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-6 & -2 \\ -12+12 & 4 \\ 4-9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 \\ 0 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Příklad Ověřte, že pro násobení matic obecně neplatí komutativní zákon.

Řešení:

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \text{ kdežto}$$

$$\mathbf{B}.\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$.

Příklad Vypočtěte součin matic $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

To znamená, že pro matice $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ je $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Příklad Paní Alena jde koupit do obchodu 12 vajec, 6 jablek a 6 hrušek, 12 pomerančů a 3 citróny. Vyjádřeme nákup pomocí následujících řádkového vektoru

$$\mathbf{x} = [\ 12 \text{ (vejce)}, 6 \text{ (jablka)}, 6 \text{ (hrušky)}, 12 \text{ (pomeranče)}, 3 \text{ (citróny)}] = (12, 6, 6, 12, 3).$$

Předpokládejme, že vejce jsou po 2 Kč za kus, jablka po 5 Kč, hrušky a pomeranče po 4 Kč a citróny po 3 Kč za kus. Pak můžeme ceny těchto druhů zboží zapsat jako sloupcový vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Kč za vejce,} \\ \text{Kč za jablko,} \\ \text{Kč za hrušku,} \\ \text{Kč za pomeranč,} \\ \text{Kč za citrón.} \end{array}$$

Celkovou částku, kterou paní Alena v obchodě zaplatí, můžeme nyní vypočíst součinem vektorů $\mathbf{x}.\mathbf{y}$, kde vektor $\mathbf{x}$ vyjadřujemnožství jednotlivých druhů a vektor $\mathbf{y}$ ceny jednotlivých druhů.

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = (12, 6, 6, 12, 3) . \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 12.2 + 6.5 + 6.4 + 12.4 + 3.3 = 135 \text{ Kč}.$$

Příklad V příkladu 4. nyní předpokládáme, že paní Alena může nakupovat ve dvou obchodech, ve kterých se ceny poněkud liší.

Nechť vektor cen v druhém obchodě je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Kč za vejce,} \\ \text{Kč za jablko,} \\ \text{Kč za hrušku,} \\ \text{Kč za pomeranč,} \\ \text{Kč za citrón.} \end{matrix}$$

Paní Alena má možnost nakoupit všechno buď v 1. nebo ve 2. obchodě nebo může nakoupit v každém obchodě jen to zboží, které je tam levnější. Abychom jí pomohli se rozhodnout, utvoříme matici cen:

$$\begin{array}{cccc} & \textbf{\textit{Ceny v 1. obchodě}} & \textbf{\textit{Ceny v 2. obchodě}} & \textbf{\textit{Nejmenší cena}} \\ \mathbf{C} = & \left(\begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right) \end{array}$$

První sloupec udává ceny v 1. obchodě, druhý sloupec ceny v 2. obchodě, třetí sloupec udává vždy menší z obou příslušných cen. Abychom sestavili účet pro všechny tři možnosti nákupu, vypočteme součin $\mathbf{x}.\mathbf{C}$.

$$\mathbf{x}.\mathbf{C} = (12, 6, 6, 12, 3) . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (135, 156, 126).$$

Vidíme tedy, že paní Alena zaplatí v 1. obchodě 135 Kč, ve 2. obchodě 156 Kč, ale když koupí každé zboží tam, kde je levnější, zaplatí jen 126 Kč.

Kontrolní otázky

1. Matice $\mathbf{A}$ typu (m,n) je

   a) schéma $m+n$ prvků, b) reálné číslo, které je ukryto ve schématu matice, c) schéma $m \cdot n$ prvků.

2. Matice $\mathbf{A}$ typu (m,n) má

   a) m sloupců, b) n sloupců, c) $m+n$ sloupců.

3. Matice $\mathbf{A}^T$ transponovaná k matici $\mathbf{A}$ typu (m,n) je

   a) typu (n,m), b) typu (m,n), c) neexistuje, protože $\mathbf{A}$ není čtvercová.

4. Dvě matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ můžeme sečíst pouze pokud

   a) počet sloupců první matice je stejný jako počet řádků druhé matice,

   b) obě matice jsou stejného typu,

   c) obě matice jsou čtvercové.

5. Matici $\mathbf{A}$ typu (m,n) násobíme reálným číslem k tak, že

   a) vynásobíme číslem k libovolný řádek matice,

   b) vynásobíme číslem k všechny prvky hlavní diagonály,

   c) vynásobíme číslem k všechny prvky matice $\mathbf{A}$.

6. Sčítání dvou matic je

   a) komutativní a asociativní, b) není komutativní a je asociativní, c) není komutativní ani asociativní.

7. Součin matic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (v tomto pořadí) můžeme provést pouze pokud

   a) jsou obě stejného typu, b) mají stejný počet sloupců, c) počet sloupců matice $\mathbf{A}$ je stejný jako počet řádků matice $\mathbf{B}$.

8. Při součinu dvou matic $\mathbf{A},\mathbf{B}$

   a) záleží na pořadí matic,

   b) nezáleží na pořadí matic,

   c) nezáleží na pořadí matic, pokud $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jsou čtvercové.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. c);, 6. a); 7. c); 8. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Proveďte explicitní tabulkový zápis matice

a) $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je typu (3, 5) a $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pro} \quad i = j \\ a_{ij} = 2 & \text{pro} \quad i \neq j, \end{cases}$

b) $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je řádu 4 a $\begin{cases} b_{ij} = 0 & \text{pro} \quad i \neq j \\ b_{ij} = 3 & \text{pro} \quad i > j, \end{cases}$

c) $\mathbf{C} = (c_{ij})$ je typu (2, 6) a $c_{ij} = i + j$.

2. Najděte matice $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, které pro matice

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ vyhovují těmto vztahům:

a) $\mathbf{X} + \mathbf{A} = \mathbf{B}$,

b) $3\mathbf{A} + 2\mathbf{X} = -\mathbf{B}$.

3. Proveďte následující operace:

$$\mathbf{X} = 2\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Zjistěte, pro která x, y platí:

$$\begin{pmatrix} 2x + 5y & 4 \\ 9 & 2y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 9 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Stanovte čísla x, y tak, aby matice:

$\begin{pmatrix} 1 & 3x+2 \\ 3y+6 & 2 \end{pmatrix}$ byla transponovaná k matici $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Vypočtěte součet daných matic:

a) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}.\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}.\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

f) $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Předpokládejme, že stavitel přijal zakázku na pět domů I. typu, sedm domů II. typu a dvanáct domů III. typu. Tuto zakázku můžeme vyjádřit pomocí řádkového vektoru

$\mathbf{x} = (5,\ 7,\ 12)$. Staviteli je známo, kolik surovin jednotlivých druhů a kolik práce se spotřebuje na každý typ domu. Předpokládejme, že tyto „suroviny“ jsou ocel, dřevo, sklo, barva a práce. Čísla uvedená v matici $\mathbf{R}$ udávají množství suroviny každého druhu spotřebované na každý typ domu, vyjádřené ve vhodných jednotkách. (Čísla v příkladu jsou volena libovolně, nikoli tak, aby odpovídala skutečnosti).

Ocel ***Dřevo*** ***Sklo*** ***Barva*** ***Práce***

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{I. typ} \\ \text{II. typ} \\ \text{III. typ} \end{array}.$$

Každý řádek matice je vektor udávající množství každého druhu suroviny spotřebované na daný typ domu. Každý sloupec matice je vektor udávající množství daného druhu suroviny pro jednotlivé typy domů. Matice je zřejmě velmi stručný způsob zápisu této informace. Vypočtěte množství surovin každého druhu, které stavitel potřebuje ke splnění zakázky.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2. a) $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\mathbf{X} = \frac{1}{2}(-\mathbf{B} - 3\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -4 & -3 \\ -1 & \frac{3}{2} & -5 \end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -9 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$.

4. $x = -\frac{2}{5}$, $y = 1$.

5. $x = \frac{4}{3}$, $y = 2$.

6. a) $\mathbf{A} . \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 29 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} . \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 19 \\ -8 & 2 & 6 \\ -1 & 9 & 17 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} . \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -19 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} . \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & -19 & 1 & 16 \\ -5 & 17 & -9 & -12 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,   d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -1 \\ -14 & -14 & 11 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,   f) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{R} = (146, 526, 260, 158, 388)$.

Kontrolní test

1. Rozhodněte, zda matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou si rovny:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, b) $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$.

2. Pro která x, y platí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2x+y \\ 3y+1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3x+1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $x=2,\ y=3$, b) $x=1,\ y=3$.

3. Vypočtěte matici $\mathbf{X}=2\mathbf{A}-5\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 44 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 39 \end{pmatrix}$.

4. Vypočtěte součet matic $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Vypočtěte transponovanou matici $\mathbf{A}^T$ k matici

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&5&0\\0&1&2\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix}3&3&0\\5&0&1\\0&2&2\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}3&0&3\\5&1&0\\0&2&2\end{pmatrix}$.

6. Vypočtěte součin matic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix}3&6&3\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$.

7. Vypočtěte součin matic $A\cdot B$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\\2&2\end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix}7&15\\7&20\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1&2&4\\3&8&4\\6&12&2\end{pmatrix}$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. a); 5. b); 6. a); 7. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.2. znovu.

2.3 Determinanty matic řádu n

Cíle

Cílem kapitoly je zvládnutí řešení determinantů čtvercových matic.

Definice 2.3.1.

Determinantem (řádu n) **čtvercové matice $\mathbf{A}$** řádu n, jejímiž prvky a_{ij} jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme ***číslo***, které značíme ***det*** $\mathbf{A}$; $|\mathbf{A}|$ a definujeme takto:

1. Je-li n = 1, pak det $\mathbf{A} = a_{11}$.
2. Pro $n \geq 2$ je

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \mathbf{A}_{1j} =$$

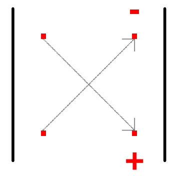
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

kde matice $\mathbf{A}_{1j}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

Výklad

1. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu n = 2 platí

det $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, tj. od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále.



Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3.3 - 2.1 = 7.$$

Výklad

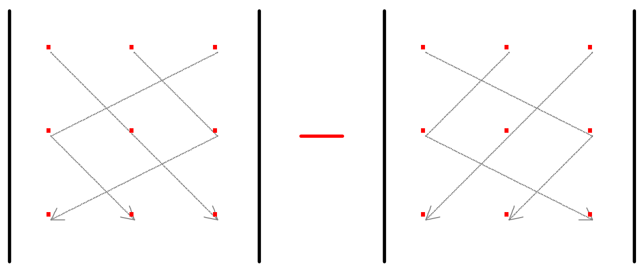
2. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu n = 3 platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Tento výpočet si snadno zapamatujeme podle tzv. ***Sarrusova pravidla***:



Nejprve zapíšeme výrazy $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ utvořené „rovnoběžně s hlavní diagonálou“ a pak odečteme výrazy $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{21}a_{12}a_{33}$, utvořené „rovnoběžně s vedlejší diagonálou“ (viz schéma).

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = [3.0.(-2) + 1.1.1 + 2.(-1).2] - [1.0.2 + 3.(-1).1 + 1.2.(-2)] =$$

$$= 1 - 4 - (-3 - 4) = 4.$$

Výklad

3. Pro výpočet determinantů matic řádu n ≥ 4 však neexistuje žádné obdobné pravidlo jako je Sarrusovo, které platí pouze pro determinanty matic řádu třetího. Abychom nemuseli tyto determinanty počítat jen na základě definice, seznámíme se s některými důležitými vlastnostmi determinantů, s jejichž pomocí se výpočet zjednoduší.

<u>Vlastnosti determinantů</u>

Věta 2.3.1. (Laplaceův rozvoj). Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n platí:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.\det \mathbf{A}_{ij}$$ - rozvoj determinantu podle i-tého řádku,

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.\det \mathbf{A}_{ij}$$ - rozvoj determinantu podle j-tého sloupce,

kde matice $\mathbf{A}_{ij}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

D ů k a z se provádí indukcí vzhledem k n.

Poznámky

1. Determinant matice $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme subdeterminantem vzhledem k prvku a_{ij}.

*2. Součin $(-1)^{i+j}$. det $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} a značíme*

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Tento determinant můžeme vypočítat rozvojem podle 2. sloupce.

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3).(-1) + (-4) = -1.$$

Věta 2.3.2. Jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikne tak, že některý řádek (sloupec) čtvercové matice $\mathbf{A}$ vynásobíme číslem $k \in \mathbf{R}$, pak platí det $\mathbf{B}$ = k.det $\mathbf{A}$.

D ů k a z: Číslem $k \in \mathbf{R}$ vynásobíme například r-tý sloupec, pak

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r-1} & ka_{1,r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & & & ka_{n,r} & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Rozvojem podle r-tého sloupce dostaneme:

$$\det \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} . k a_{ir} \det \mathbf{B}_{ir} = k . \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} \det \mathbf{A}_{ir} = k . \det \mathbf{A} .$$

Důkaz pro řádky je obdobný.

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$ užitím věty 2.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 4 \,.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 4\,.\,3\,.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12\,.\,5 = 60\,.$$

Poznámka

Z této věty vyplývá, že determinant, jehož jistý řádek (sloupec) tvoří samé nuly, se rovná nule.

Věta 2.3.3. Vyměníme-li ve čtvercové matici $\mathbf{A}$ navzájem dva řádky (sloupce), pak pro takto vzniklou matici $\mathbf{B}$ platí: $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

D ů k a z provedeme matematickou indukcí pro řádky, pro sloupce je obdobný.

Věta platí pro matici řádu druhého, neboť

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Nechť nyní $n \geq 3$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro matice řádu $(n - 1)$. Dokážeme, že pak platí také pro matice řádu n. Nechť $\mathbf{B}$ je matice řádu n, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tak, že vyměníme její i-tý řádek a k-tý řádek $(i \neq k)$. Zvolme $j \neq i$, $j \neq k$ $(1 \leq j \leq n)$ a proveďme rozvoj determinantu matice $\mathbf{B}$ podle prvků j-tého řádku. Dostaneme

$$\det \mathbf{B} = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{jp} \det \mathbf{B}_{jp} = -\sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{jp} \det \mathbf{A}_{jp} = -\det \mathbf{A},$$

podle indukčního předpokladu je det $\mathbf{B}_{jp}$ = - det $\mathbf{A}_{jp}$.

Věta 2.3.4. Má-li matice $\mathbf{A}$ dva řádky (sloupce) stejné, pak det $\mathbf{A}$ = 0.

D ů k a z plyne z předcházející věty 3, když oba stejné řádky mezi sebou vyměníme. Dostaneme

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \Rightarrow 2\det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0.$$

Věta 2.3.5. Nechť matice $\mathbf{B}$ vznikne tak, že k p-tému řádku (sloupci) čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n přičteme k násobek, $k \in \mathbf{R}$, q-tého řádku (sloupce), $p \neq q$. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}\ .$$

D ů k a z provedeme pro sloupce.

Mějme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p-1},\ a_{1p},\ a_{1,p+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,p-1},\ a_{i,p},\ a_{i,p+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,p-1},\ a_{n,p},\ a_{n,p+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

K p-tému sloupci přičteme k-násobek sloupce q-tého, $p \neq q$ a získáme matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p-1},\ a_{1,p} + ka_{1,q},\ a_{1,p+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,p-1},\ a_{i,p} + ka_{i,q},\ a_{i,p+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,p-1},\ a_{n,p} + ka_{n,q},\ a_{n,p+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Rozvojem determinantu matice $\mathbf{B}$ podle p-tého sloupce dostaneme

$$\det \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} (a_{ip} + k a_{iq}) \det \mathbf{B}_{ip} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{ip} \det \mathbf{A}_{ip} + k \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{iq} \det \mathbf{A}_{ip} = \det \mathbf{A},$$

protože druhý součet, násobený číslem k, je vlastně determinant, v němž na místě p-tého sloupce je q-tý sloupec. Tento determinant má tedy dva stejné (q-té) sloupce a podle věty 4 je roven nule.

Důkaz pro řádky lze vést obdobně.

Poznámka

1. Větu 5 můžeme rozšířit:

Determinant matice $\mathbf{A}$ se nezmění, přičteme-li k p-tému řádku (sloupci) matice $\mathbf{A}$ libovolnou lineární kombinaci zbývajících řádků (sloupců).

2. Větu 5 používáme při výpočtu determinantů vyšších řádů tak, abychom přičtením vhodné lineární kombinace získali v některém řádku (sloupci) co nejvíce nul. Pak provedeme rozvoj podle tohoto řádku (sloupce).

3. Užitím věty 5 můžeme matici převést na matici trojúhelníkovou. Pak platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & & \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}. \dots .a_{nn} ,$$

tj. determinant se rovná součinu prvků na hlavní diagonále, což vyplývá přímo z věty 1.

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Výhodné bude využít rozvoj podle 4. sloupce. Nejdříve 2. řádek násobený číslem (-3) přičteme k řádku třetímu a 2. řádek přičteme k řádku čtvrtému. První a druhý řádek opíšeme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nyní provedeme rozvoj podle 4. sloupce:

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tento determinant můžeme vypočíst přímo Sarrusovým pravidlem nebo opět rozvojem podle 3. sloupce po úpravách.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} .(-1) \;\; 2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & -7 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -(-56+42) = 14.$$

Příklad Úpravou na trojúhelníkový tvar vypočtěme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} .\,2 \; (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ .\,2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.6.3 = 18.$$

Kontrolní otázky

1. Jak se nazývá determinant, který vznikne z determinantu původní matice, kde jsme vynechali i-tý řádek a j-tý sloupec.

   a) algebraický doplněk prvku a_{ij},

   b) subdeterminant vzhledem k prvku a_{ij},

   c) geometrický doplněk prvku a_{ij}.

2. Při násobení determinantu číslem $k \in \mathbf{R}$ musíme vynásobit

   a) všechny řádky determinantu,

   b) libovolný 1 řádek (nebo sloupec) determinantu,

   c) všechny sloupce determinantu.

3. Vyměníme-li v determinantu navzájem dva řádky (sloupce), pak nový determinant má

   a) stejnou hodnotu jako původní,

   b) dvakrát větší hodnotu než původní,

   c) opačné znaménko než původní.

4. Kdy se determinant rovná 0?

   a) Když všechny prvky hlavní úhlopříčky jsou rovny jediné,

   b) když se dva řádky (sloupce) rovnají,

   c) když je počet řádků menší než počet sloupců.

5. Sarrusovým pravidlem s provádí výpočet determinantů:
   a) jakéhokoliv řádu,
   b) řádu $n \geq 4$,
   c) třetího řádu.
6. Když k určitému řádku (sloupci) determinantu přičteme k-násobek $(k \neq 1)$ jiného řádku (sloupce) téhož determinantu, hodnota determinantu se
   a) nezmění,
   b) k krát se zvětší,
   c) k krát se zmenší.
7. Hodnota determinantu, který je upraven na trojúhelníkový tvar se rovná
   a) součinu prvků na vedlejší diagonále,
   b) součinu prvků v 1. sloupci,
   c) součinu prvků na hlavní diagonále.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. b); 3. c); 4. b); 5. c); 6. a); 7. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte determinanty:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix},\quad d)\ \begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{24} & \sqrt{15} \end{vmatrix},\quad e)\ \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

$$f)\ \begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a-2 \end{vmatrix},\quad g)\ \begin{vmatrix} \mathrm{tg}x & -1 \\ 1 & \mathrm{tg}x \end{vmatrix}.$$

2. Vypočtěte determinanty pomocí Sarrusova pravidla:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},\quad d)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix},\quad f)\ \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

3. Řešte rovnice:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Vypočtěte determinanty úpravou na trojúhelníkový tvar:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Vypočtěte determinanty:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{e)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 8 \\ -3 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{f)} \begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \\ -9 & 6 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 10 & -12 \end{vmatrix}.$$

6. Ukažte, že platí:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x), \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -x & -x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x^2 & x \\ y^2 & y \end{vmatrix}.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** -17, **b)** 10, **c)** 22, **d)** $\sqrt{3}$, **e)** $\frac{9}{2}$, **f)** (1 - 2a), g) $\frac{1}{\cos^2 x}$.

2. **a)** -8, **b)** 50, **c)** -18, **d)** -43, **e)** -125, **f)** $(-x^2 + x)$.

3. **a)** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, **b)** $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1$.

4. **a)** 1, **b)** 0, **c)** -6.

5. **a)** 10, **b)** 6, **c)** 1, **d)** 1, **e)** -40, **f)** 24.

Kontrolní test

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}.$$

a) $\cos 2x$, b) 1, c) -1.

2. Vypočtěte determinant pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}.$$

a) -39, b) -8, c) 1.

3. Vypočtěte determinant pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

a) 1, b) -1, c) 2.

4. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} x & -x & x \\ x & x & -x \\ x & -x & -x \end{vmatrix}.$$

a) $4x^3$, b) $-x^3$, c) $-4x^3$.

5. Vypočtěte determinant úpravou na trojúhelníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

a) 20, b) 40, c) -20.

6. Vypočtěte determinant úpravou na trojúhelníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

a) -48, b) 58, c) 62.

7. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

a) -570, b) 121, c) -500.

8. Řešte rovnici

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

a) $x_1 = 1, x_2 = 6$, b) $x_1 = 2, x_2 = 3$, c) $x_1 = -1, x_2 = -6$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. c); 6. a); 7. a); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.3. znovu.

2.4. Inverzní matice a hodnost matice

Cíle

Cílem kapitoly je zavedení význačných pojmů pro matice, jejichž znalost je nutná, mimo jiné, pro řešení soustav lineárních rovnic.

Předpokládané znalosti

Předpokladem dobrého zvládnutí látky je zejména znalost operace násobení matic.

Definice 2.4.1.

Inverzní maticí k čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n rozumíme takovou čtvercovou matici $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n, pro kterou platí: $\mathbf{A} \, . \, \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} . \, \mathbf{A} = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n.

Definice 2.4.2.

Čtvercová **matice** $\mathbf{A}$ řádu n ≥ 2, jejíž determinant det $\mathbf{A} \neq 0$, se nazývá ***regulární***. V opačném případě jí říkáme ***singulární*** (det $\mathbf{A} = 0$).

Věta 2.4.1.

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu n ≥ 2 a $\mathbf{A}^*$ je matice utvořená z algebraických doplňků $\mathbf{A}^*_{ik}$ prvků $a_{ik} \in \mathbf{A}$. Pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \, . \, (\mathbf{A}^*)^T.$$

Matici $(\mathbf{A}^*)^T$ nazýváme ***adjungovanou*** maticí k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\tilde{\mathbf{A}}$, tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \, . \, \tilde{\mathbf{A}}.$$

Důkaz :

$$\mathbf{A}^{-1} \,.\, \mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \,.\, \tilde{\mathbf{A}} \,.\, \mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \,.\, \begin{pmatrix} \mathbf{A}^*_{11} & \mathbf{A}^*_{21} & \cdots & \mathbf{A}^*_{n1} \\ \mathbf{A}^*_{12} & \mathbf{A}^*_{22} & \cdots & \mathbf{A}^*_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{A}^*_{1n} & \mathbf{A}^*_{2n} & \cdots & \mathbf{A}^*_{nn} \end{pmatrix} \,.\, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \,.\, \begin{pmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Obdobně dokážeme $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Řešené úlohy

Příklad Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{ matice } \mathbf{A} \text{ je regulární}$$

$$\mathbf{A}_{11}^* = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18 \quad \mathbf{A}_{12}^* = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24 \quad \mathbf{A}_{13}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}_{21}^* = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \quad \mathbf{A}_{22}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 \quad \mathbf{A}_{23}^* = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}_{31}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \mathbf{A}_{32}^* = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \mathbf{A}_{33}^* = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 18 & -24 & 6 \\ -10 & 15 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad Řešme rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

můžeme danou maticovou rovnici zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} . \mathbf{X} . \mathbf{B} = \mathbf{C} . \tag{1}$$

Protože det $\mathbf{A}$ = 1 ≠ 0, det $\mathbf{B}$ = -2 ≠ 0, jsou matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ regulární a můžeme vypočíst inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{B}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li rovnici (1) zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a zprava maticí $\mathbf{B}^{-1}$, dostaneme:

$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{A} . \mathbf{X} . \mathbf{B} . \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{C} . \mathbf{B}^{-1}$,

$\mathbf{E} . \mathbf{X} . \mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{C} . \mathbf{B}^{-1}$,

$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{C} . \mathbf{B}^{-1}$.

Dosadíme:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} . \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku provedeme dosazením do zadání.

Příklad Jednoduchý způsob odesílání kódovaných zpráv spočívá v označení písmen abecedy celými čísly a odeslání zprávy jako posloupnosti čísel. Například zpráva

NAPIŠ VČAS

může být kódována jako

5, 8, 10, 21, 7, 2, 9, 8, 3.

V této zprávě je N reprezentováno 5, A je reprezentováno 8 atd. Bohužel, takto kódované zprávy jsou snadno rozluštitelné. Abychom učinili dekódování obtížnějším, můžeme použít násobení matic. Nechť $\mathbf{A}$ je matice, jejímiž prvky jsou celá čísla a det $\mathbf{A} = \pm 1$,

pak $\mathbf{A}^{-1} = \pm\ \tilde{\mathbf{A}}$. Ukážeme způsob kódování a dekódování naší zprávy pomocí matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kódovanou zprávu umístíme do sloupců matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 21 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Součin

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 21 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 37 & 28 \\ 80 & 83 & 67 \\ 54 & 67 & 48 \end{pmatrix}$$

určuje kódovanou zprávu, kterou odešleme ve tvaru

31, 80, 54, 37, 83, 67, 28, 67, 48.

Přijímající osoba může zprávu dekódovat násobením zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$, neboť $\mathbf{A}^{-1} .\ \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} =$

$= \mathbf{E} \,.\, \mathbf{B} = \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}^{-1}.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 31 & 37 & 28 \\ 80 & 83 & 67 \\ 54 & 67 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 21 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\,.$$

Tato technika kódování může mít i složitější varianty. Například nechť $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ jsou tři různé matice řádu 3, jejichž det $\mathbf{A}_i = \pm 1$ pro i = 1, 2, 3. Vyjádřeme naši zprávu třemi vektory

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pak můžeme zprávu kódovat násobením

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{pmatrix}.$$

Zprávu můžeme odeslat ve tvaru

$$\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_3^{\mathrm{T}}.$$

Takto odeslanou zprávu můžeme dekódovat násobením zleva

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.4.3.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n). Považujme řádky za aritmetické vektory vektorového prostoru V_n. **Hodnost matice** $\mathbf{A}$ je r (značíme $h(\mathbf{A}) = r$), existuje-li r lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{A}$ a každých r+1 řádků je lineárně závislých.

Poznámka

Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ *typu (m, n) bychom mohli definovat pomocí sloupcových vektorů z vektorového prostoru* V_m. *Obě definice vedou k témuž výsledku* $h(\boldsymbol{A}) = r$.

Věta 2.4.2. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice typu (m, n). Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nezmění při kterékoliv z následujících elementárních úprav:

1. záměně pořadí řádků (sloupců),
2. násobení jednotlivých řádků (sloupců) čísly $k_i \neq 0$,
3. přičtení k některému řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců),
4. vynecháním řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

Důkaz: Žádná z uvedených úprav nemění počet lineárně nezávislých řádků či sloupců.

Poznámka

Dvě matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, *které mají stejnou hodnost* $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$, *nazýváme* ***ekvivalentními*** *a značíme* $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Řešené úlohy

Příklad Určeme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Budeme upravovat matici $\mathbf{A}$ podle věty 2. Ke 2. řádku přičteme (-1) násobek 1. řádku a ke 4. řádku (-2) násobek 2. řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-1) \\ .(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

3. a 4. řádek můžeme vynechat (dle 4. bodu věty 2).

Je vidět, že v upravené matici jsou dva lineárně nezávislé řádky, tzn., že hodnost matice $\mathbf{A}$ je dvě, h($\mathbf{A}$) = 2.

Kontrolní otázky

1. Pro inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k čtvercové matici $\mathbf{A}$ platí

   a) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}=\mathbf{E}$,

   b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$,

   c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice.

2. Čtvercová matice $\mathbf{A}$, jejíž determinant $\det\mathbf{A}=0$ se nazývá

   a) singulární,

   b) nulová,

   c) regulární.

3. Inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ existuje

   a) když $\mathbf{A}$ je singulární matice,

   b) vždy, když $\mathbf{A}$ je čtvercová matice,

   c) když $\mathbf{A}$ je regulární matice.

4. Adjungovaná matice $\tilde{\mathbf{A}}$ je vytvořená

   a) z algebraických doplňků prvků matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (tj. matice transponovaná k původní matici $\mathbf{A}$),

   b) ze subdeterminantů prvků matice $\mathbf{A}$,

   c) z algebraických doplňků prvků matice $\mathbf{A}$.

5. Hodnost matice $\mathbf{A}$ je číslo r, které udává

   a) maximální počet lineárně závislých řádků (sloupců) matice $\mathbf{A}$,

   b) maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) matice $\mathbf{A}$,

c) hodnotu determinantu dané matice $\mathbf{A}$.

6. Dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ nazveme ekvivalentní, když

   a) mají stejnou hodnost,

   b) jsou stejného typu,

   c) se rovnají hodnoty jejich determinantů.

7. Při vynásobení libovolného řádku (sloupce) matice $\mathbf{A}$ číslem k $(k \neq 0, k \neq 1)$ se hodnost matice

   a) k krát zvětší,

   b) k krát zmenší,

   c) nezmění.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. c) 4. a); 5. b); 6. a); 7. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -44 & 15 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 21 & 11 \\ 4 & -5 & 5 \\ -9 & 18 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Vypočtěte hodnost matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ -7 & 10 & -20 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \\ 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Pro která x má matice $\mathbf{A}$ hodnost h($\mathbf{A}$) = 2 ?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3x-1 & x \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Proveďte diskusi hodnosti matice $\mathbf{A}$ vzhledem k parametru p.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & p \end{pmatrix}.$$

7. V anglicky psané zprávě je mezera označena 0, písmeno A označeno 1, B označeno 2, C označeno 3 atd. podle anglické abecedy. Zpráva byla kódována násobením zleva maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a odeslána ve tvaru

-19, 19, 25, -21, 0, 18, -18, 15,
3, 10, -8, 3, -2, 20, -7, 12.

Dekódujte zprávu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje (det $\mathbf{A}$ = 0), e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

2. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{X} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$.

3. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -19 & 12 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. a) $h(\mathbf{A}) = 2$, b) $h(\mathbf{B}) = 2$, c) $h(\mathbf{C}) = 2$, d) $h(\mathbf{D}) = 1$, e) $h(\mathbf{M}) = 3$, f) $h(\mathbf{F}) = 3$.

5. $x = \frac{2}{7}$. 6. $h(\mathbf{A}) = 2$ pro $p = 5$, $h(\mathbf{A}) = 3$ pro $p \neq 5$. 7. Do your homework.

Kontrolní test

1. Zjistěte, zda matice $\mathbf{A}$ je singulární:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) ano, b) ne.

2. Zjistěte, zda matice $\mathbf{B}$ je regulární:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) ano, b) ne.

3. K dané matici $\mathbf{A}$ vytvořte matici adjungovanou $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

4. K dané matici $\mathbf{A}$ vytvořte matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 29 & 18 & -3 \\ -11 & -7 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. K dané matici $\mathbf{A}$ vytvořte matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -19 & 5 & -6 \\ 12 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 9 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, b) nemá řešení.

7. Vypočtěte hodnost matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $h(\mathbf{A}) = 2$, b) $h(\mathbf{A}) = 4$.

8. Vypočtěte hodnost matice $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 5 & -11 & -29 \end{pmatrix}.$$

a) $h(\mathbf{B}) = 3$, b) $h(\mathbf{B}) = 2$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. a); 4. b); 5. b); 6. a); 7. a); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.4. znovu.

2.5. Soustava lineárních rovnic

Cíle

Řešení soustav lineárních rovnic je úloha, která se velmi často vyskytuje nejen při řešení úloh v různých oblastech matematiky, ale také ve většině vědních disciplín. Dobré praktické zvládnutí jednoduchých úloh o řešení soustav lineárních rovnic je samozřejmým předpokladem využití vhodného matematického software.

Definice 2.5.1.

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ nazveme množinu výrokových funkcí

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad (1)$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme **koeficienty soustavy** (1), $b_1, \dots, b_m$ je sloupec pravých stran, n-tici $(x_1', x_2', \dots, x_n')^T \in \mathbf{R}^n$ nazveme **řešením soustavy** (1), jestliže po dosazení za $x_1, \dots, x_n$ se stanou všechny výrokové formy pravdivými výroky.

Jestliže zavedeme matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

lze soustavu (1) psát ve tvaru $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **matice soustavy**, matice

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matice rozšířená. Jestliže $b_k = 0$ pro $k = 1, \dots, m$, pak soustavu (1) nazýváme soustavou homogenních rovnic, jestliže je alespoň jedno $b_k \neq 0$, hovoříme o soustavě nehomogenních rovnic.

Řešené úlohy

Příklad Pro soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad\quad - x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad &= 0 \\ x_3 \qquad &= -1 \end{aligned}$$

je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ matice soustavy,}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{A}|\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je rozšířená matice soustavy.

Věta 2.5.1. (Cramerovo pravidlo). Je-li $\mathbf{A}$ matice typu (n,n) a det $\mathbf{A} \neq 0$, pak soustava

$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$ má právě jedno řešení

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\det \mathbf{A}_1, \det \mathbf{A}_2, \dots, \det \mathbf{A}_n)^T,$$

kde

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n .$$

Důkaz : Vynásobíme rovnici $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$ zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme

$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B}$ a tedy $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B}$.

Vyjádříme-li inverzní matici a vynásobíme maticí $\mathbf{B}$, dostaneme v i-tém řádku

$$x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji} \,.\, b_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j \det \mathbf{A}_{ji} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A}_i ,$$

protože součet v předposledním výrazu je rozvoj det $\mathbf{A}_i$ podle i-tého sloupce. Existenci jiného řešení lze vyloučit sporem.

Řešené úlohy

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1 . \end{aligned}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

det $\mathbf{A} = 1 \neq 0$, det $\mathbf{A}_1 = 0$, det $\mathbf{A}_2 = 1$, det $\mathbf{A}_3 = 3$.

Podle předchozí věty je $\mathbf{X} = (0, 1, 3)^T$, tedy $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 3$.

Můžeme provést zkoušku

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Výklad

Řešení soustavy pomocí inverzní matice

Je-li $\mathbf{A}$ matice soustavy typu (m, n) a det $\mathbf{A} \neq 0$ ($\mathbf{A}$ je regulární), můžeme soustavu $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$ řešit násobením zleva inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme řešení dané soustavy $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\,\mathbf{B}$.

Řešené úlohy

Příklad Řešme soustavu pomocí inverzní matice.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -11\,. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 16 \neq 0\,, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\,\mathbf{B} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 \\ 80 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Věta 2.5.2. **(Frobeniova).** Soustava rovnic $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$ má řešení, právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Označíme-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r$ a $\mathbf{A}$ je typu (m, n), pak v případě $r = n$ (n počet neznámých) má soustava jediné řešení a v případě $n > r$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která můžeme zapsat pomocí $(n - r)$ parametrů.

Důkaz je obtížný a nebudeme jej provádět.

Výklad

Gaussova eliminační metoda řešení soustav lineárních rovnic

Předpokládejme, že matice $\mathbf{A}'|\mathbf{B}'$ vznikne z rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}|\mathbf{B}$ úpravami:

1. Výměnou dvou řádků,
2. vynásobením řádku číslem různým od nuly,
3. vynecháním řádků se samými nulami,
4. přičtením k-násobku ($k \neq 0$) řádku k jinému řádku.

Pak soustavy $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{A}' . \mathbf{X} = \mathbf{B}'$ mají stejná řešení. Správnost úvahy vyplývá z toho, že každý řádek rozšířené matice soustavy odpovídá příslušné rovnici. Uvedené úpravy můžeme s rovnicemi provádět.

Úpravy 1 - 4 nemění hodnost matice $\mathbf{A}$ ani matice $\mathbf{A}|\mathbf{B}$. Frobeniovu větu budeme proto aplikovat až na vhodně upravenou soustavu rovnic. Užitím úprav 1 - 4 budeme postupně upravovat rozšířenou matici soustavy na trojúhelníkový tvar tak, aby $a_{ij} = 0$ pro $i > j$. Způsob úpravy ukážeme v následujících příkladech.

Řešené úlohy

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14\,.
\end{array}
$$

Řešení:

Úpravy rozšířené matice soustavy budeme zapisovat do následující tabulky. Poslední sloupec, pro jehož prvky platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i\,, \qquad i = 1, \dots, m,$$

je kontrolní a součet prvků v řádku matice rozšířené musí vždy po provedení úpravy ve všech sloupcích být roven příslušnému prvku ve sloupci kontrolním.

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	Σ	úpravy
1 1 5	–7	0	
1 3 1	5	10	$r_2 - r_1$
2 1 1	2	6	$r_3 - 2r_1$
2 3 –3	14	16	$r_4 - 2r_1$
1 1 5	–7	0	
0 2 –4	12	10	
0 –1 –9	16	6	$2r_3 + r_2$
0 1 –13	28	16	$2r_4 - r_2$
1 1 5	–7	0	
0 2 –4	12	10	
0 0 –22	44	22	
0 0 –22	44	22	$r_4 - r_3$
1 1 5	–7	0	
0 2 –4	12	10	
0 0 –22	44	22	
0 0 0	0	0	

Po provedení úprav platí:

$h(\mathbf{A}') = h(\mathbf{A}'|\mathbf{B}') = 3$ a podle Frobeniovy věty má soustava jediné řešení, které určíme řešením nové soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 12 \\ & & & & -22x_3 & = & 44\,, \end{array}$$

$x_3 = -2$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$,

tedy $\mathbf{X} = (1, 2, -2)^T$.

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Řešení:

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\sum$	úpravy
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ -5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -8 \\ -5 \\ -10 \end{matrix}$	vyměníme řádek r_2 a řádek r_4
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -10 \\ -5 \\ -8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \\ \\ r_3 + r_2 \\ \\ \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ -5 \\ -7 \\ -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -10 \\ -15 \\ -8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \\ \\ \\ 2r_4 - r_3 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ -5 \\ -7 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -10 \\ -15 \\ -1 \end{matrix}$	

Po provedení úprav platí $h(\mathbf{A}') = 3$ a $h(\mathbf{A}'|\mathbf{B}') = 4$. Podle Frobeniovy věty nemá soustava řešení.

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & - & 7x_5 & = & 0\,.
\end{array}
$$

Řešení:

$\mathbf{A}$					Σ	úpravy
1	1	0	–3	–1	–2	
1	–1	2	–1	0	1	$r_2 - r_1$
4	–2	6	3	–4	7	$r_3 - 4r_1$
2	4	–2	4	–7	1	$r_4 - 2r_1$
1	1	0	–3	–1	–2	
0	–2	2	2	1	3	
0	–6	6	15	0	15	$r_3 - 3r_2$
0	2	–2	10	–5	5	$r_4 + r_2$
1	1	0	–3	–1	–2	
0	–2	2	2	1	3	
0	0	0	9	–3	6	
0	0	0	12	–4	8	$3r_4 - 4r_3$
1	1	0	–3	–1	–2	
0	–2	2	2	1	3	
0	0	0	9	–3	6	
0	0	0	0	0	0	

Soustava rovnic je homogenní a tedy vždy platí h($\mathbf{A}$) = h($\mathbf{A}|\mathbf{B}$), neboť $\mathbf{B} = (0,0,0)^T$, tj. soustava má řešení. Není tedy nutno psát sloupec $\mathbf{B}$.

Hodnost h($\mathbf{A}$) = 3.

Pro soustavu rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
 & & & & & & 9x_4 & - & 3x_5 & = & 0
\end{array}
$$

zvolíme vhodně 2 (t.j. (5 - 3)) parametry: $x_5 = 6p$ a $x_3 = q$. Pak dostaneme $x_4 = 2p$, $x_2 = q + 5p$ a $x_1 = 7p - q$.

Řešení soustavy je $x_1 = 7p - q$, $x_2 = 5p + q$, $x_3 = q$, $x_4 = 2p$, $x_5 = 6p$, $p, q \in \mathbf{R}$.

Výklad

Určení inverzní matice užitím Gaussovy metody

Mějme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}$ obě typu (n, n). Budeme-li provádět v matici $\mathbf{A}$ úpravy uvedené pod body 1 - 4 Gaussovy eliminační metody pro řešení soustav rovnic a upravíme-li tak matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{E}$ typu (n, n), lze všechny provedené úpravy vyjádřit jako násobení matice $\mathbf{A}$ maticí $\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} . \mathbf{B} = \mathbf{E}$. Z toho je zřejmé, že matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Proveďme stejné úpravy

i pro matici $\mathbf{E}$, t.j. $\mathbf{E} . \mathbf{B} = \mathbf{E} . \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$. To znamená, že takto vzniklá matice je inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$.

Řešené úlohy

Příklad Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}$ zapíšeme do následující tabulky.

$\mathbf{A}$	$\mathbf{E}$	$\sum$	úpravy
1 0 -1	1 0 0	1	
1 2 3	0 1 0	7	$r_2 - r_1$
-1 1 0	0 0 1	1	$r_3 + r_1$
1 0 -1	1 0 0	1	
0 2 4	-1 1 0	6	
0 1 -1	1 0 1	2	$2r_3 - r_2$
1 0 -1	1 0 0	1	$6r_1 - r_3$
0 2 4	-1 1 0	6	$3r_2 + 2r_3$
0 0 -6	3 -1 2	-2	
6 0 0	3 1 -2	8	$\cdot \frac{1}{6}$
0 6 0	3 1 4	14	

0 0 -6	3 -1 2	-2	$\cdot \frac{1}{6}$ $\cdot (-\frac{1}{6})$
1 0 0 0 1 0 0 0 1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{1}{3}$	
$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$	$\mathbf{E} \,.\, \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$		

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Kontrolní otázky

1. Matice soustavy je matice vytvořená

   a) ze sloupce pravých stran $(b_1, \ldots, b_m)$,

   b) z koeficientů soustavy a_{ij},

   c) z n neznámých $x_1, \ldots, x_n$.

2. Pokud sloupec pravých stran $b_k = 0$ pro $k = 1, \ldots, m,$ pak soustavu nazýváme

   a) soustavou homogenních rovnic,

   b soustavou nelineárních rovnic,

   a) soustavou nehomogenních rovnic.

3. Cramerovým pravidlem lze řešit

   a) jakoukoli soustavu lineárních rovnic,

   b) soustavu lineárních rovnic, pokud matice soustavy je singulární,

   c) soustavu lineárních rovnic, pokud matice soustavy je regulární.

4. Matematická věta, podle které se určuje počet řešení soustavy lineárních rovnic se nazývá

   a) Gaussova,

   b) Cramerova,

   c) Frobeniova.

5. Soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ má řešení

   a) vždy,

   b) právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}/\mathbf{B})$,

c) pokud je počet neznámých $x_1, \dots, x_n$ a počet rovnic stejný.

6. Gaussova eliminační metoda řešení soustav lineárních rovnic spočívá v úpravě rozšíření matice soustavy

   a) tak, aby ve sloupci pravých stran byly samé nuly,

   b) na trojúhelníkový tvar tak, aby $a_{ij} = 0$ pro $i > j$,

   c) na trojúhelníkový tvar tak, aby $a_{ij} = 0$ pro $i = j$.

7. Homogenní soustava lineárních rovnic

   a) má vždy řešení,

   b) má vždy nenulové řešení,

   c) nemá řešení.

Odpovědi na kontrolní otázky

1\. b); 2. a); 3. c); 4. c); 5. b); 6. b); 7. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Řešte různými způsoby soustavy lineárních rovnic (Cramerovým pravidlem, pomocí inverzní matice a Gaussovou eliminací):

a) $\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ x - y &= 7 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ 3x - 9y &= 1 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} 5x - y + 2z &= 4 \\ 3x + 5y - z &= 9 \\ -4x + 2y + 3z &= -17 \end{aligned}$,

d) $\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= -4 \\ 7x + 5y - 2z &= 14 \\ 2x - 8y + 5z &= -11 \\ -3x - 3y - 7z &= 1 \end{aligned}$, e) $\begin{aligned} 6x - 3y &= 24 \\ 4y - 7z &= -13 \\ 5x + 6z &= 43 \end{aligned}$,

f) $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 &= 9 \end{aligned}$, g) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -12 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \end{aligned}$,

h) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -14 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & - & 9x_3 & = & 20 \end{array}$.

2. Řešte soustavy lineárních rovnic:

a) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$, b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \end{array}$,

c) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$, d) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$,

e) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$, f) $\begin{array}{rcrcrcr} 0{,}1x & + & 0{,}2y & + & 0{,}3z & = & 1{,}4 \\ 0{,}3x & - & 0{,}1y & + & 0{,}2z & = & 0{,}7 \\ 0{,}5x & - & 0{,}4y & + & 0{,}1z & = & 0 \end{array}$,

g) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 8x_3 & = & -2 \end{array}$, h) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$,

i) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$, j) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & = & -4 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$.

3. Řešte soustavy homogenních rovnic:

a) $\begin{array}{rcrcr} 4x & - & y & = & 0 \\ 5x & + & 3y & = & 0 \end{array}$, b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$,

c) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$, d) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}$,

e) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$, f) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$,

g) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \end{array}$,

h) $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & & & = & 0 \end{array}$.

4. Proveďte diskusi řešení soustav vzhledem k parametru k:

a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ x & - & 4y & - & 3z & = & k \end{array}$, b) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & k \end{array}$.

5. Zvětšíme-li jednu stranu trojúhelníka o 11 cm a druhou stranu o 11 cm zmenšíme, dostaneme rovnostranný trojúhelník. Když první stranu vynásobíme čtyřmi, je o 10 cm větší než trojnásobek třetí strany. Vypočtěte velikosti stran trojúhelníka.

6. Kyselina sírová je složena z vodíku, síry a kyslíku. Poměr hmotnosti vodíku a síry je 1 : 16 a poměr hmotnosti kyslíku a síry je 2 : 1. Kolik každého prvku obsahuje 1323 g kyseliny?

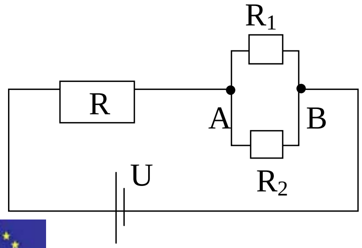
7. Hutník má čtyři různé slitiny, které obsahují cín, olovo, vizmut a kadmium. První slitina obsahuje 20 kg cínu a 10 kg olova. Druhá obsahuje 12 kg olova a 6 kg cínu. Třetí obsahuje 10,5 kg vizmutu, 6,4 kg olova a 3,1 kg cínu. Poslední slitina obsahuje 10 kg vizmutu, 5 kg olova, 2,5 kg kadmia a 2,5 kg cínu. Jaké množství každé slitiny je třeba použít na přípravu slitiny, která by obsahovala 81 kg vizmutu, 75 kg olova, 15 kg kadmia a 40 kg cínu ?

8. Vypočtěte proudy (podle Kirchhoffových zákonů) ve všech větvích elektrických sítí podle obr. a, b, kde hodnoty jednotlivých odporů a elektromotorického napětí jsou:

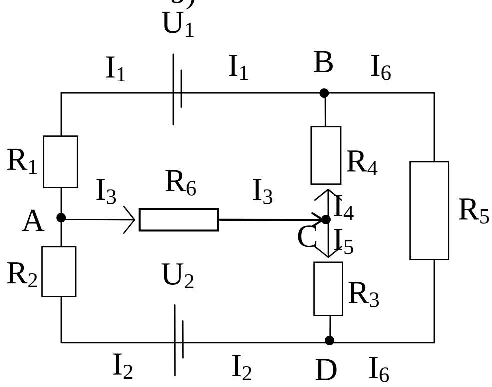
a) $R = 1000\ \Omega$, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $U = 2$ V,

b) $U_1 = 46$ V, $U_2 = 62$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 1{,}5\ \Omega$, $R_6 =$ $= 2\Omega$.

a)



b)



Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) (2, -5), **b)** nemá řešení, **c)** (2, 0, -3), **d)** (1, 1, -1), **e)** (5, 2, 3), **f)** (1, 5, -3), g) (3, 4, 5), **h)** nemá řešení.

2. a) $\left(\frac{6-8t}{5}, \frac{7t-4}{10}, t\right)$, **b)** (t+2, 2t, t), **c)** nemá řešení, **d)** $\left(\frac{5+t}{2}, 1+3t, \frac{-1-7t}{2}, t\right)$,

e) (r, 5r-4s-9, s, 7-3r+3s), **f)** (4-r, 5-r, r), **g)** (3-6t, 2-t, t), h) nemá řešení,

i) (r, 2r+3s-3, s, 1-r+2s), **j)** (-2, 2-t, -3, t).

3. a) (0, 0), **b)** (2t, -t, 3t), **c)** (0, 0, 0), **d)** (3t, 2t, t), **e)** (7t, 3t, -2t, t), **f)** (-t, t, -3t, 2t), **g)** (t, 2t, 3t, 4t), **h)** (t, -t, 2t, 3t, 2t).

4. a) pro $k = 3$ nekonečně mnoho řešení, pro $k \neq 3$ nemá řešení, **b)** pro $k \neq -3$ nemá řešení, pro $k = -3$ nekonečně mnoho řešení.

5. Strany mají délku 43 cm, 65 cm a 54 cm.

6. 27 g vodíku, 432 g síry a 864 g kyslíku.

7. Je třeba 5,4 kg 1. slitiny, 45,6 kg 2. slitiny, 40 kg 3. slitiny a 120 kg 4. slitiny.

8. a) $I_1 \approx 1{,}45$ mA, $I_2 \approx 0{,}48$ mA, $I \approx 1{,}93$ mA, **b)** $I_1 = 2$A, $I_2 = 7$A, $I_3 = 9$A, $I_4 = 6$A, $I_5 =$ $= 3$A, $I_6 = -4$A.

Kontrolní test

1. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} -x_1 &+ x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 &+ 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 &- 2x_2 - x_3 = -1\,. \end{aligned}$$

a) $(1;9;1)$, b) $(1;3;-2)$.

2. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 4x_1 &+ 3x_2 + 6x_3 = 1 \\ 3x_1 &+ 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_1 &- 2x_2 + 2x_3 = -9\,. \end{aligned}$$

a) $(1;-1;0)$, b) $(1-18t;\,3+2t;\,-2+11t),\ t \in R$.

3. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 3\,. \end{aligned}$$

a) nemá řešení, b) $(-1-t; 1-t; 1+t),\ t \in R$.

4. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5\,. \end{aligned}$$

a) $(-1-t; 3+t; t),\ t \in R$, b) $(4;1;1)$.

5. Řešte soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ x + 5y - 4z &= -5 \\ 4x + y - 3z &= -4\,. \end{aligned}$$

a) $(1,3,9)$, b) $(5,6,10)$.

6. Řešte soustavu lineárních rovnic užitím Gaussovy metody:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4\,. \end{aligned}$$

a) $(t, 1-t, -t, t)$, b) $(-1-3t, -t, t, 1+t)$.

7. Řešte soustavu komplexních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

a) $(-t, 3t, 2t, -t)$, b) $(10t, -16t, -t, t)$.

8. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= -2 \\ 4x + y + z &= 4\,. \end{aligned}$$

a) $(2,2,-3)$, b) $(1,2,-2)$.

Výsledky testu

1. b); 2. b); 3. a); 4. a); 5. b); 6. a); 7. b); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.5. znovu.

2.6. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Cíle

V této části se budeme zabývat hledáním čísla λ, které je řešením rovnice

$$\mathbf{A} \, . \, \mathbf{x} = \lambda \, \mathbf{x} \, , \qquad (1)$$

kde $\mathbf{A}$ je matice řádu n. Znalost řešení takové rovnice má řadu aplikací nejen v matematice.

Definice 2.6.1.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice řádu n, kde $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristické číslo** matice $\mathbf{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ tak, že

$\mathbf{A} \, . \, \mathbf{x} = \lambda \, \mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristický vektor** příslušný k λ.

Poznámka

*Množinu všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ nazýváme **spektrum** matice $\mathbf{A}$.*

Řešené úlohy

Příklad Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$\mathbf{A} \, . \, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \, \mathbf{x}.$$

To znamená, že $\lambda = 3$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x} = (2, 1)^T$ je vlastní vektor příslušný k $\lambda =$ $= 3$. Zřejmě také každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$ je vlastním vektorem, protože

$$\mathbf{A}.(k\,\mathbf{x}) = k(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{x}) = k(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda(k\,\mathbf{x}).$$

Tak například $(4, 2)^T$ je také vlastní vektor příslušný k $\lambda = 3$. Platí

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Výklad

Rovnici (1) můžeme zapsat ve tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o},$$

což představuje soustavu homogenních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{array},$$

která má netriviální řešení, právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Vypočteme-li předchozí determinant, získáme polynom $p(\lambda)$ stupně n. Tento polynom se nazývá ***charakteristickým polynomem*** a rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, ***charakteristickou rovnicí*** matice $\mathbf{A}$. Řešením rovnice $p(\lambda) = 0$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Tak dostaneme n, ne nutně různých, vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.

Řešené úlohy

Příklad Určeme vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice má tvar $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Dostaneme $(2 - \lambda)(-2 - \lambda)(2 -\lambda) - 6 - (-2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) = 0$, t.j.

$$-\lambda(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Spektrem matice $\mathbf{A}$ je tedy množina $\{ 0, 1 \}$.

Nalezení vlastních vektorů příslušných k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ pak vede k řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{A} - 0.\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-0 & 3 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & -3 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody zjistíme, že ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_1 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Položíme $x_3 = t$ a dostaneme $x_1 = x_2 = x_3 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru

$\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, $t \in \mathbf{C}$.

Každý násobek vektoru $(1, 1, 1)^T$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$.

Podobně pro vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ budeme řešit soustavu

$$(\mathbf{A} - 1.\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Položíme $x_2 = r$, $x_3 = s$ a dostaneme $x_1 = 3r - s$. Řešení soustavy je tedy tvaru

$\mathbf{x} = (3r - s, r, s)^T$, $r, s \in \mathbf{C}$.

Každý násobek vektoru $(2, 1, 1)^T$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

l) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x} = (t, -2t)^T$, b) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (4t, 3t)^T$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$,

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$, d) $\lambda_1 = 3 + 4i$, $\mathbf{x} = (2it, t)^T$; $\lambda_2 = 3 - 4i$, $\mathbf{x} = (-2it, t)^T$,

e) $\lambda_1 = 2 + i$, $\mathbf{x} = (t, (1 + i)t)^T$; $\lambda_2 = 2 - i$, $\mathbf{x} = (t, (1 - i)t)^T$, f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

$\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$, g) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t, 0)^T$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x} = (r, s, -s)^T$, h) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$; $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$; $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{x} = (-t, -t, 5t)^T$, i) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (7t, 3t, t)^T$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (3t, 2t, t)^T$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, j) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\mathbf{x} = (t, 0, t)^T$, k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (r, s, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$; $\lambda_4 = 4$, $\mathbf{x} = (0, 0, 0, t)^T$; l) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (t, 2t, 0, 0)^T$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (0, t, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$,

vždy pro r, s, t ∈ **C**.

