

Studijní opory pro předmět

MATEMATIKA I

230-0201/13

BAKALÁŘSKÝ STUDIJNÍ PROGRAM
„CHYTRÉ A ZELENÉ BUDOVY V CIRKULÁRNÍM STAVITELSTVÍ“

Garant předmětu

Zbyněk Urban

Zpracovatel studijních opor

Zbyněk Urban, Jana Volná, Petr Volný

Studijní opora pro Matematiku I

Zbyněk Urban, Jana Volná, Petr Volný

Obsah

1	Funkce jedné proměnné	4
1.1	Množiny	4
1.2	Zobrazení	4
1.3	Reálné funkce jedné reálné proměnné	4
1.4	Operace s funkcemi	5
1.5	Ohraničená funkce	6
1.6	Monotónní funkce	6
1.7	Parita funkce, funkce sudá a lichá	6
1.8	Periodicita funkce	7
1.9	Prostá funkce	7
1.10	Složená funkce	7
1.11	Inverzní funkce	8
1.12	Přehled elementárních funkcí	8
1.13	Polynomy	9
1.14	Konstantní funkce	9
1.15	Lineární funkce	9
1.16	Kvadratické funkce	10
1.17	Mocninné funkce s přirozeným exponentem	11
1.18	Mocninné funkce s celým záporným exponentem	13
1.19	Lineární lomené funkce	14
1.20	Funkce odmocnina	15
1.21	Exponenciální funkce	16
1.22	Logaritmické funkce	17
1.23	Goniometrické funkce	18
1.24	Cyklometrické funkce	20
1.25	Limita funkce - motivace	22
1.26	Rozšíření množiny reálných čísel	23
1.27	Okolí bodu	24
1.28	Jednostranné okolí bodu	24
1.29	Definice limity funkce	25
1.30	Definice jednostranné limity funkce	25
1.31	Operace s limitami	26
1.32	Vybrané limity	26
1.33	Spojitosť	28
1.34	Věty o spojitých funkcích	28
2	Diferenciální počet funkcí dvou proměnných	29
2.1	Derivace funkce	29
2.2	Vlastnosti derivace	29
2.3	Derivace elementárních funkcí	30
2.4	Derivace složené funkce	30
2.5	Logaritmické derivování	31
2.6	Derivace vyšších řádů	31
2.7	l'Hospitalovo pravidlo	31
2.8	Derivace parametricky zadané funkce	32
2.9	Diferenciál funkce	33

2.10	Tečna a normála	34
2.11	Taylorův polynom	35
2.12	Věty o derivaci	35
2.13	Monotónnost funkce	36
2.14	Extrémy funkce	37
2.15	Konvexnost a konkávnost	38
2.16	Inflexní body	39
2.17	Asymptoty	39
2.18	Sestavení grafu funkce	40
3	Lineární algebra	41
3.1	Matice	41
3.2	Speciální tvary matic	41
3.3	Operace s maticemi	42
3.4	Hodnost matice	43
3.5	Permutace	44
3.6	Determinanty	44
3.7	Vlastnosti determinantů	45
3.8	Výpočet determinantu matice 1. řádu	45
3.9	Výpočet determinantu matice 2. řádu - křížové pravidlo	45
3.10	Výpočet determinantu matice 3. řádu - Sarrusovo pravidlo	45
3.11	Výpočet determinantu matice 4. a vyšších řádů	46
3.12	Inverzní matice	46
3.13	Výpočet inverzní matice eliminační metodou	47
3.14	Soustavy lineárních rovnic	47
3.15	Gaussova eliminační metoda	49
3.16	Cramerovo pravidlo	49
3.17	Maticové rovnice	50
3.18	Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí inverzní matice	50
4	Analytická geometrie	51
4.1	Vektory	51
4.2	Základní pojmy a definice	52
4.3	Skalární součin vektorů	54
4.4	Vektorový součin vektorů	54
4.5	Smíšený součin vektorů	56
4.6	Přímka v prostoru	56
4.7	Vzájemná poloha dvou přímek	57
4.8	Rovina v prostoru	58
4.9	Vzájemná poloha přímky a roviny	59
4.10	Vzájemná poloha dvou rovin	60
4.11	Vzdálenost bodu od přímky	61
4.12	Vzdálenost bodu od roviny	61
4.13	Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin	61
4.14	Odchylka dvou přímek	61
4.15	Odchylka přímky od roviny	61
4.16	Odchylka dvou rovin	62
4.17	Příčka mimoběžek	62

1 Funkce jedné proměnné

1.1 Množiny

Definice

Množinou rozumíme soubor prvků se společnou, tzv. **určující** vlastností.

Pomocí určující vlastnosti umíme rozhodnout, zdali daný prvek do dané množiny patří anebo nepatří. Množinu lze zadat buď výčtem prvků (explicitně řekneme, které prvky do dané množiny patří), nebo stanovením určující vlastnosti. Bývá zvykem množiny značit velkými písmeny.

Např. $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ je množina nezáporných reálných čísel, je zjevné, že $3 \in A$ a $-3 \notin A$.

Poznámka

Přirozená čísla \mathbb{N} , celá čísla \mathbb{Z} , racionální čísla \mathbb{Q} , iracionální čísla \mathbb{I} , reálná čísla \mathbb{R} .

1.2 Zobrazení

Definice

Kartézským součinem množin A a B rozumíme množinu

$$A \times B = \{[x, y] | x \in A, y \in B\},$$

prvky $[x, y]$ se nazývají **uspořádané dvojice**.

Definice

Relací (vztahem) ρ mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$, $\rho \subset A \times B$.

Definice

Zobrazení (speciální vztah) mezi množinami A a B je taková relace ρ mezi A a B , ve které ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in \rho$.

1.3 Reálné funkce jedné reálné proměnné

Definice

Funkcí f na množině $D \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme každé zobrazení

$$f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x),$$

každému reálnému číslu $x \in D$ se přiřadí právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$.

Poznámka

Proměnná x je **nezávislá proměnná**, y je **závislá proměnná** a předpis $y = f(x)$ vyjadřující závislost y na x se nazývá **funkční předpis**. Hodnotu funkce f v bodě x_0 označíme $f(x_0) = y_0$ a budeme ji nazývat **funkční hodnotou funkce f v bodě x_0** .

Definice

Množina D se nazývá **definiční obor** funkce f a značí se D_f nebo $D(f)$. Množina všech funkčních hodnot $f(x)$ se nazývá **obor hodnot** funkce f , značí se H_f nebo $H(f)$,

$$H_f = \{f(x) | x \in D_f\}.$$

Grafem funkce f je množina G_f ,

$$G_f = \{[x, f(x)] | x \in D_f\}.$$

1.4 Operace s funkcemi**Definice**

Jsou dány funkce f a g s definičními obory D_f, D_g .

- **Rovnost funkcí:** $f = g$

$$D_f = D_g \quad \text{a} \quad f(x) = g(x) \quad \text{pro každé } x \in D_f$$

- **Součet funkcí:** $f + g$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{pro každé } x \in D_f \cap D_g$$

- **Rozdíl funkcí:** $f - g$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{pro každé } x \in D_f \cap D_g$$

- **Součin funkcí:** $f \cdot g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{pro každé } x \in D_f \cap D_g$$

- **Podíl funkcí:** $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro každé } x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0$$

1.5 Ohraničená funkce

Definice

Funkce f se nazývá **ohraničená shora** na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, existuje-li takové číslo h , že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq h$.

Definice

Funkce f se nazývá **ohraničená zdola** na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, existuje-li takové číslo d , že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq d$.

Definice

Funkce f se nazývá **ohraničená** na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, je-li na M ohraničená shora i zdola. Není-li ohraničená ani shora ani zdola na M , nazývá se **neohraničená** na M .

1.6 Monotónní funkce

Definice

Funkce f se nazývá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$

- **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **nerostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Poznámka

Takové funkce se nazývají **monotónní** na intervalu I .

Poznámka

Funkce rostoucí a klesající na intervalu I se nazývají **ryze monotónní** na intervalu I .

1.7 Parita funkce, funkce sudá a lichá

Definice

Funkce f se nazývá **sudá**, jestliže platí:

$$\text{pro každé } x \in D_f \text{ platí } -x \in D_f \text{ a } f(-x) = f(x).$$

Definice

Funkce f se nazývá **lichá**, jestliže platí:

$$\text{pro každé } x \in D_f \text{ platí } -x \in D_f \text{ a } f(-x) = -f(x).$$

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y , graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic, podle bodu $[0, 0]$.

1.8 Periodicita funkce**Definice**

Funkce f se nazývá **periodická**, jestliže existuje takové číslo $p > 0$, že platí:

$$\text{pro každé } x \in D_f \text{ platí } x + p \in D_f \text{ a } f(x + p) = f(x).$$

Číslo p se nazývá **perioda** funkce f . Existuje-li nejmenší číslo p , pak jej nazýváme **základní perioda** funkce f .

Poznámka

Graf periodické funkce se pravidelně opakuje po intervalech, jejichž délka je nejméně rovna základní periodě p .

1.9 Prostá funkce**Definice**

Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

$$\text{je-li } x_1 \neq x_2, \text{ pak } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Věta

Každá ryze monotonní funkce je prostá.

Poznámka

Opačné tvrzení neplatí.

1.10 Složená funkce**Definice**

Řekneme, že funkce h je **složená funkce** z funkcí f a g , jestliže platí:

1. $D(h) = \{x \in D(f), f(x) \in D(g)\}$,
2. pro každé $x \in D(h)$ platí $h(x) = g(f(x))$.

Operaci skládání značíme symbolem \circ , tedy $h = g \circ f$, respektive $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Poznámka

Skládání funkcí není komutativní $g \circ f \neq f \circ g$.

1.11 Inverzní funkce

Definice

Inverzní funkce k prosté funkci $f(x)$ je funkce, která každému $y \in H(f)$ přiřadí právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$. Značíme ji f^{-1} .

Poznámka

Pro definiční obor a obor hodnot platí:

$$D(f^{-1}) = H(f) \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Dále platí:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Poznámka

Grafy funkce f a funkce inverzní f^{-1} jsou symetrické podle osy prvního a třetího kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$. Inverzní funkce f^{-1} zachovává monotónnost funkce f .

1.12 Přehled elementárních funkcí

Základní elementární funkce jsou: $y = c$, $y = x$, $y = \sin x$, $y = e^x$; $c \in \mathbb{R}$.

Definice

Elementární funkce nazveme každou funkci, která vznikne ze základních elementárních funkcí pomocí operací s funkcemi (součet, rozdíl, součin, podíl, skládání a invertování).

Elementární funkce jsou funkce:

- polynomy a obecně mocninné,
- exponenciální a logaritmické,
- goniometrické a cyklometrické,
- hyperbolické a hyperbolometrické, těmito funkcemi se zabývat nebudeme.

1.13 Polynomy

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

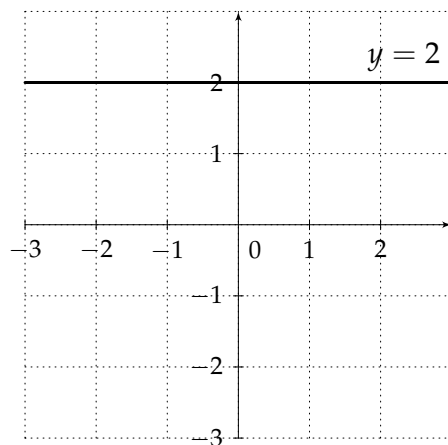
Podrobně se budeme zabývat polynomy vybraných typů:

- konstantní funkce $y = a_0, n = 0$
- lineární funkce $y = a_0 + a_1 x, n = 1, a_1 \neq 0$
- kvadratické funkce $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, n = 2, a_2 \neq 0$
- mocninné funkce $y = x^n, a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0, a_n = 1$

1.14 Konstantní funkce

$$y = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

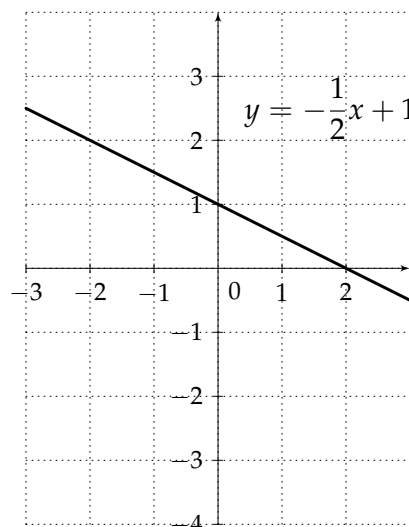
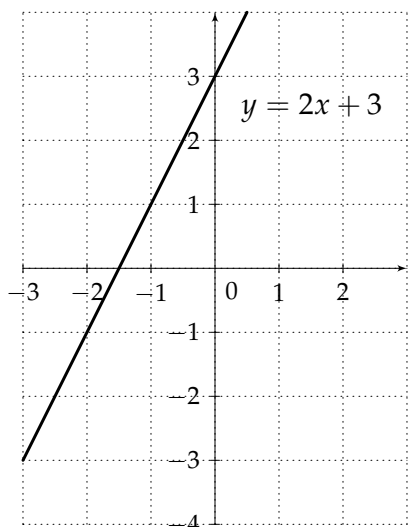
- $D_f = \mathbb{R}, H_f = \{a\}$
- grafem je přímka rovnoběžná s osou x protínající na ose y bod $[0, a]$
- funkce je ohraničená, je současně nerostoucí a neklesající, sudá (je-li $a = 0$, je současně lichá), periodická (základní perioda neexistuje), není prostá



1.15 Lineární funkce

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

- $D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}$
- grafem je přímka, která v bodě $[0, b]$ protíná osu y
- funkce je neohraničená, rostoucí pro $a > 0$, klesající pro $a < 0$, není sudá, je lichá pro $b = 0$, není periodická, je prostá



1.16 Kvadratické funkce

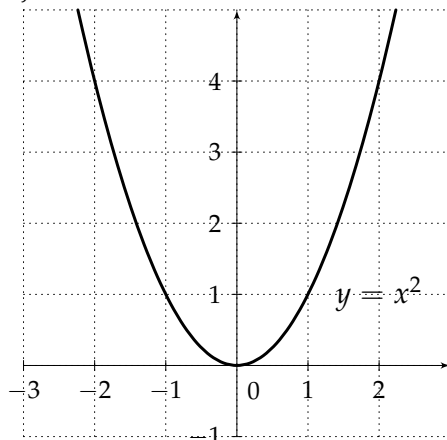
$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

- $D_f = \mathbb{R}$, H_f závisí na funkčním předpisu
- není periodická, není prostá, speciálně pro $b = 0$ je funkce $y = ax^2 + c$ sudá

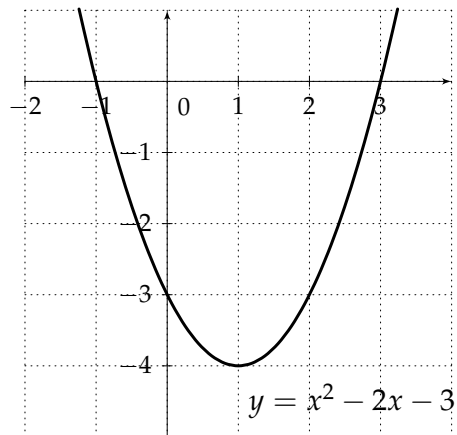
Grafem je parabola, která má vrchol v bodě $\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$ a v bodě $[0, c]$ protíná osu y .

