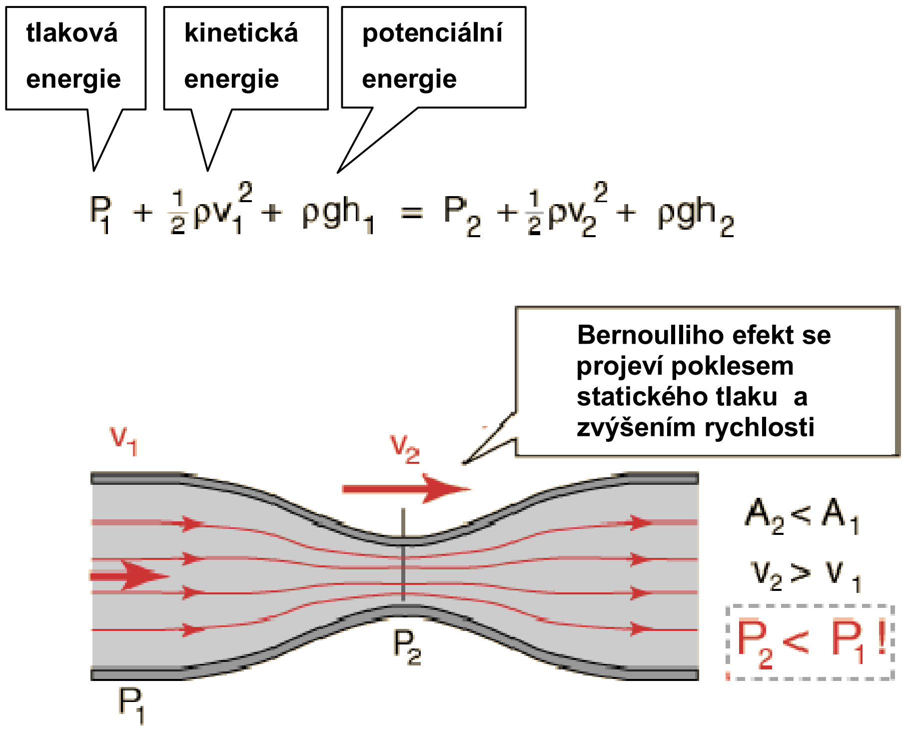
VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Fakulta strojní

katedra hydromechaniky a hydraulických zařízení



Cvičení z mechaniky tekutin

Ing. Sylva Drábková, Ph.D.

Doc. RNDr. Milada Kozubková, CSc.

2004

OSTRAVA

Obsah

1.	Úvod	1
2.	Základní pojmy	2
2.1	Fyzikální vlastnosti tekutin	2
	Hydrostatika	8
3.	Tlakové poměry v kapalině za klidu	8
3.1	Hydrostatický tlak	8
3.2	Hladinové plochy	11
3.3	Pascalův zákon	13
4.	Tlakové síly	15
4.1	Dno nádoby	15
4.2	Tlakové síly na šikmé rovinné stěny	15
4.3	Tlakové síly na křivé plochy	18
5.	Relativní pohyb kapaliny	23
5.1	Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený	23
5.2	Pohyb rovnoměrně otáčivý	24
	Hydrodynamika	28
6.	Základní pojmy a rozdělení proudění	28
6.1	Rozdělení proudění	28
7.	Proudění dokonalých kapalin	32
7.1	Rovnice kontinuity	32
7.2	Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu	33
8.	Proudění vazké tekutiny	41
8.1	Proudění skutečných kapalin	41
8.2	Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu	41
9.	Laminární proudění	44
9.1	Proudění v trubici kruhového průřezu	44
9.2	Proudění mezi paralelními deskami	46
9.3	Proudění mezi paralelními deskami s unášivým pohybem	47
9.4	Proudění válcovou mezerou	48
9.5	Stékání po svislé stěně	49
9.6	Proudění klínovou mezerou tvořenou rovinnými deskami	50
10.	Turbulentní proudění	51
10.1	Bernoulliho rovnice pro turbulentní proudění	51
11.	Hydraulický výpočet potrubí	53
11.1	Třecí ztráty v potrubí	53
11.2	Místní ztráty	61
11.3	Jednoduché potrubí	65
11.4	Gravitační potrubí	70
11.5	Složené potrubí	71

11.6	Charakteristika potrubí	73
12.	Výtok z nádob, přepady	77
12.1	Stacionární výtok kapaliny malým otvorem	77
12.2	Výtok velkým otvorem v boční stěně	78
12.3	Výtok ponořeným otvorem	79
12.4	Výtok při současném přítoku	80
12.5	Vyprazdňování nádob	81
12.6	Přepady	83
13.	Proudění v rotujícím kanále	85
13.1	Bernoulliho rovnice pro rotující kanál	85
13.2	Odstředivé čerpadlo	87
13.3	Čerpadlo a potrubí	89
14.	Neustálené proudění v potrubí	97
14.1	Bernoulliho rovnice pro neustálené proudění nestlačitelné kapaliny	97
14.2	Rozběh proudu v potrubí při výtoku z nádoby	98
14.3	Hydraulický ráz	103
15.	Věta o změně hybnosti	107
15.1	Deska v klidu	107
15.2	Pohybující se deska	109
15.3	Rotační těleso	110
15.4	Peltonovo kolo	110
15.5	Silový účinek proudu na potrubí	111
16.	Obtékání těles	113
16.1	Odpor těles a tloušťka mezní vrstvy	113
17.	Proudění v korytech	116
17.1	Rovnoměrný průtok	116
18.	Fyzikální podobnost a teorie modelování	119
18.1	Hydrodynamická podobnost při proudění kapalin	119
19.	Přílohy	121
19.1	Hustota vody, vzduchu a rtuti, dynamická viskozita a kinematická viskozita vody a vzduchu v závislosti na teplotě	121
19.2	Hustota suchého vzduchu v závislosti na tlaku a teplotě	122
19.3	Napětí nasycené vodní páry při teplotách 95 ÷ 140 ^{0}C	122
19.4	Dynamická viskozita vody a páry v závislosti na teplotě a tlaku	123
19.5	Kinematická viskozita vody a páry v závislosti na teplotě a tlaku	124
19.6	Fyzikální vlastnosti plynů při 0 °C a tlaku 0.1 MPa, pevných látek a kapalin při 18 °C	125
19.7	Absolutní drsnosti potrubí	126
19.8	Stupeň drsnosti při proudění v otevřených kanálech	126
19.9	Rychlostní součinitel C podle Pavlovského	127
19.10	Těžiště a momenty setrvačnosti některých ploch a objemy těles	128
19.11	Součinitelé odporu těles	129

20.	Laboratorní cvičení z hydromechaniky	130
20.1	Měření třecí ztráty v potrubí	130
20.2	Experimentální stanovení charakteristiky čerpadla	132
20.3	Měření rychlostního profilu volného kruhového proudu	135
21.	Přehled použitých označení	138

1. Úvod

Mechanika tekutin je základem pro řešení praktických inženýrských úloh v řadě oborů. Nachází uplatnění nejen v oblasti strojírenství, ale také ve stavebnictví, energetice, ekologii, biologii, medicíně a dalších disciplínách. Kromě teoretických vědomostí je podmínkou řešení úloh i schopnost aplikovat nabyté poznatky v praxi.

Sbírka příkladů z mechaniky tekutin je určena k prohloubení a praktickému procvičení znalostí získaných v předmětu Mechanika tekutin a Hydromechanika, přednášených na Fakultě strojní, Fakultě metalurgie a materiálového inženýrství, Fakultě bezpečnostního inženýrství a Hornicko-geologické fakultě. Je členěna tématicky, označením jednotlivých kapitol a podkapitol navazuje na skripta „Janalík, J., Šťáva, P.: Mechanika tekutin“, vydané na VŠB-TU Ostrava v roce 2001.

Úvod každé kapitoly je věnován stručnému přehledu teorie a výčtu nezbytně nutných vztahů a konstant, které slouží pro přípravu na výpočtová cvičení. Teoretický základ je následován souborem řešených i neřešených příkladů s výsledky řešení. Součástí cvičení z hydromechaniky jsou laboratorní úlohy, ve kterých se studenti seznámí s přípravou měření, jeho provedením a vyhodnocením. Ve skriptech jsou uvedeny návody k měření a návrhy tabulek pro zpracování měření a vyhodnocení hledaných veličin. Sbírku příkladů doplňují v příloze potřebné tabulky, grafy a závislosti vyhodnocené statisticky z tabulek pro snadnější použití, které doplňují podle potřeb a zkušeností získaných ve výuce.

Ve skriptech je důsledně používána soustava jednotek SI. Označení veličin je převzato ze skript „Janalík, J., Šťáva, P.: Mechanika tekutin“. Upozorňujeme na podobnost značek rychlosti v a kinematické viskozity ν, které vyplývají z podobnosti písma v aplikovaném editoru rovnic.

Cvičení z mechaniky tekutin vychází ve druhém přepracovaném vydání.

2. Základní pojmy

Tekutina je pojem zahrnující kapaliny a plyny. Je to spojité prostředí, které je homogenní a izotropní (jeho vlastnosti jsou ve všech směrech stejné). Kapaliny se odlišují od plynů a par konstantní či téměř konstantní měrnou hmotností, tj. hustotou ($\rho = konst$) a jsou tedy nestlačitelné či velmi málo stlačitelné. Zavádí se pojem kapaliny ideální, což je kapalina bez vnitřního tření a nestlačitelná.

2.1. Fyzikální vlastnosti tekutin

Měrná hmotnost neboli hustota tekutiny je hmotnost objemové jednotky tekutiny podle vztahu

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Hustota kapalin je závislá na teplotě $\rho = \rho\ (T)$ přibližně lineárně. Měrná hmotnost (hustota) plynů závisí nejen na teplotě, ale též významně na tlaku $\rho = \rho\ (T, p)$ a pro ideální plyn je dána stavovou rovnicí ve tvaru $pV = mrT \Rightarrow \rho = \dfrac{p}{rT}$ (kde r je měrná plynová konstanta). Závislosti měrné hmotnosti technicky důležitých látek jsou uvedeny v příloze 19.