Kontrolní otázky

1. Vlastní (charakteristické) číslo matice $\mathbf{A}$ řádu n je takové číslo $\lambda \in \mathbb{C}$,

   a) které se v matici vyskytuje nejčastěji,

   b) že platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{x}$ je vlastní vektor,

   c) že platí $\lambda \cdot \mathbf{A} = A \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{x}$ je vlastní vektor.

2. K matici $\mathbf{A}$ řádu n existuje

   a) právě n vlastních čísel matice $\mathbf{A}$,

   b) nejvýše 1 vlastní číslo matice $\mathbf{A}$,

   c) právě n různých vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.

3. Je-li vektor $\mathbf{x}$ vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$, pak je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ také

   a) každý násobek vektoru $\mathbf{x}$,

   b) každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$,

   c) součet vektoru $\mathbf{x}$ a jednotkového vektoru.

4. Charakteristickou rovnicí matice $\mathbf{A}$ nazýváme

   a) $\det \mathbf{A} = 0$,

   b) $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{o}$,

   c) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

5. Řešením charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ dostaneme

   a) vlastní čísla matice $\mathbf{A}$,

   b) vlastní vektory matice $\mathbf{A}$,

   c) prvky inverzní matice.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. a).

Kontrolní test

1. Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-9 & 2 & 6\\ 5 & 0 & -3\\ -16 & 4 & 11\end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=3$, b) $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$.

2. Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=4$, b) $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-3$.

3. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1=1, \lambda_2=3, \mathbf{x}_1=(t,-t), \ \mathbf{x}_2=(t,t)$, b) $\lambda_1=-1, \lambda_2=4, \mathbf{x}_1=(2t,-t), \ \mathbf{x}_2=(3t,t)$.

4. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \mathbf{x}_1=(1,t), \ \mathbf{x}_2=(t,2)$,

b) $\lambda_1=4, \lambda_2=6, \mathbf{x}_1=(t,-t), \ \mathbf{x}_2=(t,t)$.

5. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -16\\ 1 & 2 & -7\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_{1,2,3}=0, \ \mathbf{x}=(t,\frac{2}{3}t,\frac{1}{3}t)$, b) $\lambda_{1,2,3}=1, \ \mathbf{x}=(t,-t,t)$.

6. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3, \mathbf{x}_1 = (t, 0, 0), \ \mathbf{x}_2 = (t, -t, 2t),$

b) $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -2, \lambda_3 = -3, \mathbf{x}_1 = (1, 1, t), \ \mathbf{x}_2 = (3t, -t, 1).$

Výsledky testu

1. b); 2. b); 3. a); 4. b); 5. a); 6 a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.6. znovu.

3. VEKTOROVÝ POČET A ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Průvodce studiem

Geometrii lze budovat metodou syntetickou nebo metodou analytickou. Při syntetické metodě pracujeme přímo s geometrickými objekty. Při analytické metodě jsou geometrické objekty charakterizovány pomocí číselných údajů. Taková analytická metoda je užívána např. v analytické geometrii a v diferenciální geometrii. Při výkladu analytické geometrie nám k charakteristice geometrických objektů poslouží zejména algebra, na rozdíl od diferenciální geometrie, k jejímuž výkladu je nutno studovat limitní procesy.

Předpokládané znalosti

Nutnou podmínkou k zvládnutí studia analytické geometrie je dobrá znalost vektorového počtu, kterým se budeme zabývat ve druhé části této kapitoly.

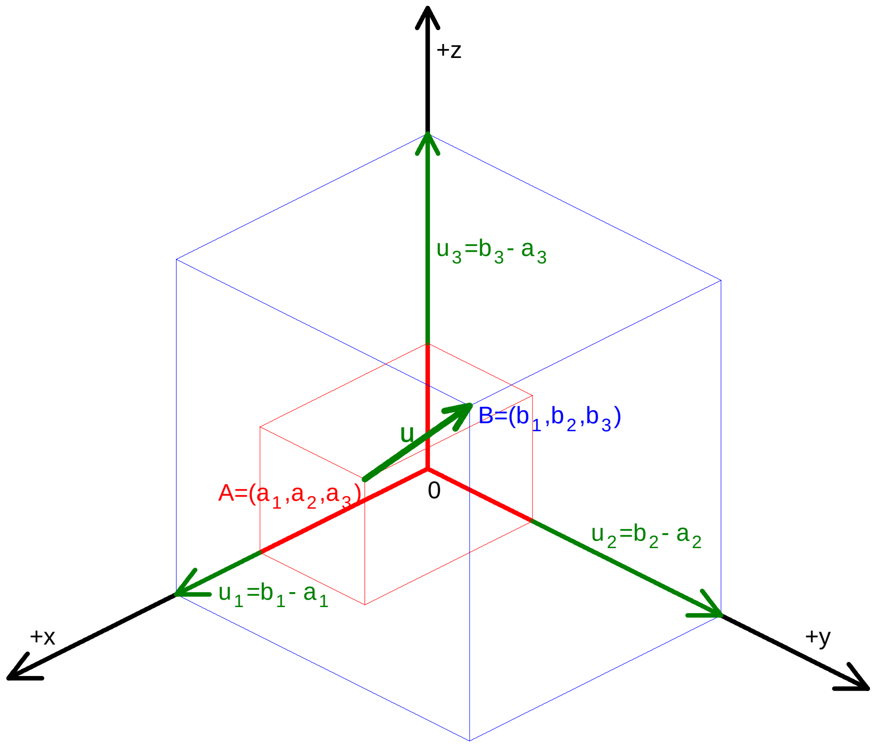
Průvodce studiem

Slova prostor se ve středoškolské geometrii užívá pro obyčejný prostor elementární geometrie. V matematice však užíváme názvu prostor v řadě rozmanitých významů. Obyčejný prostor se bude v dalším nazývat ***trojrozměrný euklidovský prostor*** nebo také ***euklidovský prostor dimenze 3*** a budeme jej označovat E_3. Rovina se bude nazývat ***dvojrozměrný euklidovský prostor*** nebo také ***euklidovský prostor dimenze 2*** a budeme ji označovat E_2. Konečně přímka se bude nazývat jednorozměrný euklidovský prostor nebo také ***euklidovský prostor dimenze 1*** a budeme ji označovat E_1. Avšak všude, kde to bude účelné, budeme i nadále užívat obvyklých termínů rovina a přímka a také budeme užívat názvu (obyčejný) prostor. Budeme studovat vlastnosti geometrických objektů v prostoru E_3 a budeme předpokládat základní znalosti geometrie v prostoru E_2. Vzhledem k pozdějšímu použití zavedeme některé pojmy v této kapitole nejen pro n = 3, tj. v E_3, ale obecně pro libovolné, konečné $n \in N$, tj. v E_n. Takový prostor se bude nazývat ***n-rozměrný euklidovský prostor***.

3.1. Euklidovský prostor

Výklad

Zvolme v prostoru tzv. kartézskou soustavu souřadnic. Zvolíme pevný bod O, který nazveme ***počátkem***, a tři navzájem kolmé přímky x, y, z procházející počátkem O, které nazveme ***osami***. Každému bodu osy lze přirozeným způsobem přiřadit reálné číslo tak, že číslo 0 je přiřazeno počátku soustavy souřadnic O. ***Kartézskou soustavou souřadnic*** budeme rozumět čtveřici < O, +x, +y, +z >, kde O je počátek a polopřímky +x, +y, +z jsou tzv. kladné části souřadnicových os x, y, z. Každému bodu A prostoru můžeme nyní jednoznačně přiřadit uspořádanou trojici reálných čísel (a_1, a_2, a_3) (obr. 1) a naopak každé uspořádané trojici reálných čísel (a_1, a_2, a_3) je přiřazen jednoznačně bod A prostoru.



Obr. 1

Řekneme, že čísla a_1, a_2, a_3 jsou souřadnice bodu A v kartézské soustavě souřadnic < 0, +x, +y, +z >. Vzhledem k vzájemné jednoznačnosti přiřazení bodů prostoru a uspořádaných trojic reálných čísel z $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$, můžeme prostor a množinu $\mathbf{R}^3$ ztotožnit.

Uvažujme nyní množinu $\underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{\text{n-krát}} = \mathbf{R}^n$. Každou uspořádanou n-tici

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ můžeme považovat za bod jistého prostoru. Pro n = 1 vytvoří všechny body prostoru přímku (1-rozměrný prostor), pro n = 2 vytvoří všechny body prostoru rovinu (2-rozměrný prostor), pro n = 3 vytvoří všechny body prostoru prostor (3-rozměrný prostor) a pro libovolné $n \in N$ vytvoří všechny body n-rozměrný prostor. Abychom v takových prostorech mohli řešit úlohy, v nichž se zabýváme vzdálenostmi bodů a měřením úhlů, je třeba zavést v prostoru tzv. metriku. Pro naše potřeby zavedeme běžnou euklidovskou metriku.

Definice 3.1.1.

Uspořádanou n-tici $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ budeme nazývat bodem n-rozměrného euklidovského prostoru $E_n = R^n$, je-li definována vzdálenost

$$\rho\,(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \qquad (1)$$

dvou libovolných bodů A a $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Poznámka

1. Pro n = 1 je $\rho\,((x_1), (x_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$ *a* E_1 *je přímka (1-rozměrný euklidovský prostor).*

2. Pro n = 2 je $\rho\,((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ *a* E_2 *je rovina (2-rozměrný euklidovský prostor).*

3. Pro n = 3 je $\rho\,((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ *a* E_3 *je prostor (3-rozměrný euklidovský prostor).*

4. Vzdálenost dvou bodů je zobrazení $E_n \times E_n \to \langle 0,\infty)$, tj. $(A,B) \to \rho\,(A,B) \in \langle 0,\infty)$ splňující axiomy:

$$\rho\,(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B,$$

$$\rho\,(A,B) = \rho\,(B,A)\,,$$

$$\rho\,(A,B) \le \rho\,(A,C) + \rho\,(C,B), \text{ pro každé } A,B,C \in E_n.$$

Každý prostor, ve kterém je definována vzdálenost splňující uvedené axiomy, se nazývá ***metrický****.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte obvod trojúhelníka, jehož vrcholy jsou A = (2, 1, 0), B = (8, 0, 0), C = (4, 4, -5).

2. Zjistěte, který z daných trojúhelníků je rovnoramenný a který pravoúhlý:

a) A = (1, 4, 7), B = (-3, 12, -1), C = (-1, 2, 3),

b) M = (-1, 2, 0), N = (-4, -1, 0), R = (-7, 5, -1),

c) A = (1, -3, 3), B = (4, 3, 5), C = (1, 0, -3),

d) E = (2, 8 ,6), F = (5, 2, 7), G = (-1, 6, 3).

3. Na ose x najděte bod, jehož vzdálenost od bodu N = (-4, 6, 6) je rovna 12.

4. Na ose z najděte bod C takový, aby body A = (-4, 1, 7), B = (3, 5, -2), C tvořily rovnoramenný trojúhelník.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $\sqrt{37}+\sqrt{38}+\sqrt{57}$. **2. a)** pravoúhlý, **b)** rovnoramenný, **c)** ani pravoúhlý, ani rovnoramenný, **d)** pravoúhlý. **3.** $(-4 \pm 6\sqrt{2},0,0)$. **4.** Jestliže ρ (A,C) = ρ (B,C), pak C = (0, 0, $\frac{14}{9}$), jestliže ρ (A,B) = ρ (B,C), pak C = (0, 0, $-2 + 4\sqrt{7}$), jestliže ρ (A,B) = ρ (A,C), pak C = (0, 0, $-2 - 4\sqrt{7}$).

3.2. Vektory

Výklad

Definujme nyní vektor tak, jak je obvyklé pro potřeby geometrie a fyziky.

Definice 3.2.1.

Vektor $\mathbf{u}$ je množina všech souhlasně orientovaných rovnoběžných úseček stejné délky.

Poznámky

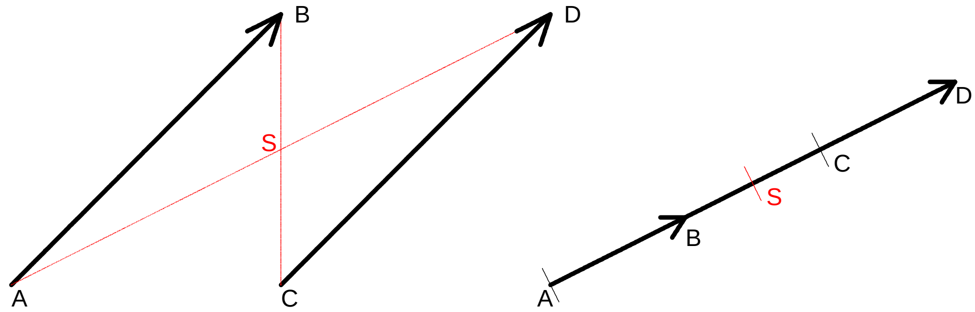
*1. **Orientovanou úsečkou** $\overrightarrow{AB}$ rozumíme uspořádanou dvojici bodů A, B, kde první bod A nazýváme počáteční a druhý bod B koncový.*

*2. Je-li $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$, nazýváme úsečku $\overrightarrow{AB}$ **umístěním vektoru $\mathbf{u}$**, které budeme také někdy nazývat vektorem a značit také $\overrightarrow{AB} = B - A$.*

*3. Je-li $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{u}$, kde O je počátek souřadné soustavy, pak souřadnice bodu X jsou souřadnicemi vektoru $\mathbf{u}$. Vektor $\overrightarrow{OX}$ nazýváme **polohový vektor** bodu X a při počítání nebudeme mezi bodem X a vektorem $\overrightarrow{OX} = X - O$ dělat žádný rozdíl, tj. $\overrightarrow{OX} = X$.*

Výklad

Z předchozí definice a následujících poznámek vyplývá, že pro každé umístění vektoru $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, umíme jednoznačně určit uspořádanou trojici $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = B - A$, (obr.1). Jestliže $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{u}$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$, pak úsečky AD a BC (obr. 2) mají společný střed $S = (s_1, s_2, s_3)$ a platí:



Obr. 2

$$s_i = \frac{a_i + d_i}{2} = \frac{b_i + c_i}{2} \quad \text{pro } i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Odtud vyplývá, že

$$b_i - a_i = d_i - c_i \quad \text{pro } i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Obráceně předpokládejme, že pro dvě orientované úsečky platí vztahy (2). Pak platí i vztahy (1) a úsečky AD a BC mají stejný střed, t.j. $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$ a $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{u}$. Tím jsme dokázali následující větu.

Věta 3.2.1. Pro dvě orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ platí $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$ a zároveň $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{u}$ právě když platí vztahy: $b_i - a_i = d_i - c_i$ pro $i = 1, 2, 3$.

Poznámky

1. Předpokládejme, že $\overrightarrow{AB}$ *je umístěním vektoru* $\boldsymbol{u}$*. Potom uspořádanou trojici čísel* (u_1, u_2, u_3)*, kde* $u_1 = b_1 - a_1$*,* $u_2 = b_2 - a_2$*,* $u_3 = b_3 - a_3$*, nazýváme* ***souřadnice vektoru*** $\boldsymbol{u}$ *a píšeme* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$*, nebo také* $\boldsymbol{u} = B - A$ *(obr. 1).*

2. Věta 1 říká, že pro výpočet souřadnic vektoru nezáleží na výběru jeho umístění.

3. Označme V_3 *množinu všech vektorů v* E_3 *a označme* $\boldsymbol{R}^3$ *množinu všech uspořádaných trojic* (u_1, u_2, u_3) *reálných čísel. Nyní můžeme obě množiny ztotožnit,* $V_3 = \boldsymbol{R}^3$ *a psát* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$*. Podobně při označení množiny všech vektorů prostoru* E_n *symbolem* V_n *můžeme psát* $V_n = \boldsymbol{R}^n$ *a* $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$*. Sčítání vektorů z* V_n *a jejich násobení je nyní dáno stejně jako v kap. 2.1.*

Definice 3.2.2.

Nechť $\overrightarrow{AB}$ je umístění vektoru $\mathbf{u}$. **Velikostí vektoru** $\mathbf{u}$, kterou označíme $|\mathbf{u}|$, nazýváme vzdálenost bodů A,B. Jestliže $|\mathbf{u}| = 1$, potom říkáme, že $\mathbf{u}$ je **jednotkový vektor.**

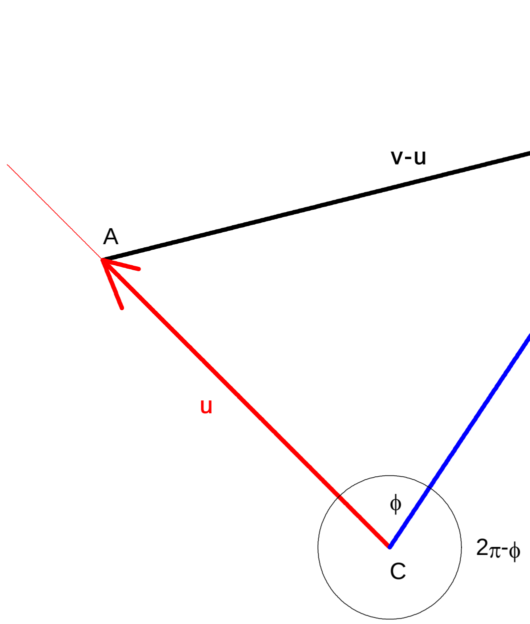
Věta 3.2.2. Pro velikost vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, platí

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}\,. \tag{3}$$

Důkaz: Jestliže je $\overrightarrow{AB}$ umístěním vektoru $\mathbf{u}$, potom $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, ... , ... , $u_n = b_n - a_n$. Z rovnosti $|\mathbf{u}| = \rho\,(A,B)$ a ze vzorce (1, kap. 3.1) ihned vyplývá (3). Tím je důkaz věty proveden.

Výklad

Předpokládejme, že jsou dány dvě polopřímky CA, CB (obr. 3). Obě polopřímky mají společný počáteční bod C a rozdělují rovinu ABC v obecném případě na dva neorientované úhly, z nichž jeden je konvexní (v obr. 3 je jeho velikost označena φ) a druhý je nekonvexní (v obr. 3 je jeho velikost označena $2\pi - \varphi$). Číslo φ nazveme odchylkou polopřímek CA, CB.



Obr. 3

V případě, že polopřímky CA, CB jsou totožné, resp. navzájem opačné, definujeme $\varphi = 0$, resp. $\varphi = \pi$. Z předcházející úvahy vyplývá, že pro odchylku dvou polopřímek o společném počátku platí: $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$.

Definice 3.2.3.

Nechť $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ jsou umístění dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (obr. 3). Označme symbolem φ odchylku polopřímek CA, CB. Číslo φ nazýváme **úhlem vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$**. Jestliže $\varphi = \pi/2$, potom říkáme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou **navzájem kolmé.**

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete koncový bod N vektoru $\mathbf{a} = \overrightarrow{MN} = (4, 2, 3)$, je-li jeho počáteční bod M = (2, 0, -1).
2. Určete velikost vektorů $\mathbf{p} = (0, -4, 3)$, $\mathbf{q} = (3, 4, -12)$, $\mathbf{r} = (2, 1, \sqrt{3})$.
3. Vypočtěte souřadnice a velikost vektorů $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$, kde A = (1, 2, 3), B = (2, -2, -6), C = (-3, 0, 3).
4. Jsou dány tři za sebou jdoucí vrcholy rovnoběžníka ABCD: A = (2, -2, 2), B = (4, 2, 0), C = (7, 4, 3). Najděte souřadnice vrcholu D.
5. Najděte souřadnice středu S úsečky AB, kde A = (1, -2, 4), B = (1, 3, 2).

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. N = (6, 2, 2). **2.** $|\mathbf{p}| = 5$, $|\mathbf{q}| = 13$, $|\mathbf{r}| = 2\sqrt{2}$. **3.** $\mathbf{a} = (4, 2, 0)$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{5}$, $\mathbf{b} = (5, -2, -9)$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{110}$. **4.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D = (5, 0, 5)$. **5.** $S = (1, \frac{1}{2}, 3)$.

3.3. Operace s vektory

Výklad

Definice 3.3.1.

Nechť φ je úhel dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (obr. 3). **Skalárním součinem vektorů** $\mathbf{u},\mathbf{v}$ rozumíme číslo, které budeme označovat $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ (někdy stručně $\mathbf{uv}$) a které definujeme rovností

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\,\mathbf{u}\,|\,|\,\mathbf{v}\,|\cos\varphi. \qquad (1)$$

Jestliže je alespoň jeden z vektorů nulový, pak definujeme $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$.

Věta 3.3.1. Skalární součin dvou vektorů je roven nule právě tehdy, když oba vektory jsou buď nenulové na sebe kolmé nebo alespoň jeden z vektorů je nulový.

Důkaz: Věta je přímým důsledkem předcházející definice.

Věta 3.3.2. Pro libovolné dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ platí:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \qquad (2)$$

Důkaz.

a) Předpokládejme nejprve, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Potom jsou body A, B, C vrcholy trojúhelníka (obr. 3), v němž platí kosinová věta

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi,$$

čili

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2 = (u_1)^2 + (u_2)^2 + \ldots + (u_n)^2 + (v_1)^2 + (v_2)^2 + \ldots +$$

$$+ (v_n)^2 - 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}).$$

Jednoduchá úprava této rovnosti nás dovede ke vzorci (2).

b) Předpokládejme, že vektory **u**, **v** jsou lineárně závislé. V tomto případě body A, B, C leží na jedné přímce a obratu s kosinovou větou nelze použít. Jeden z obou vektorů můžeme napsat jako součin druhého vektoru a reálného čísla k. Nechť například **v** = k.**u**. Předpokládejme nejprve, že k > 0. Potom můžeme psát:

$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos 0 = |\mathbf{u}|.|k\,\mathbf{u}| =$

$$= k\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}\,.\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = ku_1^2 + ku_2^2 + \ldots + ku_n^2 = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n.$$

V případě, že k< 0, postupujeme analogicky, případ k = 0 je evidentní. Tím je věta dokázána.

Poznámka

1. Ze vzorců (3), (kap. 3.2) a (2) (kap. 3.3) plyne okamžitě správnost dalšího vzorce pro výpočet velikosti vektoru $\boldsymbol{u}$*:*

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}}.$$

Užijeme-li označení $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}$*, můžeme předcházející vzorec napsat stručně ve tvaru*

$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^2}$ *, nebo* $|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}^2$.

2. Skalární součin vektorů, který je zobrazením

$V_n \times V_n \to \boldsymbol{R},\ (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) \to u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \in \boldsymbol{R},$

splňuje následující vztahy, jejichž správnost plyne z vlastností reálných čísel:

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u},$

$(k\boldsymbol{u}).\boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}),$

$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{w},$

pro každé $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_n$ *a* $k \in \boldsymbol{R}$.

3. Velikost vektoru je zobrazení $V_n \to \langle 0, \infty),\ |\boldsymbol{u}| \to \sqrt{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}} \in \boldsymbol{R}$ *a z vlastností reálných čísel vyplývají přímo vztahy*

$|\boldsymbol{u}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o},$

$|k\boldsymbol{u}| = |k|\,|\boldsymbol{u}|$,

$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|$,

pro všechna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_n$ *a* $k \in \boldsymbol{R}$.

4. Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$*, které jsou lineárně závislé, tj.* $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$, $k \in \boldsymbol{R}$*, se nazývají* ***kolineární.***

Řešené úlohy

Příklad Určeme úhel vektorů $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ a $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

Řešení:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{1.0 + 1.1 + 0.1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Definice 3.3.2.

Nechť jsou dány vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vektor

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$

který značíme $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, se nazývá **vektorový součin vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.**

Poznámky

1. Vektorový součin je zobrazení $V_3^2 \to V_3$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \in V_3$ *splňující vztahy*

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$,

$(k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$,

$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$,

pro všechna $k \in R$ *a* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_3$.

2. Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *lze zapsat ve tvaru determinantu*

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\boldsymbol{i}$ = (1, 0, 0), $\boldsymbol{j}$ = (0, 1, 0), $\boldsymbol{k}$ = (0, 0, 1) jsou jednotkové vektory ve směru os kartézské soustavy souřadnic. Rozvojem podle prvního řádku totiž dostaneme

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

3. Z definice vektorového součinu zřejmě plyne, že pro nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí, že $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ právě tehdy, když $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou lineárně závislé.

Věta 3.3.3. Vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je vektor kolmý na vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$.

Důkaz: Pro vektor $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}.(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}.\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u.i} & \mathbf{u.j} & \mathbf{u.k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Vzhledem k tomu, že skalární součin $\mathbf{u}.(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$, jsou vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ na sebe kolmé.

Pro vektor $\mathbf{v}$ je důkaz obdobný.

Věta 3.3.4. Pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$ platí

$$|\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,| = |\,\mathbf{u}\,|\,|\,\mathbf{v}\,| \sin\varphi, \text{ kde } \varphi \text{ je úhel vektorů } \mathbf{u}, \mathbf{v}.$$

Důkaz: Dokazovaný vztah umocníme na druhou. Levá strana rovnosti pak je

$$|\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,|^2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 +$$

$$+ (u_1v_2 + u_2v_1)^2 = u_2^2v_3^2 - 2u_2u_3v_2v_3 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_1^2 - 2u_1u_3v_1v_3 + u_1^2v_3^2 +$$

$$+ u_1^2v_2^2 - 2u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_1^2\,.$$

Upravíme pravou stranu užitím věty 2.

$$|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\sin^2\varphi = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2(1-\cos^2\varphi) = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\cos^2\varphi =$$

$$= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2 = (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 =$$

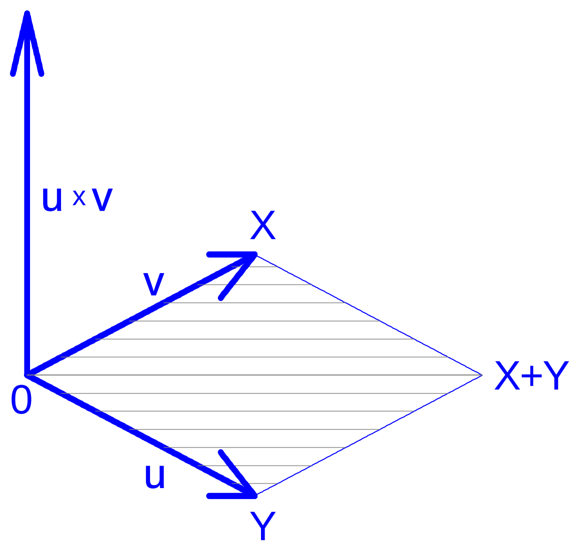
$$= u_1^2v_1^2+u_2^2v_1^2+u_3^2v_1^2+u_1^2v_2^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_2^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_3^2+u_3^2v_3^2-u_1^2v_1^2-u_2^2v_2^2-$$

$$-u_3^2v_3^2-2u_1u_2v_1v_2-2u_1u_3v_1v_3-2u_2u_3v_2v_3 =$$
$$= u_2^2v_1^2+u_3^2v_1^2+u_1^2v_2^2+u_2^2v_3^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_3^2-2u_1u_2v_1v_2-2u_1u_3v_1v_3-2u_2u_3v_2v_3 .$$

Z porovnání výsledků plyne, že levá strana rovnosti se rovná pravé.

Poznámky

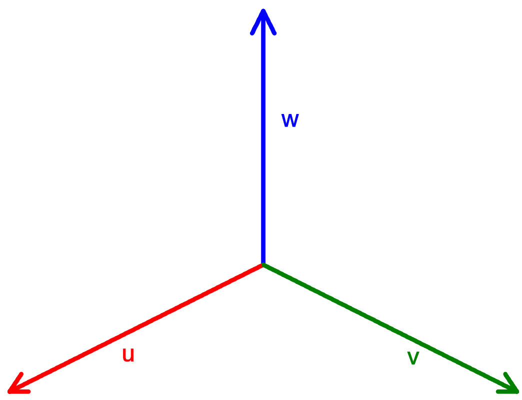
1. Při umístění vektorů $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{u}$, $\overrightarrow{OY} \in \mathbf{v}$ *je velikost vektorového součinu rovna obsahu rovnoběžníka O, X, Y, X+Y (obr. 4) pro* $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| \neq 0$.



Obr. 4

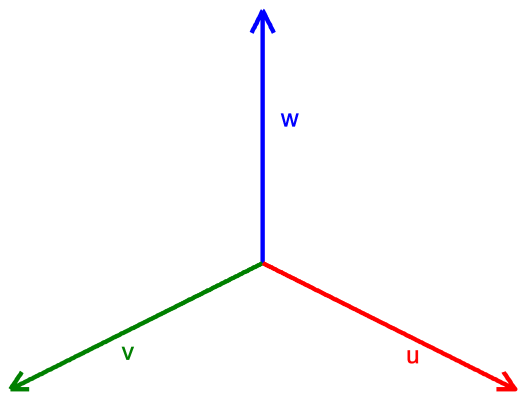
-

2. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a* $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *v tomto pořadí tvoří tzv. pravotočivou trojici (obr. 5).*



pravotočivá trojice vektorů

(**u**, **v**, **w**)



levotočivá trojice vektorů

(**u**, **v**, **w**)

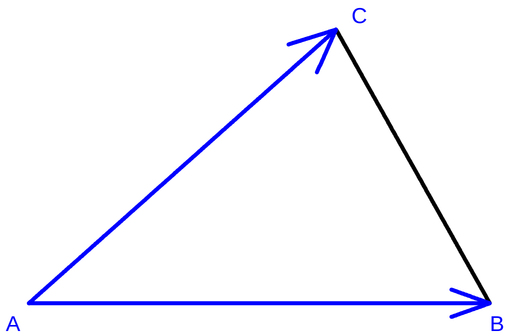
Obr. 5

Řešené úlohy

Příklad Stanovme obsah trojúhelníka o vrcholech A = (1, 0, 1), B = (2, -1, 1) a

C = (1, 1, -1) (obr. 6).

Řešení:



Obr. 6

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 1, -2).$$

$$P\Delta = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|\,2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}\,| = \frac{1}{2}\,|\,(2, 2, 1)\,| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4+4+1} = \frac{3}{2}.$$

Definice 3.3.3.

Číslo $\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ se nazývá **smíšený součin vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$** $\in V_3$.

Poznámky

1. Smíšený součin vektorů je zobrazení $V_3^3 \to \boldsymbol{R}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \to \boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{R}$.

2. Smíšený součin vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *lze vyjádřit následujícím způsobem:*

$$(u_1, u_2, u_3) \,.\, ((v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3)) = (u_1, u_2, u_3) \,.\, \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

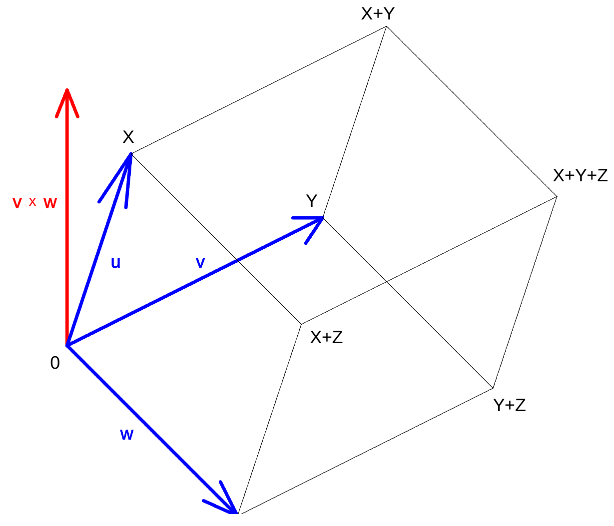
3. Z vlastností determinantů plyne, že jakákoliv výměna dvou vektorů smíšeného součinu mění jeho znaménko.

Věta 3.3.5. Nechť $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ jsou umístěním lineárně nezávislých vektorů

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$. Pak $|\, \mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \,|$ je rovna objemu šikmého hranolu (rovnoběžnostěnu)

o vrcholech O, X, Y, X+Y, Z, X+Z, Y+Z, X+Y+Z.

Důkaz:



Obr. 7

Obsah rovnoběžníka O, Y, Y+Z, Z je roven $\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$. Platí $|\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = |\mathbf{u}|.\, |\mathbf{v} \times \mathbf{w}||\cos\varphi|$, kde φ je úhel vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Výraz $|\mathbf{u}|.|\cos\varphi|$ je pak velikost výšky uvažovaného hranolu na stěnu O, Y, Y+Z, Z.

Poznámky

1. Z definice smíšeného součinu a z věty 5 plyne, že pro nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ *platí* $\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = 0$ *právě tehdy, když jsou lineárně závislé.*

2. Lineárně závislé vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ *se nazývají komplanární.*

Řešené úlohy

Příklad Stanovme objem hranolu určeného vrcholy (0,0,0), (1,1,1), (2,-1,0), (4,0,-1).

Řešení: Zbývající vrcholy mají souřadnice (3,0,1), (5,1,0), (6,-1,-1) a (7,0,0).

$$V = \left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right| = |1+4+2| = 7.$$

Kontrolní otázky

1. Jak je definována vzdálenost dvou libovolných bodů $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$ 3-rozměrného euklidovského prostoru:

   a) $\rho(A,B)=\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2}$,

   b) $\rho(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$,

   c) $\rho(A,B)=\sqrt{(a_1^2-b_1^2)+(a_2^2-b_2^2)+(a_2^2+b_2^2)}$.

2. Pro úhel φ vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}$ platí:

   a) $\varphi\in<0,\pi>$,

   b) $\varphi\in<0,2\pi>$,

   c) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

3. Platí-li pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$: $\mathbf{v} = k \cdot \mathbf{u}$, nazýváme vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

   a) kolineární,

   b) komplanární,

   c) opačné.

4. Který z následujících výroků definuje skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

   a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin\varphi$,

   b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\varphi$,

   c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \operatorname{tg}\varphi$,

5. Výraz $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ platí právě tehdy, když nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou:

   a) lineárně nezávislé,

   b) lineárně závislé.

6. Co je geometrickým významem velikosti vektorového součinu vektorů $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$:

   a) objem rovnoběžnostěnu se základnou $O, X, Y, X+Y$,

   b) obsah trojúhelníka s vrcholy O, X, Y,

   c) obsah rovnoběžníka s vrcholy $O, X, Y, X+Y$.

7. Smíšeným součinem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ nazýváme:

   a) vektor $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$,

   b) číslo $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$,

   c) číslo $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$,

8. Výraz $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ platí právě tehdy, když nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou:

   a) komplanární,

   b) navzájem kolmé.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b), 2. a), 3. a), 4. b), 5. b), 6. c), 7. c), 8. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte skalární součin a úhel vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, když

a) $\mathbf{a} = (1, 1, -4)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 2)$,

b) $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (13, -6, 8)$.

2. Pro vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 4$ a jejich úhel $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Určete a) $\mathbf{a}.\mathbf{b}$, b) $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$,

c) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$.

3. Doplňte chybějící složky kolineárních vektorů $\mathbf{a} = (3, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, 4, b_3)$, $\mathbf{c} = (6, 2, -3)$.

4. Vypočtěte $\mathbf{a}.\mathbf{b}$, jestliže $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

5. Jsou dány tři body A = (-1, 2, 3), B = (1, 1, 1), C = (0, 0, 5). Dokažte, že $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ a stanovte vnitřní úhel β při vrcholu B v trojúhelníku ABC.

6. Při kterých hodnotách čísel α, β jsou vektory $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ kolineární ?

7. Určete vektor $\mathbf{x}$ kolineární s vektorem $\mathbf{a} = (3, 1, -2)$, jestliže $\mathbf{x}.\mathbf{a} = 42$.

8. Vektor $\mathbf{x}$ je kolmý na vektory $\mathbf{a} = (6, 3, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 7, 2)$. Určete jeho souřadnice, je-li $\mathbf{x}.\mathbf{c} = 6$, kde $\mathbf{c} = (4, -4, -2)$.

9. Jsou dány tři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Určete vektor $\mathbf{x}$, platí-li $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{c} = (3, 2, -4)$, $\mathbf{x}.\mathbf{a} = -5$, $\mathbf{x}.\mathbf{b} = -15$, $\mathbf{x}.\mathbf{c} = 20$.

10. Určete velikost pravoúhlého průmětu vektoru $\mathbf{b}$ do vektoru $\mathbf{a}$, je-li dáno $\mathbf{a} = (-2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-4, 2, 1)$.

11. Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ svírají úhel $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Určete $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, je-li $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$.

12. Určete $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, je-li $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$.

13. Zjednodušte výraz $(\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

14. Odvoďte platnost výrazu $\mathrm{tg}\varphi = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{\mathbf{a}.\mathbf{b}}$, kde φ je úhel vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

15. Jsou dány vektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Určete vektor $\mathbf{c}$ kolmý k daným vektorům.

16. Jsou dány body A, B, C. Určete souřadnice bodu D a obsah rovnoběžníka ABCD, je-li dáno A = (8, 7, 6), B = (-12, 10, 10), C = (-8, 1, 10).

17. Určete obsah Δ ABC, když A = (1, 2, 0), B = (3, 0, -3), C = (5, 2, 6).

18. Je dán Δ ABC. Vypočtěte výšky trojúhelníka v_a, v_b, v_c. A = (3, 2, 1), B = (0, -1, 1), C = (-2, 2, 0).

19. Jsou dány vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Určete $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

a) $\mathbf{a} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (2, 1, 1)$

b) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

20. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou komplanární.

a) $\mathbf{a} = (3, 4, 0)$, $\mathbf{b} = (5, 4, -3)$, $\mathbf{c} = (4, 8, 3)$,

b) $\mathbf{a} = (0, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (6, 4, -2)$, $\mathbf{c} = (-2, 1, 3)$,

c) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

21. Zjistěte, zda dané čtyři body leží v jedné rovině: A = (0, -7, 1), B = (4, -2, 0), C = (8, 0, -2), D = (1, -5, 1).

22. Je dán rovnoběžnostěn ABCD $A'B'C'D'$ vrcholy A = (0, 1, 2), B = (5, 2, 3), D = (-1, 6, 4), $A' = (0, 1, 6)$. Určete souřadnice vrcholů C, B', C', D' a objem tělesa.

23. Určete objem čtyřstěnu ABCD, jestliže platí $V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6} V_{\text{rovnoběžnostěnu}}$. Vrcholy čtyřstěnu: A = (2, 1, 0), B = (7, 4,), C = (10, 3, -4), D = (3, 6, 3).

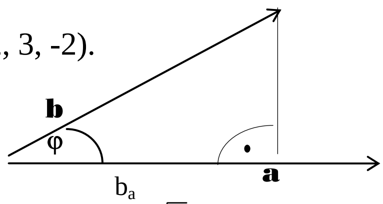
Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.a) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = -9$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; **b)** $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. **2. a)** 10, b) 25, 16, **c)** $\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 = 21$. **3.** $\mathbf{a} = (3; 1; -1{,}5)$, $\mathbf{b} = (12, 4, -6)$. **4.** $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 16$.

5. $\vec{AB}\,.\,\vec{AC} = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$. **6.** $\alpha = 10$, $\beta = -4$.

7. $\mathbf{x} = (9, 3, -6)$. **8.** $\mathbf{x} = (-6, 12, -39)$. **9.** $\mathbf{x} = (2, 3, -2)$.

10. $b_a = |\mathbf{b}|.\cos\varphi = \frac{\mathrm{a.b}}{|\mathrm{a}|} = \frac{8+2+2}{\sqrt{4+1+4}} = 4.$



11. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 6\sqrt{3}$. **12.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, 8, -4)$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 4.\sqrt{6}$. **13.** $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

14. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\sin\varphi}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. **15.** $\mathbf{c} = l(-4, -1, 12)$, kde $l \in \mathbf{R}$, $l \neq 0$.

16. D = (12, -2, 6), P = 172,56. **17.** $P\Delta = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 14$, kde $\mathbf{a} = \vec{AB}$, $\mathbf{b} = \vec{AC}$.

18. $v_a = \dfrac{|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|} = 4{,}17$, kde $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, analogicky $v_b = 3{,}06$, $v_c = 3{,}67$.

19. a) 7, b) 36. **20.** a) ano ($\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$), b) ne, c) ano.

21. Body A,B,C,D leží v jedné rovině.

22. C = (4, 7, 5), B′= (6, 2, 7), C′= (5, 7, 9), D′= (0, 6, 8), V = 104. 23. V = 14.

Kontrolní test

1. Určete jednotkový vektor $\mathbf{e}$, který je kolmý k vektorům $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$:

   a) $\mathbf{e} = \dfrac{-1}{\sqrt{35}}(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$,

   b) $\mathbf{e} = \dfrac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$,

   c) $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$.

2. Pro vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ platí: $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Určete úhel vektorů $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

   a) $\varphi = 115^\circ 40'$, b) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, c) $\varphi = 85^\circ 10'$.

3. Vypočtěte $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jednotkové vektory a pro něž platí $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$:

   a) $-\dfrac{3}{2}$, b) $\dfrac{2}{3}$, c) $-\dfrac{2}{3}$.

4. Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC, je-li $A = (3, 1, 4)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (5, 0, 8)$.

   a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{83}$, b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{29}$, c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{38}$.

5. Vypočtěte obsah a výšky rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$:

   a) $P = 21$, $v_1 = \dfrac{21}{5}$, $v_2 = \dfrac{1}{5}$,

   b) $P = 21$, $v_1 = v_2 = \sqrt{\dfrac{21}{5}}$,

   c) $P = \sqrt{21}$, $v_1 = v_2 = \sqrt{\dfrac{21}{5}}$.

6. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou komplanární:

$\mathbf{a} = (3,2,0)$, $\mathbf{b} = (1,1,1)$, $\mathbf{c} = (5,4,2)$.

a) ano, b) ne.

7. Vektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ je určen rovnoběžnostěn. Vypočtěte jeho objem, obsah stěny dané vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a délku její výšky.

   a) $V = 15, \; S = 3, \; v = 5$,

   b) $V = 5, \; S = 15, \; v = 3$,

   c) $V = 15, \; S = 5, \; v = 3$.

Výsledky testu

1. a), 2. a), 3. a), 4. c), 5. c), 6. a), 7. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 3.1., 3.2., 3.3. znovu.

3.4. Rovina

Výklad

Předpokládejme, že v prostoru E_3 jsou dány body A, B, C neležící na jedné přímce. Těmito body prochází jediná rovina, kterou označíme ABC. Určíme vektory $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$, které jsou zřejmě lineárně nezávislé.

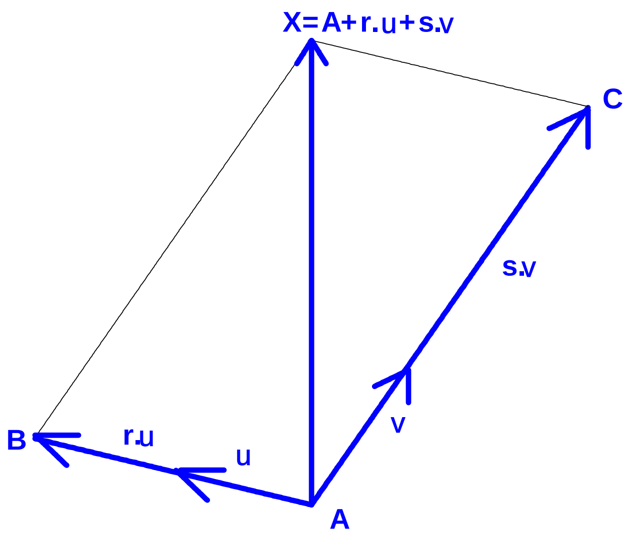
Bod X leží v rovině ABC právě tehdy, když vektor X - A je lineární kombinací vektorů **u**, **v** (obr. 8). Pak platí

$$X - A = r.\ \mathbf{u} + s.\ \mathbf{v}, \qquad r, s \in \mathbf{R},$$

z čehož plyne

$$X = A + r.\ \mathbf{u} + s.\ \mathbf{v}. \qquad (1)$$

Rovnici (1) nazýváme **vektorovou rovnicí roviny** ABC. Rovina ABC prochází bodem A a říkáme, že má **zaměření u, v**.



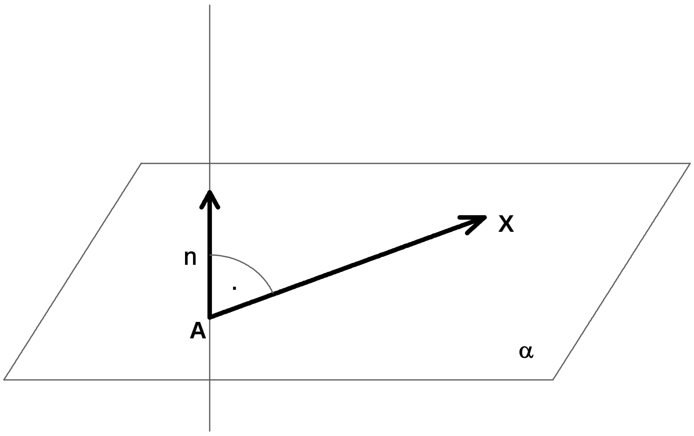
Obr. 8

Jestliže A = (x_0, y_0, z_0), $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dostaneme rovnice

$$\begin{array}{lllllll} x & = & x_0 & + & r\,u_1 & + & s\,v_1 \\ y & = & y_0 & + & r\,u_2 & + & s\,v_2 \\ z & = & z_0 & + & r\,u_3 & + & s\,v_3 \end{array} ,$$

které se nazývají **parametrické rovnice roviny** ABC.

Předpokládejme, že nenulový vektor $\mathbf{n}$ = (a, b, c) je kolmý k rovině α procházející bodem A. Označme X = (x, y, z) libovolný bod roviny α. Vektory $\mathbf{n}$ a $\overrightarrow{AX}$ jsou na sebe kolmé a tedy platí $\mathbf{n}.\overrightarrow{AX} = 0$.



Obr. 9

Dostaneme:

$\mathbf{n}.\ \overrightarrow{AX} = \mathbf{n}.(X-A) = \mathbf{n}.X - \mathbf{n}.A = (a, b, c)(x, y, z) - \mathbf{n}.A = ax + by + cz - \mathbf{n}.A = 0.$

Položíme-li $\mathbf{n}.A = -d$ dostaneme rovnici roviny ve tvaru

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (2)$$

Rovnici (2) nazveme **obecnou rovnicí roviny** α. Bod X = (x_1, y_1, z_1) leží v rovině α, právě když souřadnice x_1, y_1, z_1 vyhovují rovnici roviny α, tj. platí $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Vektor $\mathbf{n}$ z předcházející úvahy se nazývá **normálový vektor roviny** α.

Řešené úlohy

Příklad Určeme rovnici roviny α, procházející body A = (1, -1, 1), B = (1, 0, 1) a C = (-1, 1, 0).

Řešení:

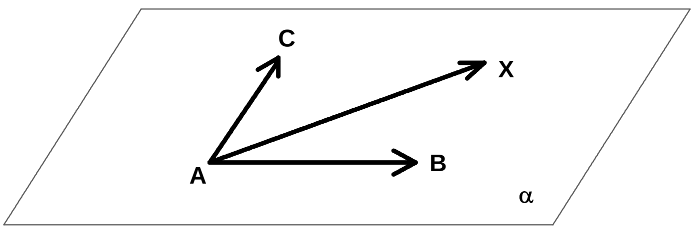
a) Napíšeme rovnici roviny ax + by + cz + d = 0, kde a, b, c, d $\in$ **R** jsou neznámé koeficienty. Výrok „ body A, B, C leží v rovině α “ je ekvivalentní se soustavou tří rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & b & + & c & + & d & = & 0 \\ a & & & + & c & + & d & = & 0 \\ -a & + & b & & & + & d & = & 0 \end{array} .$$

Tato soustava tří rovnic o čtyřech neznámých má nekonečně mnoho řešení a = p, b = 0, c = -2p, d = p, kde p $\in$ **R** - {0}. Volbou parametru p = 1 získáme hledanou rovnici roviny ve tvaru

$$x - 2z + 1 = 0.$$

b) Body A, B, C určují vektory $\vec{AB}$ a $\vec{AC}$. Pro každý bod X = (x, y, z) v rovině ABC platí



Obr. 10

$\vec{AX} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0$, tj. smíšený součin těchto tří vektorů je roven 0 (obr. 10).

Z toho vyplývá

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Po výpočtu determinantu získáme rovnici

$$-(x - 1) + 2(z - 1) = 0$$

a po úpravě rovnici roviny α:

$$x - 2z + 1 = 0.$$

c) Určeme parametrické rovnice roviny α.

Volbou $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = (-2, 2, -1)$ získáme rovnici

$$X = A + r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v} = (1, -1, 1) + r(0, 1, 0) + s(-2, 2, -1)$$

a dále rovnice

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & & & - & 2s \\ y & = & -1 & + & r & + & 2s \\ z & = & 1 & & & - & s\,. \end{array}$$

Jiné parametrické rovnice téže roviny lze získat z obecné rovnice $x - 2z + 1 = 0$, označíme-li $x = r$, $y = s$ a vypočteme-li

$$z = \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}.$$

Řešené úlohy

Příklad Určeme obecnou rovnici roviny α, známe-li její parametrické vyjádření

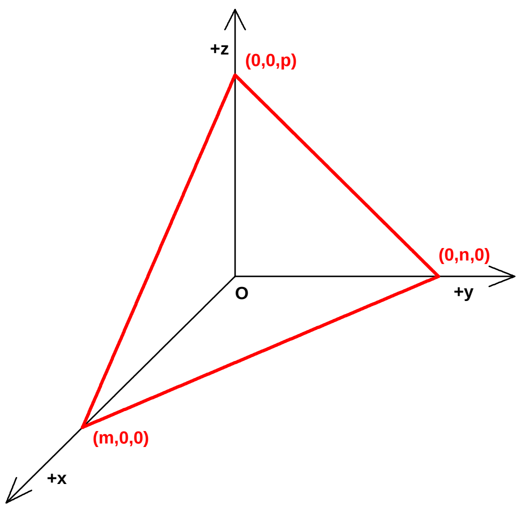
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & - & 2s & & \\ y & = & -1 & + & 2s & + & r \\ z & = & 1 & - & s & & . \end{array}$$

Řešení: Hledanou rovnici získáme vyloučením parametrů r, s např. z druhé a třetí rovnice, tj. $s = 1 - z$, $r = y + 1 - 2s = y + 2z - 1$. Dosazením do první rovnice získáme rovnici roviny α

$$x = 1 - 2(1 - z),$$

tj. $$x - 2z + 1 = 0.$$

Předpokládejme nyní, že a, b, c, d jsou čísla různá od nuly. Pak obě strany rovnice (2) můžeme dělit číslem (-d) a převést na tvar



$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1,$$

kde

$$m = -\frac{d}{a}, \quad n = -\frac{d}{b}, \quad p = -\frac{d}{c}.$$

Obr. 11

Uvedená rovnice se nazývá **úsekový tvar rovnice roviny**. Body (m, 0, 0), (0, n, 0) a (0, 0, p) jsou společné body dané roviny a os soustavy souřadnic (obr. 11).

Kontrolní otázky

1. K určení roviny potřebujeme

   a) jeden směrový vektor,

   b) tři body A, B, C neležící na jediné přímce,

   c) tři body A, B, C

2. K sestavení parametrických rovnic roviny potřebujeme

   a) bod roviny a dva lineárně závislé vektory roviny,

   b) bod roviny a směrový vektor,

   c) bod roviny a dva lineárně nezávislé vektory roviny.

3. Rovnice tvaru $ax + by + cz + d = 0$ se nazývá

   a) obecná rovnice přímky,

   b) obecná rovnice roviny,

c) normálová rovnice roviny.

4. Vektor (a, b, c) z rovnice roviny $ax + by + cz + d = 0$ se nazývá:

   a) normálový vektor roviny,

   b) směrový vektor roviny,

   c) zaměření roviny.

5. Rovina je zadána třemi body neležícími v přímce A, B, C. Pro libovolný bod roviny X platí:

   a) $\overrightarrow{AX} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0$,

   b) $\overrightarrow{AX} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 1$,

   c) $\overrightarrow{AX} \cdot (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0$.

6. Je-li rovina zadána rovnicí $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$, pak (m, n, p) jsou:

   a) souřadnice normálového vektoru roviny,

   b) jsou úseky na osách x, y, z, které rovina vytíná na souřadnicových osách,

   c) souřadnice směrového vektoru roviny.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. a); 6. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete rovnici roviny, která prochází bodem M a má normálový vektor $\mathbf{n}$:

a) M = (5, -1, 0), $\mathbf{n}$ = (-1, 1, 2),

b) M = (0, 0, 0), $\mathbf{n}$ = (3, 8, -4).

2. Napište rovnici roviny, která prochází bodem A = (4, 3, 1) a

a) je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou os x, y,

b) je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou os y, z.

3. Určete normálový vektor roviny, jejíž rovnice je

a) 3x + y - 5z - 10 = 0,

b) 2x - y - 6z = 0,

c) z - 3 = 0.

4. Stanovte rovnici roviny, která

a) prochází body A = (2, 0, 3), B = (3, 2, 0), C = (1, 1, -1),

b) prochází body A = (4, 0, -2), B = (5, 1, 7) a je rovnoběžná s osou x,

c) prochází počátkem soustavy souřadnic a je kolmá na roviny 2x - y + 5z + 3 = 0, x + 3y - z - 7 = 0,

d) prochází bodem A = (3, 5, -1) a vytíná na souřadnicových osách stejné kladné úseky,

e) prochází bodem A = (-7, 1, -2) a vytíná na souřadnicových osách stejné kladné úseky.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) x - y - 2z - 6 = 0, **b)** 3x + 8y - 4z = 0.

2. a) z = 1, **b)** x = 4.

3. a) (3, 1, -5), **b)** (2, -1, -6), **c)** (0, 0, 1).

4. a) 5x - 7y - 3z - 1 = 0, **b)** 9y - z - 2 = 0, **c)** 2x - y - z = 0, **d)** x + y + z - 7 = 0, **e)** neexistuje.

Kontrolní test

1. Jsou dány body $M=(0,-1,3)$ a $N=(1,3,5)$. Napište obecnou rovnici roviny procházející bodem M a kolmé k vektoru $\overrightarrow{MN}$.

   a) $x+4y+2z-2=0$, b) $x+4y+2z-3=0$.

2. Napište obecnou rovnici roviny rovnoběžné s osou x a procházející bodem $A=(0,1,3)$ a $B=(2,4,5)$.

   a) $3x-z+8=0$, b) $2y-3z+7=0$.

3. Napište obecnou roviny procházející body $C=(-1,-2,0), D=(1,1,2)$ kolmo k rovině $x+2y+2z-4=0$.

   a) $x+2y+2z-6=0$, b) $2x-2y+z-2=0$.

4. Napište obecnou rovnici roviny procházející body $A=(1,-1,2), B=(2,1,2)$ a $C=(1,1,4)$.

   a) $2x-y+z-5=0$, b) $x-y+3z-8=0$.