Průsečíky s osou x jsou řešením kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Z hlediska diskriminantu $D = b^2 - 4ac$ rozlišujeme tři případy:

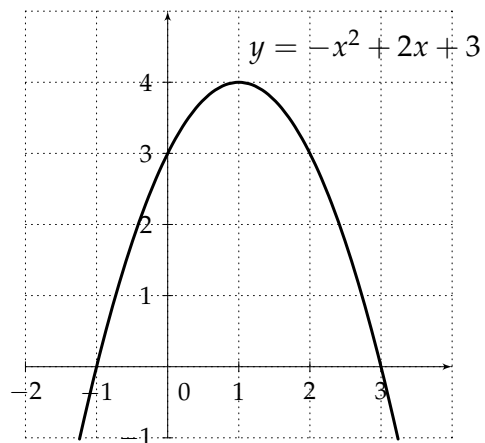
- $D > 0$ existují dva průsečíky $\left[\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, 0\right]$, $\left[\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, 0\right]$
- $D = 0$ existuje jeden průsečík $\left[\frac{-b}{2a}, 0\right]$
- $D < 0$ průsečík neexistuje



pro $a > 0$ má parabola konvexní tvar, funkce je ohraničená zdola



pro $a < 0$ má parabola konkávní tvar, funkce je ohraničená shora



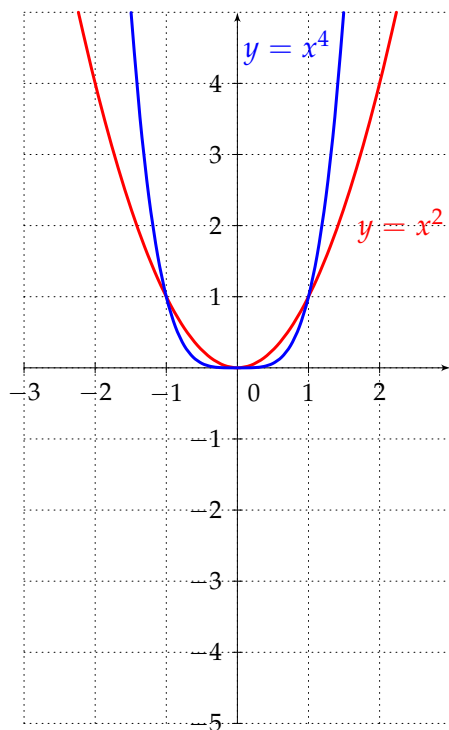
1.17 Mocninné funkce s přirozeným exponentem

$$y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

- $D_f = \mathbb{R}$

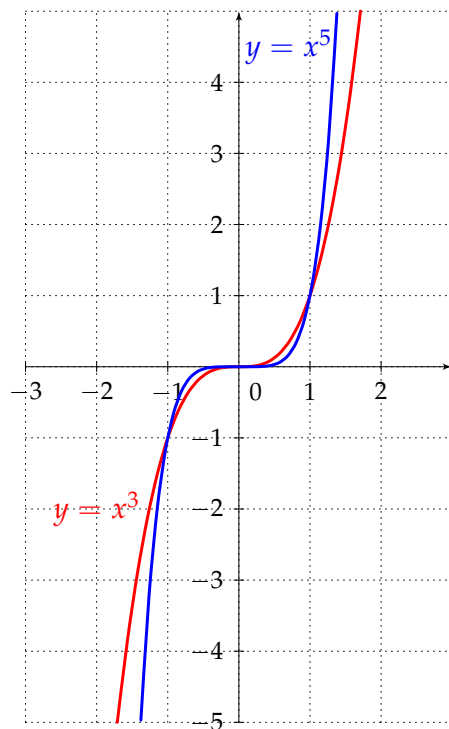
pro n **sudé**:

- $H_f = \langle 0, \infty \rangle$
- funkce jsou ohraničené zdola, jsou sudé, nejsou prosté



pro n liché:

- $H_f = \mathbb{R}$
- funkce jsou neohraničené, jsou liché a prosté



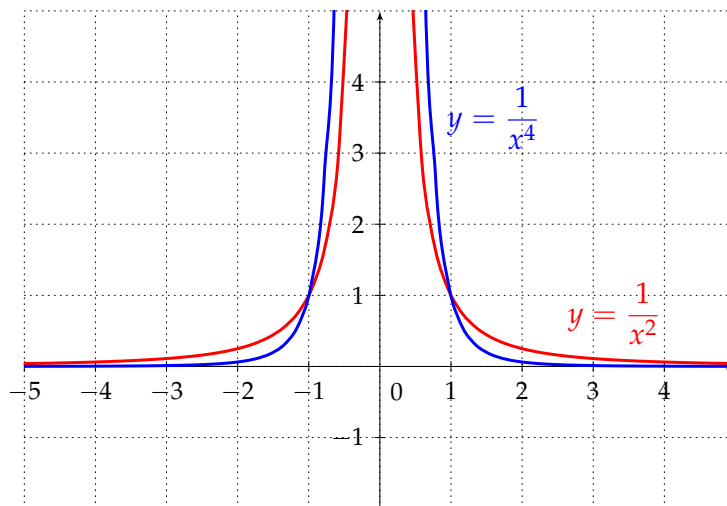
1.18 Mocninné funkce s celým záporným exponentem

$$y = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

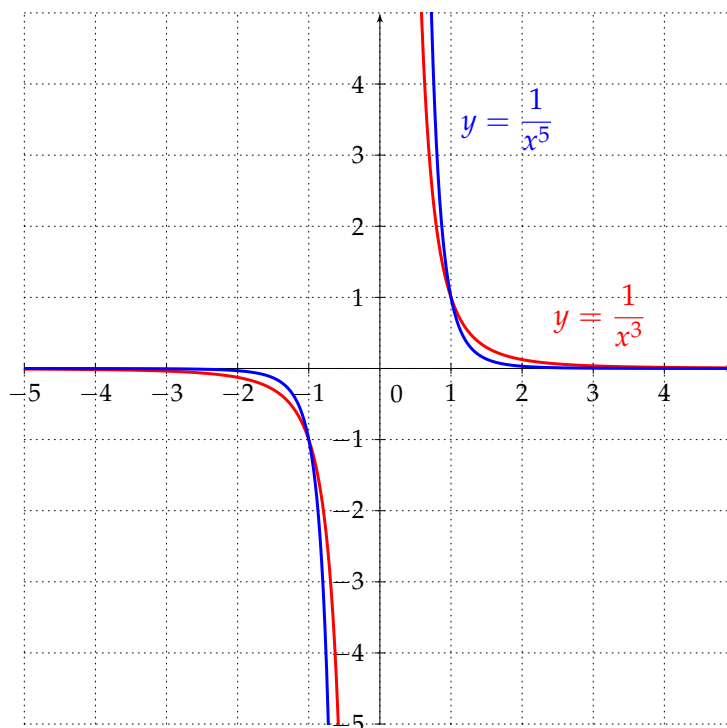
Speciálně pro n **sudé**:

- $H_f = (0, \infty)$, funkce jsou ohraničené zdola, sudé, nejsou prosté



Speciálně pro n **liché**:

- $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce jsou neohraničené, liché, jsou prosté

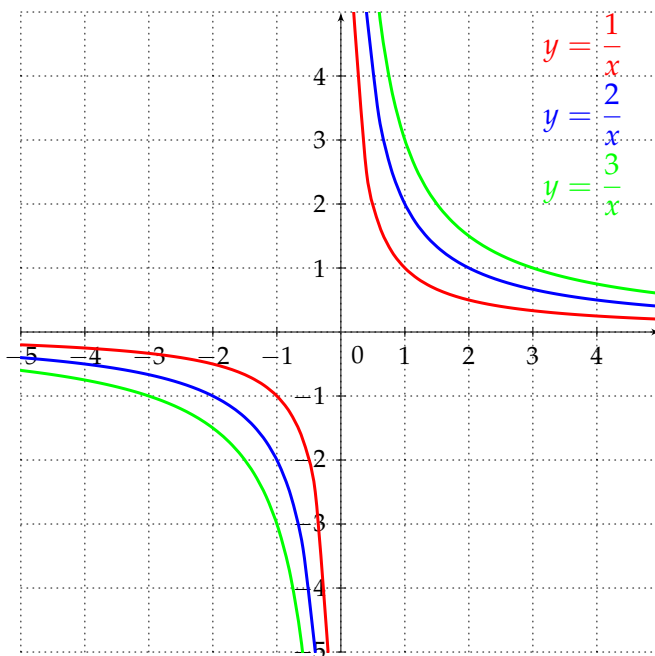


1.19 Lineární lomené funkce

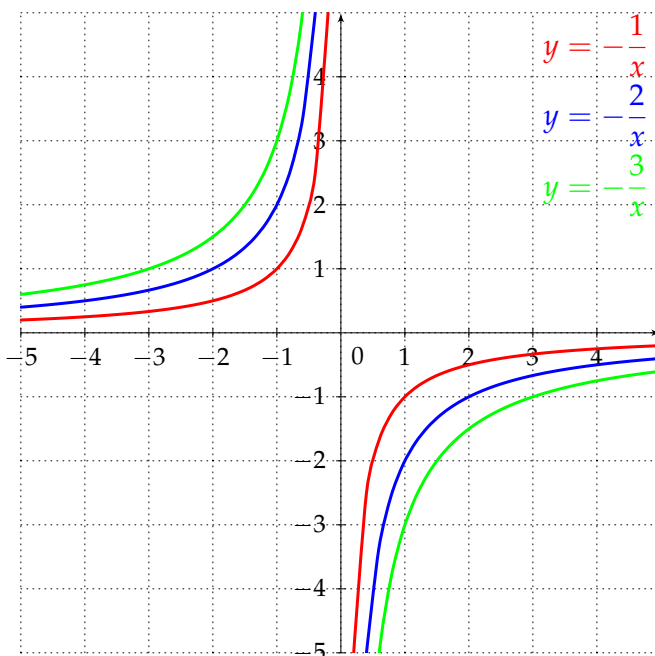
$$y = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}, k \neq 0$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, grafem jsou hyperboly, osy x, y jsou asymptoty hyperbol a střed je bod $[0, 0]$, funkce jsou neohraničené, liché, prosté

pro $k > 0$ leží větve hyperbol v I. a III. kvadrantu, klesají na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$



pro $k < 0$, leží větve hyperbol ve II. a IV. kvadrantu, rostou na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

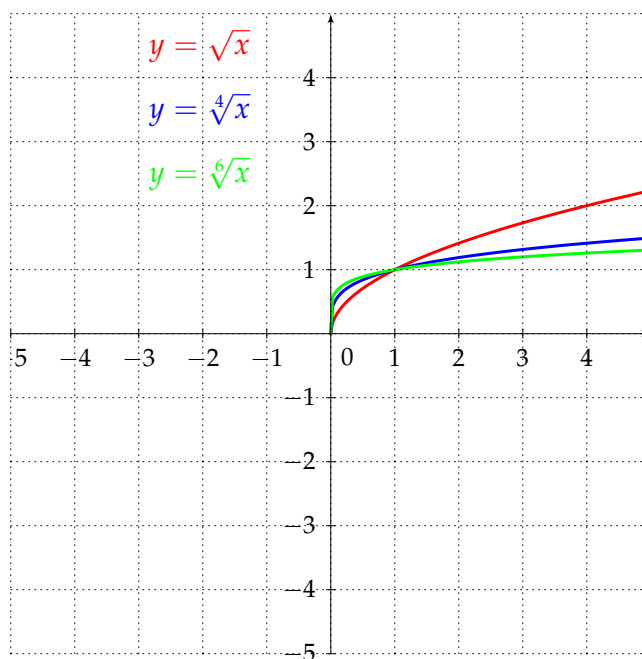


1.20 Funkce odmocnina

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

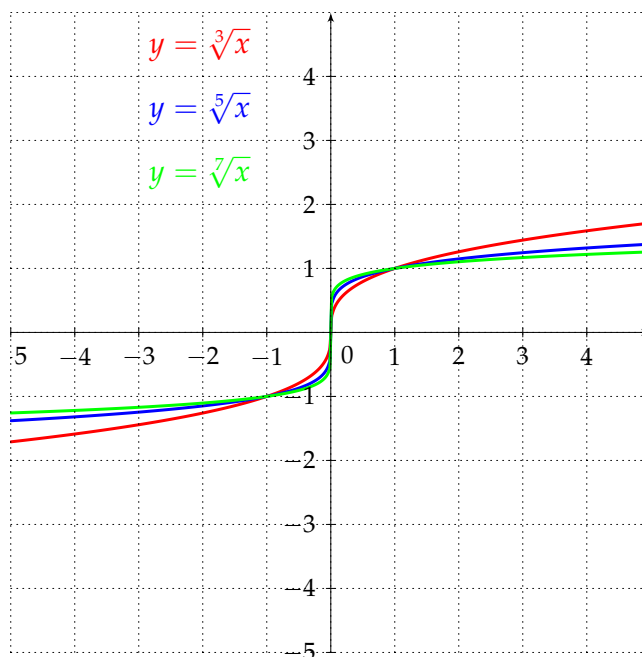
Speciálně pro n sudé:

- $D_f = \langle 0, \infty \rangle$, $H_f = \langle 0, \infty \rangle$, funkce jsou ohraničené zdola, prosté, rostoucí



Speciálně pro n liché:

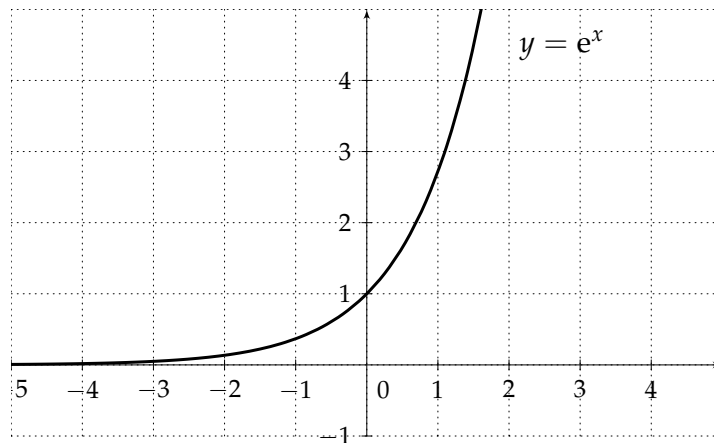
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$, funkce jsou prosté, liché, neohraničené



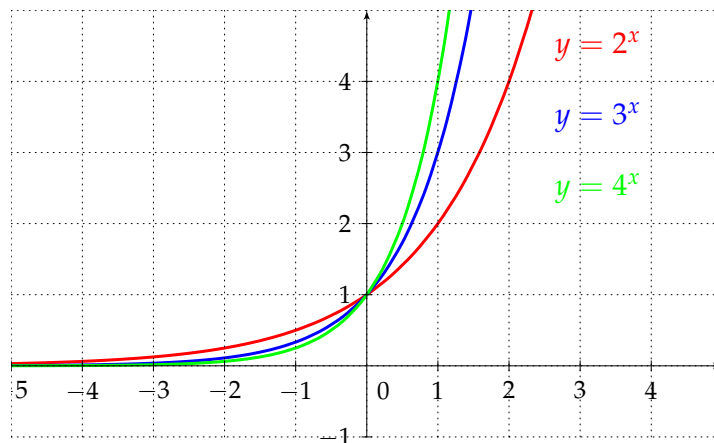
1.21 Exponenciální funkce

$$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

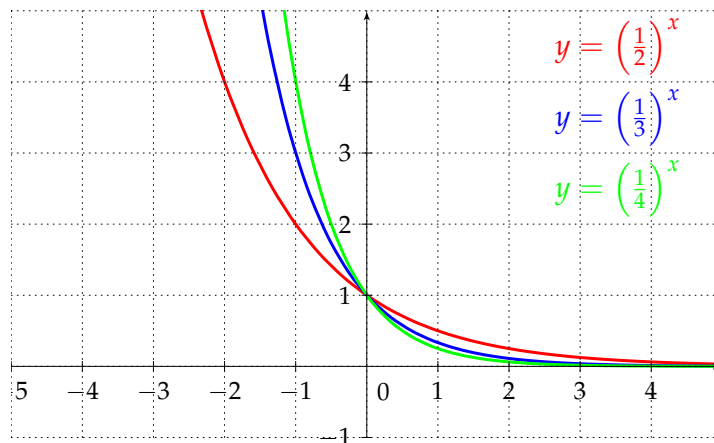
- $D_f = \mathbb{R}, H_f = (0, \infty)$
- číslo a se nazývá **základ** exponenciální funkce
- grafy protínají osu y v bodě $[0, 1]$
- funkce jsou ohraničené zdola, nejsou ani sudé ani liché
- funkce jsou prosté (inverzní funkce jsou funkce logaritmické)
- speciálně: Je-li základem Eulerovo číslo $e = 2,71828 \dots$ pak funkce $y = e^x$ se nazývá **přirozená exponenciální funkce**.



je-li $a > 1$, jsou funkce rostoucí



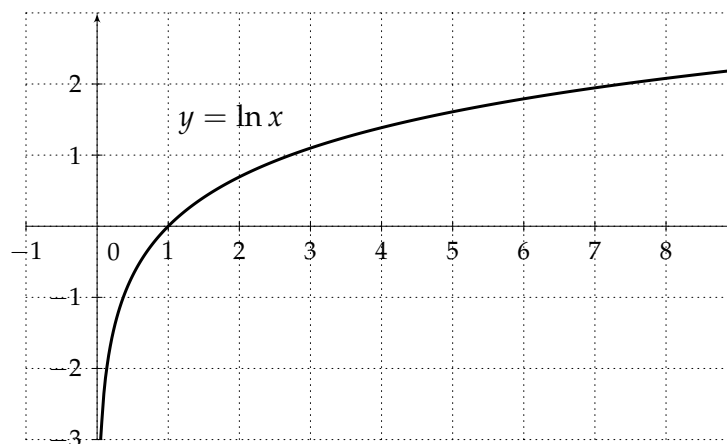
je-li $0 < a < 1$, jsou funkce klesající



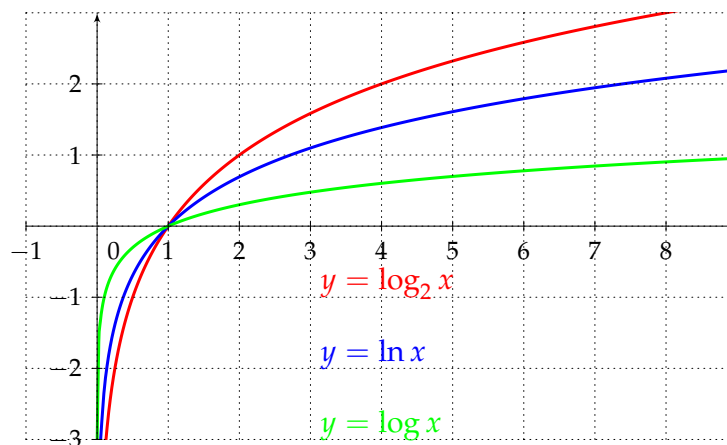
1.22 Logaritmické funkce

$$y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$$

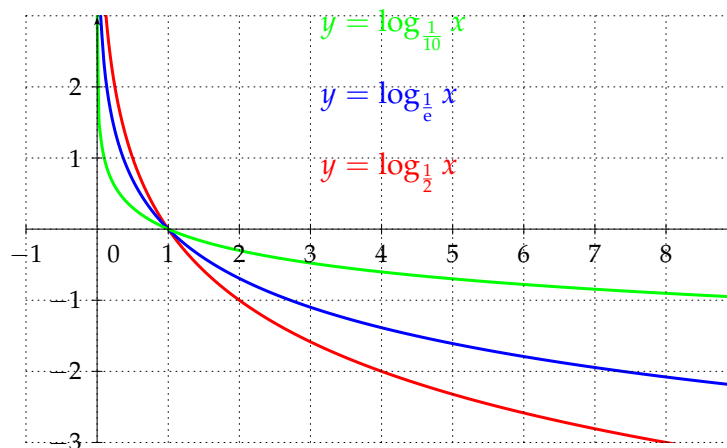
- $D_f = (0, \infty)$, $H_f = \mathbb{R}$
- číslo a se nazývá **základ** logaritmické funkce
- grafy protínají osu x v bodě $[1, 0]$
- funkce jsou neohraničené, nejsou ani sudé ani liché,
- funkce jsou prosté (logaritmické funkce jsou inverzní k exponenciálním)
- speciálně: Je-li základem Eulerovo číslo e , pak $y = \log_e x = \ln(x)$ a nazývá se **přirozený logaritmus**.
- Je-li základem číslo 10, pak $y = \log_{10} x = \log x$ a nazývá se **dekadický logaritmus**.



je-li $a > 1$, jsou funkce rostoucí



je-li $0 < a < 1$, jsou funkce klesající

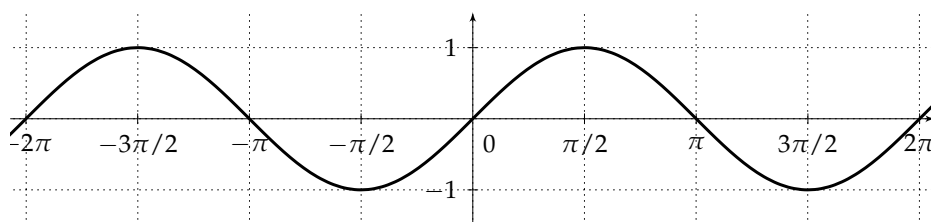


1.23 Goniometrické funkce

Funkce sinus

$$y = \sin x$$

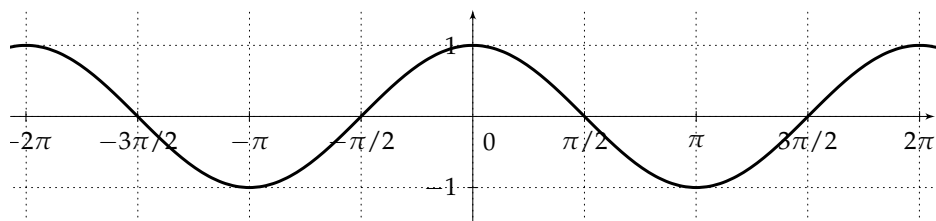
- $D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1, 1 \rangle$
- funkce je periodická s periodou $p = 2\pi$
- funkce je ohraničená, je lichá, není prostá
- funkce je rostoucí na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- funkce je klesající na intervalu $\langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Funkce kosinus

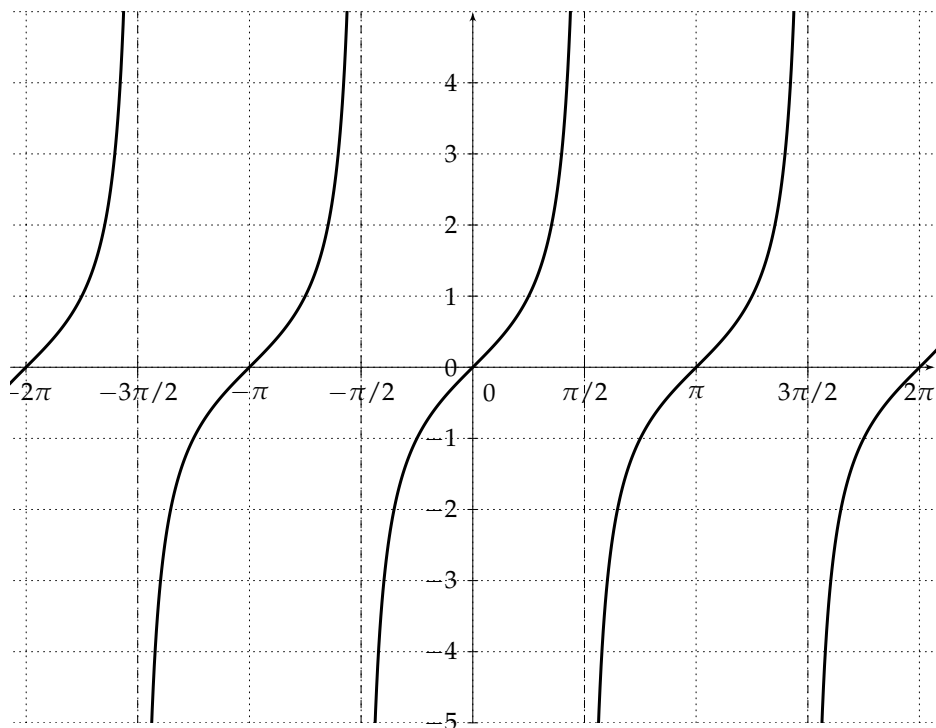
$$y = \cos x$$

- $D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1, 1 \rangle$
- funkce je periodická s periodou $p = 2\pi$
- funkce je ohraničená, je sudá, není prostá
- funkce je rostoucí na intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- funkce je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Funkce tangens**

$$y = \tan x$$

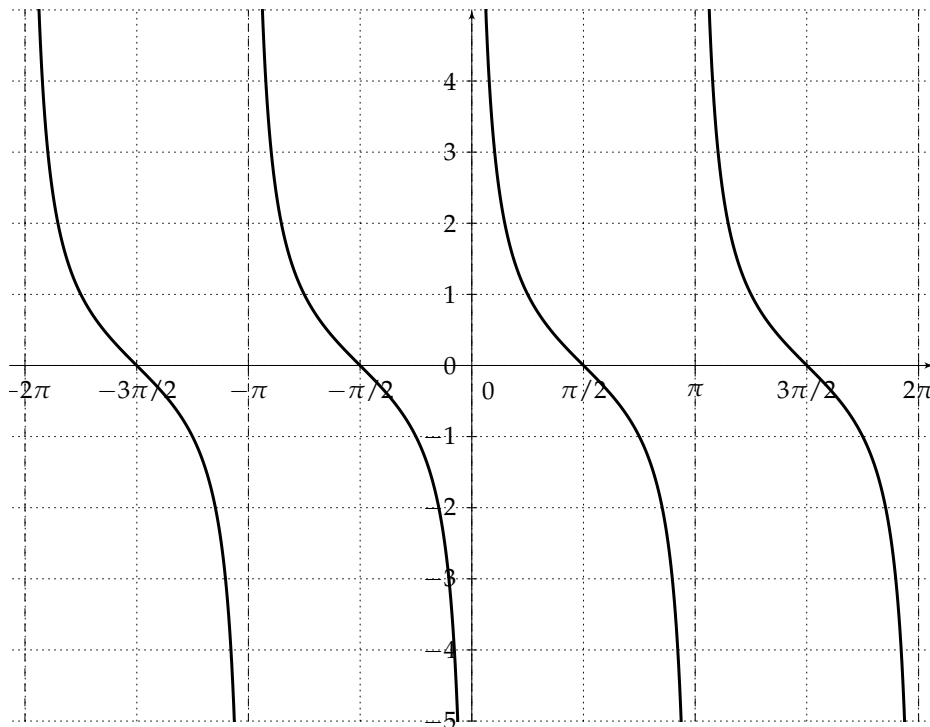
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}, H_f = \mathbb{R}$
- funkce je periodická s periodou $p = \pi$
- funkce je neohraničená, je lichá, není prostá
- funkce je rostoucí na intervalu $(-\pi/2, \pi/2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Funkce kotangens