Viskozita tekutiny se projevuje při proudění skutečných tekutin. Míra velikosti vnitřního tření charakterizuje tekutost či fluiditu. S využitím Newtonova vztahu pro tečné napětí laminárního proudu lze dynamickou vazkost η vyjádřit takto:

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

Jednotka součinitele η v předchozím vztahu, tj. dynamické viskozity, se definuje

$$[\eta] = \frac{[\tau]\,[y]}{[v]} = \frac{\mathrm{N.s}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m.s}} = \mathrm{Pa.s}$$

Technická soustava jednotek (stále používaná v příručkách a tabulkách) zavádí pro jednotku dynamické viskozity označení 1 P (Poise), což je $1P = 1g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} = 0{,}1\ Pa \cdot s$.

Vazkost (viskozita) se vyjadřuje dále součinitelem kinematické vazkosti (viskozity) s příslušnými jednotkami

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad\qquad [\nu] = \frac{kg}{m \cdot s} \cdot \frac{m^3}{kg} = m^2 \cdot s^{-1}$$

V praxi je dosud stále důležitá jednotka kinematické viskozity v soustavě technické – 1 Stokes, pro niž platí $1S = 1cm^2 \cdot s^{-1} = 10^{-4} m^2 s^{-1}$.

Z měření vazkosti kapalin Englerovým viskozimetrem vyplývá další jednotka viskozity Englerův stupeň, která se definuje se jako poměr doby výtoku τ objemu 200 cm^3 zkoumané kapaliny při dané teplotě k době výtoku destilované vody o teplotě t = 20°C, tedy

$$\nu_E = \frac{\tau}{\tau_{H_2O}} \quad [^oE]$$

Viskozitu vyjádřenou v Englerových stupních lze převádět na kinematickou viskozitu v SI jednotkách pomocí empirického vztahu

$$\nu = \left(7{,}31\nu_E - \frac{6{,}31}{\nu_E}\right) \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{m^2 s^{-1}};\ ^{\circ}\mathrm{E}]$$

Viskozita je obecně funkcí veličin stavu, tj. tlaku a teploty. Mimo závislosti pro vodu a vzduch, které jsou uváděny v přílohách 19, jsou technicky důležité závislosti dynamické viskozity na teplotě pro minerální oleje. Tyto závislosti lze dobře aproximovat exponenciální funkcí ve tvaru

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{(-k \cdot T)} \text{ nebo } \quad \eta = \eta_0' \cdot e^{\frac{A}{t+B}}$$

kde η_0, η_0', k, A, B jsou konstanty, které je nutno pro jednotlivé druhy olejů určit experimentálně a statisticky např. metodou nejmenších čtverců (např. pomocí software EXCEL).

Objemová stlačitelnost tekutin je schopnost zmenšovat svůj objem při zvýšení vnějšího tlaku. Vyjadřuje se součinitelem stlačitelnosti

$$\delta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T=konst} = \frac{\Delta V}{V.\Delta p}\left[\mathrm{Pa}^{-1}\right]$$

který vyjadřuje změnu objemu kapaliny $\Delta V = V - V_0$ připadající na jednotku původního objemu V při změně tlaku $\Delta p = \left(p_0 - p\right)$. V_0 a p_0 jsou objem a tlak tekutiny po stlačení.

Převrácená hodnota součinitele objemové stlačitelnosti δ je modul objemové pružnosti kapaliny K

$K = \frac{1}{\delta}[Pa]$, který závisí na stavových veličinách, tj. tlaku a teplotě.

Součinitel objemové roztažnosti kapalin vyjadřuje schopnost kapaliny zvětšit svůj objem při zvýšení teploty

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{p=konst} = \frac{\Delta V}{V.\Delta t}\left[\mathrm{K}^{-1},\ ^{\mathrm{O}}\mathrm{C}^{-1}\right]$$

a je definován změnou objemu kapaliny $\Delta V = V_0 - V$ připadající na jednotku původního objemu V při změně teploty $\Delta t = \left(t_0 - t\right)$. V_0 a t_0 jsou objem a teplota kapaliny po zahřátí. Pro výpočet objemu V_0 po roztažení z původního objemu V lze použít vztah $V_0 = V\left(1 + \beta.\Delta t\right)$.

Povrchové napětí σ působí na rozhraní mezi kapalinou a jinou látkou. Definuje se jako tzv. kapilární konstanta $\sigma = \frac{F_{pn}}{l}\left[\mathrm{Nm}^{-1}\right]$, kde F_{pn} je výsledný účinek povrchových sil mezi molekulami kapaliny a jiné látky a l je délky rozhraní.

Kapilární jevy jsou důsledkem povrchového napětí. Vyskytují u trubiček velmi malého průměru – kapilár, nebo v porézním prostředí. Když adhezní síly jsou větší než kohezní, vystupuje kapalina v kapiláře do výšky h. V opačném případě, kdy kohezní síly jsou větší než adhezní, zůstává kapalina v kapiláře o výšku h níže než je hladina okolní kapaliny. Kapilární výšky h se dají spočítat z podmínky rovnováhy mezi gravitačními silami a povrchovými silami:

$\pi d\sigma = \frac{\pi}{4} d^2 h\rho g$, odtud $h = \frac{4\sigma}{\rho g d}$

Příklad 2.1.1

Ve zcela zaplněné tlakové nádrži je voda o tlaku p. Po vypuštění objemu ΔV vody klesl tlak na tlak atmosférický, tj. $p_0 = 1$ bar = 10^5 Pa abs. Určete objem vody v nádrži při zanedbání pružnosti nádoby.

Zadáno:		Vypočtěte:		Výsledek:
$p_{abs.}$ =	10 bar	V = ?	m^3	80.00
ΔV =	36 dm^3			
K =	2000 MPa			

Řešení: $V = \frac{K\Delta V}{\Delta p}$

Příklad 2.1.2

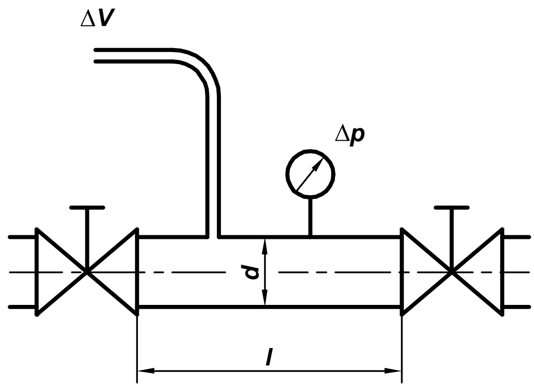
Při tlakové zkoušce potrubí o průměru d a délce l klesl za hodinu tlak z $p_{1rel.}$ na $p_{2rel.}$. Určete, kolik vody vyteklo netěsnostmi potrubí, je-li potrubí absolutně tuhé.

Zadáno:		Vypočtěte:		Výsledek:
d =	400 mm	ΔV = ?	m^3	0.06283
l =	2 km			
K =	2000 MPa			
$p_{1rel.}$ =	7.5 MPa			
$p_{2rel.}$ =	7 MPa			

Příklad 2.1.3

Potrubí průměru d a délky l je naplněno vodou při atmosférickém tlaku. Jak velký objem ΔV je nutno vtlačit do potrubí při tlakové zkoušce, aby se tlak zvýšil o Δp? Potrubí považujte za tuhé, měrná hmotnost vody je ρ, modul pružnosti kapaliny je K. Určete součinitel stlačitelnosti δ a teoretickou rychlost zvuku a_t.

Zadáno:		
l =	70 m	
d =	450 mm	
Δp =	0.5 MPa	
K =	2E+09 Pa	
ρ =	1000 $kg.m^{-3}$	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
ΔV = ?	m^3	0.00278
δ = ?	MPa^{-1}	0.00050
a_t = ?	$m.s^{-1}$	1414.21



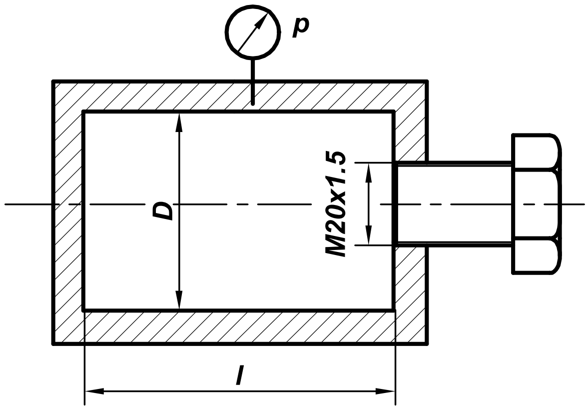
Příklad 2.1.4

Přístroj na kontrolu manometrů má šroub se závitem M20 x 1,5. Vnitřní objem má tvar válce o průměru D a délce l. Určete změnu tlaku při zašroubování šroubu o 3 otáčky vřetena. Vypočtěte teoretickou rychlost zvuku a_t.

Zadáno:

D =	30 mm	
l =	100 mm	
K =	2000 MPa	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
s =	1.5 mm	

Vypočtěte:		Výsledky:
ΔV = ?	m^3	0.0000014
V = ?	m^3	0.000071
Δp = ?	MPa	39.43662
a_t = ?	m.s^{-1}	1414.21



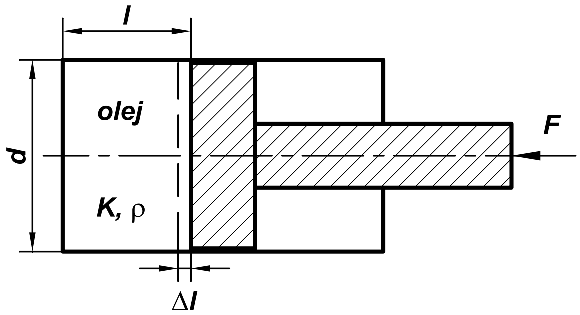
Příklad 2.1.5

Stanovte posunutí pístu Δl hydraulického válce vlivem stlačitelnosti kapaliny při zatížení pístnice silou F. Určete teoretickou rychlost zvuku v oleji a_t, vypočtěte součinitel stlačitelnosti kapaliny δ.