5. Určete normálový vektor roviny, jejíž rovnice je $x+5=0$.

   a) $(1,0,0)$, b) $(0,1,1)$.

6. Určete úseky m, n, p na jednotlivých osách, které vytíná rovina o rovnici $3x+6y+9z-18=0$.

a) $m = 6, n = 3, p = 2,$ b) $m = -2, n = 6, p = 3.$

7. Napište rovnici roviny, která prochází bodem $A = (4, 2, 1)$ a je rovnoběžná s rovinou $x - 2y + 4z = 0.$

a) $2x - y - 4z + 1 = 0,$ b) $x - 2y + 4z - 4 = 0.$

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. b); 4. a); 5. a); 6. a); 7. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.4. znovu.

3.5. Přímka

Výklad

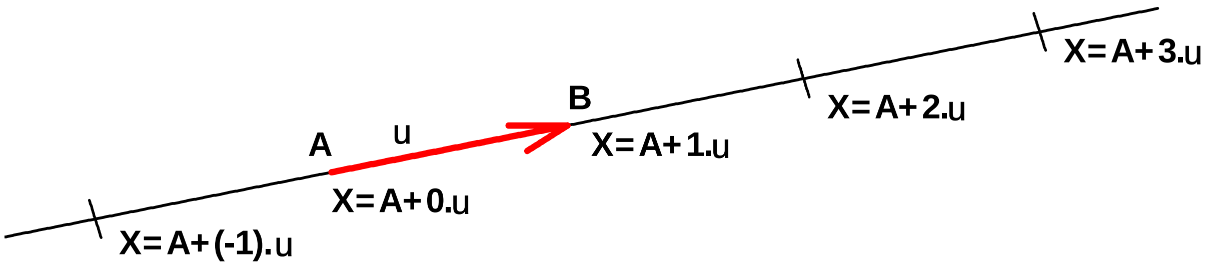
Předpokládejme, že v prostoru E_3 je dána dvěma různými body A, B přímka, kterou označíme AB. Sestrojme vektor $\mathbf{u}$ = B - A. Libovolný bod X leží na přímce AB právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$ a X - A jsou lineárně závislé, tj. když existuje $t \in \mathbf{R}$ tak, že

$$X - A = t \, . \, \mathbf{u}.$$

Předchozí rovnici upravíme na tvar

$$X = A + t \, . \, \mathbf{u}. \qquad (3)$$

Rovnici (3) nazýváme **vektorovou rovnicí přímky**. Zřejmě ke každému $X \in AB$ existuje právě jedno $t \in \mathbf{R}$ tak, že platí (3) a obráceně, pro každé $t \in \mathbf{R}$ existuje právě jeden bod X přímky AB. Situace pro $t \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ je znázorněna na obr. 12.



Obr. 12

Vektor $\mathbf{u}$ a každý jeho nenulový násobek nazveme **směrovým vektorem přímky** AB.

Jestliže je dána přímka p bodem $A = (x_0, y_0, z_0)$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pak ze vztahu (3) dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,u_1 \\ y &= y_0 + t\,u_2 \\ z &= z_0 + t\,u_3\,, \end{aligned}$$

které nazýváme parametrickými rovnicemi přímky p.

Mějme nyní roviny $\alpha_1: \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$

$\alpha_2: \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$

V případě, že α_1, α_2 jsou různoběžné, tj. $\alpha_1 \cap \alpha_2 = p$, můžeme uvažovanou soustavu rovnic pokládat za **implicitní vyjádření přímky** p. Implicitním vyjádřením přímky p je také každá soustava ekvivalentní s uvažovanou soustavou.

Řešené úlohy

Příklad Určeme parametrické rovnice přímky $p = \alpha_1 \cap \alpha_2$, kde

$\alpha_1: \quad x + y - 2z = 0,$

$\alpha_2: \quad x - y + 1 = 0.$

Řešení: Bod X hledaného průniku musí vyhovovat oběma rovnicím a je tedy řešením soustavy dvou rovnic o třech neznámých. Řešení této soustavy je $x = -\frac{1}{2} + t$, $y = \frac{1}{2} + t$, $z = t$, které závisí na jednom parametru $t \in \mathbf{R}$ a je parametrickým vyjádřením přímky p.

Kontrolní otázky

1. K sestavení parametrických rovnic přímky nezbytně potřebujme:
   a) právě 3 body přímky,
   b) 1 bod přímky a směrový vektor přímky,
   c) aspoň 3 body přímky.

2. Určité hodnotě parametru $t \in \mathbf{R}$ ve vektorové rovnici přímky odpovídá:

   a) právě jeden bod přímky,

   b) aspoň jeden bod přímky,

   c) nekonečně mnoho bodů přímky.

3. Ke každému bodu přímky odpovídá:

   a) nejvýše jedna hodnota parametru $t \in \mathbf{R}$ ve vektorové rovnici přímky,

   b) právě jedna hodnota parametru $t \in \mathbf{R}$ ve vektorové rovnici přímky,

   c) hodnoty parametru $t \in < 0,1 >$.

4. Je-li $\mathbf{u}$ směrovým vektorem přímky p, je i každý vektor

   a) vektor $k.\mathbf{u}$, kde $k \in \mathbf{R} - \{0\}$,

   b) vektor $k.\mathbf{u}$, kde $k \in \mathbf{R}$,

   c) vektor $k.\mathbf{u}$, kde $k \in < 0,1 >$.

5. Je-li $\begin{aligned} \alpha_1 &: \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ \alpha_2 &: \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}$

   implicitní vyjádření rovnice přímky, pak

   a) roviny α_1 a α_2 musí být rovnoběžné,

   b) roviny α_1 a α_2 musí být totožné,

   c) roviny α_1 a α_2 musí být různoběžné.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. b); 4. a); 5. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete parametrické rovnice přímky procházející bodem $X_0 = (1, -1, -3)$ rovnoběžně

   a) s vektorem $\mathbf{u} = (2, -3, 4)$,

   b) s přímkou $x = -1 + 3t$, $y = 3 - 2t$, $z = 2 + 5t$.

2. Trojúhelník má vrcholy $A = (5, 7, 2)$, $B = (-7, -11, 6)$, $C = (-5, 3, 2)$. Napište rovnice přímek, na nichž leží

a) strany trojúhelníka,

b) těžnice trojúhelníka.

3. Napište parametrické rovnice přímky:

a) $p:\begin{cases} 3x + 2y - 2z - 11 = 0, \\ x + 2y - 2z - 9 = 0, \end{cases}$ **b)** $q:\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0, \end{cases}$

c) $r:\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

4. Zjistěte, zda dané přímky jsou navzájem rovnoběžné nebo na sebe kolmé:

a) p: x = 5 + 2t, y = 2 - t, z = -7 + t, $q:\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

b) p: x = 1 + 2t, y = -2 + 3t, z = 1 - 6t, $q:\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$

c) $p:\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0, \end{cases}$ $q:\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$

d) $p:\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0, \end{cases}$ $q:\begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** x = 1 + 2t, y = -1 - 3t, z = -3 + 4t, **b)** x = 1 + 3t, y = -1 - 2t, z = -3 + 5t.

2. **a)** a: x = -7 + t, y = -11 + 7t, z = 6 - 2t; b: x = -5 + 5t, y = 3 + 2t, z = 2; c: x = 5 - 6t, y = 7 - 9t, z = 2 + 2t, **b)** t_a: x = 5 - 11t, y = 7 - 11t, z = 2 + 2t; t_b: x = -7 + 7t, y = -11 + 16t, z = 6 - 4t; t_c: x = -5 + 4t, y = 3 - 5t, z = 2 + 2t.

3. **a)** x = 3 + 2t, y = 4 + 4t, z = 1 + 5t, **b)** x = 1 + t, y = -7t, z = -3 - 19t, **c)** x = 1 - t, y = 2 + 3t, z = -1 + 5t.

4. **a)** rovnoběžné, **b)** kolmé, **c)** kolmé, **d)** rovnoběžné.

Kontrolní test

1. Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $M = (4, -5, 7)$ a je rovnoběžná s přímkou $q: x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3$.

a) $p: x = 4 - t,\ y = -5 + 2t,\ z = 7,$ b) $p: x = 4 + 3t,\ y = -5 + 2t,\ z = 7 + 3t.$

2. Napište parametrické rovnici přímky p, která prochází bodem $P = (3,1,2)$ a je kolmá na rovinu $x - 2y + 2z + 1 = 0.$

   a) $p: x = 1 + 3t,\ y = -2 + t,\ z = 2 + 2t,$ b) $p: x = 3 + t,\ y = 1 - 2t,\ z = 2 + 2t.$

3. Vyšetřete, zda na přímce $x = 3t - 2,\ y = t + 3,\ z = -2t - 1$ leží bod $A = (-1,2,-3).$

   a) ano, b) ne.

4. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází body $A = (2,9,3),\ B = (5,3,11).$

   a) $x = 2 + 3t,\ y = 9 - 6t,\ z = 3 + 8t,$ b) $x = 2 - 3t,\ y = 9 + 5t,\ z = 3.$

5. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $P = (3,1,2)$ a je kolmá k rovině $z = 0$.

   a) $x = 3 + t,\ y = 1 + t,\ z = 2,$ b) $x = 3,\ y = 1,\ z = 2 + t.$

6. Přímka p je určena jako průsečnice dvou rovin

   $p: \begin{cases} x - 2y + 5z - 1 = 0, \\ x - 4y + z + 1 = 0. \end{cases}$ Najděte její parametrické rovnice.

   a) $x = 3 + 9t,\ y = 1 + 2t,\ z = -t,$ b) $x = 1 + t,\ y = -2 - 4t,\ z = 5 + t.$

7. Přímka p je určena rovnicemi

   $\begin{cases} x + 2y - 4z + 7 = 0, \\ 3x - 5y + z + 1 = 0. \end{cases}$ Určete její směrový vektor.

   a) $(-18,1,2),$ b) $(18,13,11).$

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. b); 4. a); 5. b); 6. a); 7. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.5. znovu.

3.6. Vzájemná poloha lineárních útvarů v E_3

Výklad

A. Vzájemná poloha dvou přímek

Uvažujme v E_3 přímky p, q:

$$p:\quad X = A + r\mathbf{u}$$

$$q:\quad X = B + s\mathbf{v}$$

a hledejme jejich společné body, tj. hledejme takové hodnoty parametrů r, s, které dosazeny do uvedených rovnic určí týž bod. Pro r, s dostáváme rovnici

$$r\mathbf{u} - s\mathbf{v} = B - A,$$

kde $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dosadíme souřadnice a dostaneme soustavu tří rovnic o neznámých r, s

$$\begin{aligned} ru_1 - sv_1 &= b_1 - a_1 \\ ru_2 - sv_2 &= b_2 - a_2 \\ ru_3 - sv_3 &= b_3 - a_3. \end{aligned}$$

Označme h hodnost matice soustavy a h′ hodnost matice rozšířené. Pro přímky p, q pak nastane právě jedna z následujících možností:

(1) Soustava nemá žádné řešení a vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé ($h = 1$, $h' = 2$). Přímky p, q jsou **rovnoběžné, různé.**

(2) Soustava nemá žádné řešení a vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé ($h = 2$, $h' = 3$). Přímky p, q jsou **mimoběžné**.

(3) Soustava má právě jedno řešení, vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou pak lineárně nezávislé ($h = 2$, $h' = 2$). Přímky p, q jsou **různoběžné**.

(4) Soustava má nekonečně mnoho řešení. Pak jsou vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně závislé

($h = 1$, $h' = 1$). Přímky p, q jsou **totožné**.

Řešené úlohy

Příklad Rozhodněme o vzájemné poloze přímek p: $X = A + r\mathbf{u}$, q: $Y = B + s\mathbf{v}$, jestliže

a) $A = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{u} = (3, 1, -1)$, $B = (9, 4, -10)$, $\mathbf{v} = (-9, -3, 3)$,

b) $A = (7, 5, 3)$, $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $B = (0, -1, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$.

Řešení:

a) Platí $\mathbf{v} = -3\mathbf{u}$, vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé. Zjistíme, zda jsou přímky p, q totožné nebo rovnoběžné. Budeme proto hledat společné body přímek p, q. Soustava rovnic má tvar

$$\begin{aligned} 3r + 9s &= 10 \\ r + 3s &= 2 \\ -r - 3s &= -11\,. \end{aligned}$$

Lze se snadno přesvědčit, že soustava nemá řešení a tedy přímky p, q jsou rovnoběžné, různé.

b) Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Přímky p, q jsou různoběžky nebo mimoběžky. Nyní budeme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3r - s &= -7 \\ 2r - 2s &= -6 \\ r - 3s &= -5\,. \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení $r = -2$, $s = 1$. Existuje tedy jediný průsečík přímek p, q, bod $R = (1, 1, 1)$. Přímky p, q jsou různoběžné.

Výklad

B. Vzájemná poloha dvou rovin

Pro dvě roviny může nastat právě jedna z následujících možností:

(1) Roviny nemají žádné společné body, pak jsou **rovnoběžné, různé**.

(2) Množina všech společných bodů obou rovin je přímka, tj. obě roviny jsou **různoběžné**.

(3) Roviny jsou **totožné**.

Předpokládejme, že roviny jsou dány vektorovými rovnicemi

$$X = P + k\mathbf{a} + l\mathbf{b},$$
$$Y = Q + m\mathbf{c} + n\mathbf{d},$$

kde $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ a $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$. K získání společných bodů obou rovin budeme řešit rovnici

$$P + k\mathbf{a} + l\mathbf{b} = Q + m\mathbf{c} + n\mathbf{d}$$

s neznámými k, l, m, n. Dosadíme souřadnice a dostaneme soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
ka_1 & + & lb_1 & - & mc_1 & - & nd_1 & = & q_1 & - & p_1 \\
ka_2 & + & lb_2 & - & mc_2 & - & nd_2 & = & q_2 & - & p_2 \\
ka_3 & + & lb_3 & - & mc_3 & - & nd_3 & = & q_3 & - & p_3\,.
\end{array}$$

Označíme h hodnost matice soustavy a h′ hodnost matice rozšířené. Mohou nastat případy:

(1) $h = 2, h' = 3$, soustava nemá řešení (roviny jsou rovnoběžné různé),

(2) $h = 3, h' = 3$, soustava má nekonečně mnoho řešení, která závisí na jednom parametru (roviny jsou různoběžné),

(3) $h = 2, h' = 2$, soustava má nekonečně mnoho řešení, která závisí na dvou parametrech (roviny jsou totožné).

Řešené úlohy

Příklad Rozhodněme o vzájemné poloze rovin:

a) X = (1, 1, 1) + k(1, 0, 2) + *l*(-2, 1, 1),

Y= (0, 2, -2) + m(-1, 1, 3) + n(-3, 1, -1),

b) X = (0, 0, 1), + k(1, 1, 0) + *l*(2, 2, 1),

Y = (7, 5, 5) + m(3, 2, 2) + n(2, 1, 1),

c) X = (1, 1, 1) + k(2, 0, 4) + *l*(-6, 3, 3),

Y = (5, 1, 9) + m(1, -1, -3) + n(3, -1, 1).

Řešení:

a) Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} k - 2l + m + 3n &= -1 \\ l - m - n &= 1 \\ 2k + l - 3m + n &= -3. \end{aligned}$$

Užijeme Gaussovu eliminační metodu:

A				**B**	Σ	Úpravy
1	–2	1	3	–1	2	
0	1	–1	–1	1	0	
2	1	–3	1	–3	–2	$r_3 - 2r_1$
1	–2	1	3	–1	2	
0	1	–1	–1	1	0	
0	5	–5	–5	–1	–6	$r_3 - 5r_2$
1	–2	1	3	–1	2	
0	1	–1	–1	1	0	
0	0	0	0	–6	–6	

Je vidět, že soustava nemá řešení. Roviny jsou rovnoběžné různé.

b) Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu a ze soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} k & + & 2l & - & 3m & - & 2n & = & 7 \\ k & + & 2l & - & 2m & - & n & = & 5 \\ & & l & - & 2m & - & n & = & 4\,, \end{array}$$

získáme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} k & + & 2l & - & 3m & - & 2n & = & 7 \\ & & l & - & 2m & - & n & = & 4 \\ & & & & m & + & n & = & -2\,. \end{array}$$

Platí $h = h' = 3$. Nyní můžeme například n zvolit libovolně. Položíme $n = t$. Dostaneme řešení

$$k = 1 + t, \qquad l = -t, \qquad m = -2 - t, \qquad n = t.$$

Dosadíme toto řešení např. do rovnice první roviny:

$$X = (0, 0, 1) + (1 + t)(1, 1, 0) + (-t)(2, 2, 1),$$

tj.

$$X = (1, 1, 1) + t(-1, -1, -1).$$

Tím jsme získali rovnici přímky, množiny všech společných bodů obou rovin. Obě roviny jsou různoběžné.

c) Soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2k & - & 6l & - & m & - & 3n & = & 4 \\ & & 3l & + & m & + & n & = & 0 \\ 4k & + & 3l & + & 3m & - & n & = & 8\,, \end{array}$$

upravíme na tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2k & - & 6l & - & m & - & 3n & = & 4 \\ & & 3l & + & m & + & n & = & 0\,. \end{array}$$

Protože $h = h' = 2$, můžeme dvě neznámé zvolit. Například $k = r$, $l = 2s$. Získáme řešení

$$k = r, \qquad l = 2s, \qquad m = -r - 3s + 2, \qquad n = r - 3s - 2.$$

Dosadíme toto řešení např. do rovnice první roviny:

$$X = (1, 1, 1) + r(2, 0, 4) + s(-12, 6, 6).$$

Je vidět, že množina všech společných bodů obou rovin je právě první rovina.

Obě roviny jsou tedy totožné.

Pokud budou roviny ρ_1, ρ_2 dány obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \end{aligned}$$

určíme jejich vzájemnou polohu takto:

Označme h hodnost matice předcházející soustavy a h′ hodnost matice rozšířené. Potom platí:

(1) Roviny ρ_1, ρ_2 jsou **rovnoběžné**, **různé** právě tehdy, když h = 1, h′ = 2.

(2) Roviny ρ_1, ρ_2 jsou **různoběžné** právě tehdy, když h = h′ = 2.

(3) Roviny ρ_1, ρ_2 jsou **totožné** právě tehdy, když h = h′ = 1.

C. Vzájemná poloha přímky a roviny

Budeme postupovat stejně jako v předcházejících případech. Rovnice přímky a rovnice roviny určují soustavu lineárních rovnic a mohou nastat případy:

(1) Soustava nemá řešení; přímka nemá s rovinou společný bod, je s rovinou **rovnoběžná**.

(2) Soustava má právě jedno řešení; přímka je s rovinou **různoběžná** a má s ní společný právě jeden společný bod, průsečík.

(3) Soustava má nekonečně mnoho řešení; **přímka leží v rovině**.

Řešené úlohy

Příklad Rozhodněme o vzájemné poloze přímky p: $X = (3, 1, 3) + t(-1, -4, 3)$ a roviny ρ: $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

Řešení: Napíšeme parametrické rovnice přímky p:

$$\begin{aligned} x &= 3 - t \\ y &= 1 - 4t \\ z &= 3 + 3t . \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice roviny:

$$(3 - t) + 2(1 - 4t) + 3(3 + 3t) + 4 = 0.$$

Po úpravě dostaneme $18 = 0$. Rovnice nemá řešení, to znamená, že neexistuje společný bod přímky p a roviny ρ. Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ (v dané rovině neleží).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete vzájemnou polohu přímek p, q. V případě, že jsou různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku:

a) p: $x = 1 + 2r,\ y = 7 + r,\ z = 5 + 4r$, q: $x = 6 + 3s,\ y = -1 - 2s,\ z = s$,

b) p: $x = 1 + r,\ y = r,\ z = 2 + r$, q: $x = -1 + s,\ y = -2 + s,\ z = s$,

c) p: $x = 1 + 2r,\ y = -3 + 4r,\ z = 5 + 3r$, q: $x = 5s,\ y = 2 - s,\ z = -1 + 2s$,

d) p: $\begin{cases} 2x - y - 4z + 5 = 0 \\ 5x - z + 3 = 0, \end{cases}$ q: $\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0, \end{cases}$

e) p: $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0, \end{cases}$ q: $\begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ x + y = 0, \end{cases}$

f) p: $x = 1 - t,\ y = 4 - 5t,\ z = -4 - 4t$, q: $\begin{cases} 2x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ 8x - 2z + 3 = 0 . \end{cases}$

2. Pro jakou hodnotu čísla k jsou přímky p: $x = -2 + 2r,\ y = -3r,\ z = 1 + 4r$ a q: $x = 3 + ks, y = 1 + 4s,\ z = 7 + 2s$ různoběžné ?

3. Zjistěte vzájemnou polohu rovin α, β a v případě, že jsou různoběžné, rozhodněte, zda jsou na sebe kolmé a určete parametrické rovnice přímky, v níž se roviny protínají:

a) α: $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, β: $2x - 3y + 5z + 3 = 0$,

b) α: $4x + 2y - 4z + 2 = 0$, β: $2x + y + 2z - 1 = 0$,

c) α: $x - 3z + 2 = 0$, β: $x = 3 + 3r$, $y = s$, $z = r$,

d) α: $3x - y - 2z - 5 = 0$, β: $x + 9y - 3z + 2 = 0$,

e) α: $x = 1 + r - 2s$, $y = 1 + s$, $z = 1 + 2p + q$, β: $x = -p - 3q$, $y = 2 + p + q$, $z = -2 + 3p - q$,

f) α: $x = r + 2s$, $y = r + 2s$, $z = 1 + s$, β: $x = 7 + 3p + 2q$, $y = 5 + 2p + q$, $z = 5 + 2p + q$,

g) α: $x = 1 + 2r - 6s$, $y = 1 + 3s$, $z = 1 + 4r + 3s$, β: $x = 5 + p + q$, $y = 1 - p - q$, $z = 9 - 3p + q$,

h) α: $x - 2y + 2z = 3$, β: $x = 5 + r + s$, $y = r$, $z = s$.

4. Určete čísla k, l tak, aby roviny α, β byly rovnoběžné:

a) α: $2x + ky + 3z - 5 = 0$, β: $lx - 6y - 6z + 2 = 0$,

b) α: $3x - y + kz - 9 = 0$, β: $2x + ly + 2z - 3 = 0$.

5. Určete číslo l tak, aby roviny α, β byly na sebe kolmé:

a) α: $3x - 5y + lz - 3 = 0$, β: $x + 3y + 2z + 5 = 0$,

b) α: $5x + y - 3z - 3 = 0$, β: $2x + ly - 3z + 1 = 0$.

6. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ. V případě, že jsou různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku.

a) Přímka p je dána body A, B a rovina ρ body MNQ, $A = (2, 1, 2)$, $B = (3, 1, 3)$, $M = (2, 2, 1)$, $N = (1, 2, 2)$, $Q = (3, 5, 3)$.

b) Přímka p je dána body $E = (3, 1, 3)$, $F = (4, 5, 0)$ a rovina ρ: $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

c) p: $x = 5t$, $y = 0$, $z = t$, ρ: $x = 3 + 2r + s$, $y = 1 - r + 2s$, $z = r - s$.

d) p: $x = -2 + 3t$, $y = 1 - 4t$, $z = -5 + 4t$, ρ: $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

e) p: $x = 1 + t$, $y = -1 - 2t$, $z = 6t$, ρ: $2x + 3y + z - 1 = 0$.

f) p: $x = -2 - 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = 3 + 2t$, ρ: $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

7. Pro které hodnoty k, l leží přímka p: $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ v rovině ρ: $kx + 2y - 4z + l = 0$?

8. Pro které hodnoty k, l je rovina ρ: $kx + ly + 3z - 5 = 0$ kolmá k přímce p: $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = -2 - 2t$?

9. Pro jakou hodnotu k je přímka p rovnoběžná s rovinou ρ:

a) p: $x = -1 + 3t$, $y = 2 + kt$, $z = -3 - 2t$, ρ: $x - 3y + 6z + 7 = 0$,

b) ρ: 2x - y + kz - 2 = 0, p: $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0. \end{cases}$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** různoběžné, (-3, 5, -3), **b)** totožné, **c)** mimoběžné, **d)** různoběžné, $(-\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{13}{11})$,

e) mimoběžné, **f)** rovnoběžné.

2. k = 3.

3. **a)** rovnoběžné, **b)** různoběžné, nejsou kolmé, p: x = -1 + t, y = 2 - 2t, z $= \frac{1}{2}$,

c) rovnoběžné, **d)** různoběžné, kolmé, p: $x = \frac{55}{21} + 3t$, y = t, $z = \frac{11}{7} + 4t$.

e) rovnoběžné, **f)** různoběžné, nejsou kolmé, p: x = 1 - t, y = 1 - t, z = 1 - t, **g)** totožné,

h) různoběžné, nejsou kolmé, x = 7 + 4t, y = 2 + 3t, z = t.

4. **a)** k = 3, *l* = -4, **b)** k = 3, $l = -\frac{2}{3}$. **5.** **a)** *l* = 6, **b)** *l* = - 19.

6. **a)** různoběžné, R = (1, 1, 1), **b)** rovnoběžné, **c)** totožné, **d)** rovnoběžné, **e)** různoběžné,

R = (2, -3, 6), **f)** totožné. **7.** k = 3, *l* = -23. **8.** k = -3, $l = \frac{9}{2}$. **9.** **a)** k = -3, **b)** k = -2.

3.7. Metrické vlastnosti lineárních útvarů v E_3

Výklad

Mějme v E_3 přímky p se směrovým vektorem $\mathbf{u}$ a q se směrovým vektorem $\mathbf{v}$. Zvolme libovolný bod M a veďme jím přímky p′ se směrovým vektorem $\mathbf{u}$ a q′ se směrovým vektorem $\mathbf{v}$. Přímky p′, q′ rozdělují rovinu na čtyři konvexní neorientované úhly, z nichž dva a dva mají stejnou velikost. Označme jejich velikost α, β. **Odchylkou přímek** p, q pak rozumíme úhel φ, kde

$$\varphi = \min\{\alpha, \beta\}.$$

Pro totožné přímky položíme φ = 0. Odchylka dvou přímek je tedy úhel $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Nechť pro směrové vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je jejich úhel ψ. Pak buď $\psi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a ψ je odchylkou obou přímek, tj. φ = ψ, nebo $\psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$, potom odchylkou φ přímek je číslo π – ψ, tj. φ = π - ψ. Pro oba případy můžeme užít jediného vztahu

$$\cos\varphi = |\cos\psi| = \left| \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|} \right|. \tag{1}$$

Odchylku φ dvou rovin ρ, σ definujeme pomocí jejich normálových vektorů $\mathbf{n}_\rho$, $\mathbf{n}_\sigma$ vztahem

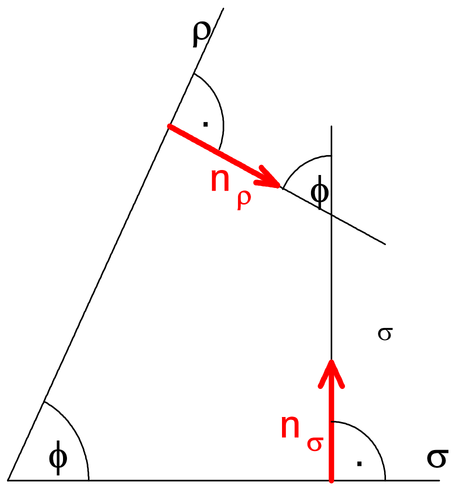
$$\cos\varphi = \left| \frac{\mathbf{n}_\rho.\mathbf{n}_\sigma}{|\mathbf{n}_\rho|.|\mathbf{n}_\sigma|} \right|. \tag{2}$$

Správnost vztahu plyne z věty o rovnosti úhlů s rameny na sebe kolmými (obr. 13).

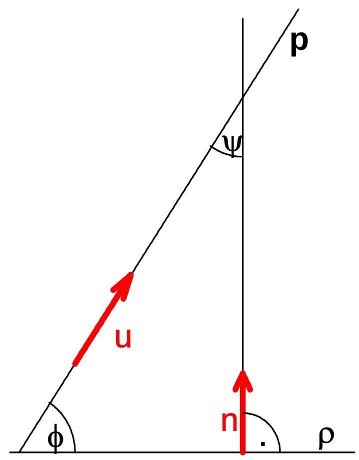
Obdobně definujeme **odchylku přímky** p se směrovým vektorem **$\mathbf{u}$ od roviny** ρ s normálovým vektorem $\mathbf{n}$ vztahem

$$\sin\varphi = \cos\psi = \left| \frac{\mathbf{u}.\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{n}|} \right|, \tag{3}$$

kde $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ (obr. 14).



Obr. 13



Obr. 14

Řešené úlohy

Příklad Určeme odchylku φ rovin ABC a BCD: A = (1, 1, 1), B = (1, 1, 3), C = (1, 2, 0), D = (1, 2, 3).

Řešení: K určení normálových vektorů $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$ rovin ABC a BCD užijeme vektorového součinu:

$$\mathbf{n}_1 = (B - A) \text{ x } (C - A) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 0)\,,$$

$$\mathbf{n}_2 = (D - B) \text{ x } (D - C) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, 0, 0)\,.$$

Užijeme vztahu (2) pro odchylku dvou rovin:

$$\cos\varphi = \left|\frac{(-2).3}{2.3}\right| = 1, \qquad \varphi = 0.$$

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěme odchylku roviny α: $x - y + 3 = 0$ a přímky AB, A = (5, 5, 5), B = (3, 5, 3).

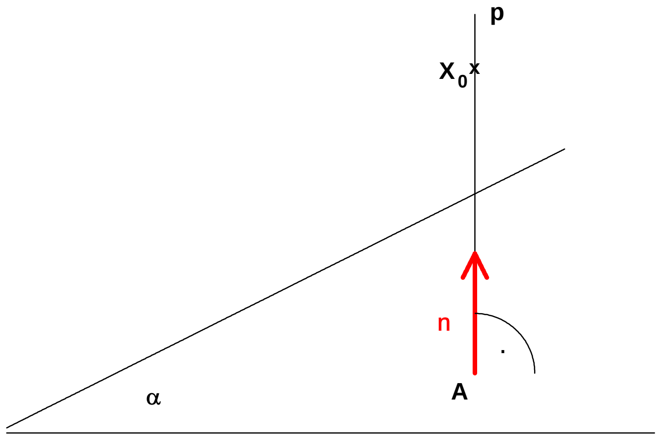
Řešení: Dostáváme $\mathbf{n}$ = (1, -1, 0) pro normálový vektor roviny α a $\mathbf{u}$ = B - A = = (-2, 0, -2) pro směrový vektor přímky AB. Dále podle (3)

$$\sin\varphi = \left|\frac{(-2, 0, -2).(1, -1, 0)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}.\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{1}{2} \qquad \text{a tedy} \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Výklad

Vzdálenost bodu $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **od roviny** α: $ax + by + cz + d = 0$ označíme $\rho(X_0, \alpha)$.

Z bodu X_0 vedeme kolmici p na rovinu α (obr. 15). Označíme průsečík $A = p \cap \alpha$.



Obr. 15

Vzdálenost bodů X_0, A je pak hledanou vzdáleností. Pro normálový vektor

$\mathbf{n} = (a, b, c)$ roviny α platí $\overrightarrow{X_0A} = t\mathbf{n}$,

$t \in \mathbf{R}$ a tedy $|A - X_0| = |t|.|\mathbf{n}| = |t| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Označme $A = (x_A, y_A, z_A)$. Z vektorové rovnice $\overrightarrow{X_0A} = t\mathbf{n}$ dostaneme

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + t\,a \\ y_A &= y_0 + t\,b \\ z_A &= z_0 + t\,c\,. \end{aligned}$$

Poněvadž $A \in \alpha$ musí být $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$. Dosadíme za x_A, y_A a z_A do předchozí rovnice a dostaneme

$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) + d = 0$.

Odtud

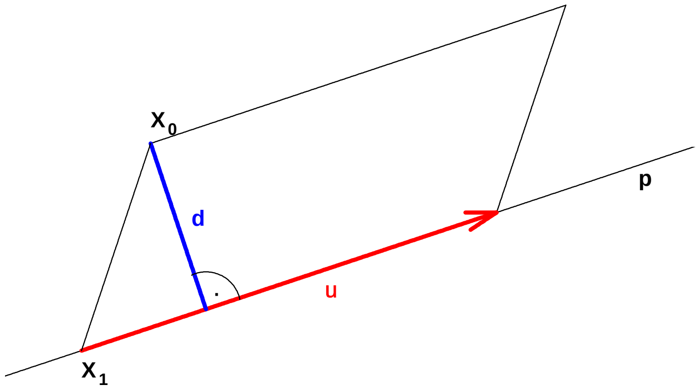
$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Užijeme rovnici pro vzdálenost bodů A, X_0 a získáme vztah

$$|A - X_0| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \rho(X_0, \alpha)\,.$$

Vzdálenost bodu $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **od přímky** p: $x = x_1 + u_1t$, $y = y_1 + u_2t$, $z = z_1 + u_3t$, která je dána bodem $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, označíme $\rho(X_0, p)$.

Z vlastností vektorového součinu a ze vztahu pro výpočet obsahu rovnoběžníka (obr. 16) vyplývá rovnost $|u \times \overrightarrow{X_1X_0}| = |u|\,.\,d$. Z rovnice vyjádříme d a dostaneme vztah :



$$d = \frac{|u \times \overrightarrow{X_1X_0}|}{|u|} = \rho\,(X_0,\ p)\ .$$

Obr. 16

Práce v analytické geometrii je natolik rozmanitá, že se nelze spoléhat jen na použití vzorců. Obvykle je nutno nejprve rozvážit prostorové řešení příkladu a potom jej analytickou metodou vyřešit.

Řešené úlohy

Příklad Určeme bod Y, který má stejnou vzdálenost od bodů A = (1, 1, 1) a B = (-1, 0, 1) a leží na přímce p: x = t, y = 1 - t, z = 2 - 2t.

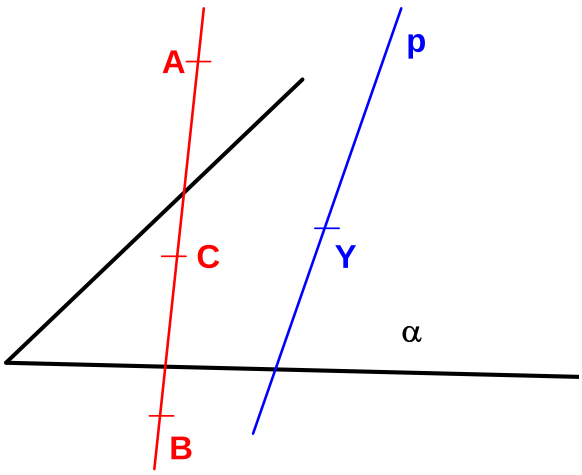
Rozbor úlohy (obr. 17):

1. Určíme souřadnice bodu C, který je středem úsečky s koncovými body A, B.
2. Stanovíme rovnici roviny α procházející bodem C kolmo k přímce AB. (Rovina α je množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodů A, B).
3. Určíme $Y = p \cap \alpha$. Bod Y má požadovanou vlastnost.

Řešení:

1. Bod C je středem úsečky s koncovými body A, B a tedy platí $C = \frac{1}{2}(A + B)$, tj.

$$C = (0,\ \frac{1}{2},\ 1).$$



Obr. 17

2. Rovina α má rovnici $ax + by + cz + d = 0$.

Má-li C ležet v rovině α, je $a.0 + b.\frac{1}{2} + c.1 + d = 0$.

Vektor $\vec{AB} = (-2, -1, 0)$ můžeme považovat za normálový vektor roviny α.

Platí $-2.0 - 1.\frac{1}{2} + 0.1 + d = 0, \quad d = \frac{1}{2}$.

Rovina α má pak rovnici

$$-2x - y + \frac{1}{2} = 0$$

a po úpravě

$$4x + 2y - 1 = 0.$$

3. Souřadnice společného bodu přímky p a roviny α nalezneme řešením soustavy rovnic

$$x = t,\ y = 1 - t,\ z = 2 - 2t,\ 4x + 2y - 1 = 0.$$

Z prvních tří rovnic dosadíme do čtvrté a dostaneme $t = -\frac{1}{2}$. Dosazením do prvních tří rovnic získáme souřadnice bodu $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3)$.

Kontrolní otázky

1. Jsou-li směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně nezávislé, která z možností platí pro přímky p, q:

   a) rovnoběžné různé nebo různoběžné,

   b)) rovnoběžné různé nebo mimoběžné,

   c) různoběžné nebo mimoběžné.

2. Obecné rovnice dvou rovin α, β určují soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých. Která z možností platí, jsou-li roviny různoběžné:

   a) $h = 1, h' = 2$, b) $h = h' = 2$, c) $h = h' = 1$.

3. Rovnice přímky a rovnice roviny určují soustavu lineárních rovnic. Jaká je vzájemná poloha přímky s rovinou, má-li soustava právě jedno řešení:

   a) rovnoběžná, b) různoběžná, c) totožná.

4. Jaký součin vektorů používáme pro výpočet odchylek lineárních útvarů v E_3:

   a) skalární, b) vektorový, c) smíšený.

5. Který ze vztahů definuje odchylku φ přímky p se směrovým vektorem $\mathbf{u}$ od roviny α s normálovým vektorem $\mathbf{n}$:

   a) $\cos\varphi = \left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|}\right|$,

   b) $\sin\varphi = \left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|}\right|$,

   c) $\mathrm{tg}\,\varphi = \left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|}\right|$,

6. Jakou metodu použijeme při výpočtu vzdálenosti bodu od přímky:

   a) výpočet výšky v trojúhelníka,

   b) výpočet objemu trojstěnu,

   c) výpočet odchylky dvou přímek.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c), 2. b), 3. b), 4. a), 5. b), 6. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete odchylku přímek p, q:

a) p: $x = 3 + t,\ y = -2 - t,\ z = \sqrt{2}t$, q: $x = -2 + t,\ y = 3 + t,\ z = -5 + \sqrt{2}t$,

b) p: $x = -2 + 3t,\ y = 0,\ z = 3 - t$, q: $\begin{cases} x - 2z - 5 = 0 \\ y = 0, \end{cases}$

c) p: $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0, \end{cases}$ q: $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$

2. Vypočtěte odchylku rovin α a β, jestliže

a) rovina α je dána body A, B, C a rovina β body B, C, D: A = (1, 1, 1), B = (1, 1, 3), C = (1, 2, 0), D = (1, 2, 3),

b) α: $4x - 2y + z - 3 = 0$, β: $x = 3 - 2r + 3s,\ y = 1 - r + s,\ z = 2 + r - 2s$,

c) α, β jsou roviny stěn čtyřstěnu ABCD protínající se v hraně AB, A = (0, 2, 6), B = (2, 1, 4), C = (5, 0, 1), D = (0, 2, 0).

3. Najděte odchylku přímky p od roviny ρ, jestliže

a) p: $x = 3 + t,\ y = 3 + 2t,\ z = -2 - t$, ρ: $x + y - 1 = 0$,

b) přímka p je dána body A = (5, 5, 5) a B = (3, 5, 3) a ρ: $x - y + 3 = 0$.

4. Stanovte vzdálenost bodu M od roviny α, jestliže

a) M = (-2, -4, 3), α: $2x - y + 2z + 3 = 0$,

b) M = (1, 2, -3), α: $5x - 3y + z + 4 = 0$,

c) M = (-1, 1, -2) a rovina α je dána body A, B, C: A = (1, -1, 1), B = (-2, 1, 3), C = (4, -5, -2),

d) M = (2, 3, -1), α: $x = r + s,\ y = 1 - r + s,\ z = -1 + s$.

5. Určete vzdálenost bodu X_0 od přímky a, jestliže

a) $X_0 = (3, 2, 1)$, a: $x = 2 - 3t,\ y = 1 + t,\ z = 7 - 2t$,

b) $X_0 = (2, 3, -1)$, a: $x = 1 + t,\ y = 2 + t,\ z = 13 + 4t$,

c) $X_0 = (2, 3, -1)$, a: $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$

6. Napište rovnici přímky m, která prochází bodem K = (3, 3, 2) a je kolmá k rovině

ρ: x = 1 - 2r + 3s, y = 2 + r + s, z = 4 - r + 2s.

7. Určete rovnici roviny souměrnosti úsečky AB: A = (2, 3, 0), B = (-1, 5, 4).

8. Určete bod Q souměrně sdružený s bodem P = (2, -5, 7) podle přímky p, která prochází body A = (5, 4, 6) a B = (-2, -17, -8).

9. Zjistěte souřadnice bodu Q souměrně sdruženého s bodem P = (1, 3, -4) podle roviny

α: 3x + y - 2z = 0.

10. Určete vzdálenost rovnoběžných rovin α a β:

a) α: x - 2y - 2z - 12 = 0, β: x - 2y - 2z - 6 = 0,

b) α: 2x - 3y + 6z - 14 = 0, β: 4x - 6y + 12z + 21 = 0.

11. Vypočtěte vzdálenost rovnoběžných přímek p a q, jestliže

a) p: x = 2 + t, y = -1 + 2t, z = -3 + 2t, q: x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = -1 + 2t,

b) přímka p je dána body A, B: A = (7, 7, 3), B = (10, 9, 4) a

q: $\begin{cases} 2x - 3y - 9 = 0 \\ y - 2z + 7 = 0. \end{cases}$

12. Najděte kolmý průmět bodu A = (2, -1, 4) do roviny α: 3x + y + z - 20 = 0.

13. Určete obecnou rovnici roviny procházející bodem $X_0 = (1, 2, -3)$ rovnoběžně s přímkami p: x = 1 + 2t, y = -1 - 3t, z = 7 + 3t, q: x = -5 + 3t, y = 2 - 2t, z = -3 - t.

14. Určete obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $X_0 = (2, -2, 1)$ a přímkou p: x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = -3 + 2t.

15. Určete obecnou rovnici roviny procházející přímkou p: x = 1 + 3t, y = 3 + 2t, z = -2 - t

rovnoběžně s přímkou q: $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 == 0. \end{cases}$

16. Určete parametrické rovnice přímky procházející bodem $X_0 = (3, -2, -4)$ rovnoběžně s rovinou α: 3x - 2y - 3z - 7 = 0, která protíná přímku p: x = 2 + 3t, y = -4 - 2t, z = 1 + 2t.

17. Stanovte parametrické rovnice přímky, která je rovnoběžná s rovinami

α: 3x + 12y - 3z - 5 = 0, β: 3x - 4y + 9z + 7 = 0 a protíná přímky p: x = -5 + 2t, y = 3 - 4t, z = -1 + 3t, q: x = 3 - 2t, y = -1 + 3t, z = 2 + 4t.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, **b)** $\varphi = \frac{\pi}{4}$, **c)** $\cos\varphi = \frac{4}{21}$. **2.a)** $\varphi = 0$, **b)** $\varphi = 28^0 07'32''$, **c)** $\varphi = 18^0 26'06''$.

3. a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, **b)** $\varphi = \frac{\pi}{6}$. **4. a)** $\rho(M, \alpha) = 3$, **b)** $\rho(M, \alpha) = 0$, **c)** $\rho(M, \alpha) = 4$,

d) $\rho(M, \alpha) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. **5. a)** $\rho(X_0, a) = \frac{\sqrt{432}}{\sqrt{14}} \doteq 5{,}6$, **b)** $\rho(X_0, a) = 6$, **c)** $\rho(X_0, a) = 15$.

6. $x = 3 + 3t,\ y = 3 + t,\ z = 2 - 5t$. **7.** $6x - 4y - 8z + 29 = 0$. **8.** $Q = (4, 1, -3)$. **9.** $Q = (-5, 1, 0)$.

10. a) $d = 2$, **b)** $d = 3{,}5$. **11. a)** $d = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, **b)** $d = 2\sqrt{6}$. **12**. $(5, 0, 5)$.

13. $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **14.** $4x + 6y + 5z - 1 = 0$. **15.** $13x - 14y + 11z + 51 = 0$.

16. $x = 3 + 5t,\ y = -2 - 6t,\ z = -4 + 9t$. **17.** $x = -3 + 8t,\ y = -1 - 3t,\ z = 2 - 4t$.

Kontrolní test

1. Jsou dány body $A = (2,-1,4),\ B = (-2,1,-4),\ C = (-1,\frac{1}{2},-2),\ D = (10,-5,20)$. Určete

   vzájemnou polohu přímek AB, CD:

   a) různoběžné, b) rovnoběžné totožné, c) mimoběžné.
2. Určete vzájemnou polohu rovin:

   $\alpha:\ 2x - y + z + 3 = 0,$

   $\beta:\ A = (2,7,0),\ \mathbf{u} = (1,2,0),\ \mathbf{v} = (0,-1,-1).$

   a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) rovnoběžné totožné.
3. Napište rovnici průsečnice rovin

   $\alpha:\ x + y + z - 1 = 0,$

   $\beta:\ 4x + 5y - z + 1 = 0.$

   a)
   $$\begin{aligned} x &= 6 - 6t \\ y &= -5 + 5t \\ z &= t \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} x &= 6 + 6t \\ y &= 5 - 5t \\ z &= 5t \end{aligned}$$

4. Určete vzájemnou rovnici přímky a roviny:

   $p:\ P=(1,3,2),\ \mathbf{u}=(1,-1,-3),$
   $\alpha:\ 9x+3y+2z+2=0.$

   a) různoběžné, b) rovnoběžné, c) leží v rovině.

5. Vypočtěte odchylku přímek p, q, jsou-li:

   $p:\ 2x+y-z=y+3z-4=0,$
   $q:\ -x+2y-z+4=4x-y+3z-10=0.$

   a) $79^{o}20'$, b) $81^{o}30'$, c) $77^{o}10'$.

6. Vypočtěte odchylku přímky p a roviny α:

   $p:\ P=(2,-1,0),\ \mathbf{u}=(9,2,-4),$
   $\alpha:\ A=(5,4,3), B=(8,7,6), C=(2,2,2).$

   a) $75^{o}30'$, b) $87^{o}40'$, c) $89^{o}10'$.

7. Určete vzdálenost dvou rovin:

   $\alpha:\ 3x-2y-6y+35=0,$
   $\beta:\ 3x-2y-6z=0.$

   a) 35, b) 5, c) $\sqrt{35}$.

8. Určete vzdálenost bodu $A=(2,3,1)$ od přímky $p: B=(2,1,0), C=(1,4,1)$.

   a) $\dfrac{6}{11}$, b) $\dfrac{\sqrt{6}}{11}$, c) $\dfrac{\sqrt{66}}{11}$.

Výsledky testu

1. b), 2. c), 3. a), 4. b), 5. a), 6. b), 7. b), 8. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 3.6., 3.7. znovu.

1. FUNKCE

Průvodce studiem

V denním životě, v přírodě, v technice a hlavně v matematice se neustále setkáváme s funkčními závislostmi jedné veličiny (např. y) na druhé (např. x). Tak např. cena jízdenky druhé třídy osobního vlaku závisí na počtu kilometrů.

Elektrický proud I podle Ohmova zákona závisí při daném napětí U na odporu R vodiče podle vztahu $I = U/R$.

Objem V kruhového kužele o poloměru r při dané výšce v závisí na velikosti poloměru r podle vzorce

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

Vezměme v úvahu rovnici $y = 3x^2 + 1$. Zvolíme-li libovolné konkrétní reálné číslo x_0, je touto rovnicí určeno právě jedno číslo y_0, které se rovná $3x_0^2 + 1$. Tak např. číslu $x_1 = 0$ odpovídá číslo $y_1 = 1$, kdežto pro číslo $x_2 = -1$ dostaneme $y_2 = 4$, apod. Zvolíme-li tedy libovolné číslo $x \in (-\infty, +\infty)$, je mu rovnicí $y = 3x^2 + 1$ přiřazeno právě jedno číslo $y \in <1, +\infty)$.

Třebaže všechny uvedené příklady jsou různého druhu, lze v nich vystihnout společnou charakteristickou vlastnost touto definicí:

Definice:

a) Zobrazení, viz [2], $f : M \to \boldsymbol{C}$, kde $M \subset \boldsymbol{C}$ se nazývá **komplexní funkce komplexní proměnné**.

b) Zobrazení $f : M \to \boldsymbol{C}$, kde $M \subset \boldsymbol{R}$ se nazývá **komplexní funkce reálné proměnné**.

c) Zobrazení $f : M \to \boldsymbol{R}$, kde $M \subset \boldsymbol{R}$ se nazývá **reálná funkce reálné proměnné**.

Poznámka

Při dalším studiu se v základním kurzu matematiky budeme setkávat pouze s reálnými funkcemi reálné proměnné. Jedinou výjimkou jsou polynomy, a proto se o nich krátce zmíníme úvodem.

1.1. Polynomy

Cíle

Cílem této kapitoly je rozšíření znalostí o polynomech (mnohočlenech), které jsou nezbytně nutné pro řešení příkladů v některých dalších kapitolách studijních textů z předmětu matematika.

Předpokládané znalosti

Jsou předpokládány znalostí operací s polynomy v rozsahu střední školy, tj. sčítání polynomů, násobení polynomu číslem a polynomem, dělení polynomu polynomem a řešení jednoduchých typů algebraických rovnic (např. kvadratická rovnice, binomická rovnice, reciproké rovnice).

Výklad

Definice 1.1.1.

Komplexní funkce komplexní proměnné $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

kde $x \in \boldsymbol{C}$, $a_k \in \boldsymbol{C}$, $a_n \neq 0$ a $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ se nazývá **polynom n-tého stupně**.

Poznámky

1. Zobrazení $\boldsymbol{C} \to \{0\}$ *nazýváme* ***nulový polynom*** *a nezavádíme pro něj stupeň.*

2. Pro polynom užíváme také název ***mnohočlen****.*

3. Čísla $a_k,\, k = 0,\dots,n$ *nazýváme* ***koeficienty polynomu*** $p(x)$*, které pro naše potřeby budou obvykle čísly reálnými.*

Řešené úlohy

Příklad

$p(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1,\ \ x \in \boldsymbol{C}$ je polynom čtvrtého stupně s koeficienty $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 3,\ a_3 = 0,\ a_4 = 2.$

Poznámka

Součet, rozdíl a součin polynomů je polynom. Podíl dvou polynomů být polynomem nemusí.

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte podíl $\dfrac{x^3 + 2x + 2}{x + 1}$.

Řešení: $(x^3 + 2x + 2) : (x + 1) = x^2 - x + 3 - \dfrac{1}{x + 1}$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\quad -x^2 + 2x + 2 \\
\qquad \underline{-(-x^2 - x)} \\
\qquad\quad 3x + 2 \\
\qquad \underline{-(3x + 3)} \\
\qquad\quad -1
\end{array}
$$

Výsledek obsahuje člen $\frac{1}{x+1}$ a není tedy polynomem.

Výklad

Definice 1.1.2.

Říkáme, že $x_0 \in \boldsymbol{C}$ je **kořenem** nenulového polynomu $p(x)$, jestliže $p(x_0)=0$. Polynom $x-x_0$ prvního stupně, kde $p(x_0)=0$, nazýváme **kořenovým činitelem** polynomu $p(x)$.

Věta 1.1.1. Každý polynom stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden kořen $x_0 \in \boldsymbol{C}$.

Důkaz věty je obtížný a nebudeme jej provádět.

Věta 1.1.2. Číslo $x_0 \in \boldsymbol{C}$ je kořenem polynomu $p(x)$ stupně $n \geq 1$, právě když existuje polynom $p_1(x)$ stupně $n-1$ takový, že platí $p(x)=(x-x_0)\, p_1(x)$.

Důkaz: Věta 1.1.2. je větou ve tvaru ekvivalence, to znamená, že důkaz je nutno provést ve dvou krocích. Užijeme vzorce $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1})$, který si můžeme ověřit vynásobením pravé strany rovnosti.

1. Předpokládejme, že x_0 je kořenem polynomu $p(x)$, tj. $p(x_0)=0$. Pak platí:

$$p(x)=p(x)-p(x_0)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - x_0^k) =$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)\,(x^{k-1}+x^{k-2}x_0+\ldots+xx_0^{k-2}+x_0^{k-1}) =$$

$$=(x-x_0)\sum_{k=1}^{n} (a_k x^{k-1}+a_k x_0 x^{k-2}+\ldots+a_k x_0^{k-2}x+a_k x_0^{k-1})$$

Výrazy $a_k x^{k-1} + a_k x_0 x^{k-2} + \ldots + a_k x_0^{k-2} x + a_k x_0^{k-1}$ jsou polynomy stupně $k-1$ pro $k = 1, \ldots, n.$ To znamená, že jejich součtem dostaneme polynom stupně $n-1$, který označíme $p_1(x)$ a dostaneme $p(x) = (x - x_0) p_1(x)$.

2. Předpokládejme, že platí rovnost $p(x) = (x - x_0) p_1(x)$. Dosadíme $x = x_0$ a dostaneme $p(x_0) = (x_0 - x_0) p_1(x_0) = 0.$ Číslo x_0 je tedy kořenem polynomu $p(x)$.

Řešené úlohy

Příklad Číslo $x_0 = -1$ je kořenem polynomu $p(x) = x^3 + 2x + 3.$

Řešení: $p(x) = x^3 + 2x + 3 = (x+1)(x^2 - x + 3) = (x+1) p_1(x) \Rightarrow x+1$ je kořenový činitel $\Rightarrow x_0 = -1$ je kořenem polynomu $p(x)$.

Výklad

Definice 1.1.3.

Platí-li $p(x) = (x - x_0)^k p_1(x),$ kde $p_1(x_0) \neq 0, k \in \boldsymbol{N}$, pak říkáme, že x_0 je **k-násobný kořen** polynomu $p(x)$.

Poznámka

Místo 1– *násobný budeme říkat* ***jednoduchý kořen****.*

Výklad

Věta 1.1.3. Nechť $p(x)$ je polynom stupně $n \geq 1$. Pak existují čísla $x_1, x_2, ..., x_n \in \boldsymbol{C}$, která nemusí být různá, taková, že

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Bez důkazu.

Poznámka

*Podaří-li se nám zapsat polynom $p(x)$ ve tvaru z předchozí věty, říkáme, že jsme provedli **rozklad polynomu** $p(x)$ **na kořenové činitele** v oboru komplexních čísel.*

Řešené úlohy

Příklad Polynom $p(x) = 2x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 6x - 2$ má kořeny $1, i, 1, -i, 1$. Jeho rozklad na kořenové činitele má tvar

$$p(x) = 2(x-1)(x-i)(x-1)(x+i)(x-1) = 2(x-1)^3(x-i)(x+i)\,.$$

Vidíme, že kořen *1* je trojnásobný a kořeny *i, -i* jsou jednoduché.