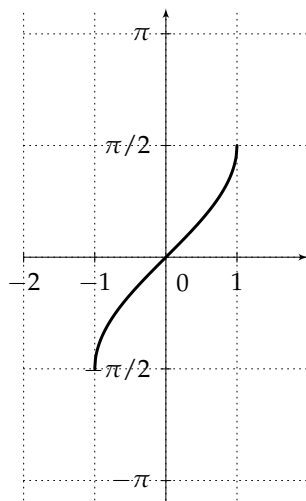
$$y = \cot x$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, H_f = \mathbb{R}$
- funkce je periodická s periodou $p = \pi$
- funkce je neohraničená, je lichá, není prostá
- funkce je klesající na intervalu $(0, \pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**1.24 Cyklometrické funkce****Funkce arkussinus**

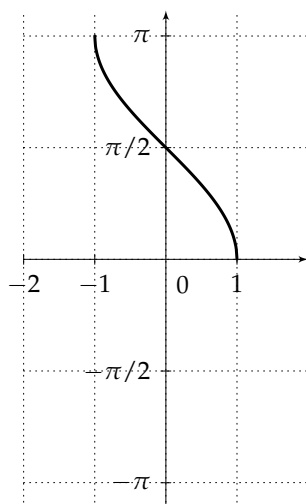
$$y = \arcsin x$$

- inverzní k funkci $y = \sin x$ omezené na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
- $D_f = \langle -1, 1 \rangle, H_f = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
- funkce je ohraničená, lichá, prostá, rostoucí

**Funkce arkuskosinus**

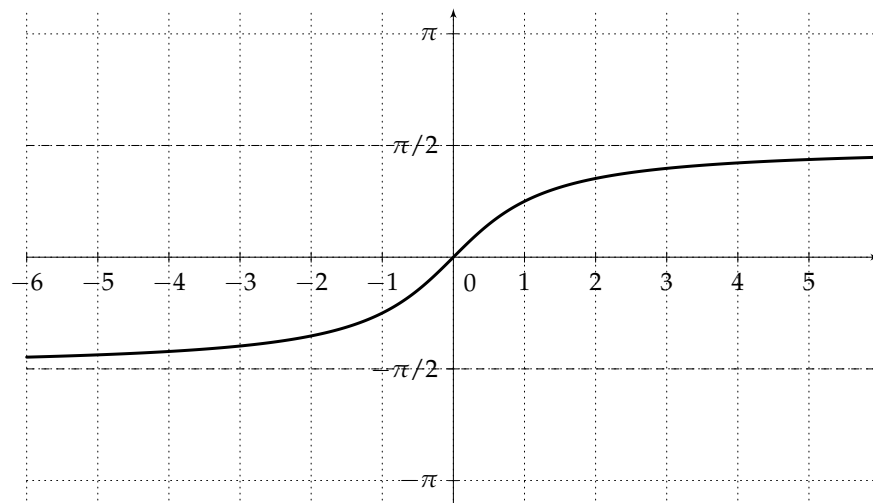
$$y = \arccos x$$

- inverzní k funkci $y = \cos x$ omezené na interval $\langle 0, \pi \rangle$
- $D_f = \langle -1, 1 \rangle$, $H_f = \langle 0, \pi \rangle$
- funkce je ohraničená, prostá, klesající

**Funkce arkustangens**

$$y = \arctan x$$

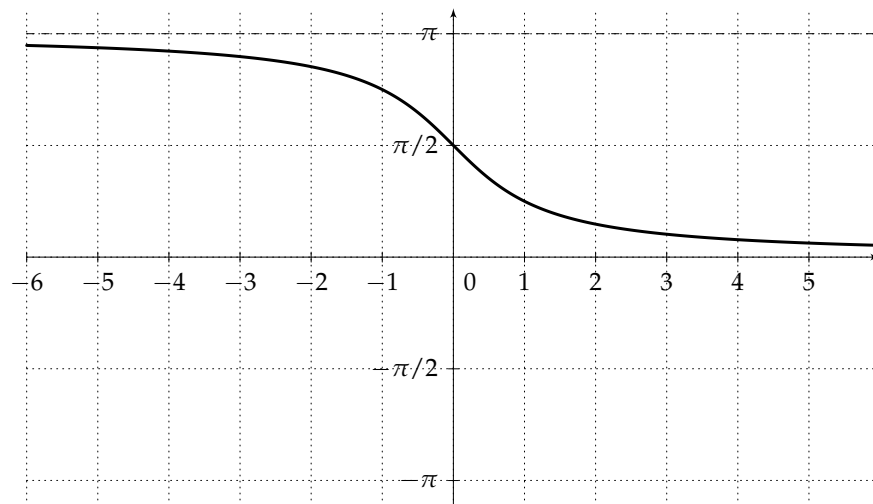
- inverzní k funkci $y = \tan x$ omezené na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- funkce ohraničená, lichá, prostá, rostoucí



Funkce arkuskotangens

$$y = \operatorname{arccot} x$$

- inverzní k funkci $y = \cot x$ omezené na interval $(0, \pi)$
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, \pi)$
- funkce je ohraničená, prostá, klesající

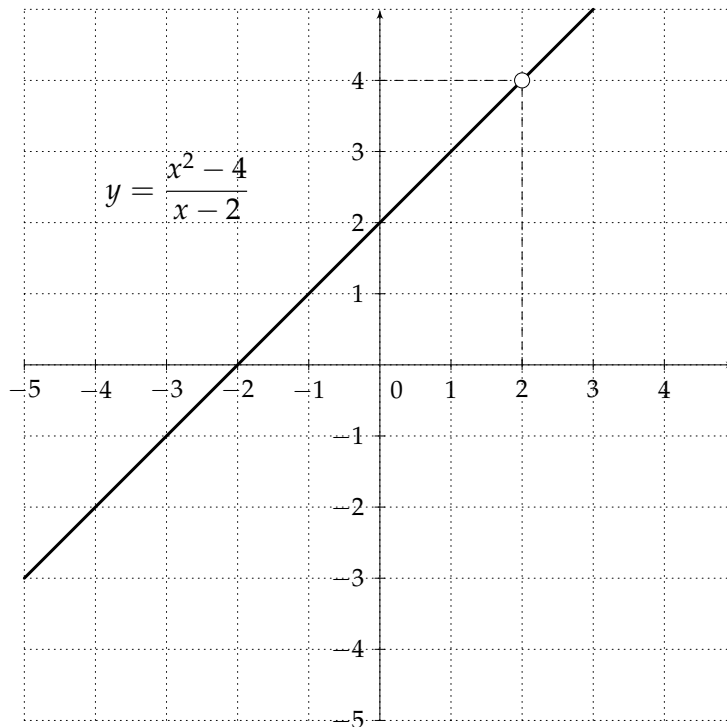


1.25 Limita funkce - motivace

Budeme vyšetřovat chování funkce f ,

$$f: y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

v „blízkosti“ bodu $x = 2$. Definiční obor funkce f je množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Načrtneme graf funkce f .



 Přibližování zprava

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	...	2
$f(x)$								

 Přibližování zleva

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2
$f(x)$								

1.26 Rozšíření množiny reálných čísel

Definice

Množinu reálných čísel \mathbb{R} rozšíříme o prvky $\infty, -\infty$ a nazveme **rozšířenou množinou reálných čísel** \mathbb{R}^* :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní body**, body množiny \mathbb{R} nazýváme **vlastní body**.

Vlastnosti množiny \mathbb{R}^*

Pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí: $-\infty < c < \infty$

Součet a rozdíl

$$c + \infty = \infty \quad c - \infty = -\infty \quad \infty + \infty = \infty \quad -\infty - \infty = -\infty$$

Podíl $\frac{c}{\infty} = 0 \quad \frac{c}{-\infty} = 0$

Součin

$$\begin{aligned} \infty \cdot \infty &= \infty & \infty \cdot (-\infty) &= -\infty & -\infty \cdot (-\infty) &= \infty \\ \text{pro } c > 0 \text{ platí } c \cdot \infty &= \infty & c \cdot (-\infty) &= -\infty \\ \text{pro } c < 0 \text{ platí } c \cdot \infty &= -\infty & c \cdot (-\infty) &= \infty \end{aligned}$$

Další operace definujeme pomocí komutativnosti sčítání a násobení.

Poznámka

Výrazy

$$,\frac{0}{0}, ,\frac{\infty}{\infty}, ,0 \cdot \infty, ,\infty - \infty, ,0^0, ,\infty^0, ,0^\infty, ,1^\infty,$$

nejsou definovány a nazývají se **neurčité výrazy**. Neurčitost budeme zvýrazňovat pomocí uvozovek.

1.27 Okolí bodu

Definice

Okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval bodů, které mají od bodu x_0 vzdálenost menší než δ , tedy:

$$O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Prstencovým okolím bodu nazveme množinu $O(x_0) \setminus \{x_0\}$, značíme $P(x_0)$.

$$P(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

Okolím bodu ∞ rozumíme libovolný interval tvaru (A, ∞) , kde A je reálné číslo:

$$O(\infty) = (A, \infty)$$

Okolím bodu $-\infty$ rozumíme libovolný interval tvaru $(-\infty, A)$, kde A je reálné číslo:

$$O(-\infty) = (-\infty, A)$$

Poznámka

Prstencová okolí bodu $\pm\infty$ jsou stejná jako okolí těchto bodů.

1.28 Jednostranné okolí bodu

Definice

Pravým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval:

$$O^+(x_0) = \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$$

Levým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval:

$$O^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 \rangle$$

Pravým (levým) prstencovým okolím bodu nazveme interval:

$$P^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta) \quad P^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$$

1.29 Definice limity funkce

Definice

Nechť je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $L \in \mathbb{R}^*$. Nechť je funkce f definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 . Řekneme, že **funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou L** , jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro libovolné $x \in P(x_0)$ leží hodnota $f(x)$ v $O(L)$. Značíme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Poznámka

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ řekneme že má funkce **vlastní (konečnou) limitu**.

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ řekneme že má funkce **nevlastní (nekonečnou) limitu**.

Pokud $x_0 = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R}$ řekneme že má funkce **vlastní (konečnou) limitu v nevlastním bodě**.

Pokud $x_0 = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ řekneme že má funkce **nevlastní (nekonečnou) limitu v nevlastním bodě**.

1.30 Definice jednostranné limity funkce

Definice

Nechť je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $L \in \mathbb{R}^*$. Nechť je funkce f definovaná na nějakém pravém (resp. levém) prstencovém okolí bodu x_0 . Řekneme, že **funkce f má v bodě a limitu zprava (resp. zleva) rovnou L** , jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje pravé (resp. levé) prstencové okolí $P^+(x_0)$ (resp. $P^-(x_0)$) bodu x_0 takové, že pro libovolné $x \in P^+(x_0)$ (resp. $P^-(x_0)$) leží hodnota $f(x)$ v $O(L)$. Značíme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L)$$

Věta

Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu.

Poznámka

Má i nejvýše jednu limitu zleva a nejvýše jednu limitu zprava.

Věta

Funkce f má v bodě x_0 limitu právě tehdy, má-li v tomto bodě limitu zprava i zleva a tyto limity se rovnají.

1.31 Operace s limitami

Věta

Nechť mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ limitu v bodě x_0 , pak platí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Věta

Nechť je dána složená funkce $y = g(f(x))$ a necht' dále $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ a existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že $f(x) \neq a$ pro každé $x \in P(x_0)$. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = c$.

Věta

Věta o dvou limitách

Jestliže pro funkce f a g platí $f(x) = g(x)$ pro všechna x z definičního oboru D_f kromě bodu $x = x_0$, a jestliže existuje limita L funkce f v bodě x_0 , pak i funkce g má v bodě x_0 stejnou limitu L ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

Věta

Věta o třech limitách

Jestliže funkce f a g mají v bodě $x = x_0$ limitu L a pro funkci h platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

1.32 Vybrané limity

Typ limity $\frac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

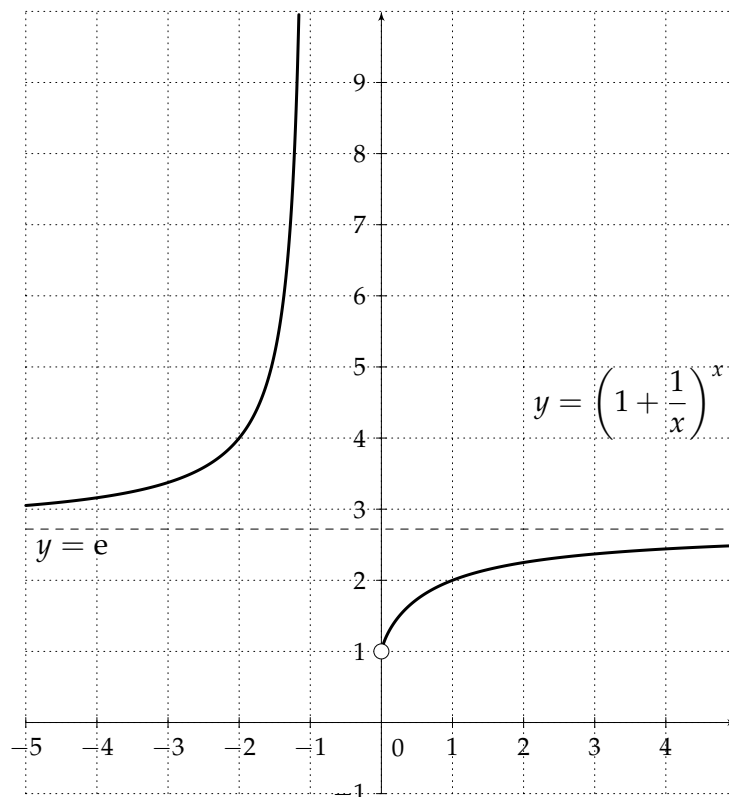
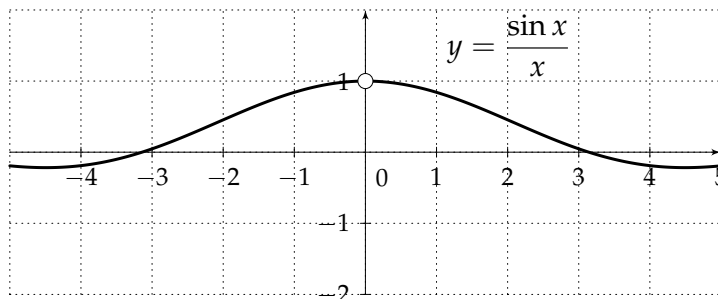
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{0} = \begin{cases} \infty & (a > 0, g(x) > 0) \vee (a < 0, g(x) < 0) \\ -\infty & (a > 0, g(x) < 0) \vee (a < 0, g(x) > 0) \end{cases}$$

Limity některých elementárních funkcí

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty & & \end{array}$$

Některé další důležité limity

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(kx)}{kx} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \text{ kde } k \in \mathbb{R} \end{array}$$



1.33 Spojitost

Definice

Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu x_0 a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

pak řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** x_0 .