Zadáno:

l =	1000 mm
d =	80 mm
F =	28000 N
ρ =	900 kg.m^{-3}
K =	1300 MPa

Vypočtěte:		Výsledky:
Δp = ?	MPa	5.57043
Δl = ?	m	0.00428
a_t = ?	ms^{-1}	1 201.85
δ = ?	MPa^{-1}	0.00077



Příklad 2.1.6

Kapalina má viskozitu 10^0 E a měrnou hmotnost ρ. Určete její kinematickou a dynamickou viskozitu v soustavě SI.

Zadáno:		Vypočtěte:		Výsledky:
ν =	10 ^{0}E	ν = ?	m^{2}s^{-1}	0.0000725
ρ =	0.89 kg.dm^{-3}	η = ?	Pa.s	0.0645250

Řešení: Kinematická viskozita se určí z empirického vztahu $\nu = \left(7{,}31 \cdot {}^0E - \frac{6{,}31}{{}^0E}\right) \cdot 10^{-6}$ a dynamická viskozita ze vzorce $\eta = \nu \cdot \rho$.

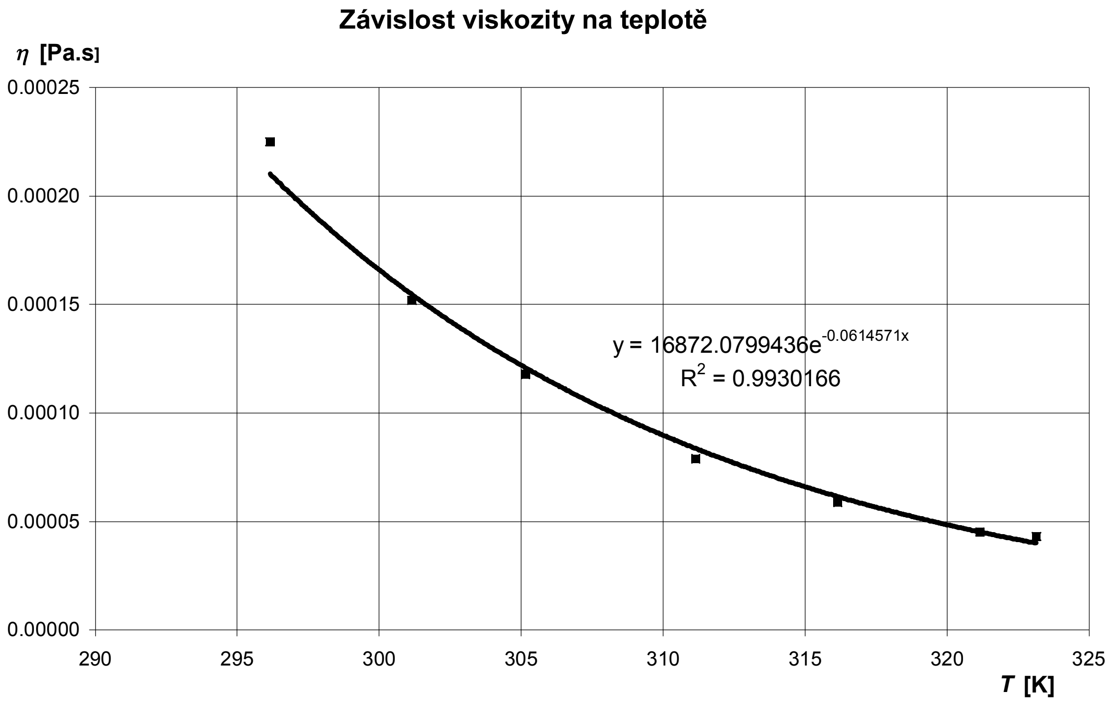
Příklad 2.1.7

Závislost dynamické viskozity na absolutní teplotě je dána tabulkou. Najděte koeficienty η_0 a *k* této závislosti ve tvaru $\eta = \eta_0 \cdot e^{(-k \cdot T)}$ pomocí lineární regrese a určete hodnotu viskozity pro teplotu t = 24°C a 58°C.

Zadáno:		Vypočtěte:		Výsledky:
t [°C]	η [Pa.s]	η_0 = ?	Pa.s	16872.08
23	2.25E-04	k = ?	K^{-1}	-0.0614571
28	1.52E-04	η_{24} = ?	Pa.s	0.000197739
32	1.18E-04	η_{49} = ?	Pa.s	4.25433E-05
38	7.89E-05			
43	5.89E-05			
48	4.52E-05			
50	4.32E-05			

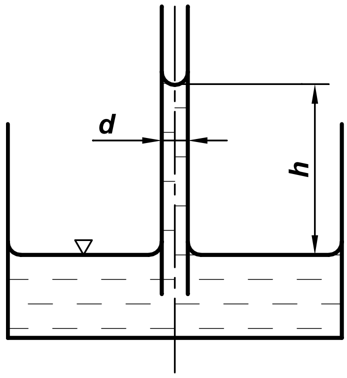
Řešení:

Teplota a viskozita v prvních dvou sloupcích se překopíruje do EXCELu, teplota se přepočítá na absolutní, tj. $T = t + 273.15$. Vytvoří se graf závislosti viskozity na teplotě, proloží se spojnice trendu ve tvaru exponenciální funkce a vyhodnotí se koeficienty η_0 a k.



Příklad 2.1.8

Stanovte povrchové napětí σ vody, jestliže ve skleněné kapiláře o průměru d byla naměřena kapilární elevace h.



Zadáno:

h = 15 mm
d = 2 mm
ρ = 1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
σ = ?	N.m^{-1}	0.07358

Řešení:

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d} \Rightarrow \sigma = \frac{h\rho g d}{4}$$

Příklad 2.1.9

Válcová nádrž o rozměrech d a h je zcela naplněna vodou o atmosférickém tlaku o teplotě t_0. Určete změnu tlaku v nádrži při změně teploty na hodnotu t_1. Součinitel teplotní roztažnosti vody je β a modul pružnosti vody je K. Poddajnost stěn nádoby zanedbejte.

Zadáno:

d = 1 m
h = 3 m
K = 2000 MPa
t_0 = 20 ^{O}C
t_1 = 30 ^{O}C
β = 0.00064 (^{O}C)$^{-1}$

Vypočtěte:		Výsledky:
Δp = ?	MPa	12.80

Řešení:

$$K = \frac{V_0 \Delta p}{\Delta V} \Rightarrow \Delta p = \frac{K \Delta V}{V_0}$$

$$V = V_0(1 + \beta \Delta t) = V_0 + V_0 \beta\ \Delta t = V_0 + \Delta V \Rightarrow \Delta V = V_0 \beta\ \Delta t$$

$$\Delta p = \frac{K V_0 \beta\ \Delta t}{V_0} = K\beta(t_1 - t_0)$$

Příklad 2.1.10

V plynojemu se uchovává plyn o objemu V při teplotě t a přetlaku p_p. Měrná plynová konstanta je r ($r = R/\mu$, kde μ je molekulová hmotnost, R je univerzální plynová konstanta) a p_0 je barometrický tlak. Určete hmotnost plynu m v plynojemu, látkové množství plynu n a objem plynu V_n při teplotě 0 ^{O}C a tlaku 101325 Pa (tj. při normálních podmínkách).

Zadáno:		Vypočtěte:		Výsledky:
V =	100000 m^3	m = ?	kg	52 336.57
t =	20 ^{0}C	n = ?	kmol	4 135.81
p_p =	2.4 kPa	V_n = ?	m$_n^3$	92 694.77
r =	657 J.kg^{-1}K^{-1}			
p_0 =	984 hPa			
R =	8314 J.K^{-1}.kmol^{-1}			

Řešeni:

$$pV = mrT \Rightarrow m = \frac{pV}{rT} \qquad pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

$$\frac{p_n V_n}{T_n} = \frac{pV}{T} \Rightarrow V_n = \frac{pV}{T}\frac{T_n}{p_n}$$

Hydrostatika

3. Tlakové poměry v kapalině za klidu

Tlak kapaliny je tlaková síla, působící na jednotku plochy. Je-li tlak na ploše rovnoměrně rozložen, je dán poměrem $p = \frac{F}{S}$, při nerovnoměrném rozložení tlaku je dán obecně $p = \frac{dF}{dS}$. Jednotkou tlaku v soustavě SI je 1 Pascal, tj. síla 1 N působící na plochu 1 m^2 neboli 1Pa=1Nm^{-2}.

3.1. Hydrostatický tlak

Hydrostatický tlak jako účinek kapalinového sloupce se vypočte ze vztahu

$$p = \rho g h$$

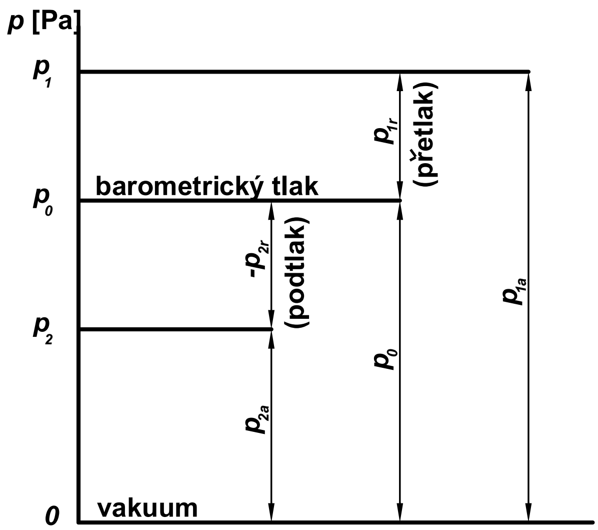
Tlak jako stavová veličina se vyjadřuje absolutní a relativní hodnotou. Absolutní tlak se vztahuje k absolutnímu vakuu. Relativní tlak (podtlak resp. přetlak) se vztahuje k libovolně zvolené hodnotě, nejčastěji ke hladině atmosférického tlaku p_0 a platí vztah

$$p_{abs} = p_{rel} + p_0$$

Ve sporných případech je nutno za jednotkou označit, zda se jedná o tlak absolutní či relativní. Tlaková diference je rozdíl tlaků ve dvou místech 1, 2

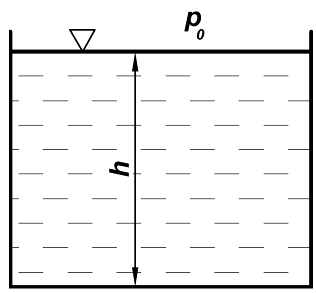
$$\Delta p = p_1 - p_2$$

Tlaky p_1, p_2 je nutno dosazovat shodně, tj. oba absolutní nebo oba relativní, protože rozdíl dvou tlaků udaných v absolutních či relativních jednotkách je stejný. Vztah mezi absolutním a relativním tlakem je obdobou vztahu mezi absolutní a relativní teplotou $T = t + 273 \quad [K]$. Schematicky je tento vztah patrný obrázku



Příklad 3.1.1

Vypočítejte tlak pod hladinou vody v hloubce h, je-li na hladině hustota ρ. Uvažujte nestlačitelnou a stlačitelnou kapalinu. Výsledky porovnejte.