Poznámka

Určit kořeny polynomů 1. a 2. stupně vede na řešení lineární a kvadratické rovnice. Obtíže nastávají při určení kořenů polynomů stupně $n \geq 3$. Pro $n = 3$ a $n = 4$ existují poměrně komplikované vzorce pro určení kořenů, podobně jako existuje vzorec pro řešení kvadratické rovnice. Pro $n \geq 5$ takové vzorce však vůbec nelze určit. Pro naše potřeby bude stačit návod na určení kořenů polynomů stupně $n \geq 3$, který uvedeme v příští kapitole. S přibližným určením kořenů polynomů se studenti seznámí v předmětu numerické metody.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Pro dané polynomy $p(x) = x^3 - 2x + 5$ a $q(x) = 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 2$ vypočtěte:

a) $p(2)$, b) $p(-2)$, c) $q(0)$,

d) $q(-1)$, e) $p(i)$, f) $q(-i)$,

g) $p(1+i)$, h) $p(x)+q(x)$, i) $q(x)-p(x)$,

j) $p(x)q(x)$, k) $p(3)q(1)$, l) $q(x):p(x)$.

2. Stanovte koeficienty polynomů tak, aby platilo $p(x) = q(x)$:

a) $p(x) = a_3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$,

b) $p(x) = 5x^2 - 8x - 4$, $q(x) = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)$.

3. Vynásobte polynomy:

a) $(-3x+2)(-3x-2)$, b) $(x-1)(x^2+x+1)$, c) $(x^3-x+2)(x^3-x-2)$,

d) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$, e) $(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$.

4. Vypočtěte podíl polynomů:

a) $(2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3):(x+1)$, b) $(2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x + 4):(x+2)$,

c) $(x^5 - 3x^4 + 2x^3):(x-2)$, d) $(x^4 - x^3 + 2x - 1):(x^2 - 2x)$,

e) $(x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 2x + 4):(x^3 - x + 1)$,

f) $(x^6 + 2x^5 - 6x^4 - x^3 + 7x^2 - 5x):(x^3 - x + 1)$.

5. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů:

a) $p(x) = -x^2 + 1$, b) $p(x) = 2x^2 + 4x + 2$, c) $p(x) = x^2 + x - 6$,

d) $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$, e) $p(x) = x^2 + 4$, f) $p(x) = 2x^2 + 5$,

g) $p(x) = x^2 + 13x - 48$, h) $p(x) = 9x^2 - 16$, i) $p(x) = -x^2 + 2x - 2$.

6. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů:

a) $p(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$, b) $p(x) = x^3 - 8$, c) $p(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

d) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$, e) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, f) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 26$,

g) $p(x) = x^4 - 9$, h) $p(x) = 2x^4 - 32$, i) $p(x) = x^6 - 1$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 9 ; b) 1 ; c) 2 ; d) -7 ; e) 5 - 3i ; f) 10 + 7i ; g) 1 ; h) $3x^4+8x^3-5x^2-2x+7$; i) $3x^4+6x^3-5x^2+2x-3$; j) $3x^7+7x^6-11x^5+x^4+47x^3-25x^2-4x+10$; k) 182 ; l) $3x+7+\dfrac{x^2-x-33}{x^3-2x+5}$. **2.** a) $a_3=0,\ \ b_2=3,\ \ b_1=2,\ \ b_0=1$; b) $a=3,\ \ b=2,\ \ c=-7$.

3. a) $9x^2-4$; b) x^3-1 ; c) $(x^3-x)^2-4=x^6-2x^4+x^2-4$; d) $8x^3-125$; e) $(x^2+1)^2-2x^2=x^4+1$. **4.** a) $2x^3-x^2+3$; b) $2x^4-x^3+2$; c) x^4-x^3 ; d) $x^2+x+2+\dfrac{6x-1}{x^2-2x}$; e) $x^2+3x-4+\dfrac{2x^2-5x+8}{x^3-x+1}$; f) x^3+2x^2-5x . **5.** a) $(1-x)(1+x)$; b) $2(x+1)^2$; c) $(x-2)(x+3)$; d) $3(x+1)(x-\frac{1}{3})$; e) $(x-2i)(x+2i)$; f) $2(x-i\sqrt{\frac{5}{2}})(x+i\sqrt{\frac{5}{2}})$; g) $(x-3)(x+16)$; h) $(3x-4)(3x+4)=9(x-\frac{4}{3})(x+\frac{4}{3})$; i) $-(x-1+i)(x-1-i)$. **6.** a) $3x(x-2)(x+1)$; b) $p(x)=(x-2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$; c) $(2x+1)^3=8(x+\frac{1}{2})^3$; d) $x(2x+3)(x-1)=2x(x+\frac{3}{2})(x-1)$; e) $(x+1)(x-2)^2$; f) $(x-1)^3+27=(x+2)(x-\frac{5}{2}+\frac{i3\sqrt{3}}{2})(x-\frac{5}{2}-\frac{i3\sqrt{3}}{2})$; g) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$;
h) $2(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$;
i) $(x+1)(x-1)(x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2})$.

1.2. Hornerův algoritmus

Cíle

V této kapitole se naučíme určovat zejména celočíselné kořeny některých polynomů.

Výklad

Při výpočtu hodnoty polynomu $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ n-tého stupně, $n \geq 1$ v bodě $x_0 \in \boldsymbol{C}$ musíme provést $(n-1)-$krát umocnění $x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n$, n násobení koeficienty a n sčítání. Budeme se snažit počet operací snížit. Způsob řešení ukážeme nejdříve na příkladu.

Řešené úlohy

Příklad Pro $p(x)=x^3+4x^2+2x+3$ určete $p(2)$.

Řešení:

a) Dosazením: $p(2)=2^3+4.2^2+2.2+3=8+16+4+3=31.$

b) Metodou, kterou budeme nazývat Hornerovým algoritmem (schématem):

$$p(x)=(x^2+4x+2)x+3=\big((x+4)x+2\big)x+3,$$
$$p(2)=\big((2+4)2+2\big)2+3=(\mathbf{6}.2+2)2+3=\mathbf{14}.2+3=\mathbf{31}.$$

Zapišme nyní do prvního řádku tabulky koeficienty daného polynomu, do druhého řádku nejprve opišme hodnotu $a_3=1$ a pak zvýrazněné součty z předchozího výpočtu:

x_0	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	4	2	3
2	1	6	14	31

Lze se přesvědčit, že čísla 6, 14, 31 dostaneme tak, že číslem $x_0 = 2$ násobíme číslo 1 z druhého řádku a přičteme k němu číslo 4 z prvního řádku. Pak číslo 6 násobíme opět číslem 2 a přičteme další číslo z prvního řádku, tj. číslo 2 a dostaneme 14. Poslední krok už je zřejmý $2.14 + 3 = 31$. Dostali jsme hodnotu $p(2) = 31$.

Výklad

Zobecnění algoritmu:

K polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ stupně n a číslu $x_0 \in \boldsymbol{C}$ přiřadíme postupně čísla $b_{n-1} = a_n, b_{k-1} = x_0 b_k + a_k$ pro $k = n-1, n-2, \ldots, 1$ a $r = x_0 b_0 + a_0$, kde r je hodnota $p(x_0)$.

Tabulku pak můžeme zapsat ve tvaru:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-1}	$\cdots$	b_0	r

Poznámka

Koeficienty $b_{n-1}, \ldots, b_0$ *jsou koeficienty polynomu* $p_1(x)$ *stupně* $n-1$, *pro který platí:*

$$p(x) = (x - x_0) p_1(x) + r \quad .$$

Řešené úlohy

Příklad Určete hodnoty polynomu $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ pro $-1, 2, 3$.

Řešení:

	1	4	2	3
-1	1	3	-1	4
2	1	6	14	31
3	1	7	23	72

Výklad

Pro určení kořenů některých polynomů uvedeme bez důkazu větu:

Věta 1.2.1. Jestliže v polynomu $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \in \boldsymbol{Z}$ je $a_n=1$ a má-li $p(x)$ kořeny patřící do $\boldsymbol{Z}$, pak jsou tyto kořeny děliteli čísla a_0.

Řešené úlohy

Příklad Užitím Hornerova schématu určete kořeny polynomu

$p(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6.$

Řešení: Pokud existují celočíselné kořeny, pak podle věty 1.2.1 to mohou být čísla $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ a ± 6. Sestavíme tabulku a uvědomíme si, že jsou-li x_0, x_1 kořeny polynomu $p(x)$ a $p(x)=(x-x_0)\,p_1(x)$, pak x_1 musí být kořenem polynomu $p_1(x)$. To znamená, že v tabulce můžeme při výpočtu použít nově vzniklý řádek.

	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0
-1	1	-1	-6	0	
2	1	1	-4		
-2	1	-3	0		
3	1	0			

$\Rightarrow x_1=1$ je kořen $\Rightarrow p(x)=(x-1)(x^3-7x-6)$,

$\Rightarrow x_2=-1$ je kořen $\Rightarrow p(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$,

$\Rightarrow x_0=2$ není kořen,

$\Rightarrow x_3=-2$ je kořen $\Rightarrow p(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$,

$\Rightarrow x_4=3$ je kořen.

Rozklad polynomu $p(x)$ na součin kořenových činitelů lze napsat ve tvaru

$$x^4-x^3-7x^2+x+6=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3).$$

Kontrolní otázky

1. Kterou z funkcí nazýváme polynomem?
   a) Komplexní funkci komplexní proměnné,
   b) komplexní funkci reálné proměnné,
   c) reálnou funkci reálné proměnné.
2. Je součinem polynomů polynom?
   a) ano, b) ne, c) nemusí být.
3. Je podílem polynomů polynom?
   a) ano, b) ne, c) nemusí být.
4. Hornerovým algoritmem lze pro polynom $\mathrm{p(x)}$ určit
   a) jen kořen polynomu,
   b) jen hodnotu polynomu v daném bodě,
   c) oboje.
5. Řešení které z uvedených rovnic vede k určení kořenů polynomu 2. stupně?
   a) Lineární rovnice,
   b) kvadratické rovnice,
   c) kubické rovnice.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. a); 2. a); 3. c); 4. c); 5. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte hodnoty následujících polynomů v bodech 0, 1, -1, -2, 3 přímým dosazením a pomocí Hornerova algoritmu:

a) $p(x)=x^3+2x^2-x+3$, b) $q(x)=x^4-2x^2+x-4$, c) $r(x)=x^5-3x^3+2x-2$.

2. Nalezněte kořeny polynomu a proveďte rozklad na kořenové činitele:

a) x^3-2x^2-x+2, b) x^3+2x^2-x-2, c) $x^3+3x^2-4x-12$,

d) x^3-3x+2, e) x^3+5x^2+8x+4, f) x^3-3x^2+4,

g) $x^4+x^3-4x^2-4x$, h) x^4-3x^3+4x, i) $x^4-3x^3-3x^2+7x+6$,

j) x^3-x^2+x-1, k) x^3-4x^2+6x-4, l) $x^4-x^3-x^2-x-2$.

3. Pomocí Hornerova algoritmu vydělte polynomy:

a) $(2x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 14x + 8) : (x-2)$,

b) $(2x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 14x + 8) : (x+2)$,

c) $(3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 7) : (x+1)$,

d) $(3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 7) : (x-1)$,

e) $(x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 19x^3 + 2x^2 - 22x + 21) : (x-3)$.

4. Nalezněte všechny kořeny polynomu $p(x)$, znáte-li jeden kořen polynomu:

a) $p(x) = x^3 - 7x + 6$, $x_1 = -3$, b) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, $x_1 = 2$,

c) $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 5$, $x_1 = 2$, d) $p(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$, $x_1 = -1$,

e) $p(x) = x^4 - x^3 - 17x^2 - 15x$, $x_1 = 5$, f) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 16x$, $x_1 = 4$.

5. Která z čísel -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4 jsou kořeny polynomu

$p(x) = x^5 - x^4 - 10x^3 - 5x^2 - 21x + 36$?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 3, 5, 5, 5, 45 ; b) -4, -4, -6, 2, 62 ; c) -2, -2, -2, -14, 166 . **2.** a) 1, -1, 2; $(x-1)(x+1)(x-2)$; b) 1, -1, -2 ; $(x-1)(x+1)(x+2)$; c) 2, -2, -3 ; $(x-2)(x+2)(x+3)$; d) 1, 1, -2 ; $(x-1)^2(x+2)$ e) -1, -2, -2 ; $(x+1)(x+2)^2$ f) -1, 2, 2 ; $(x+1)(x-2)^2$; g) 0, -1, 2, -2 ; $x(x+1)(x-2)(x+2)$ h) 0, -1, 2, 2 ; $x(x+1)(x-2)^2$; i) -1, -1, 2, 3 ; $(x+1)^2(x-2)(x-3)$ j) 1, +i, -i ; $(x-1)(x-i)(x+i)$ k) 2, 1+i, 1-i ; $(x-2)(x-1-i)(x-1+i)$ l) -1, 2, +i, -i ; $(x+1)(x-2)(x-i)(x+i)$. **3.** a) $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 4$; b) $2x^4 - 11x^3 + 35x^2 - 79x + 144 - \dfrac{280}{x+2}$; c) $3x^4 - 6x^3 + x^2 + 5x - 7$; d) $3x^4 - 5x^2 + x - 1 - \dfrac{8}{x-1}$; e) $x^5 - 3x^4 - 6x^3 + x^2 + 5x - 7$. **4.** a) -3, 1, 2 ; b) 2, -1, $\dfrac{1}{2}$; c) 2, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$; d) -1, 1+2i, 1-2i ; e) 5, 0, -1, -3 ; f) 4, 0, $-1 + i\sqrt{3}$, $-1 - i\sqrt{3}$. **5.** 1, -3, 4.

Kontrolní test

1. Určete koeficienty u x^5 a x^4 součinu $f(x)\cdot g(x)$ polynomů

   $f(x) = 7x^6 + \frac{3}{5}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 3,$

   $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5.$

   a) $-15, \frac{67}{3};$ b) $5, \frac{67}{3};$ c) $\frac{67}{3}, 5.$

2. Rozložte polynom $f(x)$ na součin kořenových činitelů:

   $f(x) = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1.$

   a) $(9x+1)^3;$ b) $(3x-1)^3;$ c) $(9x-1)^3.$

3. Určete celé kořeny polynomu $f(x)$ (užijte Hornerův algoritmus):

   $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24.$

   a) $-2; 3; 4;$ b) $2; 3; -4;$ c) $2; -3; 4.$

4. Určete další kořeny polynomu $f(x)$ a jeho rozklad na součin kořenových činitelů, znáte-li jeden jeho kořen x_1:

   $f(x) = 7x^4 + 50x^3 - 50x - 7, \qquad x_1 = -7.$

   a) $-1; 1; \frac{1}{7};$ b) $1; -7; 7;$ c) $-1; -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}.$

5. Řešte rovnici: $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 = 0.$

   a) $0; 1; 3; 5;$ b) $1; 1; -3; 5;$ c) $1; 3; -5; 5.$

6. Řešte nerovnici: $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 < 0.$

   a) $x \in \langle 1, 2 \rangle;$ b) $x \in (-1, 2);$ c) $x \in (1, 2).$

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. a); 4. a); 5. b); 6. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.1. a 1.2. znovu.

1.3. Základní pojmy a graf funkce

Výklad

Nyní se již budeme zabývat pouze reálnými funkcemi reálné proměnné a proto budeme zobrazení $M \to \boldsymbol{R}$, kde $M \subset \boldsymbol{R}$ nazývat stručně **funkce**. Zopakujeme, že funkce je každé zobrazení $f : M \to \boldsymbol{R}, M \subset \boldsymbol{R}$, které každému $x \in M = D_f$ přiřadí právě jednu hodnotu $y \in H_f \subset \boldsymbol{R}$. Množinu D_f budeme nazývat **definiční obor funkce f** a množinu H_f nazveme **obor hodnot funkce f** . Budeme psát $y = f(x)$.

Definice 1.3.1.

Grafem funkce *f* nazveme množinu všech bodů $(x, f(x))$ v kartézské soustavě souřadnic.

Poznámka

Funkce $f(x)$ může být dána různými způsoby. Některé nyní uvedeme: - $y = f(x)$, y *je z rovnice vyjádřeno; říkáme, že funkce je dána explicitně,*

- $F(x, y) = 0$, y *není ze vztahu* $F(x, y)$ *obsahujícího proměnné* x, y *vyjádřeno; říkáme, že funkce je dána implicitně rovnicí* $F(x, y) = 0$,
- $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in M \subset \boldsymbol{R};$ *říkáme, že funkce je dána parametricky,*
- *grafem,*
- *tabulkou.*

Úmluva: Body na ose *x* o souřadnicích $(x, 0)$, resp. body na ose *y* o souřadnicích $(0, y)$ budeme při popisu grafů často označovat pouze *x*, resp. *y*.

Řešené úlohy

Příklad Mějme funkci $y = x+1,\ D_f = \{1,2,3\}$. Zadejte tuto funkci výše uvedenými způsoby.

Řešení:

1. **Explicitně:**

a) Vyjádření $y = x+1, D_f = \{1,2,3\}$ je explicitní.

b) Zadanou funkci můžeme však také vyjádřit explicitně například ve tvaru $y = |x-1|+2,\ x \in \{1,2,3\}$.

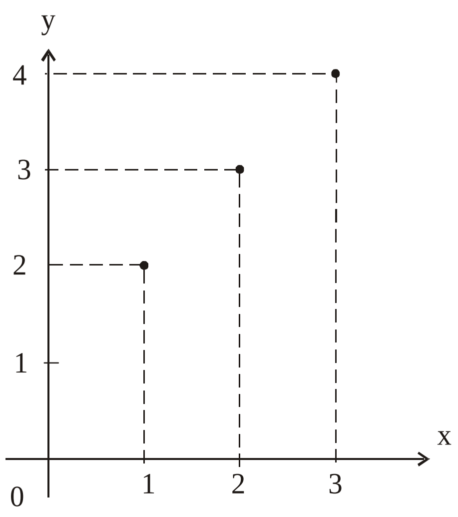
2. **Implicitně:**

Rovnice $y - x - 1 = 0,\ x \in \{1,2,3\}$ vyjadřuje danou funkci implicitně.

3. **Parametricky:**

Rovnice $x = 2+t,\ y = 3+t,\ t \in \{-1,0,1\}$ jsou jedním z možných **parametrických vyjádření** dané funkce.

4. **Grafem**:



Obr. 1

Z obr. 1 je vidět, že **grafem** dané funkce jsou izolované body v kartézské soustavě souřadnic.

5. **Tabulkou**:

x	1	2	3
y	2	3	4

Výklad

Definice 1.3.2.

Funkce $f_1(x), x \in M_1$ *a* $f_2(x), x \in M_2$ **se rovnají**, jestliže $M_1 = M_2 = M$ a $\forall\, x \in M : f_1(x) = f_2(x)$.

Řešené úlohy

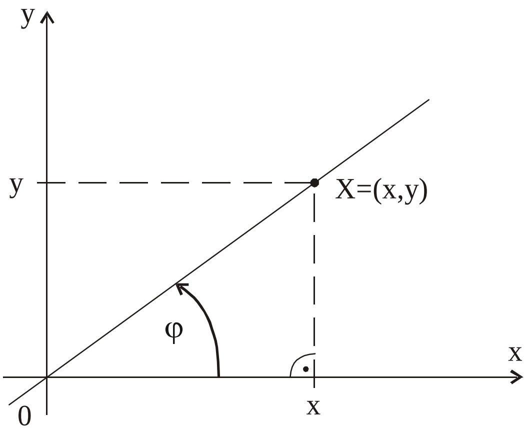
Příklad Je-li $f_1(x) = x, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, pak $f_1 = f_2$.

Poznámka

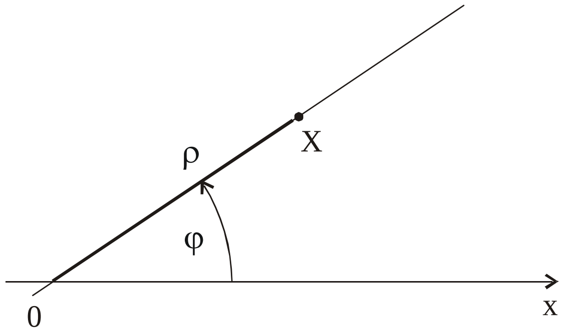
Mimo kartézské soustavy souřadnic budeme užívat takzvanou ***polární soustavu souřadnic****. V kartézské soustavě souřadnic v rovině E_2 je každý bod X roviny dán jednoznačně uspořádanou dvojicí (x, y), kde $x, y \in \boldsymbol{R}$, a naopak. Píšeme $X = (x, y)$, viz obr. 2. Zvolíme nyní bod $O = (0,0)$ v E_2 a nazveme jej* ***počátkem*** *polární soustavy souřadnic a přímku (osu) x, $O \in x$, viz obr. 3. Každému bodu roviny E_2 přiřadíme dvojici (φ, ρ) kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je (kladně) orientovaný úhel přímek x, OX a $\rho = |X - O| \geq 0$. Je zřejmé, že korespondence mezi takto utvořenými uspořádanými dvojicemi reálných čísel a body roviny E_2 je vzájemně jednoznačná. Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi je dán vztahy*

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \qquad (1)$$

viz obr. 2, 3.



Obr. 2



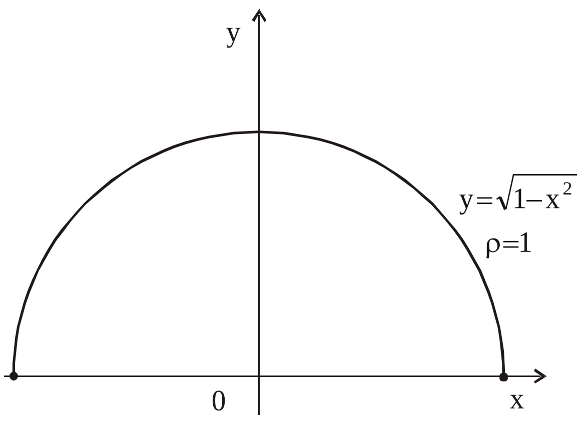
Obr. 3

Řešené úlohy

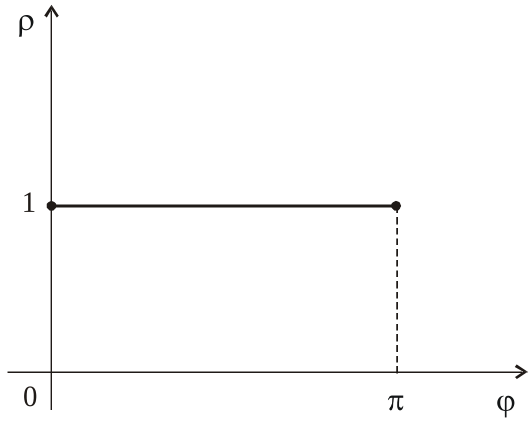
Příklad Grafem funkce $x^2 + y^2 = 1,\ D_f = \{x \in <-1,1> : y \geq 0\}$ je půlkružnice $y = \sqrt{1 - x^2}$, viz obr. 4. Dosadíme z rovnic (1) a upravíme:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1,$$
$$\rho^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = 1,$$
$$\rho^2 = 1 \ \Rightarrow\ \rho = 1,\ \varphi \in < 0, \pi > .$$

Dostali jsme rovnici $\rho = 1$ dané půlkružnice v polárních souřadnicích vyjádřené v zadání implicitně rovnicí $x^2 + y^2 = 1.$ Pokud pro hodnoty φ, ρ použijeme polární souřadnice,



Obr. 4



Obr. 5

bude grafem funkce $\rho = 1$ úsečka, viz obr. 5. Dále si můžeme všimnout, že kružnice $x^2 + y^2 = 1$ v kartézské soustavě souřadnic není funkce, např. pro $x = 0$ existují dvě různé hodnoty $y = \pm 1$. Vyjádříme-li však kružnici v polárních souřadnicích rovnicí $\rho = 1, \varphi \in < 0, 2\pi)$, pak každé hodnotě φ je přiřazena právě jedna hodnota $\rho = 1$ a kružnice je podle definice funkcí. Obdobně se tak může stát i u jiných křivek.

Poznámka

Podle definice je funkce f zadána definičním oborem D_f a předpisem, který každému $x \in D_f$ přiřazuje právě jedno $y = f(x) \in H_f \subset \boldsymbol{R}$. Často budeme funkci f zadávat pouze předpisem a definičním oborem budeme rozumět množinu všech $x \in \boldsymbol{R}$, pro něž má daný předpis smysl.

Řešené úlohy

Příklad Je dána funkce $y = \sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{x}$, určete její definiční obor.

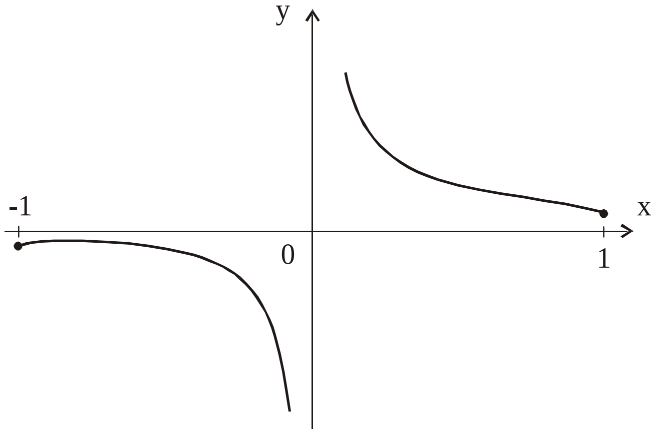
Řešení: Platí $1 - x^2 \geq 0 \wedge x \neq 0$,

$(1 - x)(1 + x) \geq 0 \wedge x \neq 0$,

$((1 - x \geq 0 \wedge 1 + x \geq 0) \vee (1 - x < 0 \wedge 1 + x < 0)) \wedge x \neq 0$,

$((x \leq 1 \wedge x \geq -1) \vee (x > 1 \wedge x < -1)) \wedge x \neq 0 \Rightarrow \ x \in < -1, 0) \cup (0, 1 >$.

Graf funkce je na obr. 6.



Obr. 6.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Rozhodněte, zda jsou si rovny funkce f a g s maximálními definičními obory $D_f \subset \mathbf{R}, D_g \subset \mathbf{R}$:

a) $f: y = x, \quad g: y = \sqrt{x^2}$, b) $f: y = x, \quad g: y = \left(\sqrt{x}\right)^2$,

c) $f: y = |x|, \quad g: y = \sqrt{x^2}$, d) $f: y = x, \quad g: y = \sqrt[3]{x^3}$.

2. Určete definiční obory funkcí:

a) $y = \sqrt{x+2}$, b) $y = \sqrt{9-x^2}$, c) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$,

d) $y = \sqrt{3-x}$, e) $y = \sqrt{x^2-4}$, f) $y = \sqrt{4x-x^2}$.

3. Určete definiční obory funkcí:

a) $y = \dfrac{1-x}{x^2+2x+15}$, b) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}$, c) $y = \sqrt{3-\sqrt{x}}$,

d) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x-15}$, e) $y = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$, f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$,

g) $y = \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$, h) $y = \ln(1 - \operatorname{tg} x)$, i) $y = \dfrac{3}{4-x^2} + \log(x^3 - x)$,

j) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$, k) $y = \sin\left(\ln \dfrac{1}{3x+1}\right)$, l) $y = \log(2\cos x - \sqrt{3})$,

m) $y = \dfrac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$, n) $y = \ln \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$.

4. Znáte-li graf funkce $y = f(x), \quad x \in D_f$, sestrojte grafy funkcí

a) $f_1: \ y = f(x) + c$, b) $f_2: \ y = f(x) - c$, c) $f_3: \ y = f(x+c)$,

d) $f_4: \ y = f(x-c)$, e) $f_5: \ y = -f(x)$, f) $f_6: \ y = f(-x)$,

g) $f_7: \ y = f(c-x) + k$, kde $c > 0, \quad k > 0$.

5. Nakreslete graf funkce

a) $y = x^2 + 4x - 4$, b) $y = x^2 - 2x + 2$, c) $y = -x^2 - 2x + 2$.

6. Ze znalosti grafu funkce $y = x^3$ nakreslete graf funkce

a) $y = -x^3$, b) $y = x^3 + 2$, c) $y = -(x+2)^3$,

d) $y = (x-2)^3$, e) $y = -x^3 + 3$, f) $y = (x+1)^3 - 2$.

7. Ze znalosti grafu funkce $y = 3^x$ nakreslete graf funkce

a) $y = -3^x$, b) $y = \frac{1}{3}3^x$, c) $y = -1 + 3^{x-1}$,

d) $y = 3^{x+2}$, e) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, f) $y = 3 - 3^{x+3}$.

8. Ze znalosti grafu funkce $y = \log x$ nakreslete graf a určete definiční obor funkce

a) $y = \log(-x)$, b) $y = \log(x-3)$, c) $y = \log|x|$,

d) $y = 1 - \log x$, e) $y = 2 + \log(x+1)$, f) $y = |\log x|$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) ne, neboť $g : y = \sqrt{x^2} = |x|$; b) ne, neboť $D_f = \mathbf{R}, D_g =< 0,\infty)$; c) ano; d) ano.

2. a) $x \geq -2$; b) $|x| \leq 3$ tj. $x \in < -3,3 >$; c) $x \in < -4,0 >$; d) $x \leq 3$; e) $|x| \geq 2$ tj. $x \in \mathbf{R} - (-2,2)$; f) $x \in < 0,4 >$. **3.** a) $x \in \mathbf{R}$; b) $x \in < 2,3)$; c) $x \in < 0,9 >$;

d) $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,5) \cup (5,\infty)$; e) $x \in < 0,3 > \cup (4,\infty)$; f) $D_f = \phi$; g) $< 4,6 >$;

h) $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$; i) $(-1,0) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$; j) $< -4,-\pi > \cup < 0,\pi >$;

k) $x \in (-\frac{1}{3},\infty)$; l) $(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$; m) $< -2,0) \cup (0,1)$;

n) $(3 - 2\pi, 3 - \pi) \cup (3,4 >$.

4. Grafy funkcí f_1 až f_7 dostaneme transformací grafu funkce $f(x)$.

a) *Graf funkce* $f_1 : y = f(x) + c$, $D_{f_1} = D_f$. Graf funkce f_1 dostaneme posunutím grafu funkce *f* v kladném směru osy *y*. Velikost posunutí je *c* (obr. a).

b) *Graf funkce* $f_2 : y = f(x) - c$, $D_{f_2} = D_f$. Graf funkce f_2 dostaneme posunutím grafu funkce *f* v záporném směru osy *y*. Velikost posunutí je *c* (obr. a).

c) *Graf funkce* $f_3: \ y = f(x+c)$, $\mathrm{D}_{f_3} = \{x \in \mathbf{R}; \ x+c \in \mathrm{D}_f\}$. Graf funkce f_3 dostaneme posunutím grafu funkce *f* v záporném směru osy *x*. Velikost posunutí je *c* (obr. b).

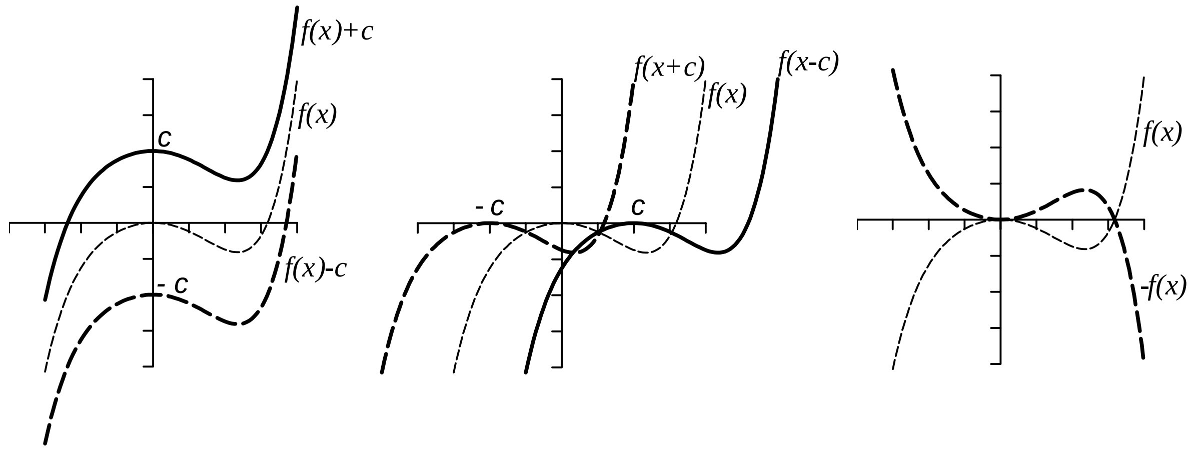
d) *Graf funkce* $f_4: \ y = f(x-c)$, $\mathrm{D}_{f_3} = \{x \in \mathbf{R}; \ x-c \in \mathrm{D}_f\}$. Graf funkce f_4 dostaneme posunutím grafu funkce *f* v kladném směru osy *x*. Velikost posunutí je *c* (obr. b).

e) *Graf funkce* $f_5: \ y = -f(x)$, $D_{f_5} = D_f$. Graf funkce f_5 je souměrně sdružený s grafem funkce *f* v osové souměrnosti podle osy *x*, neboť $f_5(x) = -f(x)$ (obr. c).

f) *Graf funkce* $f_6: \ y = f(-x)$, $\mathrm{D}_{f_6} = \{x \in \mathbf{R}; \ \text{-}x \in \mathrm{D}_f\}$. Graf funkce f_6 je souměrně sdružený s grafem funkce *f* v osové souměrnosti podle osy *y*, neboť $f_6(x) = f(-x)$ (obr. d).

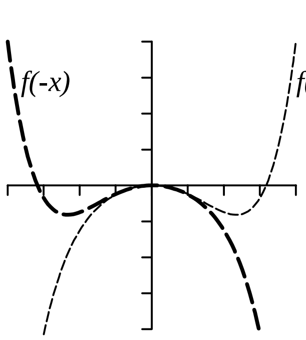
g) *Graf funkce* $f_7: \ y = f(c-x)+k$. $\mathrm{D}_{f_7} = \{x \in \mathbf{R}; \ c-x \in \mathrm{D}_f\}$. Graf funkce f_7 dostaneme postupně transformacemi typu f), c), a). To znamená, že nejprve sestrojíme graf souměrně sdružený s grafem funkce *f* v osové souměrnosti podle osy *y*, následuje posunutí grafu v záporném směru osy *x* o hodnotu *c* a nakonec posunutí grafu v kladném směru osy *y* o hodnotu *k*. (obr. e).

Transformace grafu funkce:

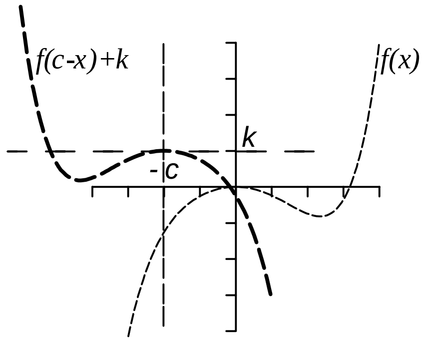


a) b) c)

Řešení:



d)



e)

5. a) $y=(x+2)^2-8$; b) $y=(x-1)^2+1$; c) $y=-(x+1)^2+3$. Grafy dostaneme transformacemi grafu funkce $y=x^2$ (viz příklad 1.3.4). **6.** Grafy viz příklad 1.3.4. **7.** Grafy viz příklad 1.3.4. **8.** Grafy viz příklad 1.3.4; a) $\mathrm{D}_f=(-\infty,0)$; b) $\mathrm{D}_f=(3,\infty)$; c) $\mathrm{D}_f=\mathbf{R}-\{0\}$; d) $\mathrm{D}_f=(0,\infty)$; e) $\mathrm{D}_f=(-1,\infty)$; f) $\mathrm{D}_f=(0,\infty)$.

1.4. Základní vlastnosti funkcí a operace s funkcemi

Cíle

V této kapitole jsou definovány nejdůležitější pojmy týkající se vlastností funkcí. Při dalším studiu budou tyto vlastnosti často používány. Je proto nutné si jejich definice dobře zapamatovat.

Výklad

Definice 1.4.1.

Funkce *f* je **ohraničená shora**, jestliže $\forall x \in D_f \ \exists h \in \boldsymbol{R}: \ f(x) \le h.$

Funkce *f* je **ohraničená zdola,** jestliže $\forall x \in D_f \ \exists d \in \boldsymbol{R}: \ f(x) \le d.$

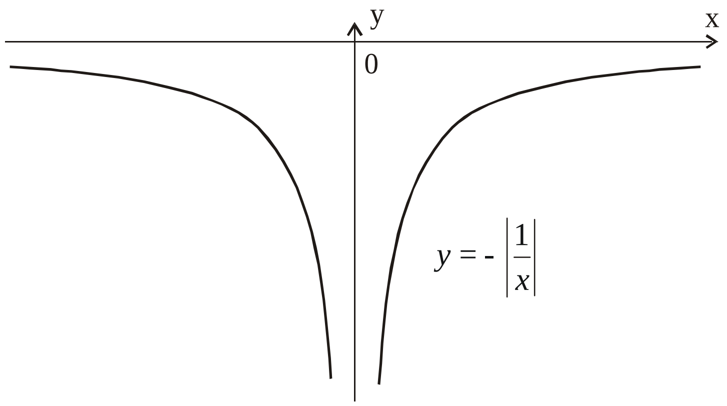
Funkce *f* je **ohraničená**, jestliže je ohraničena shora i zdola, tj. $\forall x \in D_f \ \exists k \in \boldsymbol{R}: \ |f(x)| \le k.$

Řešené úlohy

Příklad 1. Funkce $y = -\left|\frac{1}{x}\right|, \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ je ohraničená shora, definici vyhovuje např. $h = 0$, obr. 7.

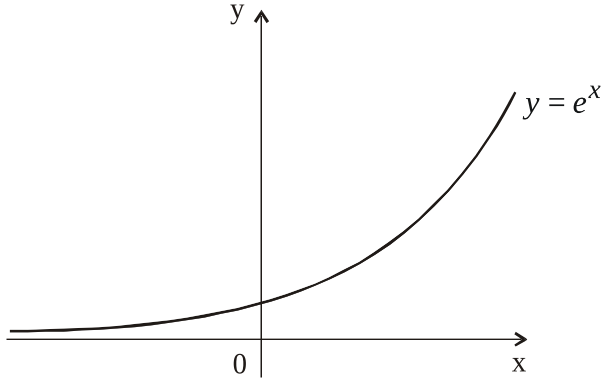
Řešené úlohy

Příklad 1. Funkce $y = -\left|\frac{1}{x}\right|. \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ je ohraničená shora, definice vyhovuje např. $h = 0$, obr. 7.



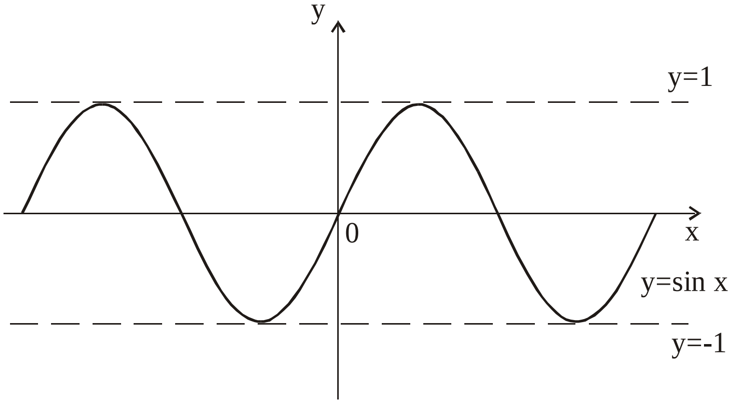
Obr. 7

2. Funkce $y = e^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, je ohraničená zdola, definici vyhovuje např. $d = 0$, obr. 8.



Obr. 8

3. Funkce $y = \sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$ je ohraničená, definici vyhovuje např. $k = 1$, obr. 9.



Obr. 9

Výklad

Definice 1.4.2.

Funkce f se na intervalu $I \subset D_f$ nazývá **rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí)**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \left(f(x_1) > f(x_2),\ f(x_1) \le f(x_2),\ f(x_1) \ge f(x_2) \right).$$

Funkce splňující na I některou z výše uvedených vlastností se nazývají **monotónní** na intervalu I. **Funkce** rostoucí a klesající na I se nazývají **ryze monotónní** na I.

Řešené úlohy

Příklad Dokažte, že funkce $y = x^3$ je rostoucí na $\boldsymbol{R}$.

Řešení: Dokážeme, že za předpokladu $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in R$ je

$x_1^3 < x_2^3$, tj. $x_2^3 - x_1^3 > 0$. Platí:

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} + x_2^2) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left((x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + x_2^2 - \frac{x_2^2}{4}) \right).$$

Podle předpokladu platí $x_2 - x_1 > 0, (x_1 + \frac{x_2}{2})^2 > 0$ a $x_2^2 - \frac{x_2^2}{4} > 0.$

Z toho vyplývá $x_2^3 - x_1^3 > 0$. Funkce $y = x^3$ je rostoucí na $\boldsymbol{R}$.

Výklad

Definice 1.4.3.

Funkce f se nazývá **sudá (lichá),** jestliže

$$\forall x \in D_f : -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x) \left(f(-x) = -f(x) \right).$$

Poznámka

Graf sudé (liché) funkce je souměrný podle osy y (podle počátku) soustavy souřadnic.

Výklad

Definice 1.4.4.

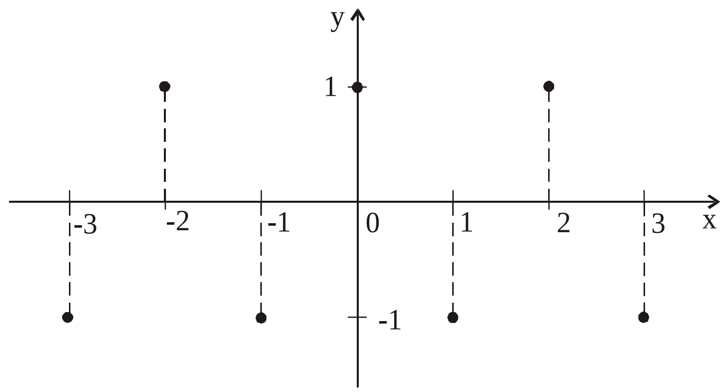
Funkce f se nazývá **periodická** s periodou $p \in (0, \infty)$, jestliže

$\forall x \in D_f : x \pm p \in D_f \wedge f(x \pm p) = f(x).$

Řešené úlohy

Příklad 1. Periodické funkce jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ s periodou $p = 2\pi$ a funkce $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ s periodou $p = \pi$.

2. Periodickou je také například funkce $y = (-1)^x$, $x \in \boldsymbol{Z}$, s periodou $p = 2$. Graf viz obr. 10.



Obr. 10

Výklad

Definice 1.4.5.

Funkce f se nazývá **prostá**, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Věta 1.4.1. Každá ryze monotónní funkce je prostá.

Důkaz (přímý):

Pro $\forall x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$ je $x_1 < x_2$ nebo $x_1 > x_2$. Z předpokladu věty vyplývá, že $f(x_1) < f(x_2)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$. V každém případě je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

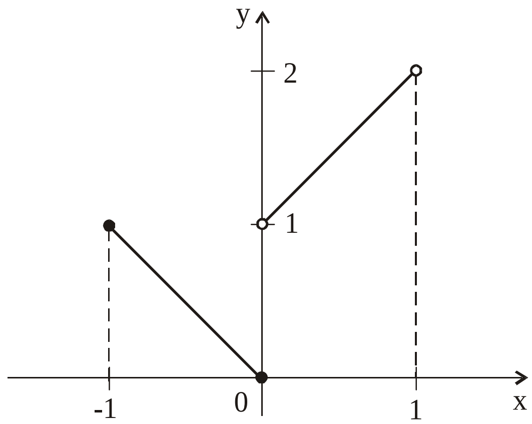
Poznámka

Pamatujte si, že funkce prostá nemusí být monotónní!

Řešené úlohy

Příklad Funkce $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ pro } x \in (0,1) \\ -x \text{ pro } x \in \langle -1, 0 \rangle \end{cases}$

je prostá, není však monotónní, viz obr. 11.



Obr. 11

Výklad

Úmluva: Význačné body grafu funkce, v nichž je funkce definovaná, budeme označovat plnými kroužky, body, v nichž není definovaná, pak kroužky prázdnými.

Definice 1.4.6.

Funkce $g_1(x) = f_1(x) + f_2(x)$, resp. $g_2(x) = f_1(x).f_2(x)$, $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$ se nazývá **součet**, resp. **součin funkcí** f_1, f_2. Funkce $g_3(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $x \in D_{f_1} \cap (D_{f_2} \setminus \{x \in D_{f_2} : f_2(x) = 0\})$ se nazývá **podíl funkcí** f_1, f_2.

Definice 1.4.7.

Mějme funkce g a h. Je-li $u = g(x) \in D_h$ pro $x \in D_g$, můžeme k x přiřadit hodnotu $y = h(u) = h(g(x))$. Říkáme, že funkce $f(x) = h(g(x))$, $D_f = \{x \in D_g : g(x) \in D_h\}$ je funkce složená. Funkci h nazveme **vnější** složkou a funkci g **vnitřní složkou** skládání.

Řešené úlohy

Příklad Funkci $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $D_f = <-1,1>$ můžeme rozložit na složky $g(x) = 1 - x^2$, $D_g = \boldsymbol{R}$ a $h(u) = \sqrt{u}$, $D_h = <0, \infty)$.

Výklad

Definice 1.4.8.

Nechť je $f(x)$ prostá funkce na D_f a nechť H_f je její obor funkčních hodnot. Funkce $f^{-1}(y)$ definovaná na H_f předpisem $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ se nazývá **inverzní funkce** k funkci $f(x)$.

Věta 1.4.2. Pro každou prostou funkci *f* a k ní inverzní funkci f^{-1} platí, že

$$\forall x \in D_f : f^{-1}(f(x)) = x \text{ a } \forall y \in D_{f^{-1}} : f(f^{-1}(y)) = y.$$

Důkaz plyne přímo z definice.

Řešené úlohy

Příklad Platí $\ln e^x = x,\ x \in \boldsymbol{R}$ a také $e^{\ln y} = y,\ y \in (0, \infty)$. Logaritmické a exponenciální funkce jsou inverzní.

Výklad

Věta 1.4.3. Jestliže je funkce *f* rostoucí (klesající), pak funkce f^{-1} je rostoucí (klesající).

Důkaz (sporem):

Provedeme pro funkci rostoucí. Předpokládejme, že

$\exists y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} : y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2).$

Funkce f je rostoucí a tedy dostaneme $f(f^{-1}(y_1) \geq f(f^{-1}(y_2))$. Podle věty 1.4.2 je $y_1 \geq y_2$, což je spor s předpokladem.

Řešené úlohy

Příklad K funkci $f(x) = x^3,\ x \in \boldsymbol{R},\ H_f = \boldsymbol{R}$ je inverzní funkcí funkce

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y},\ y \in \boldsymbol{R}$. Obě funkce jsou implicitně určeny rovnicí $x^3 - y = 0$ a mají stejný graf. Vyměníme-li v rovnici $x = \sqrt[3]{y}$ proměnné, dostáváme funkci $y = \sqrt[3]{x},\ x \in \boldsymbol{R},$ jejíž graf je s grafem funkce $y = x^3$ symetrický podle přímky $y = x$.

Poznámka

Často se používá název inverzní funkce k funkci $f(x)$ *nejen pro funkci* $f^{-1}(y)$, *ale také pro funkci* $f^{-1}(x)$.

S cyklometrickými funkcemi ($\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arccotg} x$) *se seznámíte v kapitole 1.5.6.*

Kontrolní otázky

1. Která z uvedených možností platí pro funkci reálné proměnné: Funkce je každé zobrazení $f:\ M \to \boldsymbol{R},\ M \subset \boldsymbol{R},$ které každému $x \in M$ přiřadí
   a) alespoň jednu hodnotu $y \in \boldsymbol{R}$,
   b) právě jednu hodnotu $y \in \boldsymbol{R}$.
2. Která z možností platí pro graf funkce liché?
   a) je souměrný podle osy x,
   b) je souměrný podle osy y,
   c) je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.
3. Je každá funkce prostá monotónní?
   a) ano; b) ne; c) nemusí.
4. Co platí pro definiční obor D_f součinu dvou funkcí $f_1(x) \cdot f_2(x)$?
   a) $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$,
   b) $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$.
5. Ke které z funkcí lze nalézt inverzní funkci?
   a) ke každé funkci,
   b) jen k periodické funkci,
   c) jen k prosté funkci.

6. Funkce sinus je funkcí periodickou. Je i ohraničenou zdola?

   a) ano, b) ne.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. c); 4. b); 5. c); 6. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Zjistěte, zda je daná funkce ohraničená. Pokud není uvedeno jinak, uvažujte všechna x, pro něž je funkce definovaná:

a) $y=\dfrac{2}{3+x^2}$, b) $y=1-\dfrac{2}{x-1}$, c) $y=\pi+\arccos(2x-1)$,

d) $y=\dfrac{2}{(x-1)^2}-1$, e) $y=1-3x,\quad x\in(-3,7)$, f) $y=2\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

2. Nalezněte intervaly, v nichž je funkce monotónní. Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y=2x^2+4x+3$, b) $y=-\sqrt{x+5}$, c) $y=|x-2|+|2x-1|$,

d) $y=\dfrac{1}{x+3}$, e) $y=3^{-2x}$, f) $y=\dfrac{x+2}{3-x}$.

3. Z grafu funkce nalezněte maximální hodnotu funkce:

a) $y=5-x^2$, b) $y=-x^2-3x+2$, c) $y=-2x^2+ax-a^2$.

4. Z grafu funkce nalezněte maximální a minimální hodnotu funkce na daném intervalu:

a) $y=\dfrac{4}{x},\quad x\in\langle 1,5\rangle$, b) $y=\dfrac{x}{2-x},\quad x\in\langle 1,4\rangle$, c) $y=\dfrac{1-x}{1+x},\quad x\in\langle 0,4\rangle$.

5. Zjistěte, zda je funkce sudá, lichá nebo není ani sudá, ani lichá:

a) $y=3x^2-\sqrt{1-x^2}$, b) $y=2^{x-x^3}$, c) $y=\log\dfrac{2-x}{2+x}$,

d) $y=\dfrac{3x}{2+x^4}$, e) $y=\dfrac{1}{x^2}\cos x$, f) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,

g) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, h) $y=\dfrac{\sin x}{(x+\sin x)^2}$, i) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{|x|}$,

j) $y=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$, k) $y=\dfrac{\cos x}{\cos x+x\sin x}$, l) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Rozhodněte, zda jsou dané funkce periodické. Pokud ano, určete periodu p :

a) $y=\sin^2 x$, b) $y=\sin x^2$, c) $y=x\cos x$,

d) $y=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$, e) $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, f) $y=1+3\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

g) $y=\sin x+\cos 2x$, h) $y=\log(\sin x+\cos x)$, i) $y=\dfrac{1}{2}\sin(4\pi x+2)$.

7. Jsou dány funkce *f(x)* a *g(x)*. Vytvořte složené funkce $f\circ g$ a $g\circ f$, určete jejich definiční obory:

a) $f: y=\ln x \quad g: y=\sqrt{1-|x|}$, b) $f: y=\sqrt{x} \quad g: y=\ln(x+1)$,

c) $f: y=-\sqrt{x+5} \quad g: y=x^2-5$, d) $f: y=\dfrac{1}{x} \quad g: y=2^x$.

8. Nalezněte inverzní funkci k dané funkci. Určete definiční obor a obor hodnot inverzní funkce. Pokud není daná funkce prostá na celém definičním oboru, proveďte zúžení funkce na množinu, na níž je prostá.

a) $y=\dfrac{5x-1}{x+2}$, b) $y=\dfrac{1}{2+e^x}$, c) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}$,

d) $y=-\sqrt{x+5}$, e) $y=\dfrac{1}{2}3^{x-1}$, f) $y=\dfrac{3}{\ln(x-2)}$,

g) $y=1-\arccos(x-3)$, h) $y=\ln(1-e^x)$, i) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) ohraničená, $0<y\le\dfrac{2}{3}$; b) neohraničená; c) ohraničená, $\pi\le y\le 2\pi$; d) ohraničená zdola, $y\ge -1$; e) ohraničená, $-20<y<10$; f) ohraničená, $-\pi<y<\pi$. **2.** a) klesající v $(-\infty,-1)$, rostoucí v $(-1,\infty)$; b) klesající v $(-5,\infty)$; c) klesající v $(-\infty,\dfrac{1}{2})$, rostoucí v $(\dfrac{1}{2},\infty)$; d) klesající v $(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$; e) klesající v $(-\infty,\infty)$; f) rostoucí v $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$. **3.** a) $y_{MAX}=y(0)=5$; b) $y_{MAX}=y(-\dfrac{3}{2})=\dfrac{17}{4}$; c) $y_{MAX}=y(\dfrac{a}{4})=-\dfrac{7a^2}{8}$. **4.** a) $y_{MAX}=y(1)=4$, $y_{MIN}=y(5)=\dfrac{4}{5}$;

b) $y = \dfrac{x}{2-x} = -1 + \dfrac{2}{2-x}$, funkce je neohraničená; c) $y = \dfrac{1-x}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x}$,

$y_{MAX} = y(0) = 1$, $y_{MIN} = y(4) = -\dfrac{3}{5}$. **5.** a) sudá; b) ani sudá, ani lichá, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$;

c) lichá; d) lichá; e) sudá; f) sudá; g) ani sudá, ani lichá, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$; h) lichá; i) lichá;

j) sudá; k) sudá; l) lichá. **6.** a) $p = \pi$; b) není periodická; c) není periodická; d) $p = 2\pi$;

e) $p = \pi$; f) $p = 2\pi$; g) $p = 2\pi$; h) $p = 2\pi$; i) $p = \dfrac{1}{2}$. **7.** a) $f \circ g : y = \ln\sqrt{1-|x|}$,

$x \in (-1,1)$; $g \circ f : y = \sqrt{1-|\ln x|}$, $x \in < e^{-1}, e >$; b) $f \circ g : y = \sqrt{\ln(x+1)}$, $x \in < 0, \infty)$;

$g \circ f : y = \ln(\sqrt{x}+1)$, $x \in < 0, \infty)$; c) $f \circ g : y = -|x|$, $x \in \mathbf{R}$; $g \circ f : y = x$, $x \in < -5, \infty) \Rightarrow$

g je inverzní k f; d) $f \circ g : y = \dfrac{1}{2^x}$, $x \in \mathbf{R}$; $g \circ f : y = 2^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$; **8.** a) $y = \dfrac{2x+1}{5-x}$, $x \neq 5$,

$y \neq -2$; b) $y = \ln(\dfrac{1}{x} - 2)$, $x \in (0, \dfrac{1}{2})$, $y \in \mathbf{R}$; c) $y = -2 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^4}}$, $x > 0$, $y > -2$;

d) $y = x^2 - 5$, $x \le 0$, $y \ge -5$; e) $y = 1 + \log_3 2x$, $x > 0$, $y \in \mathbf{R}$; f) $y = 2 + e^{\frac{3}{x}}$, $x \neq 0$,

$y \in (2,3) \cup (3,\infty)$; g) $y = 3 + \cos(1-x)$, $x \in < 1-\pi, 1 >$, $y \in < 2, 4 >$; h) $y = \ln(1-e^x)$, $x < 0$,

$y < 0$ (totožná s danou funkcí); i) $y = 3 - \dfrac{2}{1+x^2}$, $x > 0$, $y \in < 1, 3)$.