Poznámka

Obdobně definujeme spjitost zprava nebo zleva.

Definice

Nechť $I \subseteq D_f$, řekneme, že **funkce je spjitá na intervalu** I , je-li spjitá v každém bodě intervalu I . Patří-li do intervalu dolní mez intervalu, je v něm spjitá zprava, a patří-li do něj horní mez intervalu, je v něm spjitá zleva.

Věta

Všechny elementární funkce jsou spjité na svém definičním oboru.

1.34 Věty o spjitých funkcích

Věta

(Weierstrassova)

Nechť funkce f je spjitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak f je na tomto intervalu ohraničená.

Poznámka

Funkce f nabývá na uzavřeném intervalu svého minima a maxima.

Věta

(Bolzanova-Cauchyho)

Nechť funkce f je spjitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(a) \neq f(b)$. Číslo c leží mezi hodnotami $f(a)$ a $f(b)$. Pak existuje aspoň jedno $x_0 \in (a, b)$, pro které platí $f(x_0) = c$.

Poznámka

Zvolme $c = 0$. Je-li funkce f spjitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ opačná znaménka, pak existuje aspoň jedno $x_0 \in (a, b)$, pro které platí $f(x_0) = 0$.

2 Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

2.1 Derivace funkce

Definice

Je dána funkce f a bod $x_0 \in D_f$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pak ji nazveme **derivací funkce f v bodě x_0** a značíme ji $f'(x_0)$.

Věta

Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce f , pak je v tomto bodě funkce f spojitá.

Definice

Nechť je funkce f definována v každém bodě intervalu (a, b) a má v každém bodě derivaci $f'(x)$. Pak je na (a, b) definovaná funkce f' , která každému $x \in (a, b)$ přiřadí hodnotu $f'(x)$. Tuto funkci nazveme **derivace funkce f** . Značíme $f'(x)$, y' , $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

Poznámka

Má-li funkce f derivaci na intervalu I , pak říkáme, že je na I **diferencovatelná**.

2.2 Vlastnosti derivace

Věta

Nechť funkce f a g mají na intervalu I derivaci. Pak na I platí:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

Derivace součtu, rozdílu

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Derivace součinu

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derivace podílu

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \text{pro } g(x) \neq 0$$

2.3 Derivace elementárních funkcí

Derivace konstantní funkce

$$[c]' = 0$$

Derivace mocninné funkce

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$

Derivace exponenciální funkce

$$[e^x]' = e^x \quad [a^x]' = a^x \cdot \ln a$$

Derivace logaritmické funkce

$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \quad [\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Derivace goniometrických funkcí

$$\begin{aligned} [\sin x]' &= \cos x & [\tan x]' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ [\cos x]' &= -\sin x & [\cot x]' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Derivace cyklometrických funkcí

$$\begin{aligned} [\arcsin x]' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & [\arctan x]' &= \frac{1}{1+x^2} \\ [\arccos x]' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & [\operatorname{arccot} x]' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

2.4 Derivace složené funkce

Věta

Nechť existuje derivace $f'(x_0)$ a derivace $g'(f(x_0))$. Pak existuje derivace složené funkce $g(f(x))$ v bodě x_0 a platí:

$$[g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Poznámka

Na intervalu I , kde existují příslušné derivace tedy platí:

$$y = g(f(x)) \Rightarrow y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Derivace složené funkce je rovna součinu derivace vnější funkce (s původním argumentem) a derivace vnitřní funkce.

2.5 Logaritmické derivování

Funkci $y = f(x)^{g(x)}$ nelze derivovat jako $y = x^n$ (neboť exponent není konstanta) ani jako $y = a^x$ (základ není konstanta). Funkci upravíme do tvaru, který umožní použít vzorce pro derivování.

Funkci $y = f(x)^{g(x)}$ upravíme:

$$y = f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Nyní funkci v tomto tvaru zderivujeme:

$$\begin{aligned} y' &= \left[e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \right]' = \\ &= e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right) = \\ &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

2.6 Derivace vyšších řádů

Definice

Nechť má funkce $f'(x)$ derivaci na intervalu I . Pak funkci $[f'(x)]'$ nazveme **druhou derivací funkce f** a značíme $f''(x)$.

Poznámka

Obdobně definujeme derivaci n -tého řádu

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$$

2.7 l'Hospitalovo pravidlo

l'Hospitalovo pravidlo se používá pro výpočet limit typu „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ “.

Věta

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $L \in \mathbb{R}^*$, a

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$,
2. existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

pak existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Poznámka

Limity vedoucí na neurčité výrazy typu

$$„0 \cdot \infty“, „\infty - \infty“, „0^0“, „\infty^0“, „0^\infty“, „1^\infty“$$

lze převést na typ „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ “, a poté řešit l'Hospitalovým pravidlem.

2.8 Derivace parametricky zadané funkce

Definice

Jsou dány funkce $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$ je parametr. Necht' existuje ϕ^{-1} . Pak funkci

$$y = f(x) = \psi(\phi^{-1}(x))$$

nazveme **parametricky zadanou funkcí**.

Věta

Funkce f je dána parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$. Necht' $\phi(t)$ a $\psi(t)$ mají derivaci v každém bodě intervalu I . Pak **derivace parametricky zadané funkce f** je dána vztahem:

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\phi}(t)}$$

Poznámka

Derivaci podle t značíme tečkou, abychom ji odlišili od derivace podle x , kterou značíme čárkou.

Věta

Funkce f je dána parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$. Necht' $\phi(t)$ a $\psi(t)$ mají první a druhou derivaci v každém bodě intervalu I . Pak **druhá derivace parametricky zadané funkce f** je dána vztahem:

$$y'' = \frac{\ddot{\psi}(t) \cdot \dot{\phi}(t) - \dot{\psi}(t) \cdot \ddot{\phi}(t)}{(\dot{\phi}(t))^3}$$

2.9 Diferenciál funkce

Definice

Řekneme, že funkce $y = f(x)$ je v bodě x_0 **diferencovatelná**, nebo má v tomto bodě **diferenciál**, jestliže je možné její přírůstek Δy na okolí bodu x_0 vyjádřit jako

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathcal{A}h + h\tau(h),$$

kde \mathcal{A} je konstanta a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$. Funkce f se nazývá **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě $x \in D_f$.

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0 , pak v bodě x_0 existuje derivace prvního řádu a platí

$$\mathcal{A} = f'(x_0).$$

Poznámka: Číslo h představuje přírůstek na ose x , je zvykem tento přírůstek značit $h = dx$. Pro přírůstek na ose y v bodě x_0 při známé hodnotě dx pak dostáváme

$$\Delta y = f'(x_0)dx + dx\tau(dx).$$

Definice

Je-li funkce $y = f(x)$ diferencovatelná, nazýváme následující výraz **diferenciálem** funkce f ,

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0 , pak je v tomto bodě spojitá.

Věta

Je-li derivace prvního řádu funkce f spojitá v x_0 , pak je funkce f v bodě x_0 diferencovatelná (a tedy i spojitá).

Geometrický význam diferenciálu Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 při známém přírůstku dx je přírůstek na tečně sestrojené ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Poznámka

- Diferenciál funkce $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx.$$

- Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x_0

$$dy(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 při známém přírůstku dx ,

$$dy(x_0)(dx) = f'(x_0)dx \in \mathbb{R}.$$

- Diferenciál druhého řádu funkce $y = f(x)$

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

- Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)(dx).$$

2.10 Tečna a normála

Definice

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Přímkou t , procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ a mající směrnici rovnu hodnotě derivace funkce f v x_0 nazveme **tečna ke grafu funkce f v bodě x_0** .

Přímkou n , procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ a kolmou k tečně nazveme **normála ke grafu funkce f v bodě x_0** .

Věta

Tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 je dána předpisem:

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Normála ke grafu funkce f v bodě x_0 je daná předpisem:

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Poznámka

V bodě, ve kterém nemá funkce f derivaci, tečna neexistuje.

Poznámka

Rovnici tečny lze přímo odvodit z diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 ,

$$dy(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

přičemž $y_0 = f(x_0)$, a tedy

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

2.11 Taylorův polynom

Pro aproximaci funkce f na okolí bodu x_0 se používá tzv. Taylorův polynom, což je polynom, který má vzhledem k funkci f v bodě x_0 stejné hodnoty derivací až do řádu n .

Definice

Nechť je dána funkce $f(x)$, která má v bodě $x_0 \in D_f$ derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$. Pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0)$$

nazveme **Taylorův polynom funkce f stupně n na okolí bodu x_0** .

Poznámka

- Taylorův polynom je kombinací diferenciálů až do stupně n .
- Rozepíšeme-li diferenciály, dostáváme alternativní tvar Taylorova polynomu,

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

- Taylorův polynom prvního stupně je tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 .
- V případě $x_0 = 0$ se Taylorův polynom nazývá **Maclaurinův polynom**.

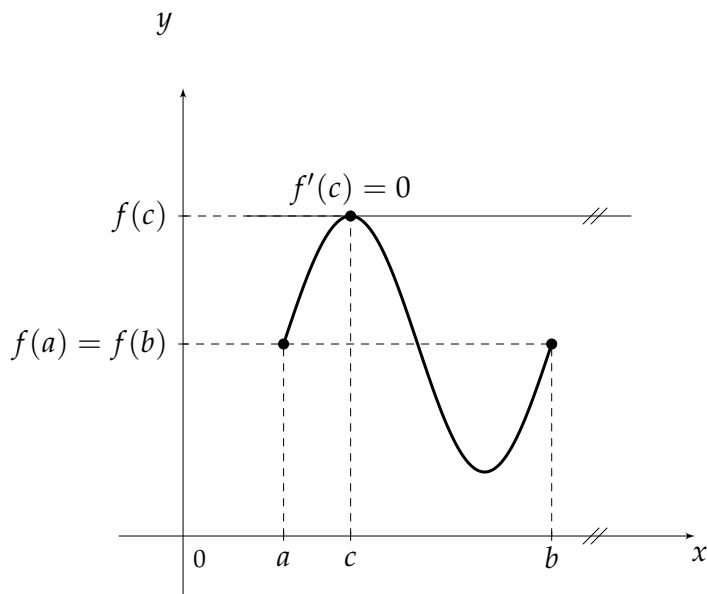
2.12 Věty o derivaci

Věta

(Rolleova věta)

Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v intervalu (a, b) derivaci. Nechť dále platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje aspoň jedno $c \in (a, b)$ takové, že:

$$f'(c) = 0.$$



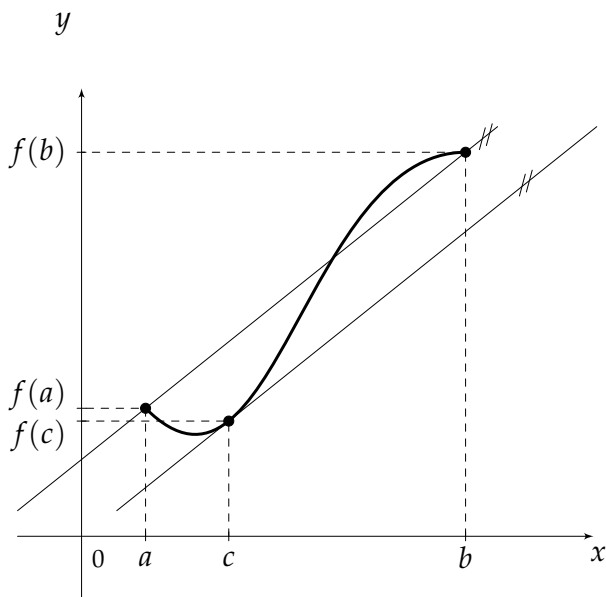
Poznámka

V bodě c je tečna rovnoběžná s osou x .

Věta**(Lagrangeova věta o střední hodnotě)**

Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje aspoň jedno $c \in (a, b)$ takové, že:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Poznámka**

1. V bodě c je tečna rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.
2. Platí-li $f(a) = f(b)$ dostaneme Rolleovu větu.

2.13 Monotónnost funkce**Věta**

Platí-li $f'(x_0) > 0$, pak je funkce f v bodě x_0 rostoucí. Platí-li $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f v bodě x_0 klesající.

Věta

Nechť je funkce f definována na intervalu I . Platí-li na I $f'(x) > 0$, pak je funkce f na I rostoucí. Platí-li $f'(x) < 0$ na I , pak je funkce f na I klesající.

Poznámka

Intervaly, na kterých je funkce rostoucí nebo klesající se nazývají **intervaly monotónnosti**.

2.14 Extrémy funkce**Definice**

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, jestliže existuje takové okolí bodu x_0 , že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \leq f(x_0)$. Platí-li $f(x) < f(x_0)$, pak řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální maximum**.

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, jestliže existuje takové okolí bodu x_0 , že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \geq f(x_0)$. Platí-li $f(x) > f(x_0)$, pak řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální minimum**.