Zadáno:			
h =	8000 m		
p_0 =	0 MPa		
K =	2100 MPa		
ρ_0 =	1020 kg.m^{-3}		
Vypočtěte:			
p_{nestl} = ?	MPa	80.04960	
p_{stl} = ?	MPa	81.55565	
ρ_1 = ?		1060.42	

Řešení: V případě nestlačitelné kapaliny $\rho = konst$ a $p_{nestl} = -\rho g h$. V případě stlačitelné kapaliny se předpokládá závislost $dp = -\rho g.dh = -\rho_0 e^{\frac{p-p_0}{K}} dh,$ a tedy $p = -K.\ln\left(1 + \frac{\rho_0 g h}{K}\right)$ a

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\rho_0 g\, h}{K}}$$

. Výška h se zadává záporně vzhledem k definovanému souřadnému systému

Příklad 3.1.2

Určete změnu tlaku v atmosféře v závislosti na nadmořské výšce. Uvažujte následující varianty výpočtu vzhledem k definici hustoty:

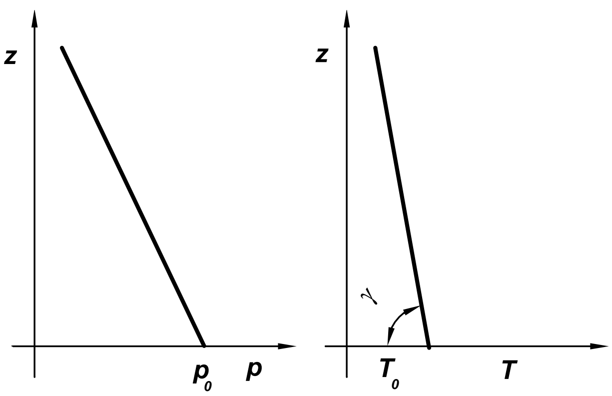
a) hustota ρ =konst.

b) hustota se mění v závislosti na přibližně určeném modulu stlačitelnosti

c) hustota se určí ze stavové rovnice, předpokládá se polytropická změna

d) hustota se určí ze stavové rovnice, přitom teplota je konstantní (izotermická změna)

e) hustota se určí ze stavové rovnice, přitom teplota se mění lineárně

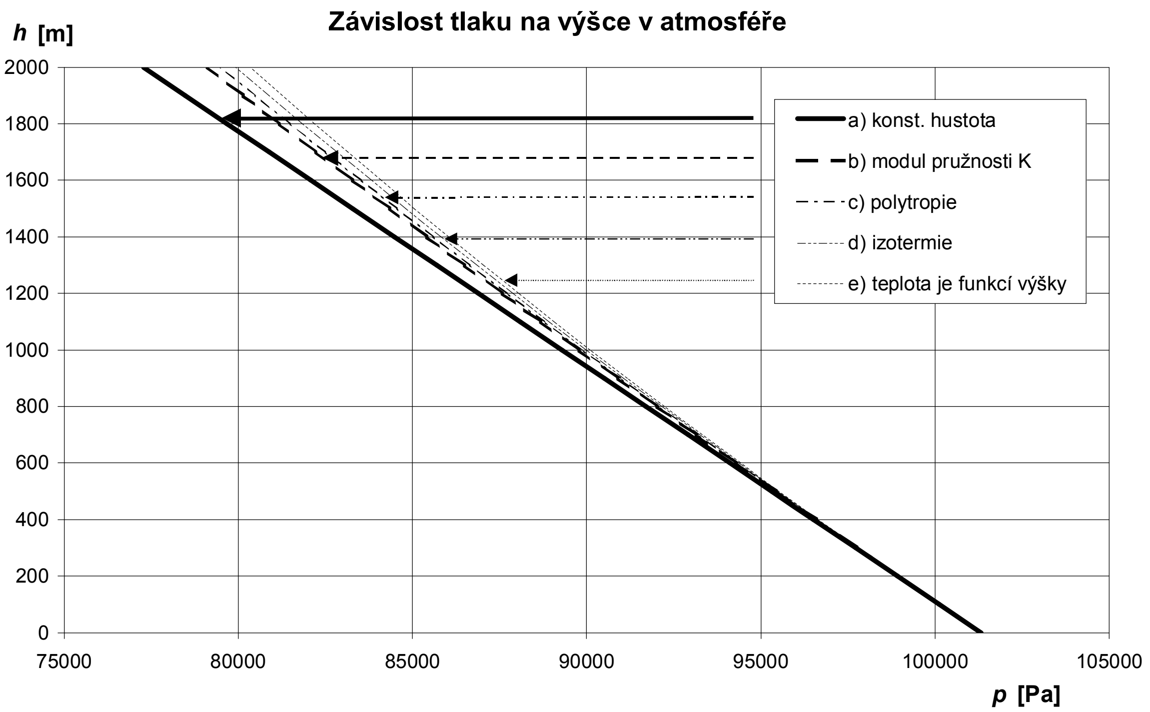


Zadáno:		
hustota	ρ_0 =	1.226 kg.m^{-3}
atmosférický tlak	p_0 =	101325 Pa
teplota	T_0 =	288.15 K
měr.plyn.konstanta	r =	287 J.kg^{-1}.K^{-1}
polytrop. exponent	n =	1.23
modul pružnosti	K =	141725.6 Pa
gradient teploty	γ =	-0.0065 K.m^{-1}

Řešení: V následující tabulce je přehled vztahů, použitých v jednotlivých variantách. Tlak není obecně konstantní, proto je zapsán v diferenciálním tvaru. Vztah pro tlak se získá integrací a integrační konstanta se určí z podmínek $\rho = \rho_0$, $T = T_0$, $p = p_0$. Teplota se uvažuje konstantní, jen v případě e) je definována jako lineární závislost.

		ρ	T	p
Nestlačitelná tekutina	a)	$\rho = \rho_0$	$T = T_0$	$dp = -\rho_0 g.dh$ $p = p_0 - \rho_0 gh$
Stlačitelná tekutina	b)	$\rho = \rho_0 e^{\frac{p-p_0}{K}}$ $K = \rho_0 c^2$	$T = T_0$	$dp = -\rho g.dh = -\rho_0 e^{\frac{p-p_0}{K}} dh$ $p = p_0 - K.ln\left(1 + \frac{\rho_0 gh}{K}\right)$
	c)	$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$	$T = T_0$	$dp = -\rho g.dh = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} g.dh$ $p = p_0 \left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{g}{rT_0}h\right)^{\frac{n}{n-1}}$
	d)	$\rho = \frac{p}{rT_0}$	$T = T_0$	$dp = -\rho g.dh = -\frac{p}{rT_0} dh$ $p = p_0 e^{-\frac{gh}{rT_0}}$
	e)	$\rho = \frac{p}{r(T_0 - \gamma h)}$	$T = T_0 - \gamma h$	$dp = -\rho g.dh = -\frac{p}{r(T_0 - \gamma h)} dh$ $p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma h}{T_0}\right)^{-\frac{g}{r\gamma}}$

Výše uvedené vztahy lze tabelovat v EXCELu a zobrazit pro porovnání tlak v závislosti na výšce *h*.



3.2. Hladinové plochy

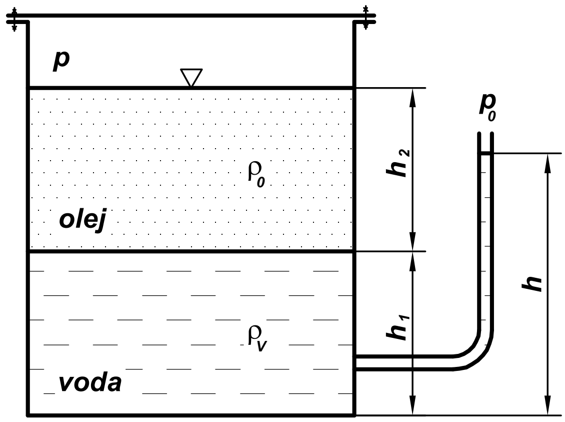
Hladinové plochy jsou hladiny s konstantní hodnotou tlaku $p = konst,\ dp = 0$, případně dalších skalárních veličin (teplota, hustota, měrná tíha, měrný objem). Hladinové plochy jsou ekvipotenciální plochy a jsou vždy kolmé na výsledné zrychlení vnější hmotnostní síly $\mathbf{a}$. Hladinové plochy mají v úlohách hydrostatiky význam při výpočtu tlaků a tlakových sil.

Příklad 3.2.1

Otevřená svislá válcová nádrž je naplněna vodou o výšce h_1 a olejem o výšce h_2. Tlak vody u dna nádrže je změřen piezometrickou trubicí s výškou hladiny h. Jaká je hustota oleje ρ_o? Jaká bude výška hladiny v piezometrické trubici (h'), když se nádrž uzavře a tlak v nádrži stoupne o Δp?