Kontrolní test

1. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$.

   a) $x \in < -4, 0 >$; b) $x \in < 0, 4 >$.

2. Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou prosté:

   a) $h_1 = \{(0,1), (-2,3), (0,4), (7,2), (6,4)\}$;

   b) $h_2 = \{(-2,1), (0,6), (5,7), (-3,0)\}$;

   c) $h_3 = \{(7,5), (8,6), (-2,0), (8,4)\}$.

   a) h_1, h_2; b) h_2; c) h_3.

3. Sestrojte graf funkce $y = |x^2 - x - 2|$ a určete interval, na kterém je funkce klesající:

   a) $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 2)$; b) $x \in (-1, \frac{1}{2})$.

4. Řešte graficky nerovnici: $|x+1| \leq 3$.

   a) $x = 2$; b) $x_1 = -4, x_2 = 2$; c) $x \in \langle -4, 2 \rangle$.

5. Určete funkci $F(x) = f\left[g(x)\right]$ a její definiční obor, je-li

   $g(x) = \frac{1-x}{x}$, $f(u) = \sqrt[3]{1+u}$, $u = g(x)$.

   a) $F(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$;

   b) $F(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}$, $x > 0$;

   c) $F(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$, $x \neq 0$.

6. Určete lineární funkci $f(x)$, pro niž platí $f(0) = -4, f(3) = 11$. Najděte funkci k ní inverzní.

   a) $f(x) = 5x - 4$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$;

   b) $f(x) = -4x + 5$, $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$.

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. a); 4. c); 5. a); 6. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.3. a 1.4. znovu.

1.5. Elementární funkce

Cíle

Uvedeme nyní několik funkcí, z nichž většinu studenti znají již ze střední školy. Nazveme je ***základní elementární funkce.*** Konečným počtem sčítání, odčítání, násobení, dělení, skládání a případně invertování těchto funkcí lze vytvořit tzv. ***elementární funkce,*** jejichž studiem se budeme zabývat ve velké části předmětu matematika.

Předpokládané znalosti

Je třeba zopakovat středoškolské znalosti o funkcích a jejich grafech. Zejména se jedná o funkce lineární, kvadratické, exponenciální, logaritmické a goniometrické.

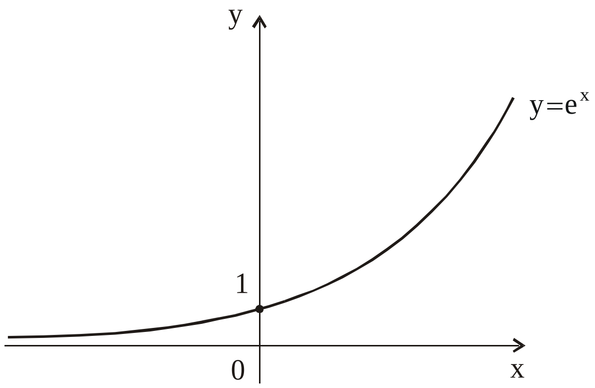
Výklad

1.5.1. Exponenciální funkce $f(x) = e^x, \ x \in \mathbf{R}$

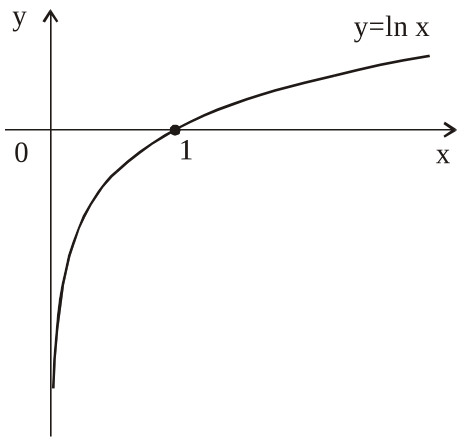
V této chvíli je obtížné exponenciální funkci přesně definovat. Můžeme však říci, že základem mocniny je iracionální číslo $e \approx 2,718281828459045\ldots$, které se nazývá Eulerovo číslo. Poznamenejme, že tuto funkci lze vyjádřit ve tvaru nekonečné funkční řady:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \ .$$

Graf exponenciální funkce je na obr. 12.



Obr.12



Obr. 13

Výklad

1.5.2. Logaritmickou funkcí $f(x) = \ln x,\ x \in (0,\infty),$

nazýváme funkci inverzní k funkci exponenciální e^x (obr. 13).

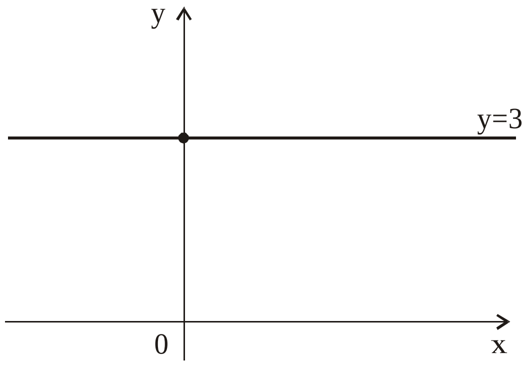
Poznámka

Lze definovat funkci $f(x) = a^x = e^{x \ln a},\ D_f = \boldsymbol{R},\ a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$*, kterou nazveme* ***exponenciální funkcí o základu a****. Inverzní funkci k funkci* a^x *značíme* $\log_a x,\ D_f = (0,\infty)$ *a nazýváme ji* ***logaritmická funkce o základu a****.*

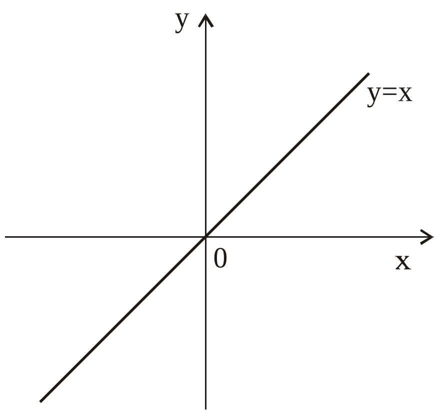
Výklad

1.5.3. Konstantní funkce je definována předpisem $f(x) = C,\ c \in \boldsymbol{R}.$

V případě, že $C = 0,$ hovoříme o nulové funkci. Na obr. 14 je graf funkce $f(x) = 3.$



Obr. 14



Obr. 15

Výklad

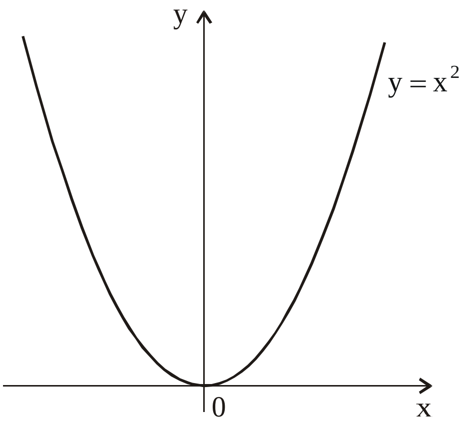
1.5.4. Mocninná funkce je funkce definovaná předpisem

$$f(x) = x^r = e^{r \ln x},\ x \in (0,\infty),\ r \in \boldsymbol{R}.$$

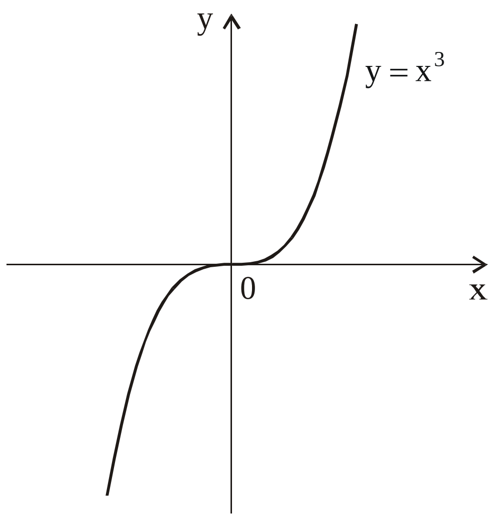
Bude-li $r \in \boldsymbol{N}$, resp. $-r \in \boldsymbol{N}$, resp. $r = \frac{1}{n}$, kde $n \in \boldsymbol{N}$, pak můžeme mocninnou funkci definovat předpisy $f(x) = x^r = \underbrace{x.x.\ldots.x}_{r-krát}$, resp. $f(x) = x^{-r} = \frac{1}{x^r}$, resp. $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Definiční obor těchto funkcí pak můžeme rozšířit na $D_f = \boldsymbol{R}$, resp. $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, resp. pro n liché $D_f = \boldsymbol{R}$, pro n sudé $D_f = \langle 0,\infty)$. Uvedeme příklady pro některá $r \in \boldsymbol{R}$:

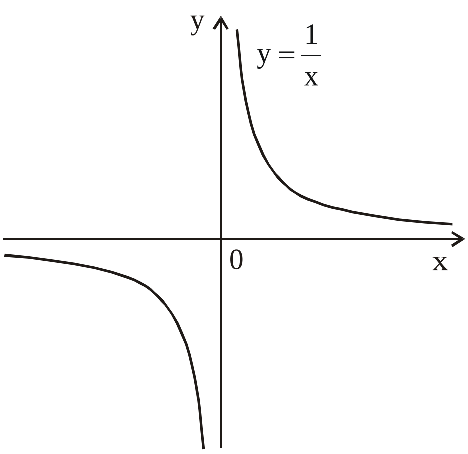
1. $r = 1$, $f(x) = x$, $D_f = \boldsymbol{R}$, grafem je přímka, obr. 15,
2. $r = 2$, $f(x) = x^2$, $D_f = \boldsymbol{R}$, grafem je parabola, obr. 16,
3. $r = 3$, $f(x) = x^3$, $D_f = \boldsymbol{R}$, grafem je kubická křivka, obr. 17,
4. $r = -1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, grafem je rovnoosá hyperbola, obr. 18,
5. $r = -2$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, obr. 19,
6. $r = \frac{1}{2}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \langle 0,\infty)$, grafem je část paraboly, obr. 20,
7. $r = \frac{1}{3}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_f = \boldsymbol{R}$, grafem je funkce inverzní k funkci x^3, obr. 21,



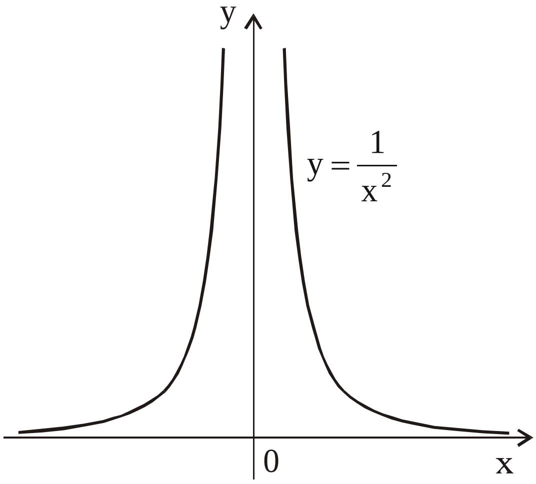
Obr. 16



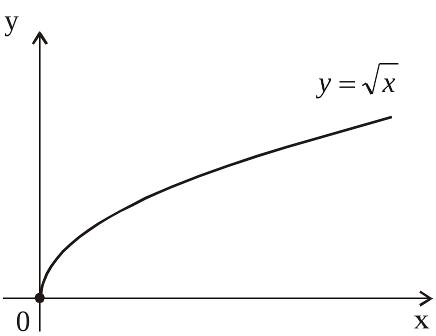
Obr. 17



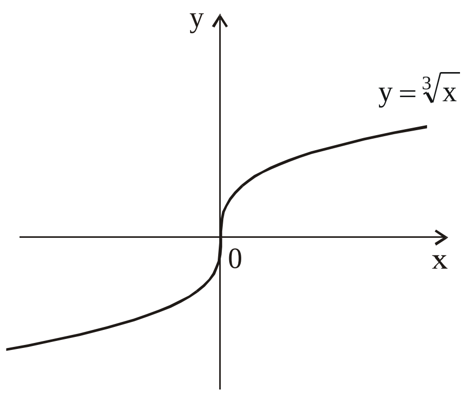
Obr. 18



Obr. 19



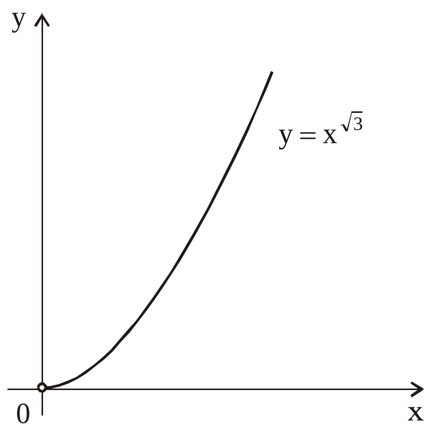
Obr. 20



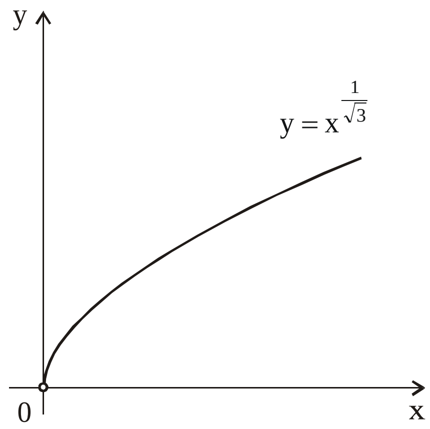
Obr. 21

8. $r = \sqrt{3},\ f(x) = x^{\sqrt{3}},\ D_f = (0, \infty),$ obr. 22,

9. $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $f(x)=x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $D_f=(0,\infty)$, obr. 23.



Obr. 22

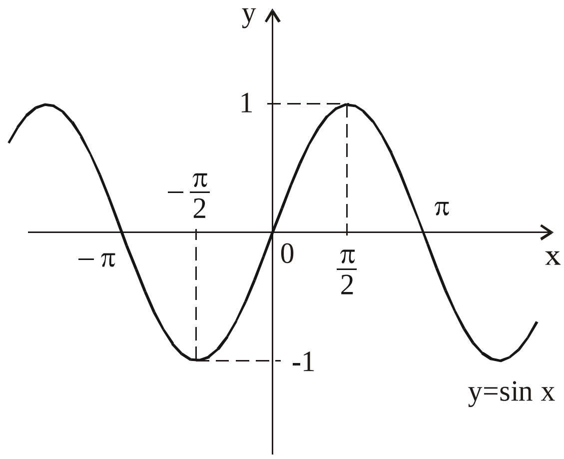


Obr. 23

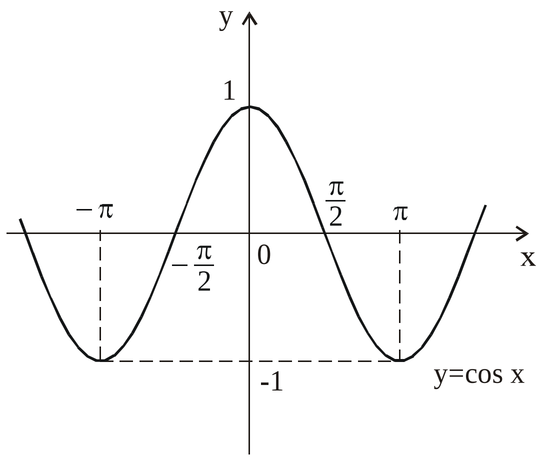
Výklad

1.5.5. Goniometrické funkce:

1. $f(x)=\sin x$, $D_f=\boldsymbol{R}$, funkce se nazývá **sinus**, obr. 24,
2. $f(x)=\cos x$, $D_f=\boldsymbol{R}$, funkce se nazývá **kosinus**, obr. 25,



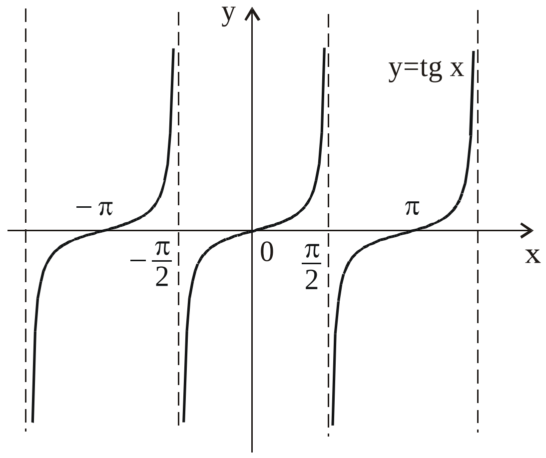
Obr. 24



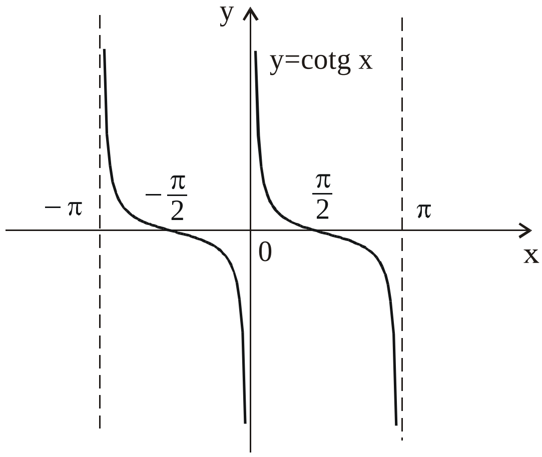
Obr. 25

3. $f(x)=\operatorname{tg} x$, $D_f=\boldsymbol{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}:k\in\boldsymbol{Z}\right\}$, funkce se nazývá **tangens**, obr. 26,

4. $f(x) = \text{cotg}\, x,\ D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{k\pi : k \in \boldsymbol{Z}\}$, funkce se nazývá **kotangens**, obr. 27.



Obr. 26

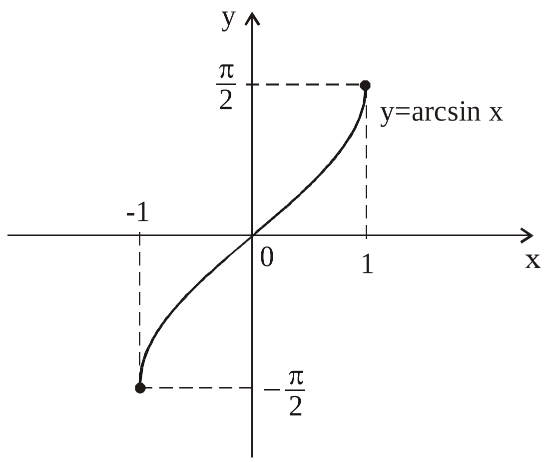


Obr. 27

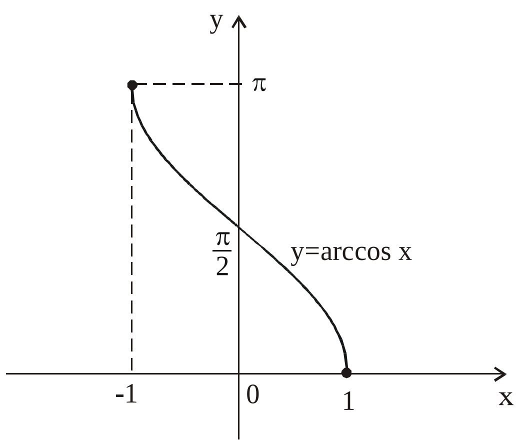
Výklad

1.5.6. Cyklometrické funkce:

1. $f(x) = \arcsin x,\ D_f = \langle -1,1 \rangle$, je inverzní funkcí k funkci $\sin x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, nazývá se **arkussinus**, obr. 28,
2. $f(x) = \arccos x,\ D_f = \langle -1,1 \rangle$, je inverzní k funkci $\cos x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$, nazývá se **arkuskosinus**, obr. 29,

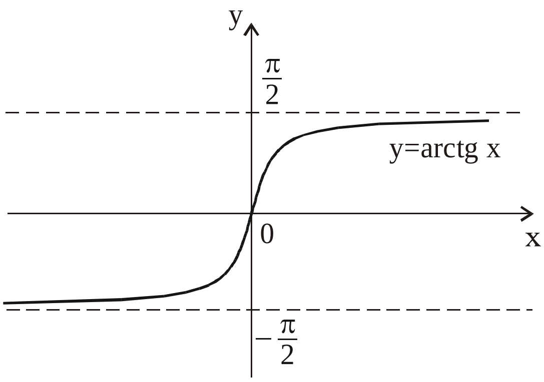


Obr. 28

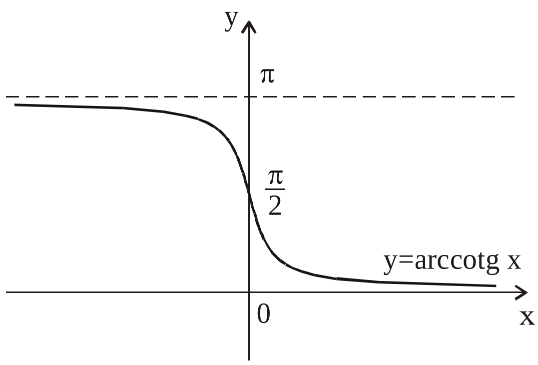


Obr. 29

3. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\, D_f = \boldsymbol{R},$ je inverzní funkcí k funkci $\operatorname{tg} x,\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$ nazývá se **arkustangens**, obr. 30,
4. $f(x) = \operatorname{arccotg} x,\, D_f = \boldsymbol{R},$ je inverzní funkcí k funkci $\operatorname{cotg} x,\, x \in (0, \pi),$ nazývá se **arkuskotangens**, obr. 31.



Obr. 30



Obr. 31

Poznámky

*1. Mezi základní elementární funkce se řadí také **funkce hyperbolické***

(hyperbolický sinus, $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2},\, D_f = \boldsymbol{R},$ *hyperbolický kosinus,*

$f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\, D_f = \boldsymbol{R},$ *hyperbolický tangens,* $f(x) = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x},\; D_f = \boldsymbol{R},$

hyperbolický kotangens, $f(x) = \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x},\, D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\})$ *a **funkce hyperbolometrické**, které jsou inverzní k funkcím hyperbolickým. V základních kurzech matematiky je však nebudeme užívat.*

*2. Definovali jsme základní elementární funkce. **Funkce**, které získáme sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním základních elementárních funkcí se nazývají **elementární**. Součtem, rozdílem, násobením, dělením a skládáním dvou elementárních funkcí dostaneme opět funkci elementární.*

Kontrolní otázky

1. Existuje k funkci $y = x^2$ na celém definičním oboru funkce inverzní?

   a) ano, b) ne.

2. Je logaritmická funkce o základu $a > 1$ rostoucí na celém svém definičním oboru?

   a) ano, b) ne.

3. Která z exponenciálních funkcí o základu a je na celém svém definičním oboru klesající?

   a) $0 < a < 1$, b) $a > 1$.

4. Je-li funkce tangens periodická, jakou má její perioda hodnotu?

   a) π, b) 2π, c) není periodická.

5. Funkce sinus je periodická. Existuje k ní funkce inverzní? Jestliže ano, na kterém intervalu?

   a) ano, $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$, b) ano, $< -\pi, \pi >$, c) neexistuje.

6. Který z grafů funkcí je totožný s grafem funkce $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$?

   a) $y = \arcsin x$, b) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$, c) $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. a); 4. a); 5. a); 6. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = 1 - \log(x+2)$, b) $y = \ln(x^2 - x - 6)$, c) $y = \ln \frac{x}{1-x}$,

d) $y = \frac{1}{\ln(x-3)}$, e) $y = \log(-5x^2 + 4x - 3)$, f) $y = \ln(1 - \ln x)$.

2. Nakreslete grafy funkcí:

a) $y = 2^x$, b) $y = 2^{-x}$, c) $y = 2^{2x}$,

d) $y = \log_2 x$, e) $y = \log_2(-x)$, f) $y = \log_2(2x)$.

3. Nalezněte periodu funkcí:

a) $y = \sin 3x,$ b) $y = 2\sin\dfrac{x}{2},$ c) $y = 2\sin(3x+5),$

d) $y = 5\cos 2x,$ e) $y = 4\cos(\pi x),$ f) $y = \cos\dfrac{2t+3}{6\pi}.$

4. Nakreslete grafy funkcí:

a) $y = -\sin x,$ b) $y = 1-\sin x,$ c) $y = 1-\cos x,$

d) $y = \sin 2x,$ e) $y = \sin\dfrac{x}{2},$ f) $y = 2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right),$

g) $y = \cos\dfrac{x-\pi}{2},$ h) $y = \operatorname{tg} 2x,$ i) $y = |\operatorname{cotg} x|.$

5. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = \arcsin(x-2),$ b) $y = \arcsin 2^x,$ c) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1},$

d) $y = \arcsin(2x-3),$ e) $y = \arccos\dfrac{2-x}{2},$ f) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x),$

g) $y = \arcsin(\cos x),$ h) $y = \arccos\dfrac{1}{x},$ i) $y = \operatorname{arccotg}\sqrt{1-x^2}.$

6. Určete hodnotu funkce:

a) $\arcsin(-1),$ b) $\arcsin(2),$ c) $\operatorname{arctg}(-1),$

d) $\arccos(1),$ e) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}),$ f) $\operatorname{arctg}(\pi),$

g) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$ h) $\arccos\left(\dfrac{\pi}{2}\right),$ i) $\operatorname{arccotg}(1).$

7. Nakreslete grafy funkcí $f(x),\ g(x)$ a porovnejte je:

a) $f(x) = \arcsin x\,,\quad g(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x\,,$

b) $f(x) = \operatorname{arccotg} x\,,\quad g(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\,.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $x+2>0 \Rightarrow \mathrm{D}_f = (-2,\infty)$; b) $(x-3)(x+2)>0 \Rightarrow \mathrm{D}_f = (-\infty,-2)\cup(3,\infty)$; c) $(x>0 \wedge 1-x>0) \vee (x<0 \wedge 1-x<0) \Rightarrow \mathrm{D}_f = (0,1)$; d) $x-3>0 \wedge x-3 \neq 1 \Rightarrow \mathrm{D}_f = (3,4)\cup(4,\infty)$; e) pro každé $x \in \mathbf{R}$ je $(-5)\left[\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{11}{25}\right] < 0 \Rightarrow \mathrm{D}_f = \varnothing$; f) $x>0 \wedge 1-\ln x>0 \Rightarrow \mathrm{D}_f = (0,e)$. **2.** Grafy viz příklad 1.3.4; funkce $y = \log_2 x$ je inverzní k funkci $y = 2^x$ (grafy jsou souměrné podle přímky $y = x$). **3.** a) $p = \dfrac{2}{3}\pi$;

b) $p = 4\pi$; c) $p = \frac{2}{3}\pi$; d) $p = \pi$; e) $p = 2$; f) $p = 6\pi^2$. **4.** Grafy viz příklad 1.3.4.

5. a) $-1 \le x-2 \le 1 \Rightarrow D_f = <1,3>$; b) $-1 \le 2^x \le 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0>$; c) $x+1 \ne 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R} - \{-1\}$; d) $-1 \le 2x-3 \le 1 \Rightarrow D_f = <1,2>$; e) $-1 \le \frac{2-x}{2} \le 1 \Rightarrow D_f = <0,4>$; f) $D_f = \mathbf{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z\}$; g) $D_f = \mathbf{R}$; h) $-1 \le \frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1> \cup <1, \infty)$; i) $1 - x^2 \ge 0 \Rightarrow D_f = <-1,1>$. **6.** a) $-\frac{\pi}{2}$; b) Nedefinovaná; c) $-\frac{\pi}{4}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{3}$; f) Přibližně 72°21’; g) $-\frac{\pi}{4}$; h) Nedefinovaná; i) $\frac{\pi}{4}$. **7.** a) Grafy jsou totožné; b) Grafy jsou totožné.

Kontrolní test

1. Určete definiční obor funkce $y = \ln(\ln x)$.

   a) $(0,1)$, b) $(1,\infty)$, c) $(0,\infty)$.

2. Určete definiční obor funkce $y = \frac{\arcsin x}{\log_5 x}$.

   a) $<-1,1>$, b) $(1,\infty)$, c) $(0,1)$.

3. Najděte všechna $x \in \mathbf{R}$, pro něž platí $\log_x 4 > \log_x 8$.

   a) $x \in (0,1)$, b) $x \in (1,\infty)$, c) $x \in (0,\infty)$.

4. Určete, zda je funkce $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$ pro $x \in (-1,1)$ sudá nebo lichá.

   a) sudá, b) lichá.

5. Určete periodu funkce $y = \sqrt{2}\sin(3x - \frac{\pi}{4})$.

   a) $p = \frac{2}{3}\pi$, b) $p = \sqrt{2}$, c) $p = \frac{\pi}{4}$.

6. Určete hodnotu výrazu $V = \arcsin(-\frac{1}{2}) + \arccos(-\frac{1}{2})$.

a) $V = \frac{\pi}{2}$, b) $V = \frac{\pi}{3}$, c) $V = 1$.

7. Určete inverzní funkci k dané funkci a její definiční obor: $y = 2\arccos(1 - x)$.

   a) $f^{-1}(x) = 1 - \frac{\cos x}{2}$; $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$,

   b) $f^{-1}(x) = \frac{\cos(1 - x)}{2}$; $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$,

   c) neexistuje.

8. Určete inverzní funkci k dané funkci a její definiční obor: $y = \log_5 x$.

   a) $f^{-1}(x) = 5^x$, b) $f^{-1}(x) = x^5$, c) neexistuje.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. b); 5. a); 6. a); 7. a); 8. a).

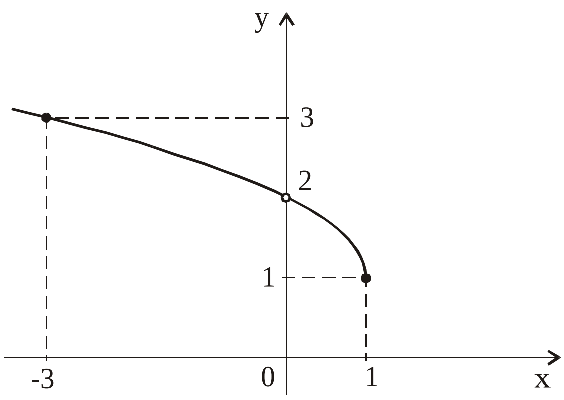
Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.5. znovu.

2. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

Průvodce studiem

Funkce $y = \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$ je definována pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0,1>$. Z grafu funkce (obr. 32) a z tabulky (a) je vidět, že čím více se hodnoty x blíží k -3, tím více se funkční hodnoty blíží ke 3. Později budeme říkat, že funkce má v bodě -3 limitu 3. Podobně, čím více se hodnoty x blíží k 0, tím více se funkční hodnoty blíží ke 2 (obr. 32, tab. (b)). Podobně i v bodě 0, ve kterém funkce není definovaná, budeme říkat, že funkce má v bodě 0 limitu 2.



Obr. 32

x	y
-2,98	2,9949
-2,99	2,9974
-2,995	2,9987
-2,999	2,9997
-3,001	3,0002
-3,005	3,0012
-3,01	3,0024
-3,02	3,0049

Tab. (a)

x	y
0,02	1,9899
0,01	1,9950
0,005	1,9975
0,001	1,9992
-0,001	2,0005
-0,005	2,0025
-0,01	2,0050
-0,02	2,0100

Tab. (b)

V prvním případě je limita v bodě -3 rovna funkční hodnotě a budeme později říkat, že je funkce v bodě -3 spojitá. Pokud se funkční hodnota v bodě nebude rovnat limitě v tomto bodě, nebo funkční hodnota v bodě nebude existovat, jako v bodě 0, budeme říkat, že funkce v bodě není spojitá nebo také, že je nespojitá.

2.1. Limita funkce

Cíle

Zavedení pojmu limity funkce je stěžejním pro další studium matematiky. Díky jemu se naučíme, mimo jiné, počítat s tzv. nevlastními prvky, které budeme označovat $+\infty$, resp. $-\infty$.

Výklad

Definice 2.1.1.

Množinu $O(x_0)=\{x \in \boldsymbol{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$, kde $\varepsilon \in (0,\infty)$, budeme nazývat **okolím bodu** (čísla) x_0.

Poznámky

1. *Okolí bodu x_0 je tedy otevřený interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.*
2. *Budeme někdy říkat, že $O(x_0)$ z definice 2.1.1. je ε - okolí bodu x_0.*

Výklad

Definice 2.1.2.

Bod $x_0 \in \boldsymbol{R}$ je **vnitřním bodem množiny** $M \subset \boldsymbol{R}$, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ tak, že platí: $O(x_0) \subset M$.

Definice 2.1.3.

Bod $a \in R$ nazveme **hromadným bodem množiny** $M \subset \boldsymbol{R}$, jestliže

$$\forall O(a) : (O(a) \cap M) \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

Poznámky

1. Množinu všech hromadných bodů množiny M označíme M'.

2. Hromadný bod množiny M nemusí patřit do M.

*3. Bod $b \in M$ a zároveň $b \notin M'$ se nazývá **izolovaným bodem množiny** M.*

Řešené úlohy

Příklad

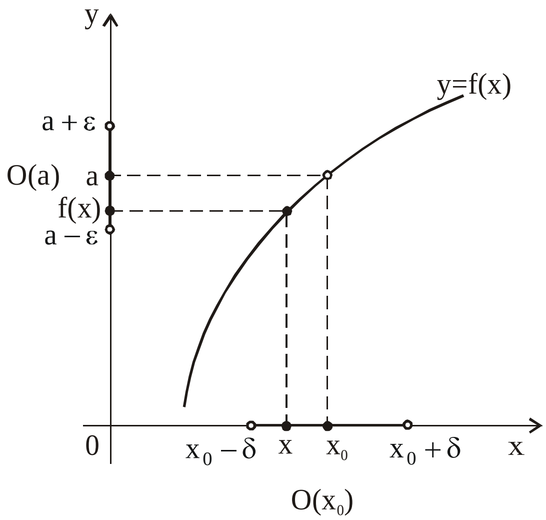
1. Hromadným bodem množiny $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \subset \boldsymbol{R}$ je bod $x_0 = 0$, $M' = \{0\}$.

2. Hromadnými body otevřeného intervalu $M = (a,b) \subset \mathbf{R}$ jsou všechny body $x \in \langle a,b \rangle$, $M' = \langle a,b \rangle$.

Definice 2.1.4.

Říkáme, že **funkce** $f(x)$ **má** v hromadném bodě $x_0 \in D'_f$ **limitu *a***, jestliže

$\forall O(a)\, \exists O(x_0) : x \in (O(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in O(a)$. Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ (obr. 33).



Obr. 33

Poznámka

Definici limity a funkce $f(x)$ v $x_0 \in D'_f$ *můžeme napsat také ve tvaru:*

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ *pro* $\forall x \in D_f$, *(obr. 33).*

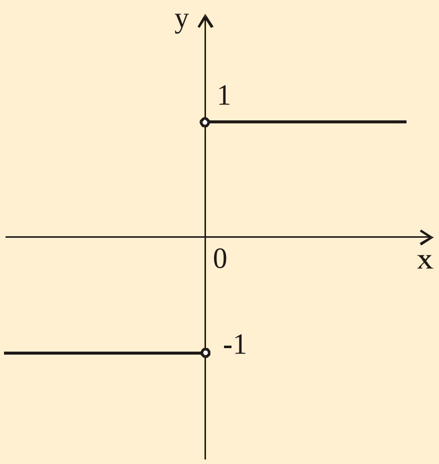
Řešené úlohy

Příklad

1. Ukážeme, že platí $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

Platí $\left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$ pro $0 < |x - 1| < \delta$, když zvolíme $\delta = \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ neexistuje, viz obr. 34.



Obr. 34

3. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ pro $c \in \boldsymbol{R}$. Platí $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ pro všechna $x \in \boldsymbol{R}$ a libovolné δ.

4. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Platí $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$ pro $0 < |x - x_0| < \delta$, když $\delta = \varepsilon$.

Výklad

Věta 2.1.1. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = a \wedge \lim_{x\to x_0} f(x) = b) \Rightarrow a = b).$$

Důkaz (sporem):

Předpokládejme $a \neq b$. Pak existují $O(a)$ a $O(b)$ taková, že $O(a) \cap O(b) = \emptyset$. Podle předpokladu věty existuje x takové, že $f(x) \in O(a)$ a zároveň $f(x) \in O(b)$, což je spor, neboť $O(a) \cap O(b) = \emptyset$. Tento spor znamená, že $a = b$.

Věta 2.1.2. Nechť $x_0 \in (D_f \cap D_g)'$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Pak platí:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad \text{pro } b \neq 0.$$

Důkaz: Viz např. [3], str. 69, nebo [4] str. 443.

Řešené úlohy

Příklad Platí $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, kde $n \in \boldsymbol{N}$. Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ vztah platí, viz předchozí příklad 4. Předpokládejme platnost vztahu

$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. Podle věty 2.1.2. dostaneme

$$\lim_{x\to x_0} x^{n+1} = \lim_{x\to x_0} (x^n.x) = \lim_{x\to x_0} x^n . \lim_{x\to x_0} x = x_0^n.x_0 = x_0^{n+1}.$$

Výklad

Věta 2.1.3. Nechť je funkce $f(g(x))$ definována na množině M a nechť $x_0 \in M'$. Jestliže

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=b,\ \lim_{y\to b} f(y)=a \text{ a existuje } O(x_0) \text{ tak, že } g(x)\neq b \text{ pro } x\in O(x_0)\setminus\{x_0\},$$

pak platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=a.$

Důkaz: Z předpokladu $\lim\limits_{y\to b} f(y)=a$ plyne, že ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta_1>0$ takové, že pro $0<|g(x)-b|<\delta_1$ platí $|f(g(x))-a|<\varepsilon$. Volíme-li $\varepsilon_1=\delta_1$, pak podle předpokladu $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ existuje k ε_1 číslo δ takové, že pro $|x-x_0|<\delta$ platí $|g(x)-b|<\varepsilon_1$. Složíme-li oba výsledky, je věta dokázána.

Řešené úlohy

Příklad Platí

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4-x^2}=2$. Dostaneme $\lim\limits_{x\to 0}(4-x^2)=4$, $\lim\limits_{y\to 4}\sqrt{y}=2$ a $4-x^2\neq 4$ pro $x\in<-2,0)\cup(0,2>$.

Výklad

Definice 2.1.5.

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0\in D'_f$ **limitu zprava**, resp. **limitu zleva**, což píšeme

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=b$, jestliže má funkce $f(x)$ na množině $(x_0,\infty)\cap D_f$, resp. na množině $(-\infty,x_0)\cap D_f$ limitu a, resp. limitu b.

Poznámka

Zřejmě platí: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a \wedge \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a)$.

Řešené úlohy

Příklad Pro funkci $f(x) = \frac{|x|}{x}$ platí $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$, viz obr. 34. Funkce $f(x)$ má v bodě 0 limitu zprava i limitu zleva, nemá však v bodě 0 limitu.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 3x + 2)$, b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{3x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to -6} (x+5)^8$,

d) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 2^x$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+2}{\cos x}$, f) $\lim\limits_{k\to 0} \frac{x+k}{\sin(k+\pi/2)}$.

2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x))$ a $\lim\limits_{x\to 2} g(f(x))$ pro

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 + 1$, b) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$,

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$, d) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $g(x) = x + 2$.

3. Nechť $f(x) = x^2 - 2x - 1$ a $g(x) = \cos \pi x$. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x) + g(x))$, b) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x) - g(x))$, c) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x) \cdot g(x))$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$, e) $\lim\limits_{x\to 1}(f(g(x))$, f) $\lim\limits_{x\to 1}(g(f(x))$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 0; b) 0; c) 1; d) 72; e) 2; f) x. **2.** a) $\frac{1}{6}, \frac{10}{9}$; b) $\frac{3}{5}, \frac{4}{3}$; c) $\sqrt{5}, 3$; d) $\frac{1}{6}, \frac{9}{4}$. **3.** a) -3; b) -1; c) 2; d) 2; e) 2; f) 1.

2.2. Nevlastní limity

Výklad

Množinu $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ budeme nazývat **rozšířená číselná osa** a prvky $-\infty, \infty$ budeme nazývat **nevlastní body**. Pro nevlastní body bude platit $-\infty < a < \infty$ pro každé $a \in \boldsymbol{R}$. Každý interval $(-\infty, a)$, resp. $(a, \infty), a \in \boldsymbol{R}$, je okolím $O(-\infty)$, resp. $O(\infty)$ nevlastních bodů.

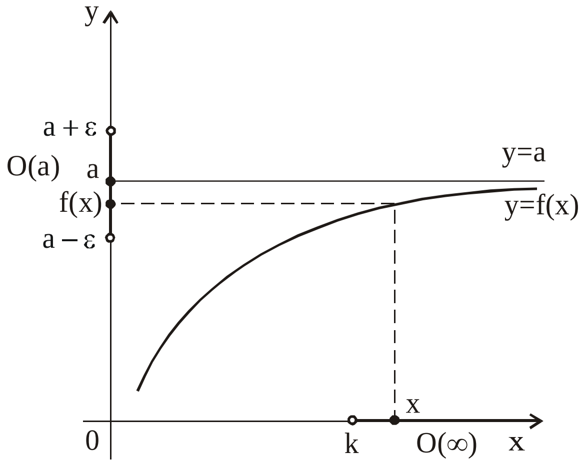
Příklad Pro množinu $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ platí $\boldsymbol{N}' = \{\infty\}$.

Nyní můžeme definici 2.1.4 rozšířit také pro nevlastní body. Řekneme-li, že v definici 2.1.4 jsme definovali **vlastní limitu** a **ve vlastním bodě** x_0, kde $a, x_0 \in \boldsymbol{R}$, můžeme nyní definovat **vlastní limitu** a **v nevlastním bodě** x_0, $a \in \boldsymbol{R}, x_0 \in \{-\infty, \infty\}$ nebo **nevlastní limitu** a ve **vlastním bodě** x_0, $a \in \{-\infty, \infty\}, x_0 \in \boldsymbol{R}$ nebo také **nevlastní limitu** a v **nevlastním bodě** x_0, $a, x_0 \in \{-\infty, \infty\}$. Uvedeme definici vlastní limity a v nevlastním bodě $x_0 = \infty$. Ostatní definice jsou analogické a ponecháváme jejich formulaci na čtenáři.

Definice 2.2.1

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 = \infty, \infty \in D'_f$ limitu a, jestliže

$\forall O(a) \exists O(\infty) : x \in O(\infty) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in O(a)$. Píšeme $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, (obr. 35).



Obr. 35

Poznámka

Tuto definici můžeme také zapsat ve tvaru:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k \in \boldsymbol{R} : x > k \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon$ *pro* $x \in D_f$, *(obr. 35).*

Výklad

Věta 2.2.1. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a, a > 0, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ a nechť existuje $O(x_0)$ takové, že pro $x \in D_g \cap (O(x_0) \setminus \{x_0\})$ platí $g(x) > 0$, kde $x_0 \in (D_f \cap D_g)'$. Pak platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Důkaz: Zvolme $O(\infty)$, tj. $k > 0$ a označme $\varepsilon = \dfrac{a}{k+1}.$ Podle předpokladu existuje $\delta > 0$ takové, že pro $0 < | x - x_0 | < \delta$ platí $| f(x) - a | < \varepsilon$ a $0 < g(x) < \varepsilon$. Dostaneme

$$f(x) > a - \varepsilon > 0 \text{ a tedy } \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{a - \varepsilon}{\varepsilon} = k.$$

Poznámky

1. Větu 2.2.1 můžeme zapsat symbolicky $\frac{a}{0}=\infty$, *pro* $a>0, g(x)>0$,

resp. $a<0, g(x)<0$ *nebo* $\frac{a}{0}=-\infty$, *pro* $a>0, g(x)<0$, *resp.* $a<0, g(x)>0$.

2. Další věty o počítání s nevlastními body $\infty, -\infty$ *zapíšeme symbolicky pro* $a \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{a}{\pm\infty}=0, \qquad \infty+\infty=\infty,$$
$$\infty.\infty=\infty, \qquad a+\infty=\infty,$$
$$\infty.(-\infty)=-\infty \qquad a-\infty=-\infty$$
$$(-\infty)(-\infty)=\infty, \qquad -\infty-\infty=-\infty.$$

3. Všimněme si, že výrazy $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0.\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty, 1^\infty$ *se v seznamu symbolických zápisů nevyskytují. Jejich výsledky mohou být jakýmkoliv prvkem z* $\boldsymbol{R}^*$ *a při výpočtu limit jsou to právě ty limity, jejichž určování může činit problémy.*

Řešené úlohy

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3+\lim\limits_{x\to\infty}2=\infty+2=\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}}=\dfrac{3+0-0}{1-0}=3.$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte limity nejprve pro $x\to\infty$ potom pro $x\to-\infty$:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{-2x^2-3x+4}$, c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-6x}{3x+1}$,

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-5}{2-7x}$, e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}$, f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$,

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$, h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$.

2. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-9}-x)$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-x^2)$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x})$.

3. Vypočtěte limity, případně jednostranné limity:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{9-x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{\ln(x-1)}$, c) $\lim\limits_{x\to-1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}$,

d) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{4x-4}{x^2}-2)$, e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-1}{\sin(x-1)}$, f) $\lim\limits_{x\to0}(e^{\frac{1}{x}}-x)$.

4. Vypočtěte limity funkce $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ v bodech a) $x=2$, b) $x=3$, c) $x=\infty$, d) $x=-2$, e) $x=1$, f) $x=-\infty$.

5. Vypočtěte limity funkce $f(x)=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$ v bodech a) $x=-\infty$, b) $x=-3$, c) $x=-1$, d) $x=0$, e) $x=1$, f) $x=\infty$.

6. Vypočtěte limity funkce $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-x}$ v bodech a) $x=-\infty$, b) $x=-1$, c) $x=0$, d) $x=1$, e) $x=\infty$.

7. Vypočtěte limity funkce $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ v bodech a) $x=-\infty$, b) $x=0$, c) $x=1$, d) $x=\infty$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 1, 1; b) $-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$; c) -2, -2; d) $-\frac{3}{7},-\frac{3}{7}$; e) $\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}$; f) 1, 1; g) 0, 0; h) $\infty,-\infty$; i) 4, 4. **2.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) 0; e) $\frac{1}{2}$; f) ∞. **3.** a) ∞ pro $x\to3^-$, $-\infty$ pro $x\to3^+$; b) $-\infty$ pro $x\to2^-$, ∞ pro $x\to2^+$; c) $-\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-1^-$, $\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-1^+$; d) $-\infty$;

e) $-\infty$ pro $x \to 1^-$, ∞ pro $x \to 1^+$; f) 0 pro $x \to 0^-$, $+\infty$ pro $x \to 0^+$. **4.** a) 4; b) $\frac{5}{2}$; c) 1; d) 0; e) $-\infty$ pro $x \to 1^-$, ∞ pro $x \to 1^+$; f) 1. **5.** a) $-\infty$; b) $-\frac{81}{8}$; c) $-\infty$ pro $x \to -1^-$, ∞ pro $x \to -1^+$; d) 0; e) $\frac{1}{8}$; f) ∞. **6.** a) 0; b) 0; c) $-\infty$ pro $x \to 0^-$, ∞ pro $x \to 0^+$; d) ∞ pro $x \to 1^-$, $-\infty$ pro $x \to 1^+$; e) 0. **7.** a) 0; b) $-\frac{\pi}{2}$ pro $x \to 0^-$, $+\frac{\pi}{2}$ pro $x \to 0^+$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) 0.

2.3. Limita posloupnosti

Cíle

Seznámíme se stručně s funkcí definovanou na množině přirozených čísel a budeme definovat její limitu.

Výklad

Definice 2.3.1.

Funkce definovaná na množině přirozených čísel $\boldsymbol{N}$ se nazývá **posloupnost.**

Poznámky

1. Posloupnost je tedy zobrazení $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$.

2. Místo $f(n), n \in \boldsymbol{N}$ píšeme a_n, *které nazýváme n-tým členem posloupnosti.*

3. Jak jsme již uvedli $\boldsymbol{N}' = \{\infty\}$ *a tedy limita posloupnosti je definovaná pouze v bodě* $x_0 = \infty$.

Definici limity posloupnosti můžeme zapsat podle poznámky za definicí 2.2.1.

Výklad

Definice 2.3.2.

Říkáme, že **posloupnost** $\{a_n\}, n \in \boldsymbol{N}$, **má limitu** a jestliže

$\forall \varepsilon > 0\, \exists k \in \boldsymbol{R}\, \forall n \in \boldsymbol{N} : n > k \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Věta 2.3.1. Předpokládejme, že existuje funkce $f(x)$, kde $D_f = \langle 1, \infty)$ taková, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je $f(n) = a_n$ a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, pak platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Důkaz: Je-li $|f(x) - a| < \varepsilon$ pro $x > k$, pak platí $|a_n - a| < \varepsilon$ pro $n > k$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Z definice limity posloupnosti ukažte, že daná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a. Pro dané ε nalezněte příslušné k

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; $a = 1$; $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 10^{-6}$,

b) $a_n = \dfrac{2^n + 1}{2^n}$; $a = 1$; $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 10^{-6}$.

2. Vypočtěte limitu posloupnosti:

a) $\left\{3 + \dfrac{4}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, b) $\left\{\sqrt[n]{5n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, c) $\left\{\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

d) $\left\{\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)^3\right\}_{n=1}^{\infty}$, e) $\left\{\dfrac{6n+2}{4^{3n-4}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, f) $\left\{\dfrac{4n^2 + \sqrt{n^3+1}}{n^2+n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

3. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 - 4n + 7}{17n^2 + n - 6}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 + \sqrt{n^3+n}}{n^2 + 2n - 1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)^2}{2n\sqrt{n^2+1}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + n^2}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[5]{n^4} + \sqrt{n^3}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^3(2n+1)}{(2n-1)^2(n+1)^2}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n+1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2n^2+n}}{n - \sqrt[3]{n}}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n}}$.

4. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - n)$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n+5} - 2\sqrt{n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (n - \sqrt{n^2 - 3n})$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2}}$.

5. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^{n}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{1+3n}\right)^{5n-3}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln(n+3)-\ln n\right)$.

6. Vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln n-\ln(n+2))$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

7. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-5n}{n^2-3n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(-1)^n n)$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{n}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3(1-\frac{6}{n}+\frac{4}{n^3})$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

8. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka o délce odvěsny a je vepsán trojúhelník tak, že jeho vrcholy jsou středy stran daného trojúhelníka. Do takto vzniklého trojúhelníka je stejným způsobem vepsán další trojúhelník atd.

a) Určete součet obvodů všech takto vzniklých trojúhelníků.

b) Určete součet obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků.

9. Do kruhu o poloměru r je vepsán čtverec. Do tohoto čtverce je vepsán kruh, do něj opět čtverec atd.

a) Najděte limitu součtu obsahů všech kruhů.

b) Najděte limitu součtu obsahů všech čtverců.

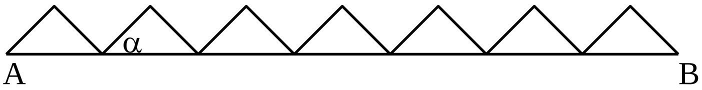
10. Najděte limitu pro $n\to\infty$ obvodů pravidelných n-úhelníků

a) vepsaných do kružnice o poloměru R,

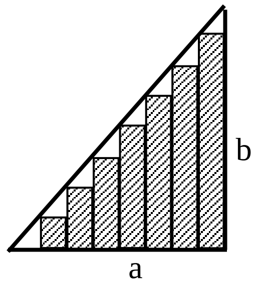
b) opsaných kružnici o poloměru R.

11. Bod C_1 rozděluje úsečku $AB=l$ na dvě poloviny; bod C_2 půlí úsečku AC_1; bod C_3 půlí úsečku C_2C_1; bod C_4 půlí úsečku C_2C_3; atd. Určete limitní polohu bodu C_n pro $n \to \infty$.

12. Úsečka AB=a je rozdělena na n stejných částí a na každé této části je sestrojen rovnoramenný trojúhelník s úhlem $\alpha = 45^\circ$ při základně. Ukažte, že limitní délka lomené čáry pro $n \to \infty$ je různá od délky úsečky s koncovými body A, B, přestože v limitě lomená čára „geometricky splyne“ s úsečkou s koncovými body A, B.



13. Odvěsna a pravoúhlého trojúhelníka je rozdělena na n stejných částí. Na každé části je sestrojen obdélník vepsaný do trojúhelníka. Vypočtěte limitu součtu obsahů takto vepsaných obdélníčků pro $n \to \infty$.



Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $k(\varepsilon)=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]$, $k=19$; 1999; $1\,999\,999$; b) $k(\varepsilon)=\left[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, $k=3$; 9; 19.

2. a) 3; b) 1; c) 0; d) 8; e) 16; f) 4. **3.** a) $\dfrac{5}{17}$; b) 4; c) 2; d) 0; e) 0; f) $\dfrac{1}{2}$; g) $\dfrac{1}{2}$; h) 0; i) 1. **4.** a) 0; b) $\dfrac{1}{2}$; c) ∞; d) $\dfrac{3}{2}$; e) 0; f) $\dfrac{1}{3}$. **5.** a) $\sqrt{e}$; b) e; c) e^4; d) e; e) e^{-5}; f) e^{-1}; g) $\dfrac{1}{e}$; h) e^{-5}; i) 3. **6.** a) –2; b) 1; c) 0; d) $\dfrac{1}{2}$; e) 0; f) 1. **7.** a) 1; b) ∞; c) nemá limitu; d) ∞; e) ∞; f) ∞. **8.** a) $2a(2+\sqrt{2})$; b) $\dfrac{2}{3}a^2$. **9.** a) $2\pi r^2$; b) $4r^2$. **10.** a) $2\pi R$; b) $2\pi R$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} AC_n = \dfrac{l}{3}$. **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = a\sqrt{2}$. **13.** $\dfrac{ab}{2}$.

2.4. Spojitost funkce

Cíle

Nejčastějšími funkcemi, s kterými se setkáváme v matematice i v jejích aplikacích, jsou funkce, jejichž limita v bodě x_0 je rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Seznámíme se s vlastnostmi takových funkcí.

Výklad

Definice 2.4.1.
Jestliže $x_0 \in D_f \cap (D_f)'$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pak říkáme, že **funkce** $f(x)$ je **spojitá v bodě** x_0.

Věta 2.4.1. Nechť jsou funkce $f(x), g(x)$ spojité v bodě $x_0 \in (D_f \cap D_g)'$, pak jsou spojité i funkce $f(x)+g(x)$, $f(x).g(x)$ a pro $g(x) \neq 0$ je spojitá i funkce $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Důkaz: Plyne přímo z věty 2.1.2.

Věta 2.4.2. Předpokládejme, že funkce $f(y)$ je spojitá v bodě b a nechť $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(b)$.

Důkaz: Platnost vyplývá v podstatě z věty 2.1.3.

Definice 2.4.2.
Říkáme, že funkce $f(x)$ je **spojitá v intervalu** $(a,b) \subset D_f$, jestliže je spojitá v každém bodě intervalu (a,b).