Poznámka

Má-li funkce v bodě lokální maximum nebo lokální minimum, říkáme, že má v bodě **lokální extrém**. Má-li funkce v bodě ostré lokální maximum nebo ostré lokální minimum, říkáme, že má v bodě **ostrý lokální extrém**.

Poznámka

Je-li okolím celý definiční obor funkce f , hovoříme o **globálních extrémech**.

Věta

(nutná podmínka existence lokálního extrému)

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace, pak platí

$$f'(x_0) = 0.$$

Poznámka

Funkce může mít lokální extrém pouze v bodech, ve kterých buď derivace neexistuje, nebo je derivace rovna nule.

Definice

Bod, ve kterém platí $f'(x_0) = 0$, nazveme **stacionárním bodem**.

Věta**(postačující podmínka existence extrému)**

Nechť platí $f'(x_0) = 0$ a existuje druhá derivace $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální minimum. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.

Poznámka

V bodech, ve kterých je $f''(x) = 0$ nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout podle této věty, je nutné vyšetřit lokální chování funkce f na okolí bodu x_0 z definice.

Postup při určování lokálních extrémů - první derivace

1. Určíme derivaci funkce a její definiční obor.
2. Najdeme stacionární body.
3. Stacionární body rozdělí definiční obor na intervaly. Na těchto intervalech rozhodneme o kladnosti resp. zápornosti derivace. Kladná derivace indikuje rostoucí funkci, záporná klesající.
4. Lokální maximum je v bodech, ve kterých funkce přechází z rostoucí na klesající. Lokální minimum je v bodech, ve kterých funkce přechází z klesající na rostoucí.

2.15 Konvexnost a konkávnost**Definice**

Nechť má funkce f derivaci v bodě x_0 . Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 **konvexní (resp. konkávní)**, jestliže existuje okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí je graf funkce f nad (resp. pod) tečnou sestrojenou ke grafu funkce f v bodě x_0 ,

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

resp.

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definice

Řekneme, že funkce f je **konvexní (resp. konkávní) na intervalu** $I \subset D_f$, jestliže je konvexní (resp. konkávní) v každém bodě intervalu I .

Věta

Nechť $f''(x_0) > 0$, pak je f v bodě x_0 konvexní.
Nechť $f''(x_0) < 0$, pak je f v bodě x_0 konkávní.

2.16 Inflexní body

Definice

Nechť má funkce f derivaci v bodě x_0 . Přejíždí-li graf funkce f v bodě x_0 z polohy pod tečnou do polohy nad tečnou (nebo naopak) nazveme bod x_0 **inflexním bodem** funkce $f(x)$.

Věta

(nutná podmínka existence inflexního bodu)

Je-li x_0 inflexní bod funkce f a má-li f v tomto bodě druhou derivaci, pak

$$f''(x_0) = 0.$$

Poznámka

Funkce může mít inflexi pouze v bodech, ve kterých buď neexistuje druhá derivace, nebo je druhá derivace rovna nule.

Věta

Je-li f' spojitá v x_0 a druhá derivace f'' mění v x_0 znaménko, pak x_0 je inflexním bodem funkce f .

Poznámka

Změna znaménka druhé derivace znamená změnu konvexnosti na konkávnost (nebo naopak).

Postup při určování inflexních bodů - druhá derivace

1. Určíme druhou derivaci funkce a její definiční obor.
2. Najdeme body, ve kterých je druhá derivace rovna nule.
3. Tyto body rozdělí definiční obor na intervaly. Na těchto intervalech rozhodneme o kladnosti resp. zápornosti derivace. Kladná derivace indikuje konvexnost funkce, záporná konkávnost.
4. Inflexní body jsou body, ve kterých derivace mění znaménko, tedy se mění charakter zakřivení funkce z konvexního na konkávní, nebo naopak.

2.17 Asymptoty

Asymptoty jsou přímky, ke kterým se „blíží“ graf funkce.

Definice

Nechť f je funkce. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptota se směrnici** pro $x \rightarrow \infty$,

jestliže existují vlastní limity,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx),$$

respektive je **asymptotou se směrnicí** pro $x \rightarrow -\infty$, jestliže existují vlastní limity,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx).$$

Definice

Nechť f je funkce. Řekneme, že přímka $x = x_0$ je **asymptota bez směrnice**, jestliže alespoň jedna jednostranná limita je nevlastní,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

Poznámka

- Bod x_0 nepatří do definičního oboru funkce f . Pokud ano, asymptota bez směrnice v něm neexistuje.
- Je-li $D_f = \mathbb{R}$, asymptota bez směrnice neexistuje.
- Jestliže, existuje asymptota bez směrnice v bodě x_0 , říkáme, že funkce f na okolí x_0 vykazuje asymptotické chování.
- Asymptoty se směrnicí mohou být buď dvě různé přímky, přímka jediná, nebo asymptota se směrnicí neexistuje.
- Asymptoty do grafu funkce f vyznačujeme čárkovaně.

2.18 Sestavení grafu funkce

K sestavení grafu funkce je potřeba vyšetřit následující vlastnosti

1. definiční obor funkce, nulové body, intervaly plus minus
2. sudost, lichost, periodičita
3. spojitost, asymptoty bez směrnice
4. první derivace, její definiční obor, nulové (stacionární) body, intervaly plus minus
5. monotónnost
6. lokální extrémů
7. druhá derivace, její definiční obor, nulové body, intervaly plus minus
8. konvexnost, konkávnost, inflexe
9. asymptoty se směrnicí
10. graf, obor hodnot

3 Lineární algebra

3.1 Matice

Definice

Množinu $I = \{1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{N}$ budeme nazývat **m -prvkovou indexovou množinou**.

Definice

Bud' $I = \{1, 2, \dots, m\}$ m -prvková indexová množina, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ n -prvková indexová množina. Maticí typu $m \times n$ rozumíme zobrazení

$$A : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, \quad [i, j] \rightarrow a_{ij} \text{ resp. } A([i, j]) = a_{ij}.$$

Index i se nazývá **řádkový index** (čísluje řádky), index j se nazývá **sloupcový index** (čísluje sloupce).

Poznámka

Bývá zvykem matici reprezentovat pomocí tabulky, prvky matice uspořádáme do řádků resp. sloupců,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Poznámka

Matice značíme obvykle velkými písmeny latinské abecedy. Chceme-li v označení matice zdůraznit její typ, používáme $A_{m \times n}$. V případě, že $m = n$, se používá termín **řád**, přičemž lze použít značení A_n .

3.2 Speciální tvary matic

- **Obdélníkovou maticí** rozumíme matici, pro kterou platí $m \neq n$.
- **Čtvercovou maticí** rozumíme matici, pro kterou platí $m = n$.
- **Nulová matice** je matice tvořená pouze nulami.
- **Jednotková matice** je taková čtvercová matice, kdy všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny jedné, všechny ostatní prvky jsou rovny nule. Jednotková matice má speciální označení, používá se písmeno E . Tedy

$$E_1 = (1), \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

Poznamenejme, že prvky hlavní diagonály jsou prvky a_{ij} takové, že $i = j$.

- **Horní (resp. dolní) trojúhelníková matice** je čtvercová matice, jejíž prvky pod (resp. nad) hlavní diagonálou jsou nulové, tedy

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i > j \quad (\text{resp. } a_{ij} = 0 \text{ pro } i < j).$$

- **Transponovaná matice** A^T k matici A je matice, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce,

$$(a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

- **Diagonální matice** je čtvercová matice A s nenulovými prvky nejvýše na hlavní diagonále, tedy

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j.$$

- **Submatice** A_{ij} matice A je matice, která vznikne z matice A vynecháním jejího i -tého řádku a j -tého sloupce.

- **Maticí ve schodovitém tvaru** rozumíme matici A , jejíž každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami, než řádek předchozí, a za nulovým řádkem následují jen nulové řádky.

- Řekneme, že matice A je v **Gauss-Jordanově tvaru**, jestliže je ve schodovitém tvaru, hlavní prvky jsou jedničky, a čísla nad a pod hlavními prvky jsou nuly. **Hlavní prvek** je první nenulový prvek daného řádku braný zleva.

- **Symetrická matice** je čtvercová matice A , pro kterou platí

$$A = A^T.$$

- **Antisymetrická matice** je čtvercová matice A , pro kterou platí

$$A = -A^T.$$

3.3 Operace s maticemi

Definice

- **Rovnost matic** A, B

Matice $A = (a_{ij})$ se rovná matici $B = (b_{ij})$, právě když jsou obě matice stejného typu a všechny vzájemně si odpovídající prvky jsou si rovny, tedy

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

- **Součet matic** A, B

Matice $C = (c_{ij})$ se nazývá součtem matic $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, právě když jsou matice A, B stejného typu a každý prvek matice C je součtem vzájemně si odpovídajících prvků matic A, B , tedy

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

- **Násobek matice** A reálným číslem k

Násobkem matice $A = (a_{ij})$ číslem $k \in \mathbb{R}$ rozumíme matici $B = (b_{ij})$ stejného

typu, která vznikne tak, že každý prvek matice A násobíme číslem k . Tedy

$$B = k \cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

- **Součin matic A, B** (označení: $C = A \cdot B$)

Součinem matic $A = (a_{ik})$ typu $m \times n$ a $B = (b_{kj})$ typu $n \times p$ (B má tolik řádků jako má A sloupců) je matice C typu $m \times p$, jejíž každý prvek je dán následujícím vztahem,

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Poznámka

- Matice C má tolik řádků, kolik řádků má matice A , a tolik sloupců, kolik sloupců má matice B .
- Index k se nazývá **sčítací index**. Indexy i a j se nazývají **pevné** nebo **volné indexy**.
- Je-li jasné, který index je sčítací, vynechává se v zápisu součinu symbol sumy. Takovému přístupu se říká **Einsteinova sumační konvence**,

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

- Součin matic není komutativní, obecně neplatí vztah $A \cdot B = B \cdot A$.
- Existují matice, které nelze násobit. Vždy je třeba nejdříve ověřit před násobením matic jejich kompatibilitu (násobitelnost).
- Pro matice A, B (odpovídajících typů) platí:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

3.4 Hodnost matice

Definice

Řádkově ekvivalentními úpravami matice budeme rozumět následující úpravy

1. výměna libovolných dvou řádků
2. vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem
3. přičtení nenulového násobku daného řádku k jinému řádku

Definice

Matice A a B jsou **ekvivalentní**, jestliže lze matici A převést na matici B konečným počtem ekvivalentních úprav.

Definice

Hodnost matice A je počet nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru. **Nenulový řádek** je řádek obsahující alespoň jeden prvek různý od nuly. Značíme h , $h(A)$, $\text{rank } A$, $\text{rank}(A)$.

Věta

Je-li matice A typu $m \times n$, pak

$$h(A) \leq \min(m, n).$$

Věta

Ekvivalentní úpravy nemění hodnost matice.

Poznámka

- Zcela analogicky se definují sloupcově ekvivalentní úpravy.
- Hodnost jednotkové matice n -tého řádu je n . Hodnost nulové matice je rovna nule.
- Hodnost počítáme tak, že pomocí řádkově ekvivalentních úprav převedeme matici na schodovitý tvar a spočítáme nenulové řádky.

3.5 Permutace

Definice

Permutace na indexové množině I je libovolné prosté zobrazení

$$\sigma : I \rightarrow I, \quad \sigma(i) = \sigma_i$$

Permutaci na n -prvkové množině zapisujeme formou matice

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Dvojice (σ_i, σ_j) se nazývá **inverze**, jestliže platí: $i < j \Rightarrow \sigma_i > \sigma_j$, **počet inverzí** značíme $\text{inv } \sigma$. **Znaménko** permutace σ bude $\text{sgn } \sigma = (-1)^{\text{inv } \sigma}$.

3.6 Determinanty

Definice

Determinantem čtvercové matice řádu n , budeme rozumět následující reálné číslo,

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma_n}.$$

Definice

Jestliže $|A| \neq 0$, nazývá se matice A **regulární matice**. Jestliže $|A| = 0$, nazývá se matice A **singulární matice**.

3.7 Vlastnosti determinantů

Nechť A a B jsou čtvercové matice řádu n , pak

- $|A^T| = |A|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- Má-li matice A dva řádky nebo sloupce stejné, pak $|A| = 0$.
- Vznikne-li matice B z matice A :
 - vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců),
pak: $|B| = -|A|$,
 - vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in \mathbb{R}$, pak $|B| = k \cdot |A|$,
 - přičtením k -násobku, $k \in \mathbb{R}$, jednoho řádku (sloupce) k jinému, pak: $|B| = |A|$.
- Jsou-li řádky (sloupce) determinantu $|A|$ lineárně závislé (řádek v matici se nazývá lineárně závislý, jestliže jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních řádků, případně se jedná o řádek, který se anuluje při řádkově ekvivalentních úpravách při převodu matice na schodovitý tvar), pak $|A| = 0$.
- Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků hlavní diagonály.
- Determinant diagonální matice je roven součinu prvků hlavní diagonály.

3.8 Výpočet determinantu matice 1. řádu

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}$$

3.9 Výpočet determinantu matice 2. řádu - křížové pravidlo

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

3.10 Výpočet determinantu matice 3. řádu - Sarrusovo pravidlo

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

Poznámka

Pro determinanty čtvrtého a vyšších řádů žádné obdobné pravidlo neplatí.

3.11 Výpočet determinantu matice 4. a vyšších řádů

Výpočet determinantů vyšších řádů (tj. 4 a výše) můžeme provádět přímo podle definice, což je ale velmi pracné. Matici buď převedeme na trojúhelníkový tvar pomocí ekvivalentních úprav (pozor, některé úpravy mění determinant), poté stačí vynásobit prvky hlavní diagonály. Další možnost je použití Věty o Laplaceově rozvoji determinantu.

Definice

Buď A čtvercová matice řádu n . **Submaticí** A_{ij} budeme nazývat matici řádu $n - 1$, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce. Číslo $|A_{ij}|$ se nazývá **subdeterminant** nebo **minor**. Číslo $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ se nazývá **algebraický doplněk** čísla a_{ij} .