Zadáno:

h_1 =	0.2 m	
h_2 =	1.2 m	
h =	1.2 m	
p_0 =	0.10132 MPa	
ρ_v =	1000 kg.m^{-3}	
$\Delta p =$ =	0.01 MPa	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
ρ_o = ?	kg.m^{-3}	833.33
h' = ?	m	2.21936



Řešení: Pro otevřenou nádrž platí, že $p = p_0$.

$$p_0 + h_2\rho_o g + h_1\rho_v g = p_0 + h\rho_v g \quad \text{a odtud} \quad \rho_o = \frac{(h-h_1)\rho_v g}{h_2 g} = \frac{(h-h_1)\rho_v}{h_2}$$

Pro uzavřenou nádrž s tlakem p, kde $p = p_0 + \Delta p$

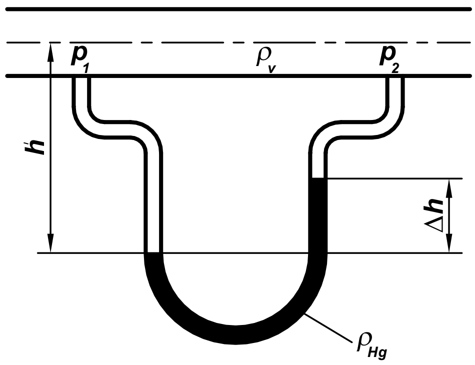
$$p + h_2\rho_o g + h_1\rho_v g = p_0 + h'\rho_v g \quad \text{a tedy} \quad h' = \frac{(p-p_0)}{\rho_v g} + \frac{h_2\rho_o}{\rho_v} + h_1$$

Příklad 3.2.2

Jaký je rozdíl tlaků Δp ve vodorovném potrubí (ve kterém proudí voda), který je měřen U-trubicí naplněnou rtutí. Rozdíl výšek hladin je Δh.

Zadáno:

Δh =	0.35 m	
ρ_v =	1000 kg.m^{-3}	
ρ_{Hg} =	13600 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Δp = ?	Pa	43262.10



Řešení: Podmínka rovnováhy v levém a pravém rameni diferenciálního U-manometru:

$$p_L = p_p \Rightarrow p_1 + \rho_v .g.h' = p_2 \rho_v .g(h' - \Delta h) + \rho_{Hg} .g.\Delta h$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_{Hg} - \rho_v).g.\Delta h$$

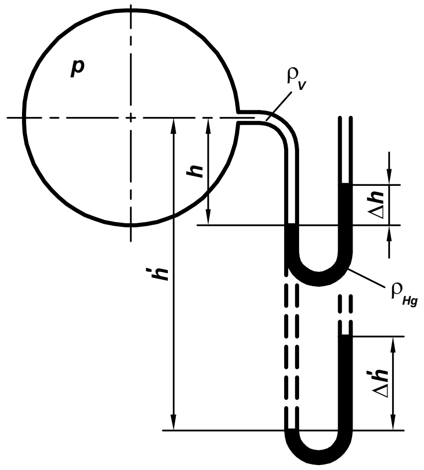
Příklad 3.2.3

Tlak vody v potrubí se měří U-trubicí s otevřeným koncem. Rozdíl hladin rtuti v U-trubici je Δh. Poloha spodní hladiny rtuti ve vztahu k ose potrubí je dána výškou h. Jak veliký je měřený tlak p? Jak se při stejném tlaku p v nádobě změní údaj v U-trubici, změní-li se h na h'. Tlak ovzduší je p_0.

Zadáno:

Δh =	0.3 m	
h =	1 m	
h' =	1.5 m	
p_0 =	0.1 MPa	
ρ_v =	1000 kg.m^{-3}	
ρ_{Hg} =	13600 kg.m^{-3}	

Vypočtěte:		Výsledky:
p = ?	Pa	130214.80
$\Delta h'$ = ?	m	0.33673



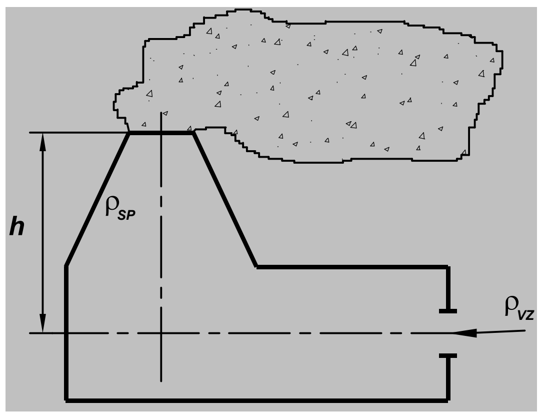
Příklad 3.2.4

Určete přirozený tah Δp v topeništi, které je spojeno s komínem vysokým h. Hustota vzduchu je ρ_{vz} a hustota kouřových spalin je ρ_{sp}.

Zadáno:

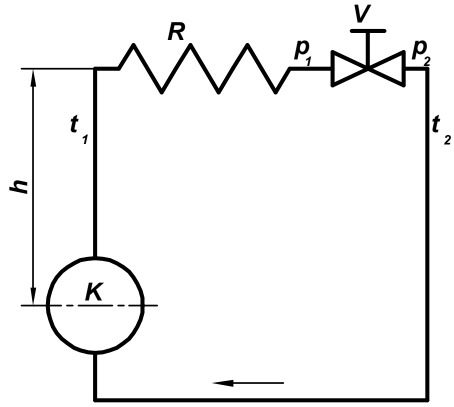
ρ_{vz} =	1.29 kg.m^{-3}	
ρ_{sp} =	0.44 kg.m^{-3}	
h =	20 m	

Vypočtěte:		Výsledky:
Δp = ?	Pa	166.77



Příklad 3.2.5

V soustavě ústředního topení ohřívá kotel K vodu na teplotu t_1. V radiátoru R se voda ochladí na teplotu t_2. Ostatní části jsou tepelně izolovány. Výškový rozdíl kotle a radiátoru je h. Určete přetlak $\Delta p = p_1 - p_2$, který bude působit na ventil V, který za provozu přeruší cirkulaci vody.



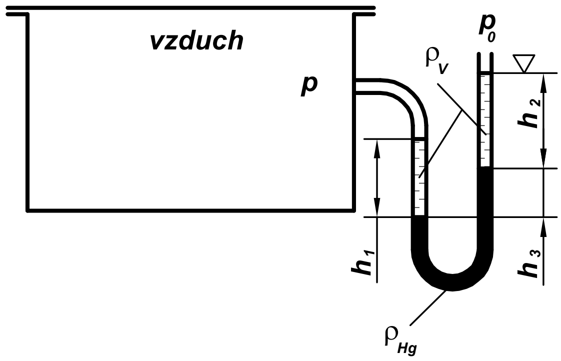
Zadáno:		
t_1 =	90 °C	
t_2 =	60 °C	
h =	8 m	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$\rho_1 = \rho_{90} =$?	kg.m^{-3}	965.3
$\rho_2 = \rho_{60} =$?	kg.m^{-3}	983.2
p = ?	Pa	1404.79

Řešení: $\Delta p = (\rho_1 - \rho_2).g.h$

Příklad 3.2.6

Určete absolutní tlak vzduchu v nádobě, jsou-li údaje na dvoukapalinovém manometru následující : h_1, h_2, h_3 a tlak ovzduší je p_0.

Zadáno:		
h_1 =	700 mm	
h_2 =	600 mm	
h_3 =	300 mm	
ρ_{Hg} =	13600 kg.m^{-3}	
ρ_v =	1000 kg.m^{-3}	
p_0 =	0.1 MPa	
Vypočtěte:		Výsledky:
p = ?	Pa	139043.8



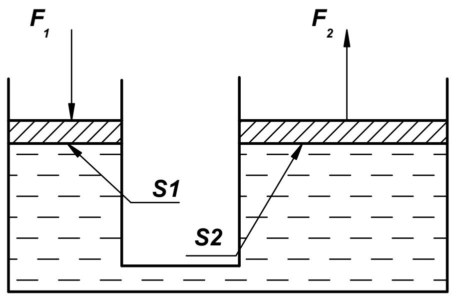
3.3. Pascalův zákon

Tlak je obecně funkcí polohy. Pokud jsou však hmotnostní síly působící na kapalinu v klidu mnohem menší než síly tlakové, je tlak ve všech místech kapaliny konstantní, což je zákon Pascalův. Toho se využívá například u hydraulických lisů, hydraulického akumulátoru, hydraulických pohonů. Hydraulický lis je v podstatě nádoba s kapalinou, ve které se pohybují dva písty různých průměrů. Na obou pístech je dle Pascalova zákona stejný tlak $p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$

Příklad 3.3.1

Do nádrže naplněné kapalinou jsou vestavěny dva písty o průměrech d_1 a d_2. Na první z nich působí síla F_1. Určete tlak p v kapalině a sílu F_2 udržující píst v rovnováze.

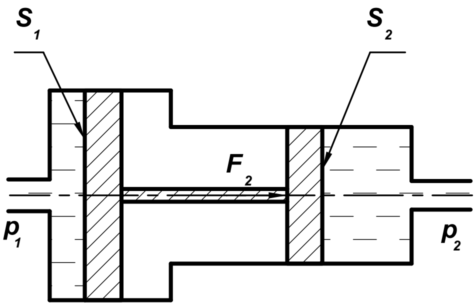
Zadáno:		
d_1 =	0.29 m	
d_2 =	0.55 m	
F_1 =	1407 kN	
Vypočtěte:		Výsledky:
p = ?	MPa	21.30135
F_2 = ?	kN	5060.84929



Příklad 3.3.2

Dva válce o různých velikostech jsou pevně spojeny tyčí. Jestliže na plochu S_1 působí tlak daný p_1, pak na tuto plochu působí síla F_1, která je přenášena na plochu S_2 a na výstupu se získá tlak p_2. Určete hodnotu tohoto tlaku.

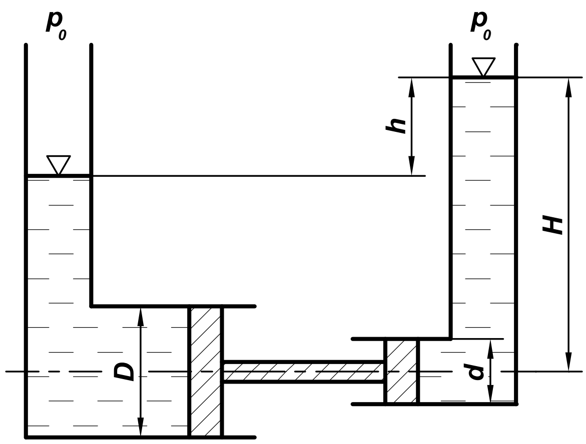
Zadáno:		
S_1 =	20 cm^2	
S_2 =	16 cm^2	
p_1 =	1 MPa	
Vypočtěte:		Výsledky:
p_2 = ?	Pa	1 250 000.0



Příklad 3.3.3

Táhlem spojené písty silového zařízení se ustálí v poloze naznačené na obrázku. Určete h, je-li dán poměr $\frac{D}{d}$ a H.