Věta 2.4.3. Jestliže je $f(x)$ základní elementární funkce a interval $I \subset D_f$, pak je $f(x)$ spojitá v intervalu I.

Důkaz: Vyplývá z definice základních elementárních funkcí, viz část 1.5.

Poznámky

1. Patří-li krajní body intervalu $<a,b>$ do D_f a $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, *resp.* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, *pak říkáme, že je $f(x)$* ***spojitá*** *v bodě a* ***zprava****, resp. v bodě b* ***zleva.***

2. Z věty 2.4.3 vyplývá, že součet, součin, podíl a složení spojitých funkcí je funkce spojitá.

3. Většinu limit lze tedy vypočítat přímým dosazením, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ x_0 \in D_f$.

4. Využijeme-li znalostí o počítání s nevlastními body, můžeme většinu limit vyřešit také dosazením; získáme-li některý z výrazů uvedených v poslední poznámce za větou 2.2.1, je třeba funkci vhodným způsobem upravit.

Řešené úlohy

Příklad 1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \dfrac{2^2+2+1}{2^2-2+1} = \dfrac{7}{3}$,

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, 3. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$,

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \ln x = \infty$, 5. $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$,

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{0}{0}$, proto funkci upravíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Poznámky

Bez důkazu uvedeme limity některých funkcí, které budeme používat:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$ *důkaz viz [1, část II], příklad 11.10, str. 28,*
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e,$ *důkaz viz [4, část II], věta 5.15.17, str. 446 a věta 5.1.9 na str. 477,*
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=\dfrac{1}{e},$ *důkaz viz [4, část II], příklad 5.38, str. 477,*
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,$ tj. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,$ *důkaz viz [4, část II], příklad 5.61, str. 485.*

Výklad

Vlastnosti spojitých funkcí můžeme využít při **řešení nerovnic**. Z předchozích úvah zřejmě vyplývá:

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I, pro všechna $x\in I$ platí $f(x)\neq 0$ a existuje-li $x_0\in I$ takové, že $f(x_0)>0,$ resp. $f(x_0)<0,$ pak $f(x)>0,$ resp. $f(x)<0$ pro všechna $x\in I.$

Nerovnici upravíme na tvar $f(x)>0,$ nebo $f(x)\geq 0.$ Definiční obor D_f rozdělíme na podmnožiny, v nichž je $f(x)$ spojitá. V těchto podmnožinách stanovíme nulové body funkce $f(x).$ Tím jsme rozdělili D_f na části, v nichž je vždy $f(x)>0$ nebo $f(x)<0.$ Stačí pak zjistit znaménko funkce v jediném bodě z každé části D_f.

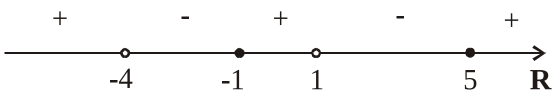
Řešené úlohy

Příklad Řešte nerovnici $\dfrac{7x+1}{x^2+3x-4}\leq 1.$

Řešení: Nerovnici upravíme na tvar $f(x) \geq 0.$

$$\frac{7x+1}{x^2+3x-4}-1 \leq 0 \Rightarrow -\frac{x^2-4x-5}{x^2+3x-4} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-5}{x^2+3x-4} \geq 0 \Rightarrow f(x)=\frac{(x-5)(x+1)}{(x-1)(x+4)} \geq 0.$$

Body nespojitosti funkce $f(x)$ jsou $x_1=1, x_2=-4.$ Nulové body funkce $f(x)$ jsou $x_3=5, x_4=-1,$ obr. 36.



Obr. 36

Množinu $\boldsymbol{R}$ jsme rozdělili na pět částí: $(-\infty,-4), (-4,-1>, <-1,1), (1,5>, <5,\infty).$ V každé části zvolíme libovolný bod x_0 a určíme znaménko

$f(x_0): f(-5)>0,\ f(-2)<0,\ f(0)>0,\ f(2)<0,\ f(6)>0.$

Platí tedy, že $f(x) \geq 0$ pro $x \in (-\infty,-4) \cup <-1,1) \cup <5,\infty)$ a tedy $\dfrac{7x+1}{x^2+3x-4} \leq 1$ ve sjednocení uvedených intervalů.

Kontrolní otázky

1. Je každá posloupnost konvergentní?

   a) ano, b) ne.

2. Kolik má posloupnost limit?

   a) nejvýše jednu, b) alespoň jednu, c) žádnou.

3. Jaká je podmínka pro jednostranné limity v bodě x_0, platí-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a,\ a \in \mathbf{R}$?

   a) rovnají se číslu a,

   b) jedna může být nevlastní,

   c) není podmínka.

4. Lze funkci dodefinovat tak, aby v bodě x_0, ve kterém není definována, byla spojitá? Co musí platit?

   a) ano, existence vlastní limity v bodě x_0,

   b) ano, existence jedné nevlastní jednostranné limity,

   c) nelze.

5. Má funkce $y=\frac{1}{x}$ v bodě $x_0=0$ limitu? Řešte na základě znalosti grafu funkce $y=\frac{1}{x}$.

   Zdůvodněte!

   a) ano, existují jednostranné limity v bodě $x_0=0$,

   b) ne, jednostranné limity se sobě nerovnají.

6. Funkce $y=\operatorname{tg} x$ je na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ spojitá. Je na tomto intervalu ohraničená?

   a) ano, b) ne.

7. Funkce $y=\sin x$ je spojitá pro $\forall x\in\mathbf{R}$. Je spojitá také funkce $y=\sin(\sin x)$?

   a) ne, $\forall x\in\mathbf{R}$,

   b) ano, $\forall x\in\mathbf{R}$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. a); 4. a); 5. b); 6. b); 7. b.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$, c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2x}$,

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{-5x}{\sin 2x}$, e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$.

2. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$, c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^3}{\sin^3 5x}$,

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1-x)}$, e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^3-\sin^2 x}{2x^2}$, f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^3-\sin^3 x}{2x^3}$.

3. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+4}\right)^x$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+3}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{kx}-1}{x}$, i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{x}$.

4. Pro která *x* je funkce *f(x)* spojitá?

a) $f(x)=x^3-2x^2+x-5$, b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+3}$, c) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$,

d) $f(x)=\dfrac{x^2+5x-3}{x^3+5x^2+6x}$, e) $f(x)=\ln(2-x^2)$, f) $f(x)=\arcsin(x-2)$.

5. Pro která *x* není funkce *f(x)* spojitá?

a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$, b) $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|}$, c) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$,

d) $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$, e) $f(x)=\dfrac{1-2e^{x}}{1-e^{2x}}$, f) $f(x)=\dfrac{2x+1}{2^{x}}$.

6. Funkce *f(x)* není spojitá pro $x=0$. Lze rozšířit definici funkce přidáním funkční hodnoty *f(0)* tak, aby byla v bodě $x=0$ spojitá?

a) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2-4}{x}$, b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, c) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$,

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, e) $f(x)=\dfrac{x^2}{3\operatorname{tg}^2 x}$, f) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 3; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $-\frac{5}{2}$; e) k; f) $\frac{11}{3}$. **2.** a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{3}{125}$; d) 4; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1. **3.** a) e; b) e^3; c) e^4; d) e; e) e^2; f) e^{-4}; g) 2; h) $k\ln a$; i) $\ln\frac{a}{b}$. **4.** a) $\boldsymbol{R}$; b) $\boldsymbol{R}-\{-3\}$; c) $(-\infty,-2>\cup<3,\infty)$; d) $R-\{-3;-2;0\}$; e) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; f) $<1,3>$. **5.** a) $x\in(-3,3)$; b) $x=1$; c) $x=0$; d) $x=k\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$; e) $x=0$; f) spojitá. **6.** a) ano, $f(0)=-4$; b) ano, $f(0)=1$; c) ne; d) ano, $f(0)=\frac{1}{2}$; e) ano, $f(0)=\frac{1}{3}$; f) ne.

Kontrolní test

1. Určete limitu: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-7n^2+n}{5(n+1)(n^2+5)}$.

   a) $\frac{1}{5}$, b) 0, c) ∞.

2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

   a) 2, b) 4, c) 8.

3. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

   a) e^4, b) e^{-4}, c) neexistuje.

4. Vypočtěte limity funkce $y=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x-3}$ v bodech $x_0=+\infty$, $x_0=-\infty$.

   a) 1,1, b) $-1,-1$, c) $1,-1$.

5. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to 0}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{2n}$.

   a) e, b) e^2, c) $\frac{1}{e}$.

6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cot gx}{tgx}$.

a) 0, b) $+\infty$, c) $-\infty$.

7. Určete, pro která x je funkce $f(x)$ spojitá:

$y = 2 - \arccos(3 - x)$.

a) $x \in <2,4>$, b) $x \in <-1,1>$, c) $x \in R$.

8. Určete, pro která x není funkce $f(x)$ spojitá:

$$f(x) = \frac{x+5}{x-4} + \mathrm{tg}\,2x.$$

a) $x = 4,\ x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$,

b) $x = 4,\ x = k\frac{\pi}{2}$,

c) $x = 4$.

9. Lze rozšířit definici funkce $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ v bodě nespojitosti tak, aby pak byla v tomto bodě spojitá?

a) ne, b) ano, $f(0) = 0$.

Výsledky testu

1. c); 2. c); 3. b); 4. c); 5. b); 6. b); 7. a); 8. a); 9. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2 znovu.

3. DERIVACE FUNKCE

Průvodce studiem

Derivace funkce je pojem, který je důležitý nejen v matematice, ale ve všech technických disciplínách. Její dokonalé pochopení a zvládnutí techniky derivování funkcí je základním předpokladem pro úspěšné studium na vysoké škole technického zaměření.

3.1. Definice derivace

Výklad

Definice 3.1.1.

Definujme funkci $f_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pro $x \in D_f \setminus \{x_0\}$, kde $x_0 \in D_f \cap D'_f$.

Existuje-li vlastní limita

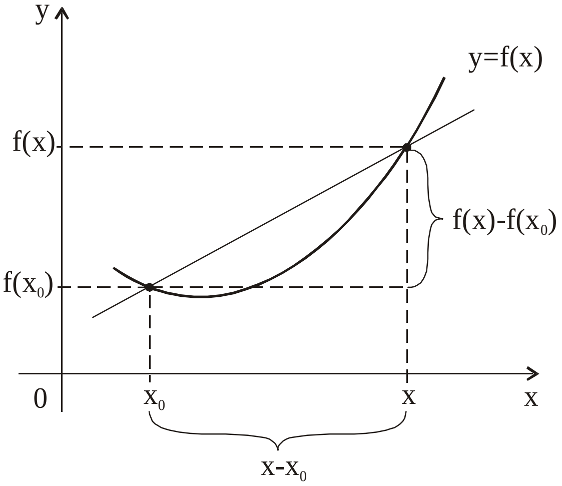
$$\lim_{x \to x_0} f_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

říkáme, že **funkce** $f(x)$ **má v bodě** x_0 **derivaci** $f'(x_0)$.

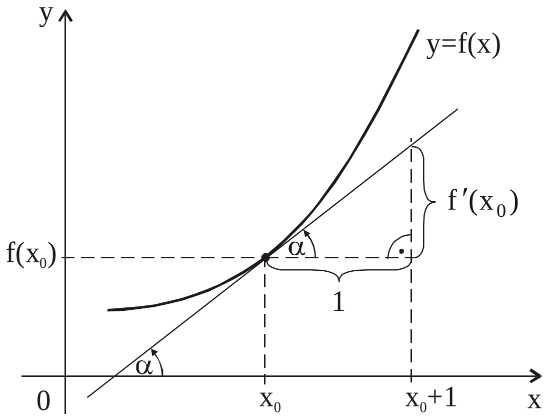
Poznámky

1. Funkce $f_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *znamená směrnici přímky, která prochází body* $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$, *obr. 37. Limita* $\lim\limits_{x \to x_0} f_{x_0}(x) = f'(x_0)$ *je* ***směrnice tečny*** *ke grafu funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0, *obr. 38. Rovnice této tečny je* $y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha(x - x_0)$,

tj. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.



Obr. 37



Obr. 38

2. Předpokládejme, že $s(t)$ *je velikost dráhy, kterou hmotný bod urazí za čas t. Výraz* $\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ pro $t \neq t_0$ *znamená rychlost hmotného bodu, kterou se musí rovnoměrně pohybovat, aby se z polohy* $s(t_0)$ *dostal do polohy* $s(t)$ *za čas* $t-t_0$*. Derivace* $s'(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ *určuje okamžitou rychlost bodu v čase* t_0.

3. Výraz $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$ *nazýváme* ***přírůstek funkce*** *a výraz* $x-x_0=\Delta x_0$ *nazýváme* ***přírůstek argumentu***.

4. Limitu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f_{x_0}(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f_{x_0}(x)$ *nazýváme* ***derivací zprava,*** *resp.* ***derivací zleva funkce*** $f(x)$ *v bodě* x_0.

5. ***Normála*** *ke grafu* ***funkce*** *f(x) v bodě* x_0 *je přímka kolmá k tečně funkce f(x) v bodě* x_0*. Pro její směrnici platí* $\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$*. Rovnice normály k funkci f(x) v bodě* x_0 *má tvar*

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Výklad

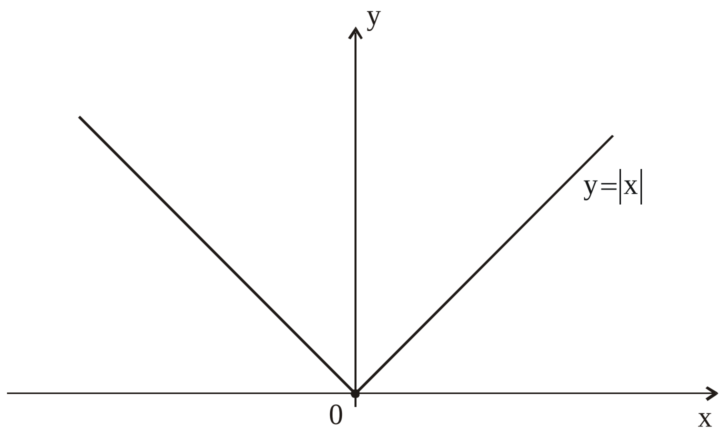
Věta 3.1.1. Nechť existuje $f'(x_0)$. Pak je funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitá.

Pro $x \neq x_0$ je $f(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$. Dostaneme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f'(x_0).(x_0 - x_0) + f(x_0) = f(x_0).$$

Příklad: Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá pro $x \in \boldsymbol{R}$.

Pro $x_0 = 0$ je $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$ a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$, obr. 39. Derivace funkce $|x|$ v bodě 0 zprava je



Obr. 39

různá od derivace zleva. Z toho vyplývá, že v tomto bodě derivace funkce $|x|$ neexistuje.

Poznámka

Z výše uvedeného příkladu plyne, že větu 3.1.1 nelze obrátit.

Výklad

Definice 3.1.2.

Funkci $f'(x)$ definovanou pro všechna $x \in D_f \cap D'_f$, v nichž derivace existuje, nazveme **derivací funkce** $f(x)$.

Řešené úlohy

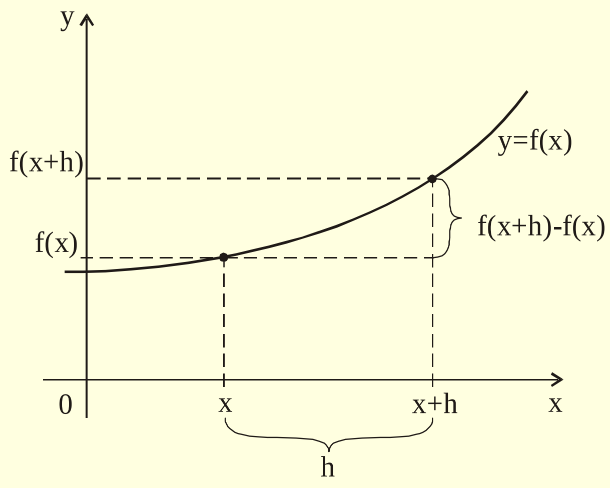
Příklad: Dokažte, že $c' = 0$, kde $c \in \boldsymbol{R}$.

Řešení: $c' = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{c - c}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{0}{x - x_0} = 0.$

Poznámka

Provedeme-li označení v definici 3.1.1 podle obr. 40, můžeme psát

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



Obr. 40

Řešené úlohy

Příklad: Dokažte, že pro $n \in \boldsymbol{N}$ platí $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Řešení: $$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n - x^n\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right) = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

3.2. Základní vlastnosti derivace

Výklad

Věta 3.2.1. V bodech x_0, v nichž existují derivace $u'(x), v'(x)$ platí

1. $(u(x)+v(x))'_{x=x_0} = u'(x_0)+v'(x_0)$,

2. $(u(x).v(x))'_{x=x_0} = u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)$,

3. $(c\,u(x))'_{x=x_0} = c.u'(x_0)$, kde $c \in \boldsymbol{R}$,

4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = \dfrac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$ pro $v(x) \neq 0$.

Důkaz: 1. $(u(x)+v(x))'_{x=x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)+v(x)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} +$

$+ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0)+v'(x_0).$

2. $(u(x).v(x))'_{x=x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}.v(x) + \lim\limits_{x\to x_0} u(x_0)\dfrac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$

3. $(c\cdot u(x))'_{x=x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c\cdot u(x)-c\cdot u(x_0)}{x-x_0} = c\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = c\cdot u'(x_0).$

4. $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\dfrac{1}{v(x)}-\dfrac{1}{v(x_0)}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{v(x_0)-v(x)}{v(x)v(x_0)(x-x_0)} = -\dfrac{v'(x_0)}{v^2(x_0)},$

$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = \left(u(x).\dfrac{1}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = u'(x_0)\dfrac{1}{v(x_0)} + u(x_0).\left(-\dfrac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}\right) = \dfrac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0).v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$

Řešené úlohy

Příklady

1. $(x^4+3x^2-x+3)'=(x^4)'+3(x^2)'-(x)'+(3)'=4x^3+6x-1.$

2. $\left(\dfrac{2x+3}{x^2-2x+1}\right)'=\dfrac{(2x+3)'(x^2-2x+1)-(2x+3)(x^2-2x+1)'}{(x^2-2x+1)^2}=$

$$=\frac{2(x^2-2x+1)-(2x+3)(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2}=-2\frac{x^2+3x-4}{(x^2-2x+1)}=-2\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)^2}=-2\frac{x+4}{x-1},\ x\neq 1.$$

Výklad

Věta 3.2.2. Nechť existují derivace $\varphi'(x_0)$ a $f'(\varphi(x_0))$. Pak existuje derivace složené funkce $g(x)=f(\varphi(x))$ v bodě x_0 a platí

$$g'(x_0)=f'(\varphi(x_0)).\varphi'(x_0).$$

Důkaz: Označíme $h_{x_0}(y)=\begin{cases}\dfrac{f(y)-f(\varphi(x_0))}{y-\varphi(x_0)} & \text{pro } y\neq\varphi(x_0),\\ f'(\varphi(x_0)) & \text{pro } y=\varphi(x_0).\end{cases}$

Funkce $h_{x_0}(y)$ je spojitá v bodě $\varphi(x_0)$ a platí

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(\varphi(x)-f(\varphi(x_0))).(\varphi(x)-\varphi(x_0))}{(\varphi(x)-\varphi(x_0))(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(h_{x_0}(\varphi(x)).\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\right)=h_{x_0}(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=f'(\varphi(x_0)).\varphi'(x_0).$$

Řešené úlohy

Příklad $((x^2-3x+1)^{10})'=10(x^2-3x+1)^9.(2x-3).$

Výklad

Věta 3.2.3. Nechť je $y = f(x)$ spojitá a ryze monotónní funkce v intervalu I a nechť k ní existuje $f'(x_0) \neq 0$ pro $x_0 \in I$. Pak existuje derivace inverzní funkce $f^{-1}(y)$ v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí

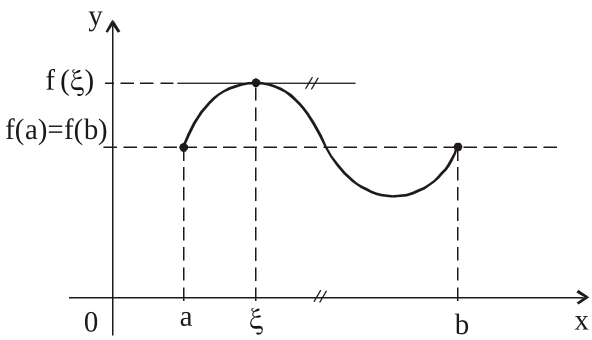
$$\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Důkaz nebudeme uvádět. Za předpokladu existence derivace inverzní funkce ale můžeme derivovat rovnici $x = f^{-1}(f(x))$, tj. $1 = (f^{-1}(f(x)))'.f'(x)$, z čehož plyne

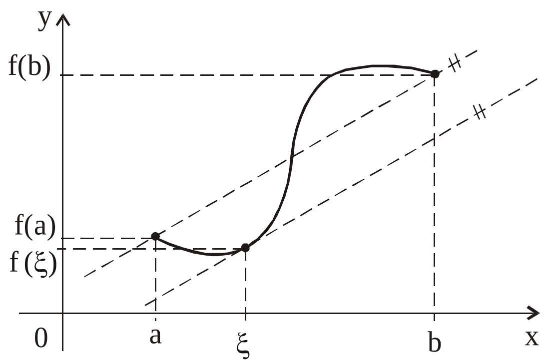
$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Nyní uvedeme dvě důležité věty diferenciálního počtu, které nebudeme dokazovat.

Věta (Rolleova) 3.2.4. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $< a, b >$, nechť existuje její derivace $f'(x)$ pro $x \in (a,b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$, obr. 41.



Obr. 41



Obr. 42

Věta (Lagrangeova) 3.2.5. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $<a,b>$ a nechť její derivace $f'(x)$ existuje pro $x \in (a,b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, obr. 42.

Poznámka

Předchozí věty říkají, že za daných předpokladů existuje alespoň jedna tečna ke grafu funkce $f(x)$, *která je rovnoběžná s přímkou spojující body* $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Věta 3.2.6. Nechť $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a,b)$. Pak je funkce $f(x)$ v (a,b) rostoucí, resp. klesající.

Důkaz (sporem): Důkaz provedeme pro $f'(x) > 0$. Předpokládejme, že existují $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ a platí $f(x_1) \geq f(x_2)$. Podle věty 3.2.5. existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Levá strana této rovnice je menší nebo rovna nule a pravá strana je větší než nula. To je spor s předpokladem.

Řešené úlohy

Příklad: Funkce $y = x^3 + 4x$ je rostoucí v $\boldsymbol{R}$, protože $y' = 3x^2 + 4 > 0$ pro všechna $x \in \boldsymbol{R}$.

3.3. Derivace základních elementárních a elementárních funkcí

Předpokládané znalosti

V následujících úvahách budeme užívat vztahy známé ze střední školy a vztahy uvedené v předcházejících kapitolách tohoto textu. Některé z nich připomeneme.

3.3.1. Exponenciální funkce

Výklad

Pro odvození vzorců budeme užívat následující známé vztahy:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2},\ \forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{R},\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\ a^x = e^{x\ln a},\ \text{ pro } x\in \boldsymbol{R} \text{ a } a\in(0,\infty)\setminus\{1\}.$$

Dostaneme:

$$(\boldsymbol{e^x})' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \boldsymbol{e^x},\ \forall x\in\boldsymbol{R},$$

$$(\boldsymbol{a^x})' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}.(x\ln a)' = \boldsymbol{a^x\cdot \ln a},\ \forall x\in\boldsymbol{R}.$$

3.3.2. Logaritmické funkce

Výklad

Užitím vztahu pro derivaci inverzní funkce pro funkci $y=\ln x$, tj. $x=e^y$ a funkci $y=\log_a x$, tj. $x=a^y$, $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, dostaneme:

$$(\boldsymbol{\ln x})' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}},\ \text{ pro } x\in(0,\infty),$$

$$(\boldsymbol{\log_a x})' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y\ln a} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x\ln a}},\ \text{ pro } x\in(0,\infty).$$

3.3.3. Mocninné funkce

Výklad

Užijeme vztahu $x^r = e^{r\ln x}$, $x \in (0,\infty)$, $r \in \boldsymbol{R}$.

Pak dostaneme: $(\boldsymbol{x^r})' = (e^{r\ln x})' = e^{r\ln x}.(r\ln x)' = x^r.r.\frac{1}{x} = \boldsymbol{r.x^{r-1}}$, pro $x \in (0,\infty)$.

Jestliže je $r \in \boldsymbol{N}$, resp. $-r \in \boldsymbol{N}$, resp. $r = \frac{1}{n}$, kde $n \in \boldsymbol{N}$, pak vzorec $(x^r)' = rx^{r-1}$ platí pro $x \in \boldsymbol{R}$, resp. $x \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, resp. pro n liché pro $x \in \boldsymbol{R}$ a pro n sudé pro $x \in \langle 0,\infty)$.

3.3.4. Goniometrické funkce

Výklad

Připomeneme vztahy: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $x \in \boldsymbol{R}$,

$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$, $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$,

$x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$. Nejprve dokážeme, že platí

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0}\sin\frac{h}{2}.\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 0.$$

Nyní odvodíme vzorce:

$$(\mathbf{sin}\boldsymbol{x})' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \mathbf{cos}\boldsymbol{x},\ \forall x \in \boldsymbol{R},$$

$$(\mathbf{cos}\boldsymbol{x})' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\mathbf{sin}\boldsymbol{x},\ \forall x \in \boldsymbol{R},$$

$$(\mathbf{tg}\boldsymbol{x})' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\mathbf{cos}^2\boldsymbol{x}},$$

pro $x \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \boldsymbol{Z} \right\}$,

$$\mathbf{(cotg}\boldsymbol{x}\mathbf{)}' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\boldsymbol{\sin^2 x}},$$

pro $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{ (k\pi : k \in \boldsymbol{Z} \}$.

3.3.5. Cyklometrické funkce

Výklad

Užitím vztahu pro derivaci inverzní funkce pro funkce $y = \arcsin x$, tj. $x = \sin y$, $y = \arccos x$, tj. $x = \cos y$, $y = \operatorname{arctg} x$, tj. $x = \operatorname{tg} y$ a $y = \operatorname{arccotg} x$, tj. $x = \operatorname{cotg} y$ dostaneme:

$$\mathbf{(arcsin}\boldsymbol{x}\mathbf{)}' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1 - x^2}}}, \text{ pro } x \in (-1,1),$$

$$\mathbf{(arccos}\boldsymbol{x}\mathbf{)}' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{\mathbf{1 - x^2}}}, \text{ pro } x \in (-1,1),$$

$$\mathbf{(arctg}\boldsymbol{x}\mathbf{)}' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{\mathbf{x^2 + 1}}, \text{ pro } x \in \boldsymbol{R},$$

$$\mathbf{(arccotg}\boldsymbol{x}\mathbf{)}' = \frac{1}{(\operatorname{cotg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\operatorname{cotg}^2 y + 1} = -\frac{1}{\mathbf{x^2 + 1}}, \text{ pro } x \in \boldsymbol{R}.$$

<u>**Přehled vzorců**</u>

1. $(c)' = 0, c \in \boldsymbol{R}$, 2. $(u+v)' = u' + v'$, 3. $(cu)' = c.u'$,

4. $(u.v)' = u'v + uv'$, 5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, 6. $(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)$,

7. $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$, 8. $(e^x)' = e^x$, 9. $(a^x)' = a^x.\ln a$,

10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, 12. $x^r = rx^{r-1}$,

13. $(\sin x)' = \cos x$, 14. $(\cos x)' = -\sin x$, 15. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

16. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, 17. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 18. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

19. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, 20. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Poznámka

Intervaly, v nichž derivace existují, jsou uvedeny v předchozím textu.

3.3.6. Elementární funkce

Výklad

Užitím uvedených vzorců můžeme derivovat elementární funkce. Nesmíme zapomenout, že $D_{y'} \subset D_y$.

Řešené úlohy

Příklad: Určete derivaci funkce $y = \ln(x^2 - 1)$.

Řešení: Určíme $D_y = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Označíme $g = x^2 - 1$. Podle vzorce 6 pro derivaci složené funkce dostaneme

$$y' = \frac{1}{g}.g' = \frac{1}{x^2-1}.2x = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Musíme si uvědomit, že funkce $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ má sice $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{-1, 1\}$. Definiční obor funkce

$y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$ je však $D_{y'} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \subset D_y$.

Poznámka

Při derivování budeme skutečnost, že $D_{y'} \subset D_y$ *nadále předpokládat.*

Řešené úlohy

Příklad: Derivujte funkci $y = e^{\operatorname{tg}(\ln x^2)}$.

Řešení: Označme $u = x^2, v = \ln u, w = \operatorname{tg} v, z = e^w$. Užitím vzorce 6 dostaneme

$$y' = (e^w)'.(\operatorname{tg} v)'.(\ln u)'.(x^2)' = e^w.\frac{1}{\cos^2 v}.\frac{1}{u}.2x = e^{\operatorname{tg}(\ln x^2)}.\frac{1}{\cos^2(\ln x^2)}.\frac{1}{x^2}.2x.$$

Poznámka

V dalším textu již nebudeme jednotlivé složky složené funkce označovat.

Výklad

Definice 3.3.1.

Výraz $f(x)^{g(x)}$, kde $f(x) > 0$ pro $x \in D_f$ definujeme vztahem $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Řešené úlohy

Příklad: Derivujte funkci $y = (x^2+1)^{\cos x}$.

Řešení: Položíme $y = e^{\cos x \ln(x^2+1)}$ a budeme derivovat jako složenou funkci:

$$y' = e^{\cos x \ln(x^2+1)}(-\sin x \ln(x^2+1) + \cos x\frac{2x}{1+x^2}) = (x^2+1)^{\cos x}(\frac{2x}{1+x^2}\cos x - \sin x \ln(x^2+1)).$$

Výklad

Definice 3.3.2.

Nechť $n \in \boldsymbol{N}$. Definujme **n-tou derivaci** funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in D_f \cap D'_f$ indukcí

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}_{(x)} \right)'_{x=x_0},$$

kde $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Řešené úlohy

Příklad: Vypočtěte třetí derivaci funkce $y = \arcsin x$.

Řešení: Dostaneme

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad y'' = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + x\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}.(-2x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

Poznámka

Bez důkazu uvedeme následující vztahy pro $n \in \boldsymbol{N}$:

$$(x^n)^{(n)} = n!, \qquad (e^x)^{(n)} = e^x,$$

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x, \qquad (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \cos x,$$

$$(\cos x)^{(2n)} = (-1)^{(n)} \cos x, \qquad (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{(n)} \sin x,$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

Kontrolní otázky

1. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je definována

   a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$, b) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

   c) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - x}{f(x_0) - x_0}$.

2. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 geometricky znamená

   a) směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0,

   b) směrnici sečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0,

   c) rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0,

3. Rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 je

   a) $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$,

   b) $y - y_0 = -f'(x_0)(x - x_0)$,

   c) $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

4. Existuje-li $f'(x_0)$, pak funkce $f(x)$ v bodě x_0

   a) je spojitá,

   b) nemusí být spojitá,

   c) není spojitá.

5. Nechť existuje derivace složené funkce $f(g(x))$ v bodě x_0. Pak platí:

   a) $\left[f(g(x_0))\right]' = f'(g'(x_0)) \cdot g'(x_0)$,

   b) $\left[f(g(x_0))\right]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$,

   c) $\left[f(g(x_0))\right]' = f'(g'(x_0))$.

6. Nechť $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a,b)$. Pak je funkce $f(x)$ v (a,b)

   a) rostoucí,

   b) neklesající,

   c) klesající.

7. Pro derivaci funkce $y = \ln x$ platí vzorec

a) $y' = \dfrac{1}{x \log a}$,

b) $y' = \dfrac{1}{x}$,

c) $y' = \dfrac{1}{a \ln x}$.

8. Pro derivaci funkce $y = \arccos x$ platí vzorec

a) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

b) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

c) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. Pro derivaci funkce $y = \operatorname{arctg} x$ platí vzorec

a) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

b) $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,

c) $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

10. Funkci $f(x)g(x)$ můžeme přepsat

a) $f(x)^{g(x)} = e^{f(x)\ln g(x)}$,

b) $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$,

c) $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. c); 4. a); 5. b); 6. c); 7. b); 8. c); 9. a); 10. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Je dána funkce $y = f(x)$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f'(-1)$ je-li:

a) $y = x^8$, b) $y = x^{-4}$, c) $y = \frac{2}{x}$,

d) $y = \sqrt[4]{x^5}$, e) $y = \sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}$, f) $y = 14\sqrt[7]{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Je dána funkce $y = f(x)$. Vypočtěte $f'(a)$ je-li:

a) $f(x) = ax^3 + a^2x^2 + a^3x$, b) $f(x) = \frac{a^2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{a^3}{x\sqrt[3]{x}}$.

3. Je dána funkce $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^3}$. Vypočtěte:

a) $f(-1)$, b) $f'(-1)$, c) $f(2)$,

d) $f'(2)$, e) $f'(0)$, f) $f'(\frac{1}{a})$.

4. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$, b) $y = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2$, c) $y = x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[9]{x}$,

d) $y = 4\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^5} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$, e) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$,

f) $y = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$.

5. Vypočtěte derivace součinu funkcí:

a) $y = x^2 \sin x$, b) $y = 2x \operatorname{cotg} x$, c) $y = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$,

d) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$, e) $y = (x-1)e^x$, f) $y = 2t \sin t - (t^2 - 2)\cos t$,

g) $y = \frac{e^x}{x^2}$, h) $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$, i) $y = x \sin x \operatorname{arctg} x$.

6. Vypočtěte derivace podílu funkcí:

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$, b) $y = \frac{x}{x^2+1}$, c) $y = \frac{3t^2+1}{t-1}$,

d) $y = \frac{1-x^3}{1+x^3}$, e) $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$, f) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$,

g) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, h) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$, i) $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

7. Vypočtěte derivace složených funkcí:

a) $y=(1-5x)^4$, b) $y=\dfrac{1}{(1-x^2)^5}$, c) $y=\sqrt{1-x^2}$,

d) $y=\sin^2 x$, e) $y=\cos^4 x$, f) $y=\sin\sqrt{x}$,

g) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$, h) $y=\ln(x^2-4x)$, i) $y=\ln\sin x$,

j) $y=e^{\sqrt{x+1}}$, k) $y=e^{\arcsin 2x}$, l) $y=\sin(e^{x^2+3x+2})$.

8. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$, b) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$, c) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

d) $y=\sqrt[3]{(2x+3)^2}$, e) $y=\sqrt[3]{4+2\sqrt{3x}+3x}$, f) $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$,

g) $y=\dfrac{1}{\sqrt{6t-t^2}}$, h) $y=\dfrac{x}{3(x^5+1)}+(x^3-1)(x^3+1)$, i) $y=x^5\sqrt[3]{x^6-8}$.

9. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y=\sin\dfrac{1}{x}$, b) $y=\cos^3 4x$, c) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$,

d) $y=(1+\sin^2 x)^4$, e) $y=\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$, f) $y=\operatorname{tg}\dfrac{1+x}{x}$,

g) $y=3\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg}^3 x$, h) $y=\cos\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$, i) $y=\dfrac{x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg} x$.

10. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y=\ln\dfrac{5+4x}{3+7x}$, b) $y=\ln\sin 2x$, c) $y=x^3\log_2 x$,

d) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, e) $y=\sqrt{\ln x^2}$, f) $y=\ln\cos\sqrt{e^x+1}$,

g) $y=\ln\dfrac{x}{1-x^4}$, h) $y=\ln\arccos 2x$, i) $y=\operatorname{arctg}\left[\ln(ax+b)\right]$.

11. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y=4^x-x^4$, b) $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$, c) $y=2^{\frac{1}{\cos x}}$,

d) $y=e^{2x}(x^2+2x-2)$, e) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, f) $y=e^{\sqrt{\cos x}}$,

g) $y=e^{\frac{x}{\ln x}}$, h) $y=e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1)$, i) $y=2^{\cos^3 x-3\cos x}$.

12. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$, b) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$, c) $y=\arccos^3 5x$,

d) $y = \operatorname{arccotg}\dfrac{1}{1+x^2}$, e) $y = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x-2}{4}}$, f) $y = \operatorname{arctg}^4\sqrt{x}$,

g) $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$, h) $y = \arcsin\dfrac{2}{x}$, i) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

13. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$, b) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$,

c) $y = \arccos(2e^{2x}-1)$, d) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

e) $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x$, f) $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$,

g) $y = x^2 e^{x^2}\ln x$, h) $y = 2(\operatorname{tg}\sqrt{x} - \sqrt{x})$.

14. Vypočtěte derivace funkcí (užijte definice 3.3.1):

a) $y = x^x$, b) $y = x^{x^2}$, c) $y = x^{e^x}$,

d) $y = x^{\sin x}$, e) $y = x^{x^x}$, f) $y = \left(\dfrac{a}{x}\right)^x$,

g) $y = x^{\ln x}$, h) $y = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}$, i) $y = (\ln x)^x$.

15. Vypočtěte derivace vyššího řádu:

a) $y = x^2 - 3x + 2;\quad y''(x) = ?$, b) $y = 1 - x^2 - x^4;\quad y'''(x) = ?$,

c) $f(x) = (x-1)^5;\quad f'''(3) = ?$, d) $f(x) = e^{2x-1};\quad f''(0) = ?$,

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x};\quad f^{(5)}(x) = ?$, f) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\quad f''(1) = ?$,

g) $y = x^3\ln x;\quad y^{(4)}(x) = ?$, h) $y = \cos^2 x;\quad y'''(x) = ?$.

16. Vypočtěte druhé derivace funkcí:

a) $y = xe^{x^2}$, b) $y = \dfrac{1}{1+x^3}$, c) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$,

d) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, e) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, f) $y = e^{\sqrt{x}}$,

g) $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$, h) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, i) $y = x^x$.

17. Vypočtěte derivace vyššího řádu:

a) $y = \dfrac{x}{6(x+1)};\quad y''' = ?$, b) $y = \ln^2 x;\quad y''' = ?$,

c) $y = a^x;\quad y^{(5)} = ?$, d) $y = x^4\ln x;\quad y^{(5)} = ?$,

e) $y = \operatorname{arctg} x;\quad y''' = ?$, f) $y = xe^x;\quad y^{(6)} = ?$.

18. Dokažte, že funkce $y = e^x \sin x$ vyhovuje rovnici

$$y'' + 2y' + 2y = 0 .$$

19. Dokažte, že funkce $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ vyhovuje rovnici
$y''' - 13y' - 12y = 0$.

20. Dokažte, že funkce $y = x + \sin 2x$ vyhovuje rovnici
$y'' + 4y = 4x$.

21. Které z následujících funkcí vyhovují rovnici $y'' - 4y' + 4y = 0$:

a) $y = e^{2x}$ b) $y = e^{-2x}$ c) $y = xe^{2x}$

d) $y = e^{2x} - xe^{2x}$ e) $y = e^{2x} + xe^{x}$ f) $y = \cos 2x$

g) $y = x^2 e^{2x}$ h) $y = e^{2x}(2x+1)$ i) $y = e^{2x}(ax+b)$

22. Jaký úhel s osou x svírá tečna k parabole $y = x^2 - 3x + 5$, vedená jejím bodem $T = [2,3]$? Napište rovnici této tečny.

23. Na křivce $y = x^2(x-2)^2$ nalezněte body, v nichž jsou její tečny rovnoběžné s osou x.

24. Ve kterých bodech křivky $y = x^3 + x - 2$ jsou tečny k této křivce rovnoběžné s přímkou $y = 4x - 1$?

25. Napište rovnici tečny ke křivce $y = \operatorname{arctg} x$ v jejím bodě $[1, ?]$.

26. Pod jakým úhlem protíná křivka $y = \log x$ osu x ?

27. Napište rovnice tečen ke křivce $y = x - \dfrac{1}{x}$ v průsečících křivky s osou x .

28. Napište rovnici tečny ke křivce $y = x^3 + 3x^2 - 5$ kolmou k přímce $2x - 6y + 1$.

29. Napište rovnici tečny a normály k parabole $x^2 = 4ay$ v jejím bodě $[x_0, y_0]$.

30. Napište rovnici normály ke křivce $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ v jejím bodě $[3, ?]$.

31. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = -\sqrt{x} + 2$ v průsečíku této křivky s osou 1. kvadrantu.

32. Pod jakými úhly se protínají křivky

a) $y = x - x^3$ a $y = 5x$, b) $y = x^3$ a $y = \dfrac{1}{x^2}$,

c) $y = \sin x$ a $y = \cos x$ $(0 < x < \pi)$ d) $x^2 + y^2 = 8$ a $y^2 = 2x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 0 ; -8; b) neexistuje; 4; c) neexistuje; -2; d) 0; neexistuje; e) neexistuje; $-\frac{3}{5}$; f) neexistuje; 4. **2.** a) $6a^3$; b) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{a^2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{a}$. **3.** a) -5; b) -8; c) $-\frac{7}{8}$; d) $\frac{19}{16}$; e) neexistuje; f) $3a^4+10a^3-a^2$. **4.** a) $(x^2-1)^2$; b) x^3-2x; c) $1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$; d) $\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{15}{x^6}+\frac{10}{3x\sqrt[3]{x^2}}$; e) $\frac{-1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$; f) $\frac{19}{12}\sqrt[12]{x^7}$. **5.** a) $x(2\sin x+x\cos x)$; b) $y=2(\mathrm{cotg}\,x-\frac{x}{\sin^2 x})$; c) $x\,\mathrm{arctg}\,x$; d) x^2e^x; e) xe^x; f) $t^2\sin t$; g) $e^x\frac{x-2}{x^3}$; h) $3x^2\ln x$; i) $\sin x\,\mathrm{arctg}\,x+x\cos x\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{x\sin x}{1+x^2}$. **6.** a) $-\frac{2}{(x-1)^2}$; b) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; c) $\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$; d) $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$; e) $\frac{-1}{1-\cos x}$; f) $\frac{\sin x+\cos x-x(\cos x-\sin x)}{1+\sin 2x}$; g) $\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$; h) $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$; i) $-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$. **7.** a) $-20(1-5x)^3$; b) $\frac{10x}{(1-x^2)^6}$; c) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; d) $\sin 2x$; e) $-4\cos^3 x\sin x$; f) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; g) $-\sin 4x$; h) $\frac{2x-4}{x^2-4x}$; i) $\mathrm{cotg}\,x$; j) $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$; k) $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$; l) $\cos(e^{x^2+3x+2})e^{x^2+3x+2}(2x+3)$. **8.** a) $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$; b) $\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$; c) $\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$; d) $\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+3}}$; e) $\frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3x}+3x)^2}}$; f) $\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$; g) $\frac{t-3}{\sqrt{(6t-t^2)^3}}$; h) $\frac{1-4x^5}{3(x^5+1)^2}+6x^5$; i) $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$. **9.** a) $-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$; b) $-12\cos^2 x\sin 4x$; c) $\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$; d) $4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x$; e) $\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}\,x}}$; f) $\frac{-1}{x^2\cos^2\frac{1+x}{x}}$; g) $\frac{-3}{\sin^4 x}$; h) $\frac{\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}{2\sqrt{(1+x)^3}}$; i) $\frac{2x\sin x}{\cos^3 x}$. **10.** a) $\frac{-23}{(5+4x)(3+7x)}$;

b) $2\cot g\, 2x$; c) $x^2(3\log_2 x + \frac{1}{\ln 2})$; d) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; e) $\frac{1}{x\sqrt{\ln x^2}}$; f) $\frac{-e^x \operatorname{tg}\sqrt{e^x+1}}{2\sqrt{e^x+1}}$;

g) $\frac{1+3x^4}{x(1-x^4)}$; h) $\frac{-2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$; i) $\frac{a}{(ax+b)\left[1+\ln^2(ax+b)\right]}$. **11.** a) $4^x \ln 4 - 4x^3$;

b) $-e^{-x}(\sin x + \cos x)$; c) $2^{\frac{1}{\cos x}} \ln 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; d) $2e^{2x}(x^2+3x-1)$; e) $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$;

f) $-e^{\sqrt{\cos x}} \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; g) $e^{\frac{x}{\ln x}} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; h) $e^{\sqrt{2x}}$; i) $2^{\cos^3 x - 3\cos x} 3\sin^3 x \ln 2$.

12. a) $\arcsin x$; b) $\frac{-1}{x^2+1}$; c) $\frac{-15\arccos^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$; d) $\frac{2x}{x^4+2x^2+2}$; e) $\frac{1}{\sqrt{-x^2+8x-12}}$;

f) $\frac{2\operatorname{arctg}^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$; g) $\frac{1}{2(1+x^2)}$; h) $\frac{-2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$; i) $\frac{-1}{2}$; **13.** a) $8\frac{(x-1)^3}{(x+1)^5}$; b) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$;

c) $\frac{-2e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; d) $\frac{-\operatorname{arctg} x}{x^2}$; e) $\frac{-2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; f) $\frac{x\cos x}{\sin^2 x}$; g) $xe^{x^2}(2x^2\ln x + 2\ln x + 1)$;

h) $\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. **14.** a) $x^x(\ln x + 1)$; b) $x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$; c) $x^{e^x} e^x(\ln x + \frac{1}{x})$;

d) $x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$; e) $x^{x^x} x^x(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x})$; f) $\left(\frac{a}{x}\right)^x\left(\ln\frac{a}{x} - 1\right)$; g) $2x^{\ln x - 1}\ln x$;

h) $y = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x - 1}(\ln(x^2+1) + 2x\operatorname{arctg} x)$; i) $(\ln x)^{x-1}(\ln x \ln(\ln x) + 1)$. **15.** a) 2;

b) $-24x$; c) 240; d) $\frac{4}{e}$; e) $\frac{120}{(1-x)^6}$; f) $-\frac{1}{2}$; g) $\frac{6}{x}$; h) $4\sin 2x$. **16.** a) $2xe^{x^2}(2x^2+3)$;

b) $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$; c) $2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{x^2+1}$; d) $\frac{-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$; e) $\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; f) $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$;

g) $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; h) $\frac{4}{(x+1)^3}$; i) $x^{x-1}(x\ln^2 x + 2x\ln x + x + 1)$. **17.** a) $\frac{1}{(x+1)^4}$;

b) $\frac{4\ln x - 6}{x^3}$; c) $a^x \ln^5 a$; d) $\frac{24}{x}$; e) $\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$; f) $e^x(x+6)$. **21.** a) ano; b) ne; c) ano;

d) ano; e) ne; f) ne; g) ne; h) ano; i) ano. **22.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $y = x+1$. **23.** $[0,0]$; $[1,1]$; $[2,0]$.

24. $[1,0]$; $[-1,-4]$. **25.** $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$. **26.** $0,4096 \approx 23^\circ 28'$. **27.** $y=2x-2$; $y=2x+2$. **28.** $3x+y+6=0$. **29.** $y-\frac{x_0^2}{4a}=\frac{x_0}{2a}(x-\frac{x_0}{2})$; $y-\frac{x_0^2}{4a}=-\frac{2a}{x_0}(x-x_0)$.

30. $3y-27x+79=0$. **31.** $2y+x-3=0$; $2x-y-1=0$. **32.** a) $0,5876 \approx 33^\circ 40'$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $1,2309 \approx 70^\circ 32'$; d) $1,2470 \approx 71^\circ 34'$.

Kontrolní test

1. Funkce $f(x)=\sqrt{x^5}-\sqrt[3]{x^4}$. Vypočtěte $f'(1)$.

   a) $\frac{5}{6}$, b) $\frac{7}{6}$, c) $\frac{2}{3}$.

2. Funkce $f(x)=\frac{1}{4x-7}$. Vypočtěte $f'(2)$.

   a) -4, b) -2, c) -1.

3. Vypočtěte derivaci funkce $y=\frac{5x^4-3x^3+6x^2}{x^2}$.

   a) $10x-3$, b) $\frac{20x^3-9x^2+12x}{x^4}$, c) $\frac{20x^3-9x^2+12x}{2x}$.

4. Vypočtěte derivaci součinu funkcí $y=x^3\operatorname{tg}x-3x^2\ln x$.

   a) $\frac{3x^2}{\cos^2 x}-6$, b) $3x^2\operatorname{tg}x-6x\ln x$, c) $3x^2\operatorname{tg}x+\frac{x^3}{\cos^2 x}-6x\ln x-3x$.

5. Vypočtěte derivaci součinu funkcí $y=e^x\arcsin x+(2x^2+3)\cos x$.

   a) $e^x\arcsin x+4x\cos x$, b) $e^x\arcsin x+\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}+4x\cos x-(2x^2+3)\sin x$,

   c) $\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}-(2x^2+3)\sin x$.

6. Vypočtěte derivaci podílu funkcí $y=\frac{2\sin x}{\sin x-\cos x}$.

   a) $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$, b) $\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}$, c) $\frac{2\cos x}{(\sin x-\cos x)^2}$.

7. Vypočtěte derivaci podílu funkcí $y=\frac{x\ln x}{1+\ln x}$.

   a) $(\ln x+1)\cdot x$, b) $\frac{\ln^2 x+\ln x+1}{(1+\ln x)^2}$, c) $\frac{\ln x+1}{(1+\ln x)^2}$.

8. Vypočtěte derivaci složené funkce $y = \sin^3 x + \ln(\sin x)$.

   a) $3\cos^2 x + \ln(\cos x)$, b) $3\cos^2 x + \dfrac{\cos x}{\sin x}$, c) $3\sin^2 x \cos x + \operatorname{cotg} x$.

9. Vypočtěte derivaci složené funkce $y = e^{-x^2} + 3^{\cos x}$.

   a) $-2xe^{-x^2} - 3^{\cos x} \sin x \ln 3$, b) $e^{-x^2} - 3^{\cos x} \sin x$, c) $e^{-x^2} + 3^{\cos x} \ln 3$.

10. Vypočtěte derivaci funkce $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1+x} + \dfrac{\cos x}{e^x}$.

   a) $\dfrac{1}{2+x} - \dfrac{\sin x}{e^x}$, b) $\dfrac{1}{1+(1+x)^2} - \dfrac{\sin x}{e^x}$, c) $\dfrac{1}{(4+2x)\sqrt{1+x}} - \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$.

11. Vypočtěte derivaci funkce $y = (\cos x)^{\sin x}$.

   a) $(-\sin x)^{\cos x}$, b) $(\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln(\cos x) - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x})$, c) $(\cos x)^{\sin x} \cdot \ln(\cos x)$.

12. Vypočtěte derivaci funkce $y = (3-x)^x$.

   a) $(3-x)^x(\ln(3-x) - \dfrac{x}{3-x})$, b) $(3-x)^x \cdot \ln(3-x)$, c) $x(3-x)^{x-1}$.

13. Vypočtěte druhou derivaci funkce $y = xe^{x^2}$ v bodě $x = 1$.

   a) 0, b) $4e$, c) $10e$.

14. Zjistěte, ve kterém bodě má funkce $y = \dfrac{\ln x}{x}$ tečnu rovnoběžnou s osou x.

   a) 1, b) e, c) 0.

15. Napište rovnici tečny k funkci $y = x \ln x$ v bodě $x = 1$.

   a) $x + y + 1 = 0$, b) $x - y - 1 = 0$, c) $x + y + e = 0$.

16. Napište rovnici tečny k funkci $y = 2 + \operatorname{tg}^2 x$ v bodě $x = 0$.

   a) $y = 2$, b) $x - y + 2 = 0$, c) $x = 2$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. a); 4. c); 5. b); 6. a); 7. b); 8. c); 9. a); 10. c); 11. b); 12. a); 13. c); 14. b); 15. b); 16. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 12 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.1. až 3.3. znovu.

3.4. Funkce daná parametricky, polárně a implicitně

Výklad

Definice 3.4.1.

Nechť jsou dány funkce $\varphi(t), \psi(t)$ definované na $M \subset \boldsymbol{R}$ a nechť $\varphi(t)$ je prostá na M.

Složená funkce $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ definovaná na H_φ se nazývá **funkce daná parametricky** rovnicemi $x = \varphi(t),\ y = \psi(t), t \in M$.

Poznámky

1. Funkce $\varphi^{-1}(x)$ inverzní k prosté funkci $\varphi(t)$ existuje.

2. Derivace funkcí $\varphi(t), \psi(t)$ podle parametru t budeme značit $\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)$.

Řešené úlohy

Příklad Rovnicemi $x = r\cos t,\ y = r\sin t, t \in <0, \pi>, r > 0$ je dána funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in <-r, r>$, jejímž grafem je „horní" polovina kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Umocníme obě rovnice parametrického zadání a dostaneme $x^2 = r^2\cos^2 t,\ y^2 = r^2\sin^2 t$.

Tyto rovnice sečteme:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.$$

Všimněme si, že $\dot{x} = -r\sin t < 0$ pro $t \in <0, \pi>$ a je tedy ryze monotónní (klesající).

Příklad Funkce daná parametricky rovnicemi $x = e^t + t^3 - 1,\ \ y = \ln t + \sin t, t \in \boldsymbol{R}$ není elementární, protože z rovnice $x = e^t + t^3 - 1$ nedovedeme t vyjádřit. Funkce $\varphi^{-1}(x), x \in \boldsymbol{R}$ však existuje, protože $\dot{x} = e^t + 3t^2 > 0$ pro $t \in \boldsymbol{R}$, tj. $x = e^t + t^3 - 1$ je rostoucí pro $t \in \boldsymbol{R}$.

Poznámka

Zejména pro případy, kdy z rovnic $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ *nelze vyjádřit* $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ *musíme umět určit derivaci* y' *podle následující věty.*

Výklad

Věta 3.4.1. Nechť je funkce $f(x)$ dána parametricky rovnicemi $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in M$ a nechť na M existují derivace $\dot\varphi(t),\dot\psi(t)$, kde $\dot\varphi(t)\neq 0$ na M. Pak v bodě $x_0\in H_\varphi$ existuje derivace

$$f'(x_0)=\frac{\dot\psi(t_0)}{\dot\varphi(t_0)},\ \text{kde}\ \varphi(t_0)=x_0.$$

Důkaz: Podle definice 3.4.1. je $f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))$. Podle vět o derivaci složené funkce (3.2.2) a inverzní funkce (3.2.3) dostaneme

$$f'(x_0)=(\psi(\varphi^{-1}(x_0)))'=\dot\psi(\varphi^{-1}(x_0)).(\varphi^{-1}(x_0))'=\dot\psi(t_0).\frac{1}{\dot\varphi(t_0)}=\frac{\dot\psi(t_0)}{\dot\varphi(t_0)}.$$

Řešené úlohy

Příklad: Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi

$x=e^t+t^3-1,\ y=\ln t+\sin t.$

Řešení: Podle věty 3.4.1 platí $f'(x)=\dfrac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}=\dfrac{\frac{1}{t}+\cos t}{e^t+3t^2}=\dfrac{1+t\cos t}{t(e^t+3t^2)}$, kde $x=e^t+t^3-1$.