Věta**Laplaceův rozvoj determinantu**

Buď A čtvercová matice řádu n , pak

$$|A| = a_{i1} \cdot \hat{a}_{i1} + a_{i2} \cdot \hat{a}_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \hat{a}_{in}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Poznámka

- Zcela analogicky lze větu zformulovat pro rozvoj podle sloupce.
- Při výpočtu postupujeme tak, že si vybereme libovolný řádek nebo sloupec, a zkonstruujeme Laplaceův rozvoj.
- Hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku nebo sloupce, vždy musí vyjít stejně.
- Je vhodné volit pro konstrukci rozvoje ten řádek nebo sloupec, který obsahuje co nejvíce nul.

3.12 Inverzní matice**Definice**

Buď A matice. Pokud existuje matice B s vlastností $A \cdot B = B \cdot A = E$, pak se B nazývá **inverzní matice** k matici A , značíme $B = A^{-1}$.

Poznámka

Pokud inverzní matice existuje, pak je určena jednoznačně a navíc matice A a A^{-1} jsou zjevně matice stejného řádu. O existenci inverzní matice rozhoduje její regularita. Inverzní matice existuje pouze pro případ regulárních matic.

Věta

Ke každé regulární matici A existuje inverzní matice A^{-1} , a platí:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Věta

Je-li A regulární matice řádu n , pak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^{\text{alg}})^T,$$

kde A^{alg} je matice algebraických doplňků k prvkům matice A . Matice $(A^{\text{alg}})^T$ se nazývá **adjungovaná matice** k matici A .

3.13 Výpočet inverzní matice eliminační metodou

Každou regulární matici A převedeme jen řádkově ekvivalentními úpravami na jednotkovou matici E . Stejně úpravy aplikujeme na jednotkovou matici E , která tímto přejde na hledanou inverzní matici A^{-1} , symbolicky

$$(A|E) \sim \dots \sim (E|A^{-1}).$$

3.14 Soustavy lineárních rovnic**Definice**

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých rozumíme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kde a_{ij} se nazývají **koeficienty** soustavy, x_j jsou **neznámé** a b_i jsou **pravé strany** rovnic soustavy pro $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Definice

Řešením soustavy m lineárních rovnic o n neznámých nazveme každou uspořádanou n -tici $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, která po dosazení do soustavy za jednotlivé neznámé splní všechny rovnice soustavy.

Definice

Matici A , jejíž prvky tvoří koeficienty soustavy a_{ij} nazýváme **maticí soustavy**. Matici $A|B$, která vznikne z matice A připojením sloupce pravých stran, nazýváme **rozšířenou maticí soustavy**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Poznámka

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých můžeme zapsat také ve formě maticové rovnice:

$$A \cdot x = B,$$

kde A je matice soustavy, x je sloupec neznámých a B je sloupec pravých stran soustavy, tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definice

Pokud má soustava m lineárních rovnic o n neznámých všechny pravé strany rovny nule (tj. $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_m = 0$), pak se nazývá **homogenní soustava**.

Věta**Frobeniova věta:**

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má **alespoň jedno řešení**, právě když se hodnost matice soustavy rovná hodnosti matice rozšířené,

$$h(A) = h(A|B) = h.$$

Poznámka

- Pokud $h(A) \neq h(A|B)$, pak řešení soustavy **neexistuje**.
- Jestliže řešení soustavy existuje a $h = n$, má soustava **právě jedno řešení**, pro $h < n$ má soustava **nekonečně mnoho řešení** závislých na $n - h$ parametrech.
- Z Frobeniovy věty plyne, že homogenní soustava lineárních rovnic má vždy alespoň triviální řešení, $x = (0, 0, \dots, 0)$.

3.15 Gaussova eliminační metoda

Definice

Dvě soustavy o stejném počtu neznámých (počet rovnic nemusí být stejný), nazýváme **ekvivalentní soustavy**, jestliže mají stejnou množinu řešení.

Poznámka

Ekvivalentní úpravy soustav jsou analogem řádkově ekvivalentních úprav matic.

Gaussova eliminační metoda - postup

1. Vytvoříme rozšířenou matici soustavy $A|B$.
2. Matici $A|B$ převedeme na schodovitý tvar.
3. Prověříme existenci řešení z Frobeniovy věty.
4. Převedeme matici na Gauss-Jordanův tvar.
5. Určíme konkrétní tvar řešení.

3.16 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo se dá použít pouze pro soustavy matic s regulární maticí soustavy, tj. pro soustavy n lineárních rovnic o n neznámých, kdy matice soustavy A je čtvercová a navíc $|A| \neq 0$.

Věta

Cramerovo pravidlo:

Je-li matice soustavy $A \cdot x = B$ regulární (tj. $|A| \neq 0$), pak existuje **jediné řešení** soustavy x , přičemž pro jeho složky x_k ($k = 1, \dots, n$, kde n je počet neznámých soustavy) platí

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|},$$

kde $|A_k|$ je determinant matice, která vznikne z matice A nahrazením k -tého sloupce sloupcem pravých stran.

Cramerova pravidlo - postup

1. Ověříme, že $|A| \neq 0$.
2. Určíme jednotlivé determinanty $|A_k|$.
3. Nalezneme jednotlivé komponenty řešení dosazením do formule z předchozí věty.

3.17 Maticové rovnice

Maticové rovnice jsou rovnice, ve kterých vystupují matice, např.:

$$A \cdot X = B,$$

$$X \cdot A = B,$$

matice X je hledaná neznámá matice, A je regulární matice a B je matice vhodného typu.

Takovéto rovnice můžeme řešit pomocí inverzní matice A^{-1} , a to násobením dané rovnice maticí A^{-1} zleva nebo zprava, dle typu počítané maticové rovnice.

- **Řešení rovnice typu $A \cdot X = B$**
Rovnici násobíme maticí A^{-1} zleva, tedy

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B && / \cdot A^{-1} \text{ zleva} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B, \\ E \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

- **Řešení rovnice typu $X \cdot A = B$**
Rovnici násobíme maticí A^{-1} zprava, tedy

$$\begin{aligned} X \cdot A &= B && / \cdot A^{-1} \text{ zprava} \\ X \cdot A \cdot A^{-1} &= B \cdot A^{-1}, \\ X \cdot E &= B \cdot A^{-1} \\ X &= B \cdot A^{-1}. \end{aligned}$$

3.18 Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí inverzní matice

Poznámka

Soustavu lineárních rovnic $A \cdot x = B$ lze pro regulární matici A řešit jako speciální případ maticové rovnice,

$$x = A^{-1}B.$$

Věta

Je-li matice soustavy $A \cdot x = B$ regulární (tj. $|A| \neq 0$), pak existuje **jediné řešení** soustavy x ,

$$x = A^{-1} \cdot B.$$

4 Analytická geometrie

4.1 Vektory

Co je to vektor? Na tuto poměrně zásadní otázku existuje jednoduchá odpověď. **Vektor je prvek vektorového prostoru.** Je třeba ovšem také říci, co je to vektorový prostor. Pro naše účely si vystačíme s následující definicí.

Definice

Vektorový prostor V nad množinou reálných čísel \mathbb{R} je množina s operací sčítání $+$ prvků z V (vektorů) a vnější násobení \cdot vektoru reálným číslem, přičemž $\forall u, v, w \in V, p, q \in \mathbb{R}$ platí:

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. $u + v = v + u$ | 5. $1 \cdot u = u$ |
| 2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ | 6. $p \cdot (q \cdot u) = (p \cdot q) \cdot u$ |
| 3. $u + \mathbf{0} = u$ | 7. $(p + q) \cdot u = (p \cdot u) + (q \cdot u)$ |
| 4. $u + (-u) = \mathbf{0}$ | 8. $p \cdot (u + v) = (p \cdot u) + (p \cdot v)$ |

Poznámka

V množině V existuje neutrální prvek vůči sčítání, tzv. **nulový vektor**, tj. platí $\mathbf{0} + u = u + \mathbf{0} = u$.

Poznámka

Příkladem vektorových prostorů nad množinou \mathbb{R} je samotná množina \mathbb{R} , dále kartézský součin množin reálných čísel se sebou, \mathbb{R}^n (tzv. **aritmetický vektorový prostor**). My se pro naše účely omezíme na vektorový prostor \mathbb{R}^3 nad \mathbb{R} . Jeho prvky (uspořádané trojice) budeme nazývat **aritmetické vektory**, značíme $u = (u_1, u_2, u_3)$.

Definice

Lineární kombinací vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ rozumíme vektor $v = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \in V$, kde $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$.

Definice

Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ **generují** V , jestliže lze každý vektor z V vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.

Definice

Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže platí

$$v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0.$$

Neplatí-li tato podmínka, pak jsou vektory **lineárně závislé**.

Definice

Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ tvoří **bázi** vektorového prostoru V , jestliže generují V a jsou lineárně nezávislé. Počet vektorů báze se pak nazývá **dimenze** vektorového prostoru V , značíme V^n nebo $\dim V = n$.

Definice

Nechť vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ tvoří bázi V . Pak koeficienty $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ lineární kombinace $v = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$ se nazývají **souřadnice** vektoru v v bázi u_1, u_2, \dots, u_n ; zapisujeme $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Definice

Bud' V vektorový prostor nad \mathbb{R} . Zobrazení $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **skalární součin** na V , jestliže pro každé $u, v, w \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

1. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
2. $(cu) \cdot v = c(u \cdot v)$
3. $u \cdot v = v \cdot u$
4. $u \neq \mathbf{0} \Rightarrow u \cdot u > 0$

Definice

Řekneme, že vektory $u, v \in V$ jsou na sebe **kolmé**, jestliže $u \cdot v = 0$. **Velikostí** vektoru u rozumíme číslo $|u| = \sqrt{u \cdot u}$.

Definice

Řekneme, že báze u_1, u_2, \dots, u_n vektorového prostoru V je **ortonormální**, jestliže vektory báze jsou **jednotkové** (jejich velikost je rovna jedné) a navzájem na sebe kolmé. Odpovídající souřadnice v ortonormální bázi pak nazýváme **kartézské souřadnice**.

Definice

Bud' V vektorový prostor. **Afinním prostorem** nad V rozumíme množinu \mathcal{A} , společně s operací sčítání $+$, která libovonému prvku $z \mathcal{A}$ a libovonému vektoru $z V$ přiřadí prvek $z \mathcal{A}$, tj. $A + u = B$, $A, B \in \mathcal{A}$, $u \in V$. Prvkům $z \mathcal{A}$ říkáme **body**.

Definice

Bud' \mathcal{A} afinní prostor nad V . Je-li na V zaveden skalární součin, pak se afinní prostor nazývá **Eukleidovský prostor**, \mathcal{E} .

4.2 Základní pojmy a definice

Omezíme se na trojrozměrný Eukleidovský prostor, který budeme označovat \mathcal{E}^3 a ztotožňovat s \mathbb{R}^3 , body \mathcal{E}^3 značíme $A = [a_1, a_2, a_3]$. Na \mathbb{R}^3 existují různé algebraické struktury; struktura vektorového, afinního a Eukleidovského prostoru, aj.

Poznámka

V trojrozměrném prostoru \mathcal{E}^3 je kartézský souřadnicový systém reprezentován třemi vzájemně kolmými osami (značíme x, y, z), které se protínají v jednom společném bodě, **počátku** soustavy souřadnic (značíme O).

Poznámka

V \mathcal{E}^3 zvolíme ortonormální bázi tvořenou vektory $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ a $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Pak každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{E}^3$ bude mít v této bázi vyjádření $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$. Čísla u_1, u_2, u_3 se nazývají **kartézské souřadnice** vektoru \mathbf{u} , značíme $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Definice

Souřadnice bodu A v kartézské soustavě souřadnic je v prostoru trojice reálných čísel a_1, a_2, a_3 , které dostaneme jako vzdálenost počátku soustavy souřadnic a kolmého průmětu bodu A do odpovídajících souřadných os x, y, z (Označení: $A = [a_1, a_2, a_3]$ - bod A o souřadnicích a_1, a_2, a_3).

Definice

Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ jsou dva body v prostoru. **Orientovanou úsečkou** AB nazveme úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B . **Geometrickým vektorem** rozumíme množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti. (Označení vektoru: AB nebo \mathbf{a} , vektor AB je určen jako rozdíl souřadnic koncového a počátečního bodu, $AB = B - A$).

Definice

Nulovým vektorem nazýváme vektor, jehož počáteční a koncový bod splývají, tedy jeho velikost je rovna nule. (Označení: $\mathbf{0}$).

Definice

Nechť je dána kartézská soustava souřadnic a libovolný bod $A = [a_1, a_2, a_3] \in \mathcal{E}^3$. **Polohovým vektorem** nazveme orientovanou úsečku OA , $O = [0, 0, 0]$.

Poznámka

Polohový vektor je tedy tělesová úhlopříčka v kvádru o hranách a_1, a_2, a_3 .

Věta

Nechť jsou dány vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Pak platí

- pro násobení vektoru reálným číslem $c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot \mathbf{a} = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3),$$

- pro rovnost vektorů

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3,$$

- pro součet vektorů

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

- pro rozdíl vektorů

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3),$$

4.3 Skalární součin vektorů

Definice

Skalárním součinem dvou nenulových vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} (označení: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) rozumíme číslo, pro které platí

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Poznámka

Jestliže je jeden z vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} nulový, pak

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Definice

Nechť je dán vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Velikostí vektoru \mathbf{a} (označení: $|\mathbf{a}|$) rozumíme

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Definice

Odchylka dvou vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je číslo (úhel) $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

Vlastnosti skalárního součinu

1. komutativní zákon:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$

2. distributivní zákon:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$

3. kolmost vektorů:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

4.4 Vektorový součin vektorů

Definice

Vektorovým součinem dvou nenulových vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (označení: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) rozumíme vektor \mathbf{c} , pro který platí

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

kde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ jsou základní jednotkové vektory:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Věta

Mějme dva nenulové vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, pak platí

- vektor \mathbf{c} je kolmý na vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} , tedy

$$\mathbf{c} \perp \mathbf{a} \quad \wedge \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b},$$

- pro velikost vektoru \mathbf{c}

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi,$$

kde φ je úhel, který svírají vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} ,

- vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ v tomto pořadí tvoří tzv. pravotočivou trojici.