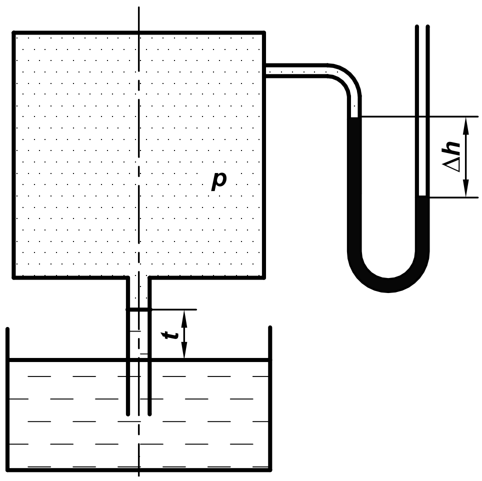
Zadáno:		
$\frac{D}{d}$ =	3	
H =	4 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
h = ?	m	3.56



Příklad 3.3.4

Určete tlak plynu v plynojemu jestliže v U – trubici naplněné lihem je rozdíl hladin Δh. Do jaké výšky vystoupí hladina vody v trubici, kterou je plynojem spojen s vodní nádrží?

Zadáno:		
Δh =	0.02 m	
p_0 =	0.101 MPa	
ρ_{lih} =	800 kg.m^{-3}	
ρ_{voda} =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
p = ?	MPa	0.10084
t = ?	m	0.01631



4. Tlakové síly

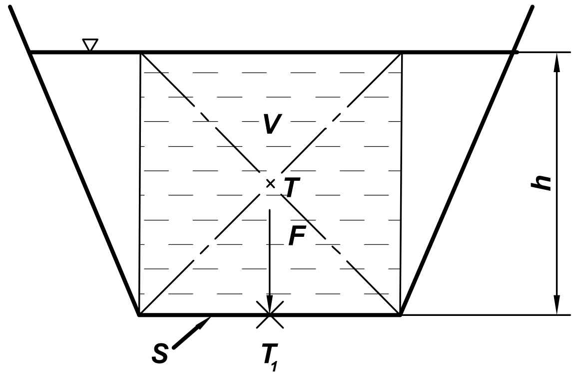
4.1. Dno nádoby

Tlaková síla na dno nádoby (rovinná vodorovná plocha) se určí ze vztahů

$$F = p\,S = \rho\,g\,h\,S = \rho\,g\,V$$

Objem V je tzv. zatěžovací objem definovaný třemi plochami, které ho omezují:

- plocha S, na niž působí tlaková síla F
- hladinová plocha tlaku ovzduší ($p_0 = konst$)
- válcová plocha vzniklá pohybem povrchové (tvořící) přímky po obrysu plochy S. Povrchová přímka je rovnoběžná se silou F



Hydrostatický tlak p působící na vodorovné plochy, pokud se uvažuje jen zemská tíže, je konstantní. Tlaková síla F prochází těžištěm zatěžovacího objemu V.

4.2. Tlakové síly na šikmé rovinné stěny

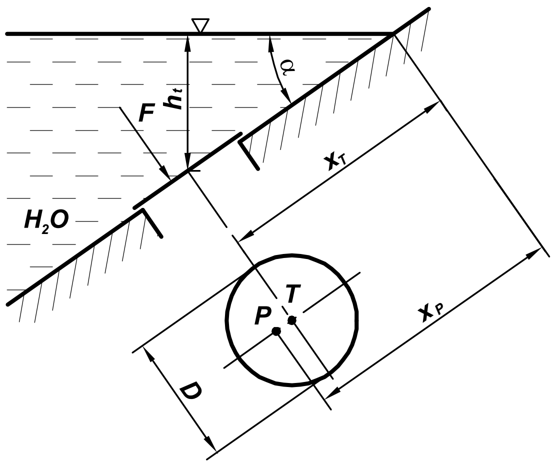
Tlaková síla od kapaliny působící na šikmé a svislé rovinné plochy je dána vztahem

$$F = \rho\,g\,h_T\,S = p_T\,S = \rho\,g\,V$$

kde:

p_T - hydrostatický tlak v těžišti plochy

h_T - svislá vzdálenost těžiště plochy S od hladinové plochy tlaku ovzduší $p_0 = konst.$



V je zatěžovací objem omezený následujícími plochami:

- plochou S, na kterou se počítá tlaková síla
- sklopenou hladinovou plochou tlaku ovzduší
- válcovou plochou vzniklou opsáním přímky rovnoběžné s hledanou silou F po obrysu plochy S.

Tlaková síla F je kolmá na plochu S, prochází těžištěm zatěžovacího obrazce a působiště tlakové síly leží vždy pod těžištěm T plochy S. Platí vztah:

$$x_P = \frac{J_y}{M_y} = x_T + \frac{J_{yT}}{M_y}$$

J_y - moment setrvačnosti plochy S k ose y

J_{yT} - moment setrvačnosti plochy S k ose y_T procházející těžištěm plochy a rovnoběžné s y

M_y - statický moment plochy S k ose y, pro který platí $M_y = x_T\,S$

Pro plochy nesouměrné k ose x_T platí

$$y_t = \frac{J_{xy}}{M_y} = \frac{S \cdot x_T \cdot y_T}{M_y} + \frac{J_{xyT}}{M_y} \quad \text{kde}$$

J_{xy} - deviační moment k osám *x, y*

J_{xyT} - deviační moment k souřadnému systému s počátkem v těžišti plochy.

Rozložením tlakové síly F do os kartézského systému se získají složky F_x, F_y.

Svislá složka tlakové síly $F_y = \rho\, g\, V_y$, kde je zatěžovací objem V_y je opět určen:

- plochou S
- hladinovou plochou tlaku ovzduší
- válcovou plochou tvořenou svislou přímkou, která opíše plochu S po obrysu.

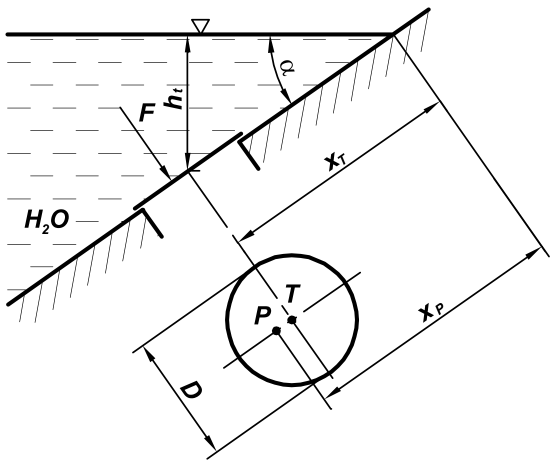
  Vodorovná složka tlakové síly F_x se rovná tlakové síle na průmět plochy S do svislé roviny $F_x = \rho\, g\, h_T\, S_x$.

Příklad 4.2.1

Stanovte velikost tlakové síly F na kruhové víko výpustě a vzdálenost působiště tlakové síly x_p.

Určete svislou složku tlakové síly F_y.

Zadáno:			
D =	1 m		
x_T =	1.8 m		
α =	40 deg		
ρ =	1000 kg.m^{-3}		
Vypočtěte:			Výsledky:
F = ?		N	8914.54
x_p = ?		m	1.83472
F_y = ?		N	6828.93



Řešení:

$$F = \rho.g.h_T.S = \rho.g.x_T \sin(\alpha).\frac{\pi.D^2}{4}$$

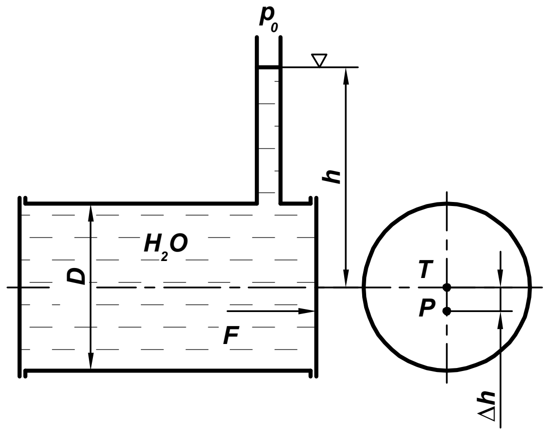
$$x_P = x_T + \frac{J_t}{M_y} = x_T + \frac{\frac{\pi.D^4}{64}}{x_T.\frac{\pi.D^2}{4}}$$

$$F_y = F.\cos\alpha$$

$$\Delta x = x_T - x_p$$

Příklad 4.2.2

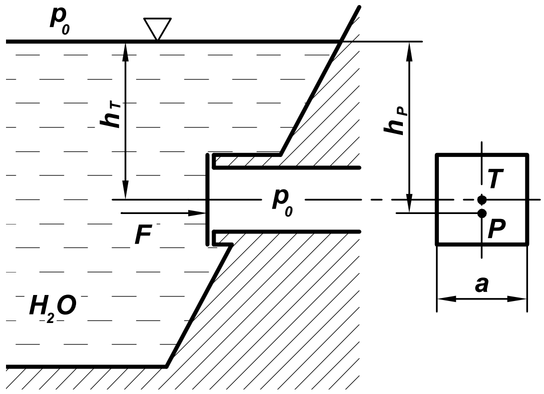
Stanovte velikost síly F na kruhové víko nádrže, jestliže v připojené trubce je hladina ve výšce h. Vypočtěte vzdálenost Δh působiště P tlakové síly od těžiště T plochy. Nakreslete zatěžovací obrazec. Měrnou hmotnost vody uvažujte ρ.



Zadáno:		
h =	1.4 m	
D =	0.8 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F = ?	N	6 903.46
Δh = ?	m	0.02857

Příklad 4.2.3

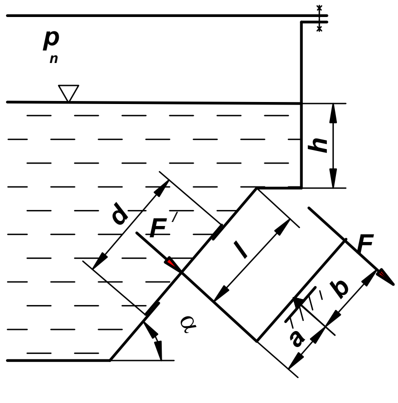
Stanovte tlakovou sílu F a vzdálenost jejího působiště h_p pro čtvercové víko kanálu v hloubce h_T pod hladinou (p_0 = konst.). Určete střední hodnotu tlaku p na víko.