Poznámka

Derivace $f'(x)$ *je funkce daná parametricky rovnicemi* $x=\varphi(t),\ y'=\dfrac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}, t\in M$. *Podle věty 3.4.1 můžeme určit druhou derivaci*

$$y''=\left(\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)^{\cdot}.\frac{1}{\dot\varphi(t)}=\frac{\ddot\psi(t)\dot\varphi(t)-\dot\psi(t)\ddot\varphi(t)}{(\dot\varphi(t))^3},\quad kde\ \ x=\varphi(t).$$

Podobně bychom mohli podle věty 3.4.1 určit vyšší derivace funkce dané parametricky.

Řešené úlohy

Příklad: Určete druhou derivaci funkce $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in\langle 0,\pi\rangle$.

Řešení: $y'=\dfrac{\dot y}{\dot x}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{cotg} t,\ x=\cos t,\quad y''=\left(\dfrac{\dot y}{\dot x}\right)^{\cdot}.\dfrac{1}{\dot x}=\dfrac{1}{\sin^2 t}.\dfrac{1}{-\sin t}=-\dfrac{1}{\sin^3 t}$,

kde $x=\cos t$.

Příklad Určete rovnici tečny k půlkružnici $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in\langle -\pi,0\rangle$ v bodě

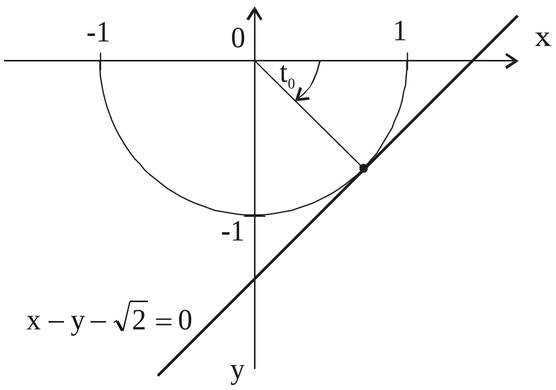
$t_0=-\dfrac{\pi}{4}$.

Řešení: Rovnice tečny je $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Dostaneme $x_0=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt2}{2},\ y_0=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt2}{2}$ a $f'(x)=-\operatorname{cotg} t$, tj.

$f'(x_0)=-\operatorname{cotg} t_0=-(-1)=1.$

Dosadíme do rovnice tečny a dostaneme $y+\dfrac{\sqrt2}{2}=x-\dfrac{\sqrt2}{2}$, tj. $x-y-\sqrt2=0$, viz obr. 43.



Obr. 43

Výklad

Definice 3.4.2.

Nechť je dána funkce $g(\varphi) > 0, \varphi \in M$ taková, že funkce $g(\varphi)\cos\varphi$, kde $\varphi \in M$, je prostá. Pak **funkce** $f(x)$ daná parametricky rovnicemi $x = g(\varphi)\cos\varphi, y = g(\varphi)\sin\varphi, \varphi \in M$ je **dána polárně rovnicí** $\rho = g(\varphi), \varphi \in M$.

Řešené úlohy

Příklad: Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$, která je dána polárně rovnicí

$\rho = \dfrac{1}{\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)}$, $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ v bodě $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Řešení: Parametrické rovnice jsou

$$x = \frac{\cos\varphi}{\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)}, \quad y = \frac{\sin\varphi}{\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)}.$$

Rovnice tečny je $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Vypočítáme hodnoty $x_0 = \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$ a $y_0 = \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$.

Dále určíme derivaci

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)}\right)'}{\left(\dfrac{\cos\varphi}{\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)}\right)'} = \frac{\cos\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\varphi - \varphi^2\right) - \sin\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}{-\sin\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\varphi - \varphi^2\right) - \cos\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}.$$

Nyní určíme $f'(x)$. Dostaneme

$$f'\left(\frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}\right) = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{16}\right) - 0}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{16}\right) - 0} = -1.$$

Rovnice tečny má tvar $y - \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2} = -\left(x - \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2}\right)$, tj. $y = -x + \dfrac{16\sqrt{2}}{\pi^2}$.

Poznámka

O derivaci funkce dané implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$, kde $F(x,y)$ je výraz obsahující proměnnou x a funkci $y = y(x)$, budeme hovořit v textu Diferenciální počet funkcí více proměnných (Matematika II). Nyní si způsob, jak derivovat funkci danou implicitně ukážeme pouze na příkladech. Musíme mít na paměti, že y ve výrazu $F(x,y)$ je y funkce proměnné x, která není z rovnice vyjádřena a její derivaci tedy označíme jako obvykle y'.

Řešené úlohy

Příklad: Určete derivaci funkce $y + xy - x\sin y = 0$.

Řešení:

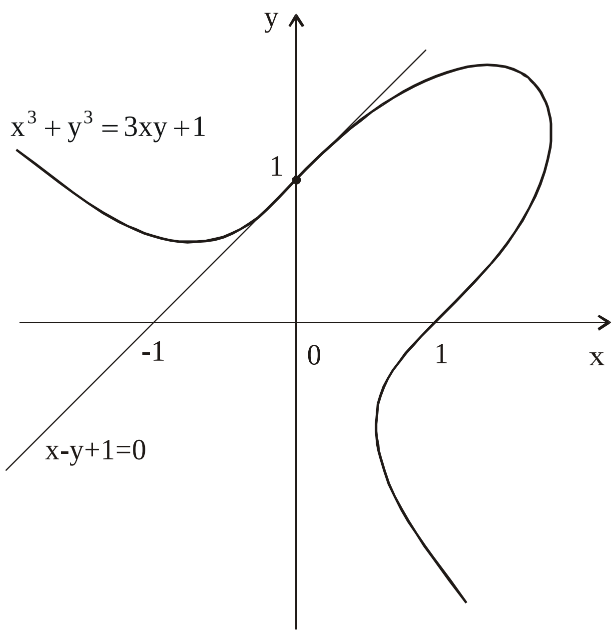
$$y' + (xy)' - (x\sin y)' = 0,$$
$$y' + y + xy' - \sin y - x\cos y y' = 0,$$
$$y'(1 + x - x\cos y) = \sin y - y,$$
$$y' = \frac{\sin y - y}{1 + x - x\cos y}.$$

Příklad: Určete rovnici tečny ke křivce $x^3 + y^3 = 3xy + 1$ v bodě $T = (0,1)$.

Řešení: Rovnice tečny má tvar $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Určíme derivaci funkce dané implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$. Dostaneme

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0, \quad y^2 y' - xy' = y - x^2$$
$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}, \quad y'(0,1) = 1.$$

Rovnice tečny je $y - 1 = x$, tj. $x - y + 1 = 0$, viz obr. 44.



Obr. 44

Kontrolní otázky

1. Funkce $f(x)$ je dána parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Označení $\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)$ znamenají derivace podle

a) proměnné x,

b) parametru t,

c) proměnné y.

2. Funkce $f(x)$ je dána parametricky rovnicemi $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$ pak pokud existuje derivace $f'(x_0),$ má tvar

a) $f'(x_0)=\dfrac{\dot\varphi(t_0)}{\dot\psi(t_0)}$,

b) $f'(x_0)=\dfrac{\dot\varphi(t_0)\psi(t_0)-\varphi(t_0)\dot\psi(t_0)}{[\varphi(t_0)]^2}$,

c) $f'(x_0)=\dfrac{\dot\psi(t_0)}{\dot\varphi(t_0)}$.

3. Funkce $y=f(x)$ je dána parametricky rovnicemi $x=\varphi(t),\ y=\psi(t).$ Druhá derivace y'' má tvar

a) $y''=\dfrac{(y')^{\cdot}}{\dot x}$,

b) $y''=(y')^{\cdot}$,

c) $y''=\dfrac{\ddot y}{\ddot x}$.

4. Funkce $f(x),$ která je dána polárně rovnicí $\rho=g(\varphi),$ má parametrické zadání

a) $x=g(\varphi)\sin\varphi,\ \ y=g(\varphi)\cos\varphi,$

b) $x=g(\varphi)\cos\varphi,\ \ y=g(\varphi),$

c) $x=g(\varphi)\cos\varphi,\ \ y=g(\varphi)\sin\varphi.$

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. a); 4. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte první derivace funkcí daných parametrickými rovnicemi:

a) $x=t^3+3t+1,\ \ y=3t^5+5t^3+1$, b) $x=e^{-t}\sin t,\ \ y=e^t\cos t$,

c) $x = \sin^2 t,\ y = \cos^2 t$, d) $x = 2\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$,

e) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, f) $x = \operatorname{tg} t,\ y = \cos^2 t$.

2. Sestavte rovnice tečny a normály k asteroidě $x = \sqrt{2}\cos^3 t,\quad y = \sqrt{2}\sin^3 t$ v bodě $t = \frac{\pi}{4}$.

3. Sestavte rovnice tečny a normály k cykloidě $x = t - \sin t,\quad y = 1 - \cos t$ v bodě $t = \frac{\pi}{2}$.

4. Sestavte rovnice tečny a normály ke křivce $x = 2e^t,\quad y = e^{-t}$ v bodě $t = 0$.

5. Sestavte rovnice tečny a normály ke křivce $x = \sin t,\quad y = \cos 2t$ v bodě $t = \frac{\pi}{6}$.

6. Najděte směrnici tečny k elipse $x = 3\cos t,\quad y = 4\sin t$ v bodě $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

7. Najděte směrnici tečny k elipse $x = 2\cos t,\quad y = \sin t$ v bodě $\left(1, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

8. Najděte směrnici tečny ke křivce $x = t - t^4,\quad y = t^2 - t^3$ v bodě $(0,0)$.

9. Ukažte, že funkce daná parametrickými rovnicemi $x = \frac{1+t}{t^3},\quad y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}$ vyhovuje rovnici $xy'^3 = 1 + y' \quad (y' = \frac{dy}{dx})$.

10. Vypočtěte derivaci $(y' = \frac{dy}{dx})$ funkcí daných implicitně rovnicí

a) $y^3 - 3y + 2x = 0$, b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, c) $2y \ln y = x$,

d) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, e) $\cos(xy) = x$, f) $y = 1 + xe^y$,

g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, h) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, i) $y = x + \operatorname{arctg} y$.

11. Sestavte rovnice tečny a normály ke křivce $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ v bodě $T = [1, -1]$.

12. Sestavte rovnice tečny k hyperbole $8x^2 - 9y^2 = 72$ v bodě $T = [-9, -8]$.

13. Sestavte rovnice tečen k hyperbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ kolmých k přímce $2x + 4y - 3 = 0$.

14. Znázorněte křivky a vypočtěte derivace $f'(x)$, je-li funkce $f(x)$ dána polárně rovnicí:

a) $\rho = 3\varphi,\quad \varphi \in (0, \infty)$ (Archimédova spirála),

b) $\rho = 2\sin\varphi,\quad \varphi \in < 0, \pi >$ (kružnice),

c) $\rho = \frac{\pi}{\varphi},\quad \varphi \in (0, \infty)$ (hyperbolická spirála),

d) $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (kardioida),

e) $\rho = e^{\varphi}$, $\varphi \in (0, \infty)$ (logaritmická spirála).

15. Určete rovnici tečny ke grafu Archimédovy spirály, která je dána polárně rovnicí $\rho = 2\varphi$, $\varphi \in (0,\infty)$, v bodě $\varphi_0 = \pi$.

16. Určete rovnici tečny ke grafu kardioidy, která je dána polárně rovnicí $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

17. Pro které φ nabývá funkce, která je dána polárně rovnicí $\rho = e^{\varphi}$, $\varphi \in (0,\pi)$, maximální hodnoty y?

18. Pro která φ je tečna ke grafu kardioidy, která je dána polárně rovnicí $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, rovnoběžná s osou x?

19. Určete rovnici asymptoty grafu hyperbolické spirály, která je dána polárně rovnicí $\rho = \dfrac{\pi}{\varphi}$, $\varphi \in (0,\infty)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y' = 5t^2$; b) $y' = e^{2t}$; c) $y' = -1$ $(0 < x < 1)$; d) $y' = -2\,\mathrm{tg}\,t$; e) $y' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$; f) $y' = -2\sin t\cos^3 t$. **2.** $x+y-1=0$; $x-y=0$. **3.** $x-y+2-\dfrac{\pi}{2}=0$; $x+y-\dfrac{\pi}{2}=0$. **4.** $x+2y-4=0$; $2x-y-3=0$. **5.** $4x+2y-3=0$; $2x-4y+1=0$. **6.** $-\dfrac{4}{3}$. **7.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **8.** 0 a $\dfrac{1}{3}$. **10.** a) $\dfrac{2}{3(1-y^2)}$; b) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; c) $\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$; d) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$; e) $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$; f) $\dfrac{e^y}{1-xe^y}$; g) $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$; h) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$; i) $\dfrac{1+y^2}{y^2}$. **11.** $x-4y-5=0$; $4x+y-3=0$. **12.** $x-y+1=0$. **13.** $2x-y+1=0$; $2x-y-1=0$. **14.** a) $f'(x) = \dfrac{\varphi\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}$; b) $f'(x) = \dfrac{2\cos\varphi\sin\varphi}{2\cos^2\varphi-1}$; c) $f'(x) = \dfrac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi+\varphi\sin\varphi}$; d) $f'(x) = -\dfrac{2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1}{\sin\varphi(2\cos\varphi+1)}$; e) $f'(x) = \dfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}$. **15.** $y = \pi(x+2\pi)$. **16.** $x-y+2=0$. **17.** $\varphi = \dfrac{3}{4}\pi$. **18.** $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_3 = \dfrac{5\pi}{3}$. **19.** $y = \pi$ pro $\varphi \to 0$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi $x = a\sin t,\;\; y = b\cos t.$

   a) $-\dfrac{b}{a}\operatorname{cotg} t,$ b) $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t,$ c) $-b\sin t.$

2. Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi $x = \ln t,\;\; y = \dfrac{1}{2}(t + \dfrac{1}{t}).$

   a) $\dfrac{1}{2}(t - \dfrac{1}{t}),$ b) $\dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{t^2}),$ c) $\dfrac{2t}{t^2 - 1}.$

3. Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi $x = 1 + 3\cos t,\; y = 4 + 3\sin t$

   v bodě $t = \dfrac{\pi}{4}.$

   a) $1,$ b) $0,$ c) $-1.$

4. Sestavte rovnici tečny ke křivce $x = e^{2t},\; y = e^{3t}$ v bodě $t = 0.$

   a) $3x - 2y - 1 = 0,$ b) $2x + 3y - 1 = 0,$ c) $2x + y - 3 = 0.$

5. Sestavte rovnici normály ke křivce $x = 2t^3 - 9t,\;\; y = t^2 + t$ v bodě $t = 1.$

   a) $x + y - 5 = 0,$ b) $x + y + 5 = 0,$ c) $x - y + 9 = 0.$

6. Vypočtěte 2. derivaci y'' funkce dané parametricky

   rovnicemi $x = a(t + 1),\;\; y = at^3.$

   a) $3at^2,$ b) $\dfrac{1}{3t^2},$ c) $\dfrac{6}{a}t.$

7. Vypočtěte derivaci funkce $f(x),$ je-li dána polárně rovnicí $\rho = e^{\varphi}.$

   a) $-\operatorname{cotg}\varphi,$ b) $\dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi},$ c) $\dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi}.$

8. Sestavte rovnici tečny ke grafu funkce, která je dána polárně rovnicí $\rho = \sin\varphi$ v bodě

   $\varphi = \dfrac{\pi}{2}.$

   a) $x = 1,$ b) $y = 1,$ c) $x - y + 1 = 0.$

9. Vypočtěte derivaci y' funkce dané implicitně rovnicí $x\sin y + y\sin x = 0.$

   a) $-\dfrac{y\cos x + \sin y}{x\cos y + \sin x},$ b) $-\dfrac{\sin y}{\sin x},$ c) $-\dfrac{y\cos x + \sin y}{\sin x}.$

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. c); 4. a); 5. c); 6. c); 7. b); 8. b); 9. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.4. znovu.

3.5. Výpočet limit užitím derivace (L'Hospitalovo pravidlo)

Výklad

Věta 3.5.1. Nechť $x_0 \in \boldsymbol{R}^*$ a nechť

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, resp. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$. Nechť existuje

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a,\ a \in \boldsymbol{R}^*$, pak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$.

Bez důkazu.

Poznámka

1. *Rovnost* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a,\ a \in \boldsymbol{R}^*$ *platí i pro jednostranné limity.*

2. *Z věty 3.5.1 vyplývá, že postup lze opakovat. Pak platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = a,\ a \in \boldsymbol{R}^*.$$

3. *Limity z věty 3.5.1 budeme symbolicky označovat*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

4. *Věta 3.5.1 se nazývá L'Hospitalovo pravidlo.*

Řešené úlohy

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x - \sin x}{e^x - x - 1}$.

Řešení: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x - \sin x}{e^x - x - 1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + 1 - \cos x}{e^x - 1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + \sin x}{e^x} = 2.$

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x).$

Tato limita vůbec neexistuje a nelze tedy L'Hospitalovo pravidlo použít. Platí však

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1.$$

Poznámka

Neurčité výrazy 0.∞, ∞ - ∞, 0^0, ∞^0, 0^∞, 0^∞ *a* 1^∞ *musíme upravit na tvar* $\dfrac{0}{0}$ *nebo* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Řešené úlohy

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} x.\sin\dfrac{1}{x}$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=\infty.0=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{x}.(-\frac{1}{x^2})}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{x}=1.$

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(1+x)\ln(1+x)+x} = \frac{0}{0} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+1} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)+2} = -\frac{1}{2}.$$

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 0^0 = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^a,$

$$a = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

? Kontrolní otázky ?

1. Při splnění předpokladů L´Hospitalova pravidla platí rovnost:

   a) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = a, \quad a \in \boldsymbol{R}^*,$

   b) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a, \quad a \in \boldsymbol{R}^*,$

   c) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} = a, \quad a \in \boldsymbol{R}^*.$

2. Pokud při použití L´Hospitalova pravidla limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, pak $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

   a) neexistuje,

   b) nelze tímto výpočtem rozhodnout,

   c) existuje.

3. L´Hospitalovo pravidlo nemůžeme použít na výpočet limit vedoucích k výrazům

a) $\frac{1}{\infty}, 0\cdot 0,$

b) $1^{\infty}, \infty-\infty,$

c) $0\cdot\infty, \infty^{0}.$

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. b); 3. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\mathrm{tg}^2\, x}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x2^x}{2^x-1}$.

2. Pomocí L’Hospitalova pravidla vypočtěte cvičení 2.4.1 a 2.4.2.

3. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x^n-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x+x^2-2}{x^2\sin^2 x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{arctg}\, x}{x^3}$, f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

4. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, 3x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\mathrm{cotg}\, x}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}$.

5. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 e^{-x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\mathrm{cotg}(\pi x)$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)\,\mathrm{cotg}\, x$.

6. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x})$, b) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{2\ln x}-\frac{1}{x^2-1})$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$,

d) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$, f) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-e^{2x})\operatorname{cotg} x$.

7. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) 1; b) $\frac{1}{6}$; c) 2; d) 2; e) 2; f) $\frac{1}{\ln 2}$. **3.** a) $\frac{n-1}{n}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\ln\frac{a}{b}$; d) $\frac{a^2}{b^2}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. **4.** a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) 3; e) 0; f) ∞. **5.** a) 0; b) 0; c) $\frac{1}{\pi}$; d) 2; e) ∞; f) 0.

6. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) -2. **7.** a) 1; b) 0; c) 1; d) 1; e) e^2; f) e^{-1}; g) e^m; h) e^{-2}; i) 1.

Kontrolní test

1. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}$.

   a) $-\frac{1}{8}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}$.

2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+x+1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$.

   a) -2, b) 2, c) $\frac{4}{\pi}$.

3. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$.
   a) 2, b) 0, c) 1.
4. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.
   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$, c) 3.
5. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$.
   a) 1, b) 0, c) $\dfrac{1}{2}$.
6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^{3}}$.
   a) 0, b) $\dfrac{1}{3}$, c) 2.
7. $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)}$.
   a) 1, b) 0, c) -1.
8. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} (e^{x}-1)\operatorname{cotg} x$.
   a) 0, b) ∞, c) 1.
9. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.
   a) ∞, b) $-\infty$, c) $-\dfrac{1}{2}$.
10. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^{+}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.
   a) e, b) 1, c) 0.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. a); 5. b); 6. b); 7. a); 8. c); 9. c); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 7 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.5. znovu.

3.6. Diferenciál funkce a Taylorův polynom

Výklad

Definice 3.6.1.

Nechť je x_0 vnitřním bodem definičního oboru D_f funkce $f(x)$. Funkce proměnné $dx = x - x_0$ definovaná vztahem $df(x_0) = f'(x_0)dx$ se nazývá **diferenciál funkce** $f(x)$ v bodě x_0, jestliže platí

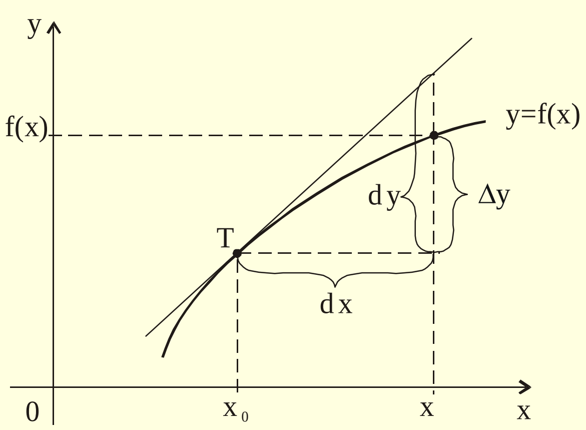
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Věta 3.6.1. Nechť x_0 je vnitřním bodem D_f funkce $f(x)$ a nechť existuje $f'(x_0) \in \boldsymbol{R}$, pak existuje diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Důkaz viz [3] str. 103.

Poznámky

1. Označme $dx = x - x_0$, $dy = y - f(x_0)$. Po dosazení do rovnice diferenciálu dostaneme $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, což je rovnice tečny v bodě x_0 k funkci $f(x)$. Je zřejmé, že pro dostatečně malá dx můžeme přírůstek funkce $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ nahradit diferenciálem, tj. $\Delta y \doteq dy$, viz obr. 45.



Obr. 45

2. *Jestliže rovnici diferenciálu zapíšeme ve tvaru* $df(x) = f'(x)dx = dy$ *pro* $x \in D_f$, *v nichž* $f'(x)$ *existuje, pak můžeme derivaci* $f'(x)$ *vyjádřit ve tvaru* $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

3. *Diferenciál* $df(x)$ *můžeme nazvat diferenciálem 1. řádu. Diferenciál k-tého řádu pak budeme definovat vztahem* $d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x)), k \in \boldsymbol{N}$. *Dostaneme* $d^2 y = f''(x)dx^2$, $d^3 y = f'''(x)dx^3$, *obecně* $d^k y = f^{(k)}(x)dx^k$.

4. *Můžeme psát* $f^{(k)}(x) = \dfrac{d^k y}{dx^k}$, *pro* $k \in \boldsymbol{N}$.

Výklad

Definice 3.6.2.

Nechť má funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in D_f$ derivaci n-tého řádu $f^{(n)}(x_0)$. Polynom stupně nejvýše n, pro který platí $t_n(x_0) = f(x_0)$, $t_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots, t_n^{(n)}(x_0) = f_{(x_0)}^{(n)}$ se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Poznámka

Funkční hodnoty polynomu $t_n(x)$ *se v okolí bodu* x_0 *přibližují k funkčním hodnotám funkce* $f(x)$.

Řešené úlohy

Příklad: Ukažte, že polynom $t_n(x) = x^2 - \dfrac{1}{6}x^4$ je Taylorův polynom stupně 4 funkce $f(x) = x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

$f(x) = x\sin x,\ f(0) = 0;$ $\quad t_4(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4,\ t_4(0) = 0,$

$f'(x) = \sin x + x\cos x,\ f'(0) = 0;$ $\quad t_4'(x) = 2x - \frac{2}{3}x^3,\ t_4'(0) = 0,$

$f''(x) = 2\cos x - x\sin x,\ f''(0) = 2;$ $\quad t_4''(x) = 2 - 2x^2,\ t_4''(0) = 2,$

$f'''(x) = -3\sin x - x\cos x,\ \ f'''(0) = 0;$ $\quad t_4'''(x) = -4x,\ t_4'''(0) = 0,$

$f^{(4)}(x) = -4\cos x + x\sin x,\ f^{(4)}(0) = -4;$ $\quad t_4^{(4)}(x) = -4,\ t_4^{(4)}(0) = -4.$

Výklad

Věta 3.6.2. Nechť existuje $f^{(n)}(x_0)$ pak Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ v bodě x_0 má tvar

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) +$$

$$+\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

(1)

Důkaz naznačíme. Dosadíme-li do vztahu (1) $x = x_0$, dostaneme $t_n(x_0) = f(x_0)$. Nyní budeme vztah (1) derivovat:

$$t_n'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}.2.(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x - x_0)^{n-1} =$$

$$= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1},$$

$$t_n''(x) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}.3.2.(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(n-1)(x - x_0)^{n-2} =$$

$$= f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}.$$

Zřejmě dostaneme

$$t^{(i)}(x) = f^{(i)}(x_0) + \frac{f^{(i+1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-i} \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Po dosazení $x = x_0$ do předchozího vztahu dostáváme $t^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Poznámky

1. *Taylorovým polynomem se budete zabývat v předmětu Numerické metody.*

2. *Taylorův polynom můžeme napsat pomocí diferenciálů ve tvaru*

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{1!} df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0).$$

Kontrolní otázky

1. Pro body x blízké bodu x_0 se diferenciál funkce $df(x)$ rovná přírůstku funkce $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.
   a) ano,
   b) ne,
   c) někdy.
2. Existuje-li $f'(x)$, pak ji můžeme vyjádřit ve tvaru:
   a) $f'(x) = \dfrac{dx}{dy}$,
   b) $f'(x) = dy \cdot dx$,
   c) $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.
3. Diferenciál 2. řádu funkce $y = f(x)$ má tvar:
   a) $d^2 y = f''(x) dx^2$,
   b) $d^2 y = f''(x) dx$,
   c) $d^2 y = [f'(x) dx]^2$.

4. Nechť v bodě x_0 má funkce $f(x)$ derivaci n-tého řádu $f^{(n)}(x_0)$. Pro funkci $f(x)$ Taylorův polynom stupně n $t_n(x)$ funkce $f(x)$ platí:

   a) $f(x) = t_n(x), \ f'(x) = t_n'(x), \dots, f^{(n)}(x) = t_n^{(n)}(x),$

   b) $f(x_0) = t_n(x_0), \ f'(x_0) = t_n'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = t_n^{(n)}(x_0),$

   c) $f(x_0) = t_n(x_0), \ f'(x_0) \neq t_n'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) \neq t_n^{(n)}(x_0).$

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. c); 3. a); 4. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte přírůstek funkce Δy a diferenciál dy v bodě x_0 pro přírůstek Δx, je-li

a) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}01$, b) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}4$,

c) $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$, d) $y = 2^x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}4$.

2. Vypočtěte diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x pro přírůstek dx:

a) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, b) $y = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$, c) $y = \operatorname{tg}^2 x$,

d) $y = \dfrac{1}{1-t^2}$, e) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$, f) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

3. Vypočtěte diferenciály uvedených řádů funkce $y = f(x)$ v bodě x pro přírůstek dx:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $d^2y = ?$, b) $y = (x+1)^3(x-1)^2$, $d^2y = ?$,

c) $y = \sin^2 x$, $d^3y = ?$,d) $y = x^3 \ln\dfrac{x}{2}$, $d^4y = ?$,

e) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $d^2y = ?$, f) $y = x\cos(2x)$, $d^3y = ?$.

4. Polynom $p(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ rozložte na mocniny dvojčlenu $(x+1)$.

5. Polynom $p(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ rozložte na mocniny dvojčlenu $(x-4)$.

6. Pro danou funkci sestavte Taylorův polynom n-tého stupně v okolí bodu x_0:

a) $y=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=2$, $n=3$, b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$, $n=3$,

c) $y=\ln x$, $x_0=4$, $n=4$, d) $y=\sqrt{x}$, $x_0=4$, $n=3$.

7. Pomocí Taylorova polynomu sestaveného ve cvičení 6d) vypočtěte přibližnou hodnotu

a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt{4{,}5}$, c) $\sqrt{3{,}9}$.

Srovnáním s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulátoru určete chybu aproximace ε.

8. Pro danou funkci sestavte Taylorův polynom n-tého stupně v okolí bodu $x_0=0$ (Maclaurinův polynom):

a) $y=\operatorname{tg} x$, $n=5$, b) $y=\arcsin x$, $n=3$, c) $y=\ln\cos x$, $n=6$.

9. Pomocí Taylorova polynomu sestaveného ve cvičení 8b) vypočtěte přibližnou hodnotu

a) $\arcsin 1$, b) $\arcsin 0{,}5$, c) $\arcsin 0{,}2$.

Srovnáním s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulátoru určete chybu aproximace ε.

10. Pro danou funkci sestavte Taylorův polynom n-tého stupně v okolí bodu $x_0=0$ (Maclaurinův polynom):

a) $y=e^x$, b) $y=\sin x$, c) $y=\cos x$,

d) $y=\ln(1+x)$, e) $y=(1+x)^k$, f) $y=\operatorname{arctg} x$.

11. Ukažte, že pro výpočet hodnoty funkce e^x pro $0<x\le\dfrac{1}{2}$ lze použít přibližný vzorec

$e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$. Pomocí tohoto vzorce vypočtěte $\sqrt{e}$ a srovnáním s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulátoru určete chybu výpočtu.

12. Ukažte, že pro výpočet hodnoty funkce $\sin x$ pro úhly menší než 28° lze použít přibližný vzorec

$\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$. Pomocí tohoto vzorce vypočtěte $\sin 28^\circ$ a srovnáním s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulátoru určete chybu výpočtu. (Pozor - hodnotu x je nutno dosadit v obloukové míře!)

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\Delta y = 0,0401, \quad dy = 0,04$; b) $\Delta y = 0,0976, \quad dy = 0,1$; c) $\Delta y = 0,0907, \quad dy = 0,1$;

d) $\Delta y = 1,28, \quad dy = 1,11$. **2.** a) $-\dfrac{dx}{4x\sqrt{x}}$ b) $-\dfrac{6x^2dx}{(x^3-1)^2}$; c) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,xdx}{\cos^2 x}$; d) $\dfrac{2tdt}{(1-t^2)^2}$;

e) $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$; f) $\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **3.** a) $-\dfrac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}$; b) $4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$; c) $-4\sin 2xdx^3$;

d) $\dfrac{6}{x}dx^4$; e) $-\dfrac{xdx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$; f) $(8x\sin 2x - 12\cos 2x)dx^3$.

4. $p(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$;

5. $p(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$;

6. a) $t_3(x) = 2 - (x-2) - (x-2)^2 - (x-2)^3$; b) $t_3(x) = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{3}{8}(x-1)^2 - \dfrac{15}{48}(x-1)^3$;

c) $t_4(x) = \ln 4 + \dfrac{1}{4}(x-4) - \dfrac{1}{32}(x-4)^2 + \dfrac{1}{192}(x-4)^3 - \dfrac{1}{1024}(x-4)^4$;

d) $t_3(x) = 2 + \dfrac{(x-4)}{4} - \dfrac{(x-4)^2}{64} + \dfrac{(x-4)^3}{512}$. **7.** a) $t_3(5) = 2,36; \quad \varepsilon = 0,12$;

b) $t_3(4,5) = 2,20; \quad \varepsilon = 0,08$; c) $t_3(3,9) = 2,02; \quad \varepsilon = 0,05$. **8.** a) $t_5(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5$;

b) $t_3(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3$; c) $t_6(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6$. **9.** a) $t_3(1) = 1,2; \quad \varepsilon = 0,4$;

b) $t_3(0,5) = 0,521; \quad \varepsilon = 0,003$; c) $t_3(0,2) = 0,20133; \quad \varepsilon = 0,00003$.

10. a) $t_n(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!}$; b) $t_n(x) = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

c) $t_n(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$; d) $t_n(x) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$;

e) $t_n(x) = 1 + \binom{k}{1}x + \ldots + \binom{k}{n}x^n$; f) $t_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

11. $\sqrt{e} \approx 1,646;\quad \varepsilon = 0,003$. **12.** $\sin 28^\circ \approx 0,469472;\quad \varepsilon = 0,000001$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte přírůstek funkce Δy a diferenciál dy v bodě $x_0 = 2$ pro přírůstek $\Delta x = 0,1$ u funkce $y = x^3 + 2x$.

   a) $\Delta y = 1,4,\ dy = 1,461$, b) $\Delta y = 1,461,\ dy = 1,4$, c) $\Delta y = 1,21,\ dy = 1,2$.

2. Vypočtěte diferenciál funkce $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ v bodě x pro přírůstek dx.

   a) $\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$, b) $\frac{(1-x)dx}{2\sqrt{2}}$, c) $\frac{dx}{(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$.

3. Vypočtěte diferenciál 2. řádu funkce $y = \cos^2 2x$ v bodě x pro přírůstek dx.

   a) $-8\sin 2x dx^2$, b) $-4\cos 2x dx^2$, c) $-8\cos 4x dx^2$.

4. Pro funkci $f(x) = e^{2x-x^2}$ sestavte Taylorův polynom 2. stupně v okolí bodu $x_0 = 0$ (Maclaurinův polynom).

   a) $1 + x + x^2$, b) $1 + 2x + x^2$, c) $1 + 4x + x^2$.

5. Polynom $p(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ rozložte na mocniny dvojčlenu $(x-2)$.

   a) $-5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$,

   b) $-5 + 10(x-2) + 42(x-2)^2 + 48(x-2)^3 + 24(x-2)^4$,

   c) $-5 + 10(x-2) - 42(x-2)^2 - 8(x-2)^3 - (x-2)^4$.

6. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ sestavte Taylorův polynom 3. stupně v okolí bodu $x_0 = 2$.

   a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{8}(x-2)^3$,

   b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$,

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{3}{8}(x-2)^3.$

7. Pro funkci $f(x)=xe^{-x}$ sestavte Maclaurinův polynom (tj. $x_0=0$) 3. stupně.

a) $x-2x^2+3x^3,$ b) $x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^4,$ c) $x-x^2+\frac{1}{2}x^3.$

Výsledky testu

1.b); 2. a); 3. c); 4. b); 5. a); 6. b); 7. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.6. znovu.

4. PRŮBĚH FUNKCE

Průvodce studiem

V matematice, ale i ve fyzice a technických oborech se často vyskytne požadavek na sestrojení grafu funkce $y = f(x)$. K nakreslení grafu funkce lze dnes většinou použít vhodný matematický software. Může se však stát, že při zadání funkčního předpisu uděláme chybu, že zvolíme nevhodný interval pro zobrazení grafu, nebo že si zvolený software s vykreslením grafu dokonale neporadí. pro tyto případy je nutné naučit se hledat význačné vlastnosti funkce. V této kapitole budou tyto význačné vlastnosti uvedeny a v závěru kapitoly je shrneme a naučíme se graf funkce $y = f(x)$ načrtnout.

4.1. Extrémy funkce

Předpokládané znalosti

V této a dalších částech budeme hovořit o monotónnosti funkcí, viz definice 1.4.2 a budeme používat větu 3.2.6.

Výklad

Definice 4.1.1.

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D_f$

absolutní maximum, jestliže $\forall x \in D_f : f(x) \le f(x_0)$,
absolutní minimum, jestliže $\forall x \in D_f : f(x) \ge f(x_0)$,
lokální maximum, jestliže $\exists O(x_0) : x \in O(x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$,
lokální minimum, jestliže $\exists O(x_0) : x \in O(x_0) \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)$,
ostré lokální maximum, jestliže $\exists O(x_0) : x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < f(x_0)$,
ostré lokální minimum, jestliže $\exists O(x_0) : x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.

Jestliže nastane některá z předchozích možností říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 extrém (absolutní, lokální, ostrý lokální).

Řešené úlohy

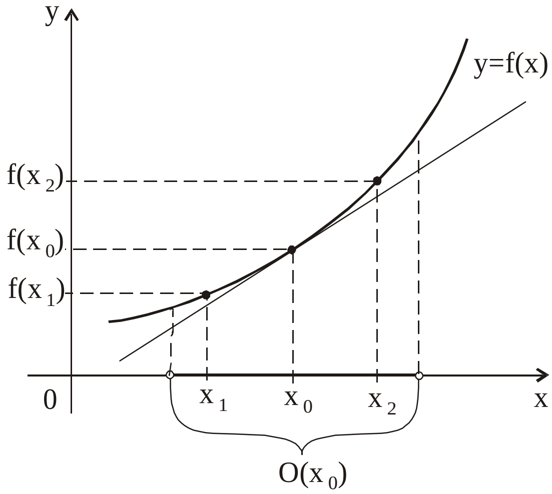
Příklad Funkce $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ má v bodě $x_0=0$ absolutní maximum. Nerovnice $\dfrac{2}{1+x^2}\le y(0)=2$ platí pro všechna $x\in\boldsymbol{R}$. Po úpravě totiž dostaneme $2\le 2(1+x^2)$, dále pak $0\le x^2$. Předchozí úvaha platí pro každé $O(x_0)$ a tedy funkce má v bodě $x_0=0$ také lokální maximum, které je ostré, protože $0<x^2$ pro všechna $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Příklad Funkce $y=x^3+x^2$ má v bodě $x_0=0$ ostré lokální minimum, protože nerovnice $x^3+x^2>y(0)=0$ je splněna v okolí $(-1{,}1)$ bodu 0 s výjimkou bodu 0, neboť po úpravě dostaneme $x^2(x+1)>0.$ Toto lokální minimum není absolutní, protože například $y(-2)=-4<y(0).$

Výklad

Věta 4.1.1. Nechť je x_0 vnitřní bod D_f a nechť existuje $f'(x_0)\ne 0$. Pak funkce $f(x)$ nemá v bodě x_0 lokální ani absolutní extrém.

Bez důkazu.



Obr. 46

Všimněme si na obr. 46, že tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 není pro $f'(x_0) \neq 0$ rovnoběžná s osou x. Existuje tedy $O(x_0)$ takové, že platí $f(x_1) > f(x_0)$, $f(x_2) < f(x_0)$ pro vhodně zvolené body $x_1, x_2 \in D_f \cap O(x_0)$.

Poznámka

Z věty 4.1.1 vyplývá, že lokální i absolutní extrémy mohou existovat pouze v bodech $x_0 \in D_f$, *v nichž* $f'(x_0) = 0$, *nebo v nichž* $f'(x_0)$ *neexistuje.* ***Body*** x_0, *v nichž* $f'(x_0) = 0$ *budeme nazývat* ***stacionární****. Mezi body, v nichž* $f'(x_0)$ *neexistuje, patří také krajní body definičního oboru.*

Výklad

Věta 4.1.2. Spojitá funkce, jejíž derivace mění v bodě x_0 znaménko, má v bodě x_0 ostrý lokální extrém.

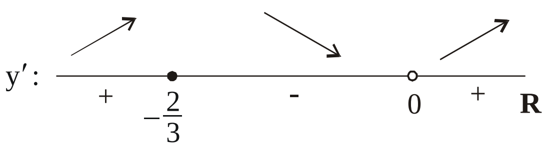
Bez důkazu. Uvědomíme si, že podle věty 3.2.6 je pro $f'(x) > 0$ funkce $f(x)$ rostoucí a pro $f'(x) < 0$ je funkce $f(x)$ klesající. Podle věty 4.1.1 může derivace spojité funkce $f(x)$ změnit znaménko pouze v bodech $x_0 \in D_f$, v nichž $f'(x_0) = 0$, nebo v nichž $f'(x_0)$ neexistuje.

Řešené úlohy

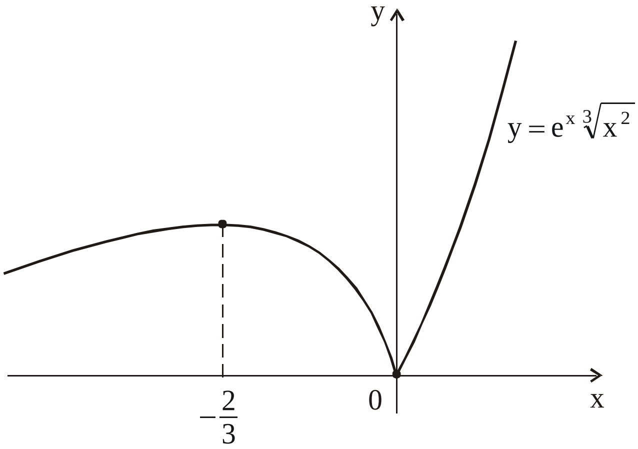
Příklad Určete lokální extrémy funkce $y = e^x \sqrt[3]{x^2}$.

Řešení: Funkce je spojitá na množině reálných čísel **R**. Zjistíme nulové body a body nespojitosti funkce y' a podle věty 4.1.2 rozhodneme, zda v nich bude lokální extrém:

$y' = e^x x^{\frac{2}{3}} + e^x . \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{(3x+2)e^x}{3\sqrt[3]{x}}$. Bodem nespojitosti funkce y' je bod $x_1 = 0$. Její nulový bod získáme řešením rovnice $(3x+2)e^x = 0$, tj. $3x + 2 = 0$ a odtud $x_2 = -\frac{2}{3}$. Tyto body rozdělí **R** na tři intervaly, viz obr. 47.



Obr. 47



Obr. 48

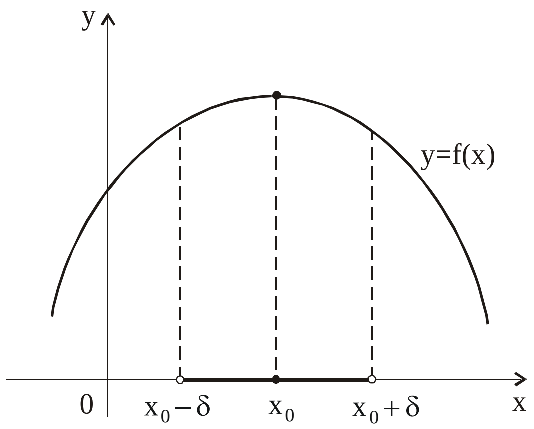
Využijeme poznatků o řešení nerovnic z kapitoly 2.4 a dostaneme:

$y'(-1) > 0$, $y'(-\frac{1}{2}) < 0$, $y'(1) > 0$. Derivace funkce y mění v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{2}{3}$ znaménko, tj. v těchto bodech existují lokální extrémy. Bod $x_2 = -\frac{2}{3}$ je stacionárním bodem. Monotónnost funkce y se v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{2}{3}$ mění, viz obr. 47. Graf funkce y je na obr. 48.

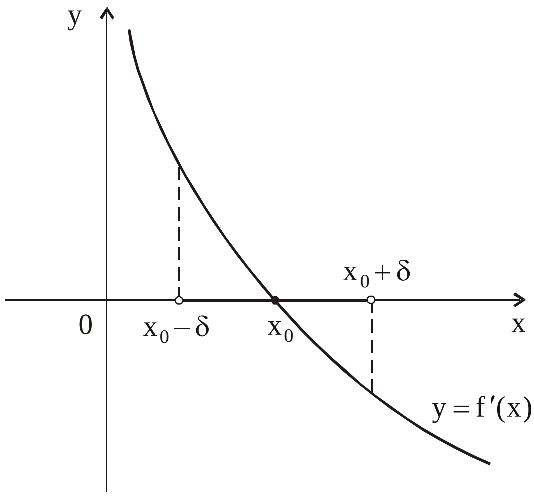
Výklad

Věta 4.1.3. Předpokládejme, že $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, resp. $f''(x_0) > 0$. Pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum.

Bez důkazu. Pro maximum v bodě x_0 platí, že $f'(x) > 0$, pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ a vhodné $\delta > 0$, viz obr. 49, 50. Funkce $f'(x)$ je zřejmě v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ klesající a tedy $f''(x_0) < 0$.



Obr. 49



Obr. 50

Podobnou úvahu můžeme provést pro minimum v bodě x_0 a dostaneme $f''(x_0) > 0$.

Řešené úlohy

Příklad Určete extrémy funkce $y = e^x \sqrt[3]{x^2}$, jejíž definiční obor je $D_f = \langle -1, \frac{1}{2} \rangle$.

Řešení: Z řešení předchozího příkladu víme, že daná funkce má v bodě $x_2 = -\frac{2}{3}$ ostré lokální maximum a v bodě $x_1 = 0$ má ostré lokální minimum.

Z poznámky za větou 4.1.1 vyplývá, že zbývá určit funkční hodnoty funkce y v krajních bodech definičního oboru, tj. v bodech $x_3 = -1$ a $x_4 = \frac{1}{2}$.

Dostaneme:

$y(-1) = e^{-1} \doteq 0{,}36788,$

$y(-\frac{2}{3}) = e^{-\frac{2}{3}}.\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \doteq 0{,}39181,$

$y(0) = e^0.0 = 0,$

$y(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \doteq 1{,}03863.$

Z předchozích vztahů vyplývá, že funkce má v lokálním minimu $x_1 = 0$ absolutní minimum a v krajním bodě definičního oboru $x_4 = \dfrac{1}{2}$ má absolutní maximum.

Výklad

Bez důkazu předchozí větu zobecníme.

Věta 4.1.4. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitou n-tou derivaci pro $n \geq 3$ a nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Je-li n číslo sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, resp. $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum. Je-li n liché číslo, pak v x_0 extrém neexistuje.

Řešené úlohy

Příklad Určete lokální extrémy funkce $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{5}x^5 + \dfrac{1}{6}x^6$.

Řešení:

Funkce y je polynom, tj. její definiční obor a definiční obor jejích derivací je $\boldsymbol{R}$.

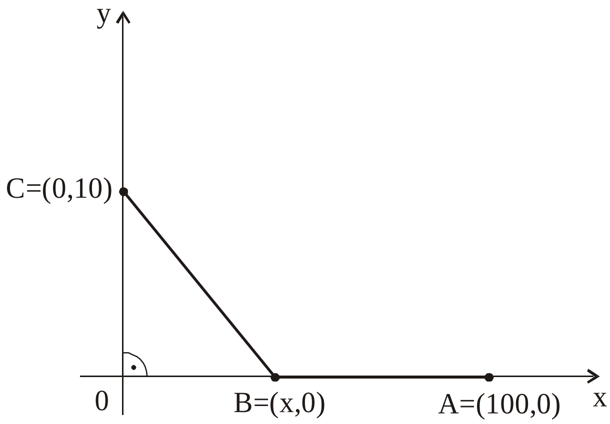
1. $y' = x^3 - 2x^4 + x^5 = x^3(1-x)^2 \Rightarrow$ stacionární body jsou $x_1 = 0,\ x_2 = 1$.
2. $y'' = 3x^2 - 8x^3 + 5x^4,\ y''(0) = 0,\ y''(1) = 0 \Rightarrow$ budeme dále derivovat.
3. $y''' = 6x - 24x^2 + 20x^3,\ y'''(0) = 0,\ y'''(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ v $x_2 = 1$ neexistuje extrém.
4. $y^{(4)} = 6 - 48x + 60x^2,\ y^{(4)}(0) = 6 > 0 \Rightarrow$ v $x_1 = 0$ je ostré lokální minimum.

Poznámka

Většina praktických úloh vede na hledání absolutního maxima nebo minima funkce, která úlohu popisuje. Tento extrém může, ale nemusí být lokální.

Řešené úlohy

Příklad Z bodu *O* do bodu *A* vede přímá železnice, viz obr. 51. Navrhněte umístění překladového nádraží v bodu *B* na této trati tak, aby při silniční dopravě z bodu *C* do bodu *B* po přímé silnici a následné dopravě z bodu *B* do bodu *A* po železnici byla cena za přepravu jednotky zboží nejnižší. Cena za dopravu jednotky zboží po železnici je 0,2 Kč/km a po silnici 0,5 Kč/km. Cena překládky za jednotku je 1Kč. Vzdálenost $|OA|$ je 100 km, vzdálenost $|OC|$ je 10 km.



Obr. 51

Řešení: Označme souřadnice bodu $B=(x,0),$ kde x je hledaná vzdálenost bodu B od bodu O. Délka cesty po železnici pak bude $(100-x)$ km a délka přepravy po silnici

$\sqrt{x^2+10^2}$ km. Cena přepravy jednotky zboží je pak dána funkcí

$y=(100-x).0,2+\sqrt{x^2+100}.0,5+1,\ \ D_y=<0,100>.$

Určíme absolutní minimum této funkce:

$$y' = -0,2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+100}}.0,5.$$

Funkce y' je spojitá, určíme tedy její stacionární body:

$$-0,2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+100}}.0,5 = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+100}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = 2\sqrt{x^2+100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 4x^2 + 400 \Rightarrow 21x^2 = 400 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{20}{\sqrt{21}}.$$

Do D_y patří pouze $x_1 = \frac{20}{\sqrt{21}}$. Přesvědčíme se, že v bodě x_1 se jedná o minimum funkce:

$$y'' = \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+100}} - \frac{1}{5}\right)' = \frac{2\sqrt{x^2+100} - x.\frac{2x}{\sqrt{x^2+100}}}{4(x^2+100)} = \frac{2(x^2+100)-2x^2}{4\sqrt{(x^2+100)^3}} = \frac{50}{\sqrt{(x^2+100)^3}}.$$

Je vidět, že $y'' > 0$ pro všechna $x \in D_y$ a tedy i pro x_1, tj. v bodě $x_1 = \frac{20}{\sqrt{21}}$ jde o minimum funkce y. Nyní zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech D_y a porovnáme je s funkční hodnotou v bodě x_1:

$$y(0) = 26, \qquad y(100) \doteq 51,25, \qquad y\left(\frac{20}{\sqrt{21}}\right) \doteq 25,58.$$

Nejvýhodnější je postavit nádraží v bodě B, který je od bodu O vzdálen $\frac{20}{\sqrt{21}}$ km.

Kontrolní otázky

1. Při vyšetřování lokálního extrému funkce $f(x)$ v bodě x_0 sledujeme funkční hodnoty této funkce
   a) v celém jejím definičním oboru,
   b) v okolí bodu x_0,
   c) pouze v bodě x_0.
2. Stacionárním bodem funkce $f(x)$ nazýváme bod x_0, ve kterém
   a) $f'(x_0) = 0$,

b) $f'(x_0) \neq 0$,

c) $f'(x_0)$ neexistuje.

3. Spojitá funkce $f(x)$ má v bodě x_0 ostrý lokální extrém. Pak derivace této funkce $f'(x)$ v okolí bodu x_0

   a) nemění znaménko,

   b) rovná se nule,

   c) mění znaménko.

4. Pro funkci $f(x)$ v bodě x_0 platí, že $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$. Pak v bodě x_0

   a) je ostré lokální minimum,

   b) je ostré lokální maximum,

   c) není tam lokální extrém.

5. Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 stacionární bod, pak v bodě x_0 lokální extrém

   a) určitě nastane,

   b) nenastane,

   c) může nastat.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. c); 4. a), 5. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí a na kterých je klesající:

a) $y = x^3 - x$, b) $y = x^5 - 15x^3 + 3$, c) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$,

d) $y = |x+1| + |x-1|$, e) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{1-x}$, f) $y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.

2. Najděte intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí a na kterých je klesající:

a) $y = x - e^x$, b) $y = x^2 e^{-x}$, c) $y = \dfrac{e^x}{x}$,

d) $y=\ln\sqrt{1+x^2}$, e) $y=2x^2-\ln x$, f) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,

g) $y=x+\cos x$, h) $y=\sin x+\cos x$, i) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

3. Ukažte, že funkce $y=\operatorname{arctg} x-x$ je pro každé reálné x klesající.

4. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y=x^2(x-6)$, b) $y=x^3-12x-6$, c) $y=4x^3-18x^2+27x-7$,

d) $y=-x^4-2x^2+3$, e) $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, f) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

5. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y=x+e^{-x}$, b) $y=xe^{-x^2}$, c) $y=x^2e^{-x^2}$,

d) $y=\dfrac{x}{e^x}$, e) $y=\dfrac{e^x}{x}$, f) $y=\sqrt[3]{x^2}e^{-x}$.

6. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y=x\ln x$, b) $y=\ln\dfrac{x+1}{1-x}$, c) $y=x^2\ln x$,

d) $y=x\ln x^2$, e) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, f) $y=\ln\sqrt{1+x^2}-\operatorname{arctg} x$.

7. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arctg} x$, b) $y=\left|16-x^2\right|$, c) $y=\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}$,

d) $y=4x-\operatorname{tg} x$, e) $y=e^{-x}\sin x$, f) $y=x+\operatorname{arccotg}(2x)$.

8. Určete absolutní extrémy funkcí na daném intervalu:

a) $y=x^2-6x+10,\quad x\in\langle -1,5\rangle$, b) $y=x^2\ln x,\quad x\in\left\langle \dfrac{1}{e},e\right\rangle$,

c) $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x,\quad x\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, d) $y=x^x,\quad x\in(0,\infty)$.

9. Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl největší.

10. Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl nejmenší.

11. Jaké rozměry musí mít pravoúhlý rovnoběžník daného obvodu s , aby jeho úhlopříčka byla nejmenší?

12. Dokažte, že ze všech pravoúhlých rovnoběžníků daného

a) obsahu má čtverec nejmenší obvod,

b) obvodu má čtverec největší obsah.

13. Z válcového kmene o průměru *d* se má vytesat trám obdélníkového průřezu tak, aby měl maximální nosnost. Z nauky o pevnosti je známo, že nosnost *y* trámu je dána vztahem $y = kab^2$, kde *k*>0 je součinitel materiálu, *a* je šířka a *b* výška trámu.

14. Ze čtvercového plechu o straně *a* se má vyrobit otevřená krabice tak, že v rozích se odstřihnou čtverce a zbytek se zahne do krabice. Jak velká musí být strana odstřižených čtverců, aby byl objem krabice maximální?