Věta

Nechť jsou dány vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Je-li jeden z vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} nulový, nebo je-li vektor \mathbf{a} násobkem vektoru \mathbf{b} (říkáme, že vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} jsou lineárně závislé) pak

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

Vlastnosti vektorového součinu

- antikomutativní zákon:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

- distributivní zákon:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c},$$

- násobení reálnými čísly $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \cdot \mathbf{a}) \times (\beta \cdot \mathbf{b}) = \alpha \cdot \beta \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Geometrický význam vektorového součinu

- Vektorový součin je kolmý na rovinu určenou vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} .
- Velikost vektorového součinu vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} , tj. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, udává obsah rovnoběžníka o stranách \mathbf{a} a \mathbf{b} .
- Dva nenulové vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} , jsou rovnoběžné, právě když jejich vektorovým součinem je nulový vektor.

4.5 Smíšený součin vektorů

Definice

Smíšeným součinem tří vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ (označení: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$) rozumíme číslo $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, tj.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}).$$

Geometrický význam smíšeného součinu

1. Tři vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou komplanární (leží v jedné rovině), právě když

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0.$$

2. Objem V rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je dán vztahem

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

3. Objem V čtyřstěnu určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je dán vztahem

$$V = \frac{1}{6} |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

4.6 Přímka v prostoru

Přímku lze jednoznačně určit dvěma různými body nebo bodem a vektorem, tzv. **určujícím směrem přímky**,

$$p = \{A, B\}, \quad p = \{A, AB\}, \quad p = \{A, \mathbf{u}\}.$$

Definice

Vektorovou (symbolickou) rovnicí přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$ nazýváme rovnici

$$p : X = A + t\mathbf{u},$$

bod $X \in p$, \mathbf{u} je směrovým vektorem přímky p , $t \in \mathbb{R}$ je parametr přímky p .

Definice

Nechť je dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Parametrickými rovnicemi přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$ nazveme rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ p : y &= a_2 + tu_2, \\ z &= a_3 + tu_3, \end{aligned}$$

bod $X = [x, y, z] \in p$ je bod ležící na dané přímce.

Poznámka

Všimněme si, že parametrické rovnice přímky dostaneme opět pouhým dosazením příslušných souřadnic daného bodu a vektoru do vektorové rovnice přímky.

Poznámka

Obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje! Přímku lze však zadat jako průsečnici dvou rovin.

4.7 Vzájemná poloha dvou přímek

Nechť jsou dány dvě přímky p, q o rovnicích:

$$p : X = A + tu, \quad q : X = B + sv.$$

Rozlišujeme čtyři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají přímky společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

$$p \parallel q \Leftrightarrow \text{mají společný směr, nemají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **totožná**

$$p \equiv q \Leftrightarrow \text{mají společný směr a bod, tzn. všechny body}$$

- Vzájemná poloha **různoběžná**

$$p \cap q = \{P\} \Leftrightarrow \text{nemají společný směr, mají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **mimoběžná**

$$p \not\parallel q \Leftrightarrow \text{nemají společný směr ani bod}$$

Poznámka

Společnému bodu různoběžných přímek se říká **průsečík**.

Ke zjištění konkrétní vzájemné polohy se používá **klasifikační matice**. Matici poskládáme ze směrových vektorů a přidáme tzv. **bodový směr**, vektor spojující určující body přímek. Řádky, které se v matici při řádkově ekvivalentních úpravách anulují, pak indikují odpovídající společnou vlastnost. **Klasifikační matice**

$$p = \{A, u\}, q = \{B, v\}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ AB \end{pmatrix}$$

4.8 Rovina v prostoru

Rovinu lze jednoznačně určit třemi body neležícími na téže přímce; dvěma body a směrem určujícím přímkou, která těmito body neprochází; bodem a dvěma nekolineárními směry,

$$\rho = \{A, B, C\}, \quad \rho = \{A, B, \mathbf{u}\}, \quad \rho = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Definice

Vektorovou (symbolickou) rovnicí roviny $\rho = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ nazýváme rovnici

$$\rho : X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v},$$

bod $X \in \rho$, $t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry roviny ρ .

Definice

Nechť je dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrové vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Parametrickými rovnicemi roviny $\rho = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ nazveme rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1, \\ \rho : y &= a_2 + tu_2 + sv_2, \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \end{aligned}$$

bod $X = [x, y, z] \in \rho$ je bod ležící na dané rovině.

Poznámka

Všimněme si, že parametrické rovnice roviny dostaneme pouhým dosazením příslušných souřadnic daných bodů a vektorů do vektorové rovnice roviny.

Rovina určená bodem a normálovým vektorem

Definice

Normálovým vektorem roviny ρ (označení: $\mathbf{n} = (a, b, c)$) nazýváme vektor kolmý na rovinu ρ , $\mathbf{n} \perp \rho$.

Poznámka

Normálový vektor roviny ρ je kolmý na všechny vektory této roviny, tedy platí

$$AX \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{body } A, X \in \rho.$$

Rozepíšeme skalární součin pro $A = [a_1, a_2, a_3]$, $X = [x, y, z]$, $AX = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$, $\mathbf{n} = (a, b, c)$,

$$(x - a_1)a + (y - a_2)b + (z - a_3)c = 0.$$

Roznásobením a označením $d = -(aa_1 + ba_2 + ca_3)$ dostáváme

$$\rho : ax + by + cz + d = 0.$$

Definice

Obecnou rovnicí roviny ρ nazýváme rovnici

$$\rho : ax + by + cz + d = 0.$$

Definice

Úsekovou rovnicí roviny ρ nazýváme rovnici tvaru

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

kde $p, q, r \in \mathbb{R}$ představují úseky, které vytíná rovina na souřadných osách.

Poznámka

Rovina daná obecnou rovnicí může mít různé polohy vzhledem k souřadným osám v závislosti na koeficientech a, b, c, d . Neobsahuje-li rovnice roviny některou proměnnou (souřadnici), pak je daná rovina rovnoběžná s příslušnou osou, popřípadě touto osou prochází.

4.9 Vzájemná poloha přímky a roviny

Nechť je dána přímka p a rovina ρ o rovnicích:

$$p : X = A + tu, \quad \rho : X = B + kv + lw.$$

Rozlišujeme tři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají objekty společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

$$p \parallel \rho \Leftrightarrow \text{mají společný směr, nemají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **přímka leží v rovině**

$$p \subset \rho \Leftrightarrow \text{mají společný směr a bod, tzn. všechny body přímky}$$

- Vzájemná poloha **různoběžná**

$$p \cap \rho = \{P\} \Leftrightarrow \text{nemají společný směr, mají společný bod}$$

NEEXISTUJE MIMOBĚŽNÁ POLOHA PŘÍMKY A ROVINY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU!

Poznámka

Společnému bodu v případě různoběžné polohy přímky a roviny se říká **průsečík**.

Ke zjištění konkrétní vzájemné polohy se používá **klasifikační matice**. Matici poskládáme ze směrových vektorů a přidáme tzv. **bodový směr**, vektor spojující určující body přímky a roviny. Řádky, které se v matici při řádkově ekvivalentních úpravách anulují, pak indikují odpovídající společnou vlastnost. **Klasifikační matice**

$$p = \{A, \mathbf{u}\}, \rho = \{B, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}, \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \hline AB \end{pmatrix}$$

4.10 Vzájemná poloha dvou rovin

Nechť jsou dány dvě roviny α a β o rovnicích:

$$\alpha : X = A + ku + lv, \quad \beta : X = B + pu' + rv'$$

Rozlišujeme tři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají objekty společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \text{mají společné směry, nemají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **totožná**

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \text{mají společné směry a bod, tzn. všechny body}$$

- Vzájemná poloha **různoběžná**

$$\alpha \cap \beta = p \Leftrightarrow \text{mají společný směr, mají společný bod}$$

NEEXISTUJE MIMOBĚŽNÁ POLOHA DVOU ROVIN V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU!

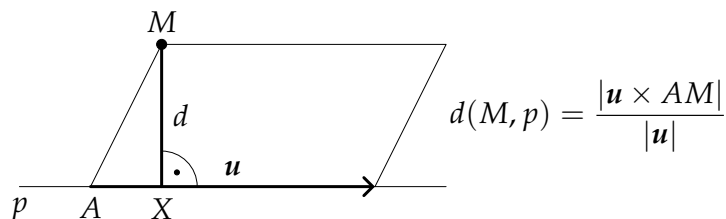
Poznámka

Společné přímce různoběžných rovin se říká **průsečnice**.

Ke zjištění konkrétní vzájemné polohy se používá **klasifikační matice**. Matici poskládáme ze směrových vektorů a přidáme tzv. **bodový směr**, vektor spojující určující body rovin. Řádky, které se v matici při řádkově ekvivalentních úpravách anulují, pak indikují odpovídající společnou vlastnost. **Klasifikační matice**

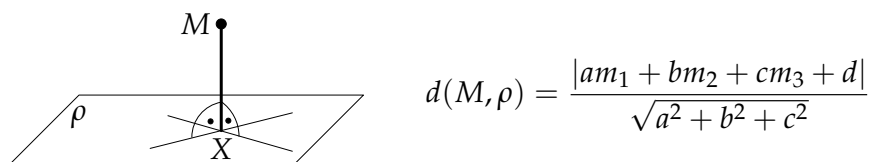
$$\alpha = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}, \beta = \{B, \mathbf{u}', \mathbf{v}'\}, \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \hline AB \end{pmatrix}$$

4.11 Vzdálenost bodu od přímky



Vzdálenost bodu M od přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$ je velikost vektoru MX kolmého na přímku p a procházejícího bodem M , přičemž $X \in p$ je kolmým průmět bodu M do přímky p .

4.12 Vzdálenost bodu od roviny



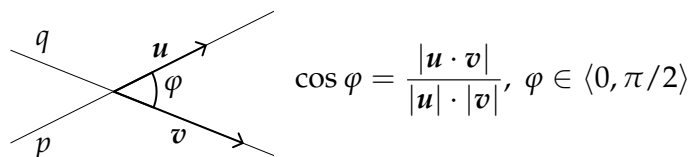
Vzdálenost bodu $M = [m_1, m_2, m_3]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$ je velikost vektoru MX kolmého na rovinu ρ a procházejícího bodem M , přičemž $X \in \rho$ je kolmým průmět bodu M do roviny ρ .

4.13 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

V jedné z rovin zvolíme libovolný bod a úlohu převedeme na hledání vzdálenosti bodu od roviny. Pro vzdálenost dvou rovin $\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$, $\beta : ax + by + cz + d_2 = 0$ platí

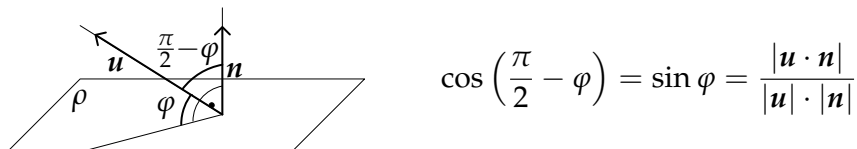
$$d(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.14 Odchylka dvou přímek



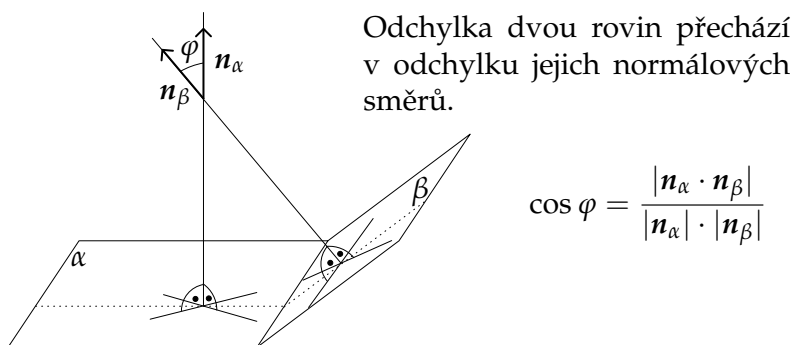
Odchylku dvou přímek určíme jako odchylku jejich směrových vektorů.

4.15 Odchylka přímky od roviny



Odchylku přímky od roviny převádíme na odchylku přímku od normálového směru roviny.

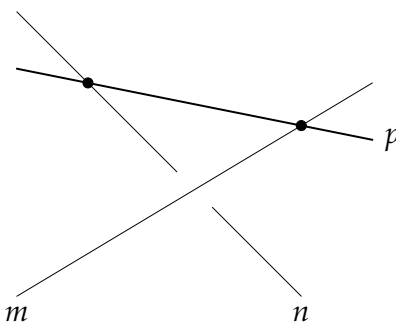
4.16 Odchylka dvou rovin



4.17 Příčka mimoběžek

Definice

Příčka p mimoběžek m a n je každá přímka p , která obě mimoběžky protíná.

**Poznámka**

Příček existuje nekonečně mnoho. Obvykle se řeší úloha, kdy hledáme příčku dvou mimoběžek procházející daným bodem nebo rovnoběžnou s daným směrem.

Nalezněte příčku procházející daným bodem P

1. $m = \{M, \mathbf{m}\}, n = \{N, \mathbf{n}\}$
2. $\alpha = \{P, M, \mathbf{m}\}, \beta = \{P, N, \mathbf{n}\}$
3. $p = \alpha \cap \beta$

Nalezněte příčku rovnoběžnou s daným směrem p

1. $m = \{M, \mathbf{m}\}, n = \{N, \mathbf{n}\}$
2. $\alpha = \{M, \mathbf{m}, p\}, \beta = \{N, \mathbf{n}, p\}$
3. $p = \alpha \cap \beta$

Definice

Osa mimoběžek je příčka, která je na obě mimoběžky kolmá.

Poznámka

Osu hledáme stejně jako v případě příčky rovnoběžné s daným směrem. Směr ovšem musí být kolmý na obě příčky a získáme jej jako vektorový součin určujících směrů obou mimoběžek, $o = m \times n$.

Reference

- [1] Dlouhá, D., Hamříková, R., Morávková Z, P., Tužilová, M.: Matematika I: Pracovní listy, VŠB - TUO, 2014, ISBN 978-80-248-3323-1.