Zadáno:		
h_T =	1.6 m	
a =	1 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F = ?	N	15 696.00
h_p = ?	m	1.65208
p = ?	Pa	15 696.00

Příklad 4.2.4

Určete sílu F na páce, kterou se otevře ventil o průměru d uzavírající otvor v tlakové nádobě. Sklon roviny ventilu je α a pákový převod a/b. Přetlak na hladině je p_n.



Zadáno:		
d =	0.25 m	
l =	0.6 m	
h =	0.85 m	
a/b =	3	
α =	60 ^{0}	
p_n =	30000 Pa	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F = ?	N	6 396.46

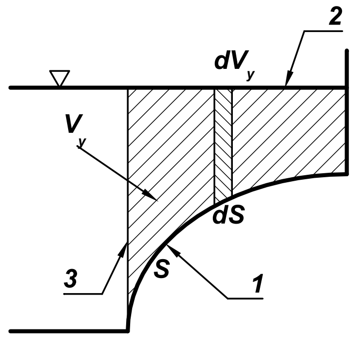
4.3. Tlakové síly na křivé plochy

Tlakové síly na křivé plochy se řeší dvěma metodami, tj metodou složkovou a metodou náhradních ploch.

Metoda složková spočívá v určení svislé a vodorovné složky tlakové síly na křivou plochu. Pro svislou složku tlakové síly platí

$$F_y = \int dF_y = \int_{S_y} \rho\, g\, h\, dS_y = \rho\, g \int_{V_y} dV_y = \rho\, g\, V_y$$

Objem V_y zatěžovacího obrazce je stejně určen jako při výpočtu svislé složky F_y u šikmé rovinné plochy. Je omezen následujícími plochami:



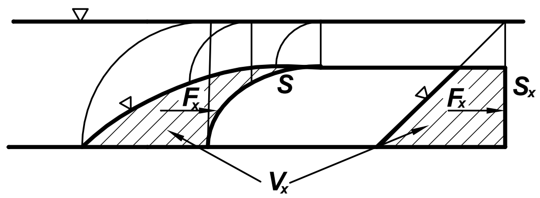
1. křivou plochou S, na niž se počítá svislá složka tlakové síly
2. hladinovou plochou tlaku ovzduší ($p_0 = konst$)
3. pláštěm vytvořeným svislými přímkami rovnoběžnými se složkou F_y nad obrysem křivé plochy S.

Objem V_y se zpravidla vypočte jako rozdíl objemů dvou základních geometrických těles. Svislá složka F_y prochází těžištěm zatěžovacího objemu V_y.

Vodorovná složka tlaku je určena rovnicí

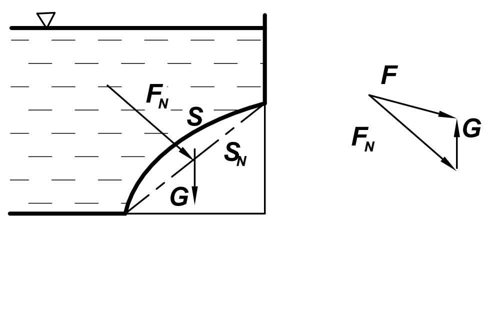
$$F_x = \int dF_x = \int_{S_x} \rho\, g\, h\, dS_x = \rho\, g \int_{V_x} dV_x = \rho\, g\, V_x = \rho\, g\, h_t\, S_x$$

S_x je plocha průmětu křivé plochy do svislé roviny. Postup výpočtu je stejný jako u šikmé rovinné plochy, tj. vodorovná složka F_x na křivou plochu S se rovná tlakové síle na průmět S_x křivé plochy do svislé roviny a prochází těžištěm zatěžovacího objemu V_x. Výslednice tlakové síly na křivou plochu pak je



$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ a směr výslednice se určí $tg\alpha = \dfrac{F_y}{F_x}$. Výslednice tlakové síly F pak prochází průsečíkem složek F_x, F_y. V případech, kdy křivá plocha má několikanásobný průmět ve směru uvažované složky tlakové síly, je nutno křivou plochu rozdělit na tolik částí, aby každá část měla jednoduchý průmět. Výsledná složka tlakové síly se určí součtem tlakových sil na všechny části křivé plochy (se zřetelem na znaménko).

Při výpočtu tlakové síly na křivou plochu metodou náhradních ploch se postupuje takto:



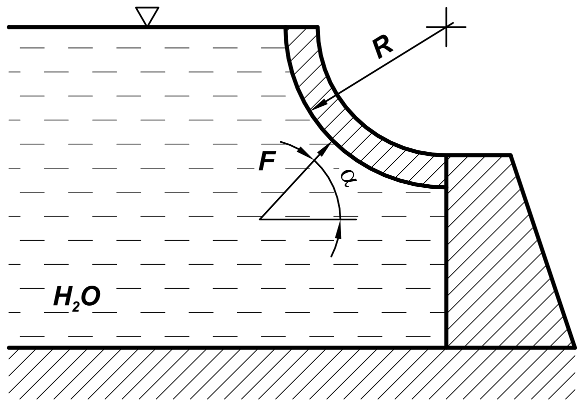
- křivá plocha se nahradí rovinnou plochou (nebo více rovinnými plochami) tak, aby křivá plocha a náhradní plocha uzavíraly objem V. Tíha kapaliny v tomto objemu je G.

- vypočte se tlaková síla na náhradní plochu F_N (případně se určí vektorovým součtem vypočtených tlakových sil na všechny náhradní plochy)
- tíha kapaliny G se vektorově odečte nebo přičte, jestliže náhradní plochou se objem V přidal nebo odečetl od celkového objemu tekutiny v nádobě.

Příklad 4.3.1

Stanovte tlakovou sílu F na válcový segmentový uzávěr o poloměru R a šířce B. Určete sklon tlakové síly, tj. úhel α. Určete vodorovnou složku F_x a svislou složku F_y tlakové síly F.

Zadáno:		
R =	0.8 m	
B =	3 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_x = ?	N	9 417.60
F_y = ?	N	14 793.12
F = ?	N	17 536.46
α = ?	deg	57.5184



Řešení:

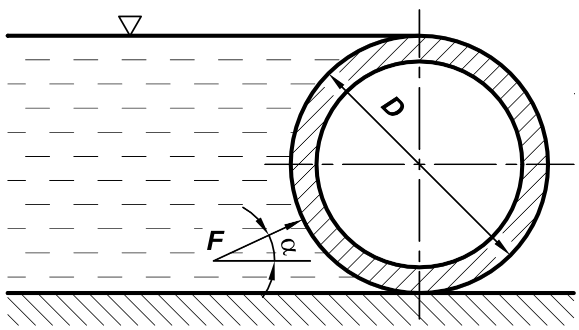
$$F_x = \rho.g.h_t S_x = \rho.g.\frac{R}{2}.R.B \qquad F_y = \rho.g.V_y = \rho.g.\frac{\pi R^2}{4}.B$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad \alpha = arctg\frac{F_y}{F_x}$$

Příklad 4.3.2

Stanovte tlakovou sílu F na válcový jez o průměru D a šířce B. Určete složky tlakové síly F_x a F_y a úhel α.

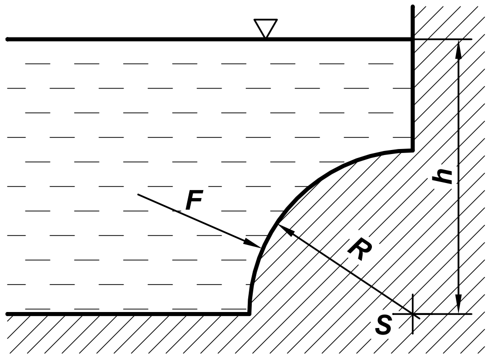
Zadáno:		
D =	1 m	
B =	10 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_x = ?	N	49 050.00
F_y = ?	N	38 523.75
F = ?	N	62 369.719
α = ?	deg	38.146



Příklad 4.3.3

Stanovte velikost tlakové síly F na válcovou plochu u dna nádrže o šířce B. Určete vodorovnou složku tlakové síly F_x přímým výpočtem a svislou složku tlakové síly F_y.

Zadáno:		
h =	1.2 m	
R =	0.8 m	
B =	4.0 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_x = ?	N	25 113.60
F_y = ?	N	17 946.24
F = ?	N	30 866.82

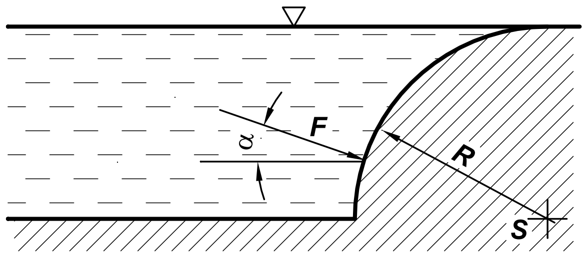


Příklad 4.3.4

Určete velikost síly F a její sklon α na válcovou plochu. Nakreslete zatěžovací obrazec pro svislou složku tlakové síly F_y. Vypočtěte vodorovnou složku tlakové síly F_x. Prochází vektor síly F středem S?

Zadáno:		
R =	0.8 m	
b =	4 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_x = ?	N	12 556.80
F_y = ?	N	5 389.44
F = ?	N	13 664.53
α = ?	deg	23.22919

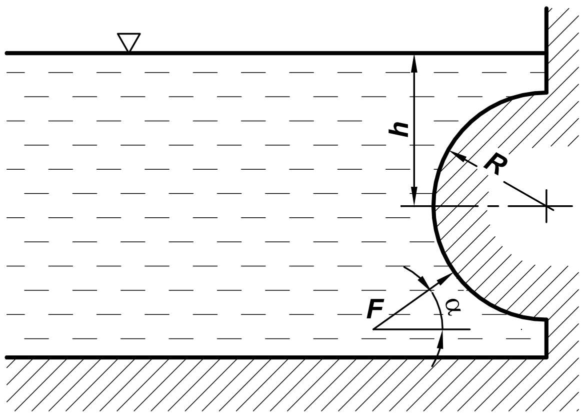
Síla neprochází středem.