15. Cestovní kancelář pořádá zájezd. Je-li počet účastníků zájezdu 100 a méně, je cena pro jednoho účastníka 600 Kč. Při větším počtu než 100 se cena sníží za každého účastníka navíc o 2,50 Kč. Při kolika účastnících bude obrat cestovní kanceláře největší?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) rostoucí: $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$, klesající: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; b) rostoucí: $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$, klesající: $(-3,3)$; c) rostoucí: $(-1,1)$, klesající: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$; d) rostoucí: $(1,\infty)$, klesající: $(-\infty,-1)$, v $\langle -1,1\rangle$ je konstantní, $y=2$; e) rostoucí: $\left(\frac{2}{3},1\right)$ a $(1,2)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ a $(2,\infty)$; f) rostoucí: $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ a $\left(\sqrt{3},\infty\right)$, klesající: $\left(-\sqrt{3},-1\right)$ a $(-1,1)$ a $\left(1,\sqrt{3}\right)$. **2.** a) rostoucí: $(-\infty,0)$, klesající: $(0,\infty)$; b) rostoucí: $(0,2)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $(2,\infty)$; c) rostoucí: $(1,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $(0,1)$; d) rostoucí: $(0,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$; e) rostoucí: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, klesající: $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; f) rostoucí: $(-\infty,\infty)$; g) rostoucí: $(-\infty,\infty)$; h) rostoucí: $\left(-\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, klesající: $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right), k\in Z$; i) rostoucí: $(0,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$. **4.** a) $y_{\max}=0$ pro $x=0$, $y_{\min}=-32$ pro $x=4$; b) $y_{\max}=10$ pro $x=-2$, $y_{\min}=-22$ pro $x=2$; c) nemá lokální extrémy; d) $y_{\max}=3$ pro $x=0$; e) nemá lokální extrémy; f) $y_{\min}=2$ pro $x=-1$,

$y_{\min}=2$ pro $x=1$. **5.** a) $y_{\min}=1$ pro $x=0$; b) $y_{\min}=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ pro $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$y_{\max}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ pro $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; c) $y_{\max}=\dfrac{1}{e}$ pro $x=-1$, $y_{\max}=\dfrac{1}{e}$ pro $x=1$,

$y_{\min}=0$ pro $x=0$; d) $y_{\max}=\dfrac{1}{e}$ pro $x=1$; e) $y_{\max}=e$ pro $x=1$;

f) $y_{\max}=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{3\sqrt[3]{e^2}}$ pro $x=\dfrac{2}{3}$, $y_{\min}=0$ pro $x=0$. **6.** a) $y_{\min}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ pro $x=\dfrac{1}{e}$;

b) nemá lokální extrémy; c) $y_{\min}=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ pro $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; d) $y_{\max}=\dfrac{2}{e}$ pro $x=-\dfrac{1}{e}$,

$y_{\min}=-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ pro $x=\dfrac{1}{e}$; e) $y_{\max}=\dfrac{1}{e}$ pro $x=e$; f) $y_{\min}=\dfrac{1}{2}\ln 2\text{-}\dfrac{\pi}{4}$ pro $x=1$.

7. a) nemá lokální extrémy; b) $y_{\max}=16$ pro $x=0$, $y_{\min}=0$ pro $x=-4$,

$y_{\min}=0$ pro $x=4$; c) $y_{\max}=\dfrac{1}{2}$ pro $x=2$, $y_{\min}=0$ pro $x=1$;

d) $y_{\max}=\dfrac{4\pi}{3}+4k\pi-\sqrt{3}$ pro $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$,

$y_{\min}=-\dfrac{4\pi}{3}+4k\pi+\sqrt{3}$ pro $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$;

e) $y_{\max}=e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pro $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$,

$y_{\min}=-e^{-(\frac{5\pi}{4}+2k\pi)}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pro $x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$; f) $y_{\max}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$ pro $x=-\dfrac{1}{2}$,

$y_{\min}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$ pro $x=\dfrac{1}{2}$. **8.** a) $y_{\max}=17$ pro $x=-1$, $y_{\min}=1$ pro $x=3$;

b) $y_{\max}=e^2$ pro $x=e$, $y_{\min}=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ pro $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; c) $y_{\max}=1$ pro $x=\dfrac{\pi}{4}$, nemá

absolutní minimum; d) $y_{\min}\approx 0.6922$ pro $x=\dfrac{1}{e}$, nemá absolutní maximum.

9. $[14+14]$. **10.** $x=1$. **11.** $a=\dfrac{s}{4}$, $b=\dfrac{s}{4}$. **13.** $a=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$, $b=\dfrac{\sqrt{2}d}{\sqrt{3}}$.

14. $x=\dfrac{a}{6}$, $V_{\max}=2\left(\dfrac{a}{3}\right)^3$. **15.** $n=170$.

Kontrolní test

1. Najděte intervaly, na kterých je funkce $y = x^3 - 12x + 1$ rostoucí a na kterých je klesající.

   a) rostoucí $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$, klesající $(-2, 2)$,

   b) rostoucí $(-2, 2)$, klesající $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$,

   c) rostoucí $(-\infty, 2)$, klesající $(2, \infty)$.

2. Najděte intervaly, na kterých je funkce $y = xe^{-x}$ ryze monotónní:

   a) rostoucí $(1, \infty)$, klesající $(-\infty, 1)$,

   b) rostoucí $(-\infty, 1)$, klesající $(1, \infty)$,

   c) rostoucí $(-\infty, -1)$, klesající $(-1, \infty)$.

3. Najděte intervaly, na kterých je funkce $y = x + 2arc\operatorname{cotg} x$ ryze monotónní.

   a) rostoucí $(-1, 1)$, klesající $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$,

   b) rostoucí $(-\infty, 1)$, klesající $(1, \infty)$,

   c) rostoucí $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, klesající $(-1, 1)$.

4. Najděte všechny lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

   a) $y_{\max} = 4$ pro $x = 2$, $y_{\min} = 0$ pro $x = 0$,

   b) $y_{\max} = 0$ pro $x = 0$, $y_{\min} = 4$ pro $x = 2$,

   c) $y_{\max} = \dfrac{9}{2}$ pro $x = 3$, $y_{\min} = 0$ pro $x = 0$.

5. Najděte všechny lokální extrémy funkce $y = \sin x + \cos x$.

   a) $y_{\max} = -\sqrt{2}$ pro $x = \dfrac{5}{4}\pi$, $y_{\min} = \sqrt{2}$ pro $x = \dfrac{\pi}{4}$,

   b) $y_{\max} = 1$ pro $x = 0$, $y_{\min} = -1$ pro $x = \pi$,

   c) $y_{\max} = \sqrt{2}$ pro $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, k celé č., $y_{\min} = -\sqrt{2}$ pro $x = \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi$, k celé č.

6. Určete absolutní extrémy funkce $y = x - 2\ln x$ na intervalu $< 1, e >$.

   a) $y_{\max} = 1$ pro $x = 1$, $y_{min} = 2 - 2\ln 2$ pro $x = 2$,

   b) $y_{\max} = 1$ pro $x = 1$, $y_{min} = e - 2$ pro $x = e$,

c) $y_{\max} = 2 - 2\ln 2$ pro $x = 2$, $y_{min} = 1$ pro $x = 1$.

7. Vypočtěte rozměry obdélníku o ploše 25 cm^2 tak, aby měl nejkratší úhlopříčku.

   a) a = 5 cm, b = 5 cm; b) a = 4,75 cm, b = 5,25 cm, c) a = 4,25 cm, b = 5,9 cm.

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. c); 4. b); 5. c); 6. a); 7. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 4.1. znovu.

4.2. Konvexnost, konkávnost, inflexe

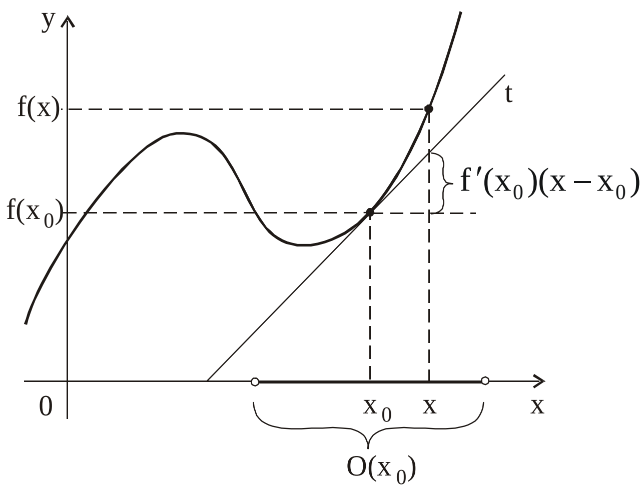
Výklad

Definice 4.2.1.

Nechť existuje $f'(x_0)$, $x_0 \in D_f$. Řekneme, že **funkce** $f(x)$ **je v bodě** x_0 **konvexní,** resp. **konkávní,** jestliže existuje $O(x_0)$ tak, že platí

$\forall x \in D_f : x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,

resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



Obr. 52

Poznámka

Z obr. 52 je vidět, že pro konvexní funkci $f(x)$ *leží hodnota* $f(x)$, $x \in O(x_0)$ *nad tečnou k* $f(x)$ *v bodě* x_0 *pro vhodné* $O(x_0)$. *Podobně pro konkávní funkci leží tyto hodnoty pod tečnou.*

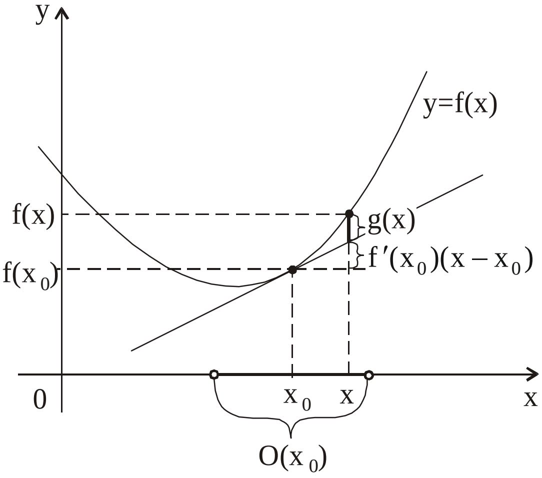
Výklad

Definice 4.2.2.

Říkáme, že **funkce** $f(x)$ je **konvexní,** resp. **konkávní v intervalu** $I \subset D_f$, jestliže v každém bodě I je konvexní, resp. konkávní.

Věta 4.2.1. Nechť $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, pak je $f(x)$ v bodě x_0 konvexní, resp. konkávní.

Důkaz: Označme $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ v $O(x_0)$, kde je $f(x)$ konvexní, resp. konkávní, viz obr. 53. Funkce $g(x) > 0$, resp. $g(x) < 0$ pro $x \in O(x_0) \setminus \{x_0\}$, jestliže je $f(x)$ v $O(x_0)$ konvexní, resp. konkávní, viz definice 4.2.1. Dostaneme $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ a $g''(x) = f''(x)$. Dosadíme $x = x_0$ a dostaneme $g'(x_0) = 0$. Pro funkci $g(x)$ je bod x_0 stacionární. Podle předpokladu věty je $g''(x_0) = f''(x_0) > 0$, resp. $g''(x_0) = f''(x_0) < 0$ a tedy funkce $g(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální minimum, resp. maximum.



Obr. 53

Poznámka

Hledání intervalů konvexnosti, resp. konkávnosti je podle věty 4.2.1 vlastně hledáním intervalů, na kterých je funkce $f'(x)$ rostoucí, resp. klesající. Podle věty 4.1.1 mohou změny *v monotónnosti funkce* $f'(x)$ *tedy nastat v bodech* $x_0 \in D_f$, *v nichž* $f''(x_0) = 0$, *nebo v nichž* $f''(x_0)$ *neexistuje.*

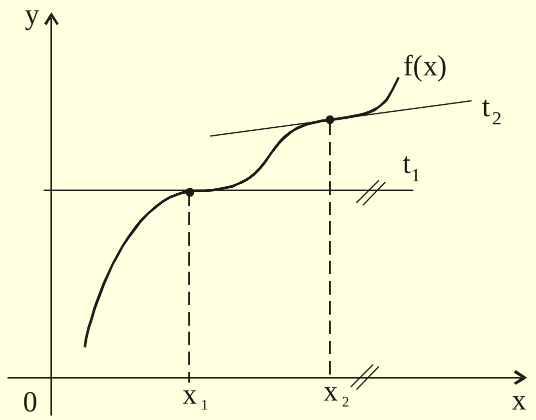
Výklad

Definice 4.2.3.

Nechť existuje $f'(x_0)$, $x_0 \in D_f$ a nechť funkce $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ mění v bodě x_0 znaménko, pak říkáme, že **funkce** $f(x)$ **má** v bodě x_0 **inflexi.**

Poznámka

Funkce f má v bodě $(x_0, f(x_0))$ *inflexi, jestliže existuje* $O(x_0)$ *tak, že pro* $x < x_0$ *leží její graf pod tečnou t a pro* $x > x_0$ *leží nad tečnou t, nebo naopak, viz obr. 54.*



Obr. 54

V obr. 54 je $f'(x_1) = 0$, *bod* x_1 *je pro funkci* $f(x)$ *stacionární a tečna* t_1 *je rovnoběžná s osou x.*

Výklad

Věta 4.2.2. Nechť je $f'(x)$ spojitá v x_0 a $f''(x)$ mění v x_0 znaménko, pak má funkce $f(x)$ v x_0 inflexi.

Důkaz: Platnost věty vyplývá přímo z věty 4.2.1 a z definic 4.2.1 a 4.2.3.

Poznámka

Body x_0, v nichž má funkce inflexi, nazýváme ***inflexní body.***

Řešené úlohy

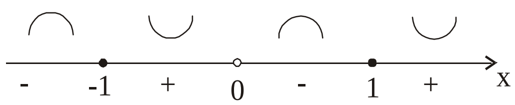
Příklad: Vyšetřete intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y = \frac{9}{88}\sqrt[3]{x^{11}} - \frac{9}{10}\sqrt[3]{x^5}$ a určete její inflexní body.

Řešení: Definiční obor $D_y = \boldsymbol{R}$, y' existuje v D_y. Pak platí

$$y' = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}, \quad D_{y'} = \boldsymbol{R},$$

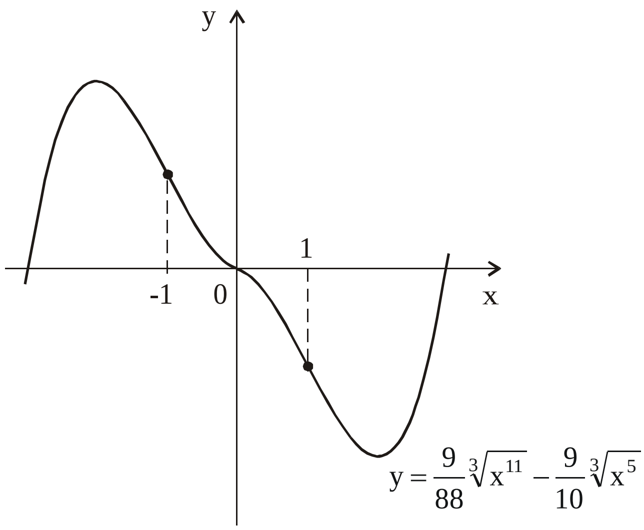
$$y'' = x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}, \quad D_{y''} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}.$$

Položíme $x^2 - 1 = 0$, tj. $x_{1,2} = \pm 1$, což jsou nulové body funkce y''. Bod nespojitosti je bod $x_3 = 0$, viz obr. 55.



Obr. 55

Dostaneme $y''(-2) < 0,\ y''(-\frac{1}{2}) > 0,\ y''(\frac{1}{2}) < 0$ a $y''(2) > 0$. Funkce y je konvexní pro $x \in (-1, 0)$ a $(1, \infty)$ a konkávní pro $x \in (-\infty, -1)$ a $(0, 1)$, viz obr. 56. Body $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ a $x_3 = 0$ jsou inflexní body dané funkce.



Obr. 56

Výklad

Věta 4.2.3. Nechť $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(2n)}_{(x_0)} = 0,\ f^{(2n+1)}_{(x_0)} \neq 0$ a $f^{(2n)}_{(x_0)}$ existuje v $O(x_0)$, pak bod x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$.

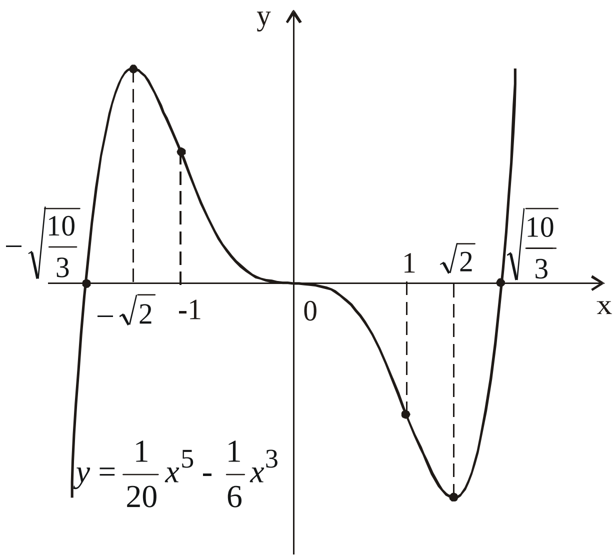
Bez důkazu.

Řešené úlohy

Příklad Určete inflexní body funkce $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3$.

Řešení: Dostaneme $y' = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^4 - 2x^2}{4}$, kde $D_y = D_{y'} = \boldsymbol{R}$. Vypočteme $y'' = x^3 - x,\ D_{y''} = \boldsymbol{R}$ a položíme $x^3 - x = 0,\ x(x^2 - 1) = 0$. Dostáváme nulové body

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$ Dále $y''' = 3x^2 - 1,$ tj. $y'''(0) \neq 0,\ y'''(1) \neq 0$ a $y'''(-1) \neq 0.$ Body x_1, x_2, x_3 jsou inflexní. Graf funkce $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3$ je na obr. 57.



Obr. 57

Kontrolní otázky

1. Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Když existuje okolí bodu x_0 $0(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in 0(x_0) \setminus \{x_0\}$ leží body grafu funkce pod tečnou k $f(x)$ v bodě x_0, je $f(x)$ v bodě x_0

   a) konvexní, b) konkávní, c) klesající.

2. Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě intervalu $I \subset D_f$, je funkce $f(x)$ v tomto intervalu

   a) konvexní, b) konkávní, c) rostoucí.

3. Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Přechází-li graf funkce v bodě $[x_0,\ f(x_0)]$ z polohy nad tečnou do polohy pod tečnou nebo naopak, nazýváme bod x_0

   a) stacionárním bodem funkce $f(x)$,

   b) bodem lokálního maxima funkce $f(x)$,

   c) inflexním bodem funkce $f(x)$.

4. Pokud funkce $f(x)$ splňuje v bodě x_0 podmínky $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) = 0,$ pak bod x_0

a) je inflexním bodem,

b) není inflexním bodem,

c) může, ale nemusí být inflexním bodem.

5. Nechť bod x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$. Pak

a) $f''(x_0) \neq 0$,

b) $f''(x_0) = 0$ nebo neexistuje,

c) $f''(x_0) = 1$.

Odpovědi na kontrolní otázky

1.b); 2. a); 3. c); 4. c); 5. b).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Nalezněte inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti dané funkce:

a) $y = 5x^2 + 20x + 7$, b) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$, c) $y = x(1-x)^2$,

d) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$, e) $y = 3 - (x+2)^{\frac{7}{5}}$, f) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

2. Nalezněte inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti dané funkce:

a) $y = x \ln x$, b) $y = 1 - \ln(x^2 - 9)$, c) $y = x \operatorname{arctg} x$,

d) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$, e) $y = x - \cos x$, f) $y = \ln(1 + x^2)$.

3. Nalezněte inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti dané funkce:

a) $y = \left|16 - x^2\right|$, b) $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, c) $y = xe^{-x^2}$,

d) $y = x^2 e^{-x}$, e) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x$, f) $y = \dfrac{x}{e^x}$.

4. Ukažte, že všechny inflexní body funkce $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ leží na jedné přímce.

5. Pro jaké hodnoty *a*, *b* je bod $[1,3]$ inflexním bodem křivky $y = ax^3 + bx^2$?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,\infty)$; b) inflexní body: $x=1$, konvexní: $(1,\infty)$, konkávní: $(-\infty,1)$; c) inflexní body: $x=\frac{2}{3}$, konvexní: $(\frac{2}{3},\infty)$, konkávní: $(-\infty,\frac{2}{3})$; d) inflexní body: $x=-2$, $x=1$, konvexní: $(-\infty,-2)$ a $(1,\infty)$, konkávní: $(-2,1)$; e) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,-2)$, konkávní: $(-2,\infty)$; f) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$. **2.** a) inflexní body nemá, konvexní: $(0,\infty)$; b) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$; c) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,\infty)$; d) inflexní body: $x=\frac{1}{2}$, konvexní: $(-\infty,\frac{1}{2})$, konkávní: $(\frac{1}{2},\infty)$; e) inflexní body: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, konvexní: $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, konkávní: $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi)$; f) inflexní body: $x=-1$, $x=1$, konvexní: $(-1,1)$, konkávní: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$. **3.** a) inflexní body nemá, konvexní: $(-\infty,-4)$ a $(4,\infty)$, konkávní: $(-4,4)$; b) inflexní body: $x=0$, konvexní: $(0,1)$, konkávní: $(-1,0)$ c) inflexní body: $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x=0$, $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$, konvexní: $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$, konkávní: $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ a $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; d) inflexní body: $x=2-\sqrt{2}$, $x=2+\sqrt{2}$, konvexní: $(-\infty,2-\sqrt{2})$ a $(2+\sqrt{2},\infty)$, konkávní: $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$; e) inflexní body: $x=0$, konvexní: $(-\infty,0)$, konkávní: $(0,\infty)$; f) inflexní body: $x=2$, konvexní: $(2,\infty)$, konkávní: $(-\infty,2)$.

4. inflexní body $\left[-\sqrt{3}-2,\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right]$, $\left[\sqrt{3}-2,\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right]$, $[1,1]$. **5.** $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$.

Kontrolní test

1. Nalezněte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y=x^4-6x^2+5$.
   a) konvexní: $(-1,1)$, konkávní: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$,
   b) konvexní: $(-1,1)$ a $(1,\infty)$, konkávní: $(-\infty,-1)$,
   c) konvexní: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, konkávní: $(-1,1)$.

2. Nalezněte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y = \dfrac{x+2}{x^2}$.

   a) konvexní: $(-\infty,-6)$ a $(-6,0)$, konkávní: $(0,\infty)$,

   b) konvexní: $(-6,0)$, a $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,-6)$,

   c) konvexní: $(-\infty,-6)$, konkávní: $(-6,0)$ a $(0,\infty)$.

3. Nalezněte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y = x + \operatorname{arctg} x$.

   a) konvexní: $(-\infty,0)$, konkávní: $(0,\infty)$,

   b) konvexní: $(-\infty,1)$, konkávní: $(1,\infty)$,

   c) konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$.

4. Nalezněte inflexní body funkce $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

   a) $x_1 = -1,\ x_2 = 1$,

   b) $x_1 = -\sqrt{\dfrac{1}{3}},\ x_2 = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$,

   c) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

5. Nalezněte inflexní body funkce $y = xe^x$.

   a) $x = -2$, b) $x = 2$, c) $x = \dfrac{1}{2}$.

6. Nalezněte inflexní body funkce $y = (x-2)^4$.

   a) $x = 2$, b) $x = -2$, c) neexistují.

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. a); 6. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 4 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 4.2. znovu.

4.3. Asymptoty funkce

Výklad

Definice 4.3.1.

Jestliže nastane alespoň jeden z případů $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, kde $x_0\in(D_f)'$, pak říkáme, že **přímka $x = x_0$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě x_0**. Jestliže $\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-q)=0$, resp. $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx-q)=0$, pak říkáme, že **přímka $y=kx+q$ je asymptotou funkce $f(x)$ v nevlastním bodě** ∞, resp. $-\infty$.

Poznámka

1. Asymptoty o rovnici $x=x_0$ někdy nazýváme asymptoty bez směrnice a hledáme je v krajních bodech x_0 intervalů spojitosti D_f.

2. Asymptoty o rovnici $y=kx+q$ někdy nazýváme asymptoty se směrnicí.

Výklad

Věta 4.3.1. Jestliže

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k\in\mathbf{R}$ a platí $\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=q\in\mathbf{R}$, pak přímka $y=kx+q$ je asymptotou funkce $f(x)$ v nevlastním bodě ∞. (Věta platí i pro nevlastní bod $-\infty$).

Důkaz: Z definice vyplývá, že $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-q)=0$, odtud je $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)-q=0$ a dále $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=q$. Platí $0=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{q}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-kx}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}-k$ a odtud dostáváme $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. (Stejně dokážeme pro $x\to-\infty$.)

Řešené úlohy

Příklad Určete asymptoty funkce $y=\dfrac{x^2+1}{x}$, $D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Řešení: 1. Asymptoty bez směrnice

Krajní bod intervalů spojitosti funkce y je bod $x_0=0$. Vyřešíme limity

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=-\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=\infty.$$

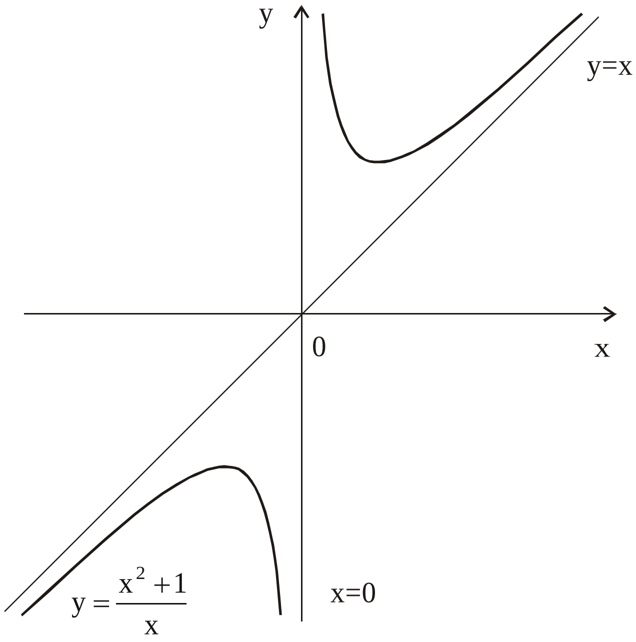
Z výsledků vyplývá, že přímka $x=0$ je asymptotou funkce. (Pro $x\to 0^-$ je $y\to-\infty$, pro $x\to 0^+$ je $y\to\infty$).

2. Asymptoty se směrnicí

Vypočítáme směrnici $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\dfrac{1}{x^2})=1\in\boldsymbol{R}.$

Dostaneme $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0\in\boldsymbol{R}.$

Funkce $y=x$ je asymptotou pro $x\to\infty$ i pro $x\to-\infty$, viz obr. 58.



Obr. 58

Příklad Určete asymptoty funkce $y=\frac{1}{2}x+\operatorname{arctg} x,\ x\in \boldsymbol{R}.$

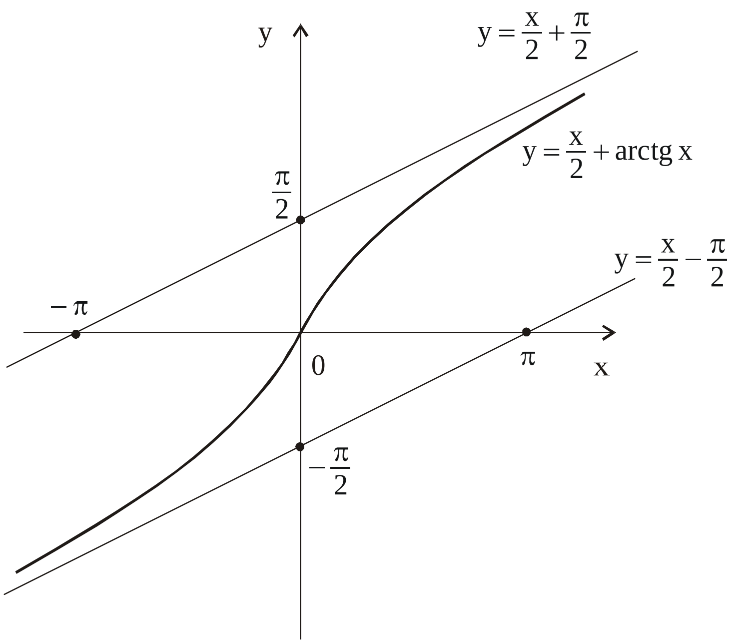
Řešení:

1. Asymptoty bez směrnice neexistují. Funkce je spojitá na $\boldsymbol{R}$.
2. Asymptoty se směrnicí:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\frac{1}{2}\in \boldsymbol{R},$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}x+\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{pro } x\to\infty,\\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x\to-\infty.\end{cases}$$

Funkce má asymptoty $y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$ pro $x\to\infty$ a $y=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-\infty$, viz obr. 59.



Obr. 59

Kontrolní otázky

1. Funkce $f(x)$ má asymptotu bez směrnice v bodě x_0. Tato asymptota je:

   a) rovnoběžná s osou x,

   b) rovnoběžná s osou y,

   c) kolmá k ose y.

2. Asymptota bez směrnice funkce $f(x)$ v bodě x_0 má rovnici:

   a) $y = y_0$, b) $x = x_0$, c) $y = x_0$.

3. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v $\boldsymbol{R}$, pak asymptoty bez směrnice:

   a) nemá, b) má, c) může, ale nemusí mít.

4. Pokud přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce $f(x)$ v nevlastním bodě ∞, pak

   a) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{f(x)} \in R,\ q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - k) \in \boldsymbol{R}$,

   b) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{f(x)} \in R,\ q = \lim\limits_{x\to\infty} (kx - f(x)) \in \boldsymbol{R}$,

   c) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \in R,\ q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) \in \boldsymbol{R}$.

5. Funkce $f(x)$ je definovaná v intervalu $<a,b>,\ a,b \in \boldsymbol{R}$. Existují asymptoty se směrnicí této funkce?

   a) ne, b) ano, c) mohou, ale nemusí.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. b); 3. a); 4. c); 5. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte rovnice asymptot grafu dané funkce:

a) $y = \dfrac{x}{x-1}$, b) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$, c) $y = 3x + \dfrac{3}{x-2}$,

d) $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$, e) $y = \dfrac{1}{2x^2+x-1}$, f) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^2}$.

2. Najděte rovnice asymptot grafu dané funkce:

a) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, b) $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$, c) $y = e^{\frac{1}{x}}$,

d) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$, e) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$, f) $y = x\ln(e + \dfrac{1}{x})$.

3. Najděte rovnice asymptot grafu dané funkce:

a) $y = x + e^{-x}$, b) $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, c) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$,

d) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-1}$, e) $y = -x + \operatorname{arctg} x$, f) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $x=1,\ y=1$; b) $x=-1,\ x=1,\ y=0$; c) $x=2,\ y=3x$; d) $x=-2,\ x=2,\ y=x$; e) $x=-1,\ x=\frac{1}{2},\ y=0$; f) $x=-1$. **2.** a) $y=0$; b) $x=0,\ y=2x$; c) $y=1$; d) $x=0,\ y=x$; e) $x=0,\ y=x$; f) $x=-\frac{1}{e},\ y=x+\frac{1}{e}$. **3.** a) $y=x$; b) $y=\pi$; c) $y=0$;

d) $y=\frac{\pi}{4}$; e) $y=-x-\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-\infty$, $y=-x+\frac{\pi}{2}$ pro $x\to+\infty$; f) $y=-\frac{3\pi}{2}$ pro $x\to-\infty$, $y=\frac{\pi}{2}$ pro $x\to+\infty$.

Kontrolní test

1. Najděte rovnice asymptot bez směrnice ke grafu funkce $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

   a) $y=2, y=-2,$ b) $x=2, y=-2,$ c) $x=2, x=-2.$

2. Najděte rovnice asymptot se směrnicí ke grafu funkce $y=x\operatorname{arctg}x$.

   a) $y=\frac{\pi}{4}x-1$ pro $x\to\infty$, $y=-\frac{\pi}{4}x-1$ pro $x\to-\infty$,

   b) $y=\frac{\pi}{2}x-1$ pro $x\to\infty$, $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ pro $x\to-\infty$,

   c) $y=x-1$ pro $x\to\infty$, $y=-x-1$ pro $x\to-\infty$.

3. Najděte rovnici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y=x-\ln x$ v nevlastním bodě ∞.

   a) $y=x$, b) neexistuje, c) $y=x+1$.

4. Najděte rovnice asymptot grafu funkce $y=x+\frac{1}{x-1}$.

   a) $y=x, x=1,$ b) $y=1, y=-x,$ c) $y=-x, y=-1.$

5. Najděte rovnice asymptot grafu funkce $y=x^2e^{-x}$.

   a) $y=0$ pro $x\to-\infty$,

   b) $y=1$ pro $x\to\infty$,

   c) $y=0$ pro $x\to\infty$.

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3. b); 4. a); 5. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně ve 3 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 4.3. znovu.

4.3. Graf funkce

Výklad

Chceme-li určit graf funkce, můžeme využít předchozích znalostí a určit vlastnosti funkce, které shrneme do níže uvedených 10 bodů. Může se stát, že funkce některou z vlastností nebude mít nebo ji nedovedeme určit. Postup řešení podle zmíněných bodů budeme nazývat **určení průběhu funkce.**

1. Určíme definiční obor funkce, její nulové body a intervaly, v nichž je funkce kladná nebo záporná.

2. Zjistíme, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická. (Pro funkce sudé a liché můžeme její průběh vyšetřovat jen pro $x \in < 0, \infty)$, pro funkce periodické v jednom pásu daném periodou).

3. Určíme intervaly spojitosti a v krajních bodech vyšetříme jednostranné limity. (Výsledky využijeme v bodě 9 při určování asymptot bez směrnice).

4. Vypočítáme y', určíme $D_{y'}$, nulové body y' a intervaly, v nichž je y' kladná nebo záporná.

5. Určíme intervaly, v nichž je funkce rostoucí nebo klesající.

6. Stanovíme lokální extrémy funkce.

7. Vypočítáme y'', určíme $D_{y''}$, nulové body y'' a intervaly, v nichž je y'' kladná nebo záporná.

8. Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti a najdeme inflexní body funkce.

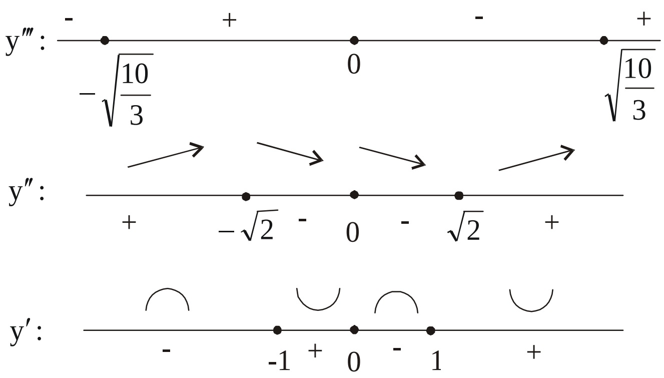
9. Určíme asymptoty funkce.

10. V extrémech a inflexních bodech funkce určíme funkční hodnoty a tečny. Zakreslíme do grafu konečné limity v bodech nespojitosti, asymptoty a nulové body funkce. Nakreslíme celý graf funkce.

Řešené úlohy

Příklad Vyšetřete průběh funkce $y=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{6}x^3$ a načrtněte její graf.

Řešení: 1. Daná funkce je polynom a tedy $D_y=\boldsymbol{R}$. Položíme $\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{6}x^3=0$ a odtud $\frac{1}{2}x^3\left(\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{3}\right)=0$. Nulové body jsou $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{\frac{10}{3}}$, $x_3=\sqrt{\frac{10}{3}}$. Platí $y(-3)<0$, $y(-1)>0$, $y(1)<0$ a $y(3)>0$, viz obr. 60.



Obr. 60

2. Platí $f(-x)=\frac{1}{20}(-x)^5-\frac{1}{6}(-x)^3=-\left(\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{6}x^3\right)=-f(x)$ pro všechna $x\in\boldsymbol{R}$, to znamená, že daná funkce je lichá. Její graf bude souměrný podle počátku soustavy souřadnic. Mohli bychom tedy vyšetřovat průběh funkce pouze pro $x\geq 0$.

Dále je $f(x+p)=\frac{1}{20}(x+p)^5-\frac{1}{6}(x+p)^3\neq\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{6}x^3=f(x)$ pro všechna $x\in\boldsymbol{R}$ a $p\neq 0$.

Funkce není periodická.

3. Funkce nemá body nespojitosti.

4. $y' = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$, $Dy' = \boldsymbol{R}$. Položíme $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ a dostaneme $\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) = 0$.

Nulové body funkce y' jsou $x_1 = 0$, $x_4 = -\sqrt{2}$, $x_5 = \sqrt{2}$. Platí

$y'(-2) > 0$, $y'(-1) < 0$, $y'(1) < 0$ a $y'(2) > 0$. Znaménka zapíšeme do obr. 60.

5. Funkce je rostoucí pro $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$ a pro $x \in (\sqrt{2}, \infty)$. Funkce je klesající pro $x \in (-\sqrt{2}, 0)$ a pro $x \in (0, \sqrt{2})$, viz obr. 60.

6. Funkce má v bodě $x_4 = -\sqrt{2}$ ostré lokální maximum a v bodě $x_5 = \sqrt{2}$ ostré lokální minimum.

7. $y'' = x^3 - x$, $D_{y''} = \boldsymbol{R}$. Položíme $x^3 - x = 0$ a dostaneme $x(x^2 - 1) = 0$. Nulové body funkce y'' jsou $x_1 = 0$, $x_6 = -1$ a $x_7 = 1$. Platí $y''(-2) < 0$, $y''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, $y''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ a $y''(2) > 0$.

Znaménka zapíšeme do obr. 60.

8. Funkce je konvexní pro $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ a je konkávní pro $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, viz obr. 60. Body $x_1 = 0$, $x_6 = -1$, $x_7 = 1$ jsou inflexní body dané funkce.

9. Asymptoty bez směrnice neexistují, viz bod 3. Vypočteme

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{20}x^4 - \frac{1}{6}x^2\right) = \infty - \infty = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{20} - \frac{1}{6x^2}}{\frac{1}{x^4}} = \infty \notin \boldsymbol{R}.$$ Neexistují asymptoty se směrnicí.

10. Platí: $y(-\sqrt{2}) = \frac{2}{15}\sqrt{2}$, $y(-1) = \frac{7}{60}$, $y(0) = 0$, $y(1) = -\frac{7}{60}$ a $y(\sqrt{2}) = -\frac{2}{15}\sqrt{2}$. Body o souřadnicích $\left(-\sqrt{2}, \frac{2}{15}\sqrt{2}\right)$, $(0,0)$ a $\left(\sqrt{2}, -\frac{2}{15}\sqrt{2}\right)$ jsou stacionární body a tedy tečny v nich ke grafu funkce jsou rovnoběžné s osou x kartézské soustavy souřadnic. Pro body $\left(-1, \frac{7}{60}\right)$ a $\left(1, -\frac{7}{60}\right)$ platí $y'(-1) = y'(1) = -\frac{1}{4}$ a tedy tečny ke grafu funkce procházející těmito body mají stejnou směrnici $k = -\frac{1}{4}$. Graf funkce je na obr. 57.

Poznámka

V následujících příkladech budeme v jednotlivých bodech určování průběhu funkce uvádět pouze výsledky bez komentáře.

Řešené úlohy

Příklad Určete průběh funkce $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Řešení:

1. $Dy = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $\dfrac{e^x}{x} = 0 \Rightarrow e^x = 0$, což neplatí pro žádné $x \in D_y$, $y(-1) = -\dfrac{1}{e} < 0$, $y(1) = e > 0$, viz obr.61.

2. $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{-x} \neq \left\langle \begin{matrix} f(x) \\ -f(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ funkce není ani sudá ani lichá.

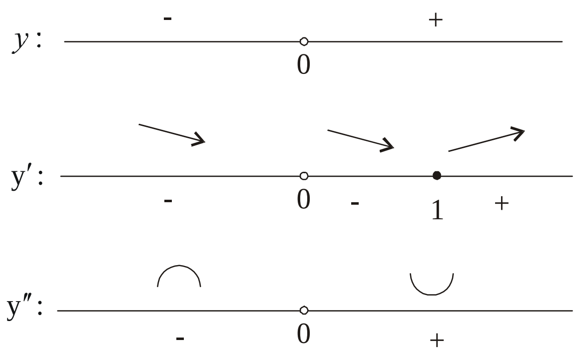
$f(x+p) = \dfrac{e^x + p}{x+p} \neq f(x)$, což platí $\forall x \in D_y$ a $p \neq 0 \Rightarrow$ funkce není periodická.

3. Funkce je spojitá pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Platí $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty$.

4. $y' = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, $e^x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $D_{y'} = D_y$, $y'(-1) = -\dfrac{2}{e} < 0$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{e} < 0$,

$y'(2) = \dfrac{e^2}{4} > 0$, viz obr. 61.



Obr. 61

5. Pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0,1)$ je funkce klesající, pro $x \in (1, \infty)$ je rostoucí.

6. V bodě $x_1 = 1$ má funkce ostré lokální minimum.

7. $y'' = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$, $D_{y''} = D_{y'} = D_y$, $e^x(x^2 - 2x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow$ nemá reálné kořeny, $y''(-1) = -\dfrac{5}{e} < 0$, $y''(1) = e > 0$.

8. Pro $x \in (-\infty, 0)$ je funkce konkávní, pro $x \in (0, \infty)$ je konvexní, nemá inflexní body, viz obr. 61.

9. Existuje asymptota bez směrnice $x = 0$, viz bod 3, pro

$x \to 0^-$ je $y \to -\infty$ a pro $x \to 0^+$ je $y \to \infty$.

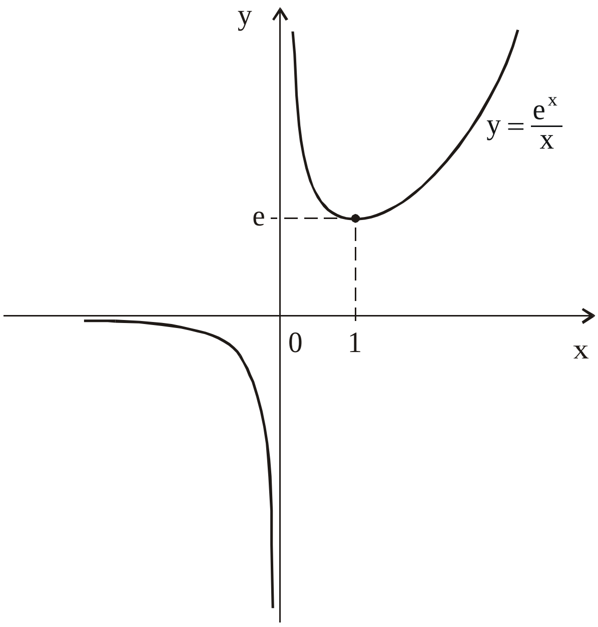
Asymptoty se směrnicí:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^x}{x^2} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty \notin \boldsymbol{R}, \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0 \in \boldsymbol{R}, \end{cases}$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 0.x \right) = 0 \in \boldsymbol{R}.$$

Funkce má asymptotu se směrnicí $y = 0$ pro $x \to -\infty$.

10. $y(1) = e$, $y'(1) = 0$, tečna ve stacionárním bodě $(1, e)$ je rovnoběžná s osou x. Graf je na obr. 62.



Obr. 62

Příklad Vyšetřete průběh funkce $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Řešení:

1. $D_y = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, průsečíky s osou x neexistují, $y > 0 \quad \forall x \in D_y$.

2. Není ani sudá, ani lichá, ani periodická.

3. Funkce je spojitá pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

4. $y' = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, $D_y = D_{y'}$, $\forall x \in D_{y'} : y' \neq 0$, $y'(-1) = -\dfrac{1}{e} < 0$, $y'(1) = -e < 0$.

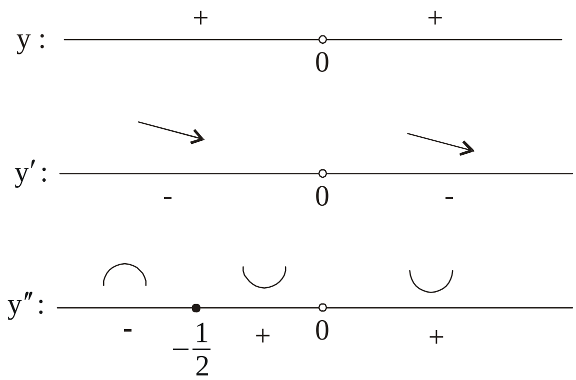
5. Funkce je klesající pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, \infty)$, viz obr. 63.

6. Lokální extrémy neexistují.

7. $y'' = \dfrac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \left(2 + \dfrac{1}{x} \right) = \dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \dfrac{2x+1}{x}$,

$\dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \dfrac{2x+1}{x} = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2}$,

$y''(-1) = -\dfrac{1}{e} < 0,\ \ y''\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 128e^{-4} > 0,\ \ y''(1) = 3e > 0,$ viz obr. 63.



Obr. 63

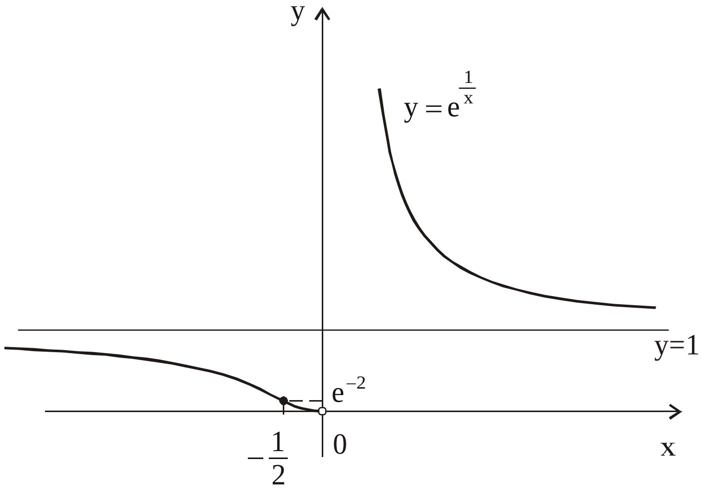
8. Funkce je pro $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ konkávní a pro $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$ je konvexní, bod $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ je inflexním bodem funkce.

9. Z bodu 3 vyplývá, že přímka $x = 0$ je asymptotou pro $x \to 0^+$.

Asymptoty se směrnicí: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0 \in \boldsymbol{R},\ q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \in \boldsymbol{R}.$

Funkce má asymptotu $y = 1$ pro $x \to \infty$ a pro $x \to -\infty$.

10. $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = e^{-2},\ y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4e^{-2},$ tj. v inflexním bodě má tečna ke grafu směrnici $k = -4e^{-2}$. Graf funkce je na obr. 64.



Obr. 64

Úlohy k samostatnému řešení

V následujících cvičeních vyšetřete průběh funkce a načrtněte graf funkce.

1. $y = x^3 + 3x$ **2.** $y = 16x(x-1)^3$ **3.** $y = \left|16 - x^2\right|$

4. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ **5.** $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ **6.** $y = \dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}$

7. $y = e^{-\frac{1}{x}}$ **8.** $y = x + e^{-x}$ **9.** $y = \dfrac{x}{e^x}$

10. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ **11.** $y = x^2 e^{-x}$ **12.** $y = xe^{-x^2}$

13. $y = x \ln x$ **14.** $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ **15.** $y = x^2 \ln x$

16. $y = x \ln x^2$ **17.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **18.** $y = \sin x + \cos x$

19. $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ **20.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ **21.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-1}$

22. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$ **23.** $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arccotg} x$ **24.** $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $D_y = \boldsymbol{R}$; lichá funkce; rostoucí: $(-\infty,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní body: $x=0$; nemá asymptoty. **2.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$, klesající: $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$; $y_{\min} = -\frac{27}{16}$ pro $x=\frac{1}{4}$; konvexní: $(-\infty,\frac{1}{2})$ a $(1,\infty)$, konkávní: $(\frac{1}{2},1)$, inflexní body: $x=1$, $x=\frac{1}{2}$; nemá asymptoty. **3.** $D_y = \boldsymbol{R}$; sudá funkce; rostoucí: $(-4,0)$ a $(4,\infty)$, klesající: $(-\infty,-4)$ a $(0,4)$; $y_{\min} = 0$ pro $x=-4$, $y_{\min}=0$ pro $x=4$ $y_{\max}=16$ pro $x=0$; konvexní: $(-\infty,-4)$ a $(4,\infty)$, konkávní: $(-4,4)$, inflexní body nemá; nemá asymptoty. **4.** $D_y = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; lichá funkce; rostoucí: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, klesající: $(-1,0)$ a $(0,1)$; $y_{\min} = -2$ pro $x=-1$, $y_{\max}=2$ pro $x=1$; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní body nemá; asymptoty: $x=0$, $y=x$. **5.** $D_y = \boldsymbol{R}\setminus\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$; lichá funkce; rostoucí: $(-3,-\sqrt{3})$ a $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3},3)$, klesající: $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$; $y_{\min}=\frac{9}{2}$ pro $x=-3$, $y_{\max}=-\frac{9}{2}$ pro $x=3$; konvexní: $(-\infty,-\sqrt{3})$ a $(0,\sqrt{3})$, konkávní: $(-\sqrt{3},0)$ a $(\sqrt{3},\infty)$, inflexní bod $x=0$; asymptoty: $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=-x$. **6.** $D_y = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(1,2)$, klesající: $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(2,\infty)$; $y_{\min}=0$ pro $x=1$, $y_{\max}=\frac{1}{2}$ pro $x=2$; konvexní: $\left(0,2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ a $\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$, konkávní: $(-\infty,0)$ a $\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3},2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, inflexní body: $x=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$; asymptoty: $x=0$, $y=0$. **7.** $D_y = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; není sudá ani lichá; rostoucí: $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(-\infty,0)$ a $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, konkávní: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, inflexní bod: $x=\frac{1}{2}$; asymptoty: $x=0$, $y=1$. **8.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(0,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$; $y_{\min}=1$ pro $x=0$; konvexní: $(-\infty,\infty)$, inflexní body nemá;

asymptota: $y = x$ pro $x \to +\infty$. **9.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(-\infty,1)$, klesající: $(1,\infty)$; $y_{\max} = e^{-1}$ pro $x = 1$; konvexní: $(2,\infty)$, konkávní: $(-\infty,2)$, inflexní bod: $x = 2$; asymptota: $y = 0$ pro $x \to +\infty$. **10.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $(0,\frac{1}{2})$; $y_{\min} = \frac{e^2}{4}$ pro $x = \frac{1}{2}$; konvexní: $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$, inflexní body nemá; nemá asymptoty. **11.** $D_y = \boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(0,2)$, klesající: $(-\infty,0)$ a $(2,\infty)$; $y_{\min} = 0$ pro $x = 0$, $y_{\max} = 4e^{-2}$ pro $x = 2$; konvexní: $\left(-\infty,2-\sqrt{2}\right)$ a $\left(2+\sqrt{2},\infty\right)$, konkávní: $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$, inflexní body: $x = 2-\sqrt{2}$, $x = 2+\sqrt{2}$; asymptota: $y = 0$ pro $x \to +\infty$. **12.** $D_y = \boldsymbol{R}$; lichá funkce; rostoucí: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, klesající: $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$; $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$ pro $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; konvexní: $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$, konkávní: $\left(-\infty,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ a $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, inflexní body: $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$; asymptota: $y = 0$. **13.** $D_y = (0,\infty)$; není sudá ani lichá; rostoucí: $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$, klesající: $(0,\frac{1}{e})$; $y_{\min} = -\frac{1}{e}$ pro $x = \frac{1}{e}$, konvexní: $(0,\infty)$, inflexní body nemá; nemá asymptoty. **14.** $D_y = (-1,1)$; lichá funkce; rostoucí: $(-1,1)$; nemá extrémy; konvexní: $(0,1)$, konkávní: $(-1,0)$, inflexní body: $x = 0$; asymptoty: $x = -1$, $x = 1$. **15.** $D_y = (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right)$, klesající: $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$; $y_{\min} = -\frac{1}{2e}$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$; konvexní: $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}},\infty\right)$, konkávní: $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$, inflexní bod: $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$; nemá asymptoty. **16.** $D_y = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$; lichá funkce; rostoucí: $\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$ a $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$, klesající: $\left(-\frac{1}{e},0\right)$ a $\left(0,\frac{1}{e}\right)$; $y_{\min} = -\frac{2}{e}$ pro $x = -\frac{1}{e}$, $y_{\max} = \frac{2}{e}$ pro $x = -\frac{1}{e}$; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní body nemá; nemá asymptoty. **17.** $D_y = (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(0,e)$, klesající: (e,∞); $y_{\max}=\frac{1}{e}$ pro $x=e$, konvexní: $\left(\sqrt{e^3},\infty\right)$, konkávní: $\left(0,\sqrt{e^3}\right)$, inflexní bod: $x=\sqrt{e^3}$; asymptota: $y=0$. **18.** $\mathrm{D}_y=\boldsymbol{R}$; není sudá ani lichá; rostoucí: $\left(-\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, klesající: $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right)$, $k\in Z$; $y_{\min}=-\sqrt{2}$ pro $x=-\frac{3\pi}{4}$, $y_{\max}=\sqrt{2}$ pro $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; konvexní: $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right)$, konkávní: $\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)$, $k\in Z$, inflexní body: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$; nemá asymptoty. **19.** $\mathrm{D}_y=\boldsymbol{R}$; sudá funkce; rostoucí: $(0,\infty)$, klesající: $(-\infty,0)$; $y_{\min}=0$ pro $x=0$; konkávní: $(-\infty,\infty)$, inflexní body nemá; asymptota: $y=\pi$. **20.** $\mathrm{D}_y=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; lichá funkce; klesající: $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní body nemá; asymptota: $y=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}$. **21.** $\mathrm{D}_y=\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$; není ani sudá ani lichá; klesající: $(-\infty,1)$ a $(1,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,\infty)$, konkávní: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, inflexní bod: $x=\frac{1}{2}$; asymptota: $y=\frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}$. **22.** $\mathrm{D}_y=\boldsymbol{R}$; lichá funkce; rostoucí: $(-\infty,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(-\infty,0)$, konkávní: $(0,\infty)$, inflexní bod: $x=0$; asymptoty: $y=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$. **23.** $\mathrm{D}_y=\boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, klesající: $(-1,1)$; $y_{\min}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ pro $x=1$, $y_{\max}=\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}$ pro $x=-1$; konvexní: $(0,\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$, inflexní bod: $x=0$; asymptoty: $y=\frac{x}{2}$, $y=\frac{x}{2}+\pi$. **24.** $\mathrm{D}_y=\boldsymbol{R}$; není ani sudá ani lichá; rostoucí: $(-\infty,\infty)$; nemá extrémy; konvexní: $(-\infty,0)$, konkávní: $(0,\infty)$, inflexní body: $x=0$; asymptoty: $y=-\frac{3\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$.

LITERATURA k části I

[1] Budinský, B.: *Analytická a diferenciální geometrie*. SNTL Praha, 1983, ISBN 04-005-83.

[2] Burda, P., Havelek, R., Hradecká, R.: *Algebra a analytická geometrie (Matematika I),* učební texty VŠB – TU Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-479-2.

[3] Havel, V., Holenda, J.: *Lineární algebra*. SNTL/ALFA Praha, 1984, ISBN 04-011-84.

[4] Leon, S. J.: *Linear Algebra with Applications*. MACMILLAN New York, 1980, ISBN 0-02-369810.

[5] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky I.* SNTL Praha, 1989, ISBN 04-0544-89.

LITERATURA k části II

[1] Bouchala J.: *Matematická analýza 1*. Učební texty VŠB – TUO, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-519-5.

[2] Burda, P., Kreml, P.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Učební texty VŠB – TUO, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0634-7.

[3] Suchomel, J.: *Matematika I – Diferenciální počet.* Učební texty VUT Brno, 1982, ISBN 05-022-82.

[4] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky I.* SNTL Praha, 1989, ISBN 04-0544-89.