Příklad 4.3.5

Stanovte velikost síly F na plochu tvaru polokoule a úhel α, který svírá s vodorovnou rovinou. Určete vodorovnou složku tlakové síly F_x.

Zadáno:		
h =	6.5 m	
R =	4 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_x = ?	N	3 205 175.78
F_y = ?	N	1 314 943.91
F = ?	N	3 464 423.37
α = ?	deg	22.31



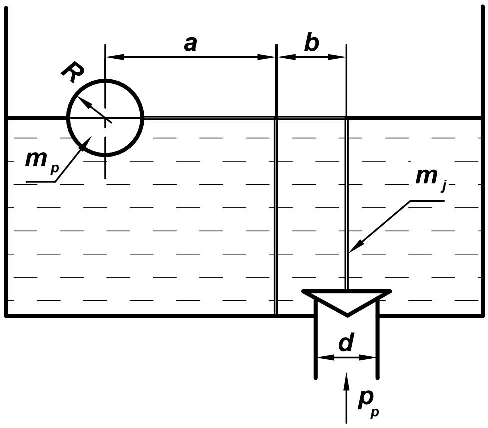
Řešení:

$$F_x = \rho.g.h_t S = \rho.g.h.\pi R^2 \qquad F_y = \rho.g.V_y = \rho.g.\frac{1}{2}\frac{4}{3}.\pi.R^3$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad \alpha = arctg\,\frac{F_y}{F_x}$$

Příklad 4.3.6

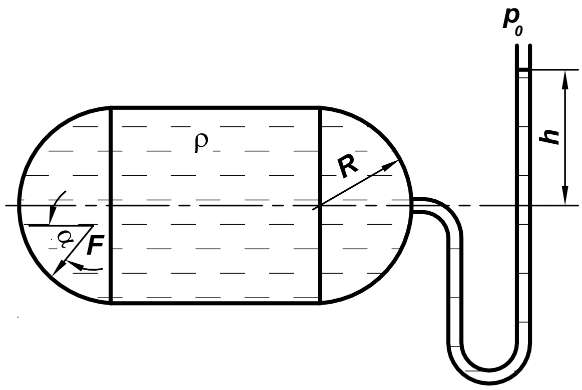
Do karburátoru se přivádí benzín potrubím o průměru d přetlakem p_p. Stanovte rozměry kulového plováku z podmínky, že hladina benzínu v karburátoru má být v ose otvoru a že plovák má být ponořen z poloviny v okamžiku otevření jehly. Hmotnost jehly je m_j a plováku m_p.



Zadáno:		
d =	3 mm	
p_p =	0.04 MPa	
a =	45 mm	
b =	15 mm	
m_j =	15 g	
m_p =	25 g	
ρ =	800 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
R = ?	m	0.02605

Příklad 4.3.7

Určete tlakovou sílu F na polokulové víko nádoby. Určete směr tlakové síly tj. úhel α. Prochází výslednice F bodem S? Nakreslete zatěžovací obrazec pro F_x a F_y.



Zadáno:		
R =	0.5 m	
h =	1.8 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_x = ?	N	13 868.55
F_y = ?	N	2 568.25
F = ?	N	14 104.35
α = ?	deg	10.4915

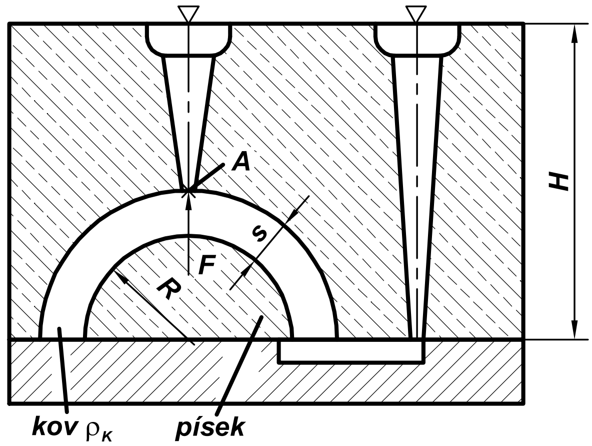
Řešení:

$$F_x = \rho.g.h.\pi.R^2 \qquad F_y = \rho.g.V_y = \rho.g.\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.R^3$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad \alpha = arctg\,\frac{F_y}{F_x}$$

Příklad 4.3.8

Jakou silou F je zvedán svršek formy při odlévání duté polokoule? Vypočtěte tlak p_A kovu v bodě A po odlití.

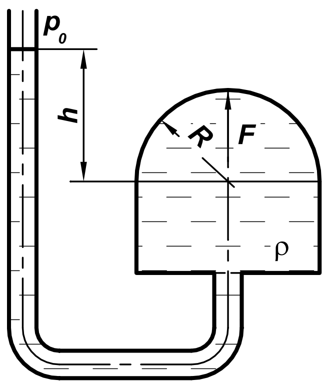


Zadáno:		
R =	0.4 m	
s =	0.023 m	
H =	0.8 m	
ρ_k =	7800 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F = ?	N	22 280.43
p_A = ?	Pa	28 847.29

Příklad 4.3.9

Určete tlakovou sílu F na polokulové víko válcové nádrže, která je naplněna kapalinou o hustotě ρ. Použijte metody náhradních ploch. Výška hladiny je h, poloměr polokoule je R. Nakreslete zatěžovací obrazec pro sílu F:

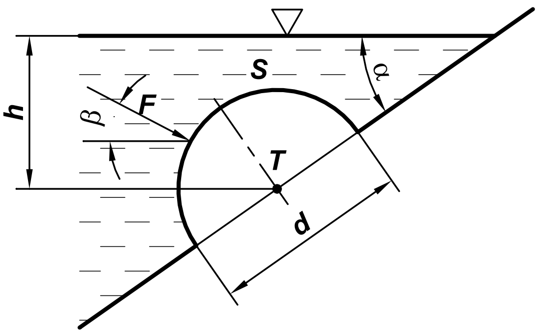
Zadáno:		
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
h =	3 m	
R =	1 m	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_N = ?	N	92 456.99
G = ?	N	20 546.00
F = ?	N	71 910.99



Příklad 4.3.10

Určete výsledný tlak vody na plochu polokulového víka, které zakrývá kruhový otvor v šikmé stěně nádoby. Těžiště otvoru je v hloubce h, průměr otvoru je d. Šikmá stěna svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Použijte metody náhrad. ploch.

Zadáno:		
h =	2.5 m	
d =	0.4 m	
α =	45 °	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_N = ?	N	3 081.90
G = ?	N	164.37
F = ?	N	2968.0



Řešení: $F_N = \rho.g.h_t.S_N = \rho.g.h.\frac{\pi.d^2}{4}$ $\quad G = \rho.g.V = \rho.g.\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi.r^3 = \rho.g.\frac{2}{3}\pi.r^3$

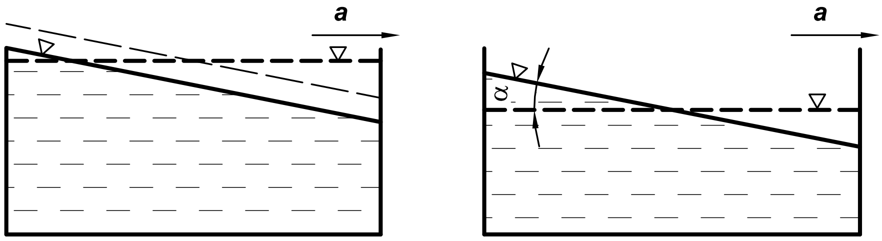
$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_N - \mathrm{G} \Rightarrow F = \sqrt{F_N^2 + G^2 - 2F_N.G.\cos\alpha}$$

5. Relativní pohyb kapaliny

5.1. Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený

V závislosti na zrychlení se určí sklon hladinových ploch $tg\alpha = \frac{a}{g}$. Poloha hladinové plochy atmosférického tlaku ovzduší (nebo daného tlaku) se určí podle následujících podmínek

- kapalina za pohybu nepřetéká z nádoby, pak je objem tekutiny v nádobě před pohybem a za pohybu stejný ($V = konst$).
- kapalina za pohybu přetéká, pak hladina tlaku ovzduší prochází okrajem nádoby, kde kapalina začala přetékat.

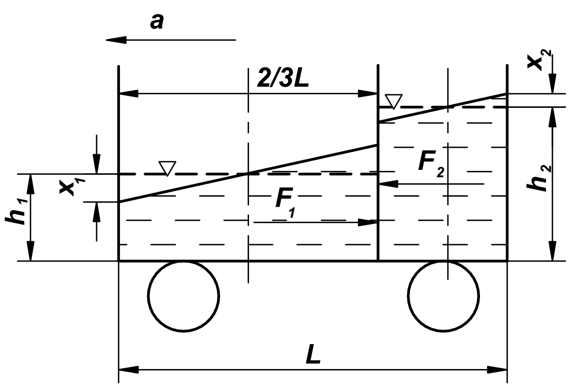


Po vyšetření hladinové plochy tlaku ovzduší za relativního klidu kapaliny se řeší úlohy stejně jako u nádoby s kapalinou za klidu. Pro tlak v libovolném místě platí $p = \rho\, g\, h$, kde h je svislá vzdálenost bodu od hladiny tlaku ovzduší. Tlaková síla kapaliny F na plochu S je určena obecně $F = \rho\, g\, V$, kde V je objem zatěžovacího obrazce. Zatěžovací obrazec je určen podle stejných pravidel jako dříve (hladinová plocha $p_0 = konst.$ je šikmá rovina).

Příklad 5.1.1

Vozík ve tvaru hranolu se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Jeho objem je rozdělen přepážkou na dvě části, v nichž je voda ve výši h_1, h_2. Šířka vozíku je B. Určete výslednou tlakovou sílu F na přepážku.

Zadáno:		
L =	3 m	
h_1 =	1 m	
h_2 =	1.75 m	
B =	1 m	
a =	3.924 m.s^{-1}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_1 = ?	N	9 613.80
F_2 = ?	N	11 784.26
F = ?	N	2 170.46
x_1 = ?	m	0.40
x_2 = ?	m	0.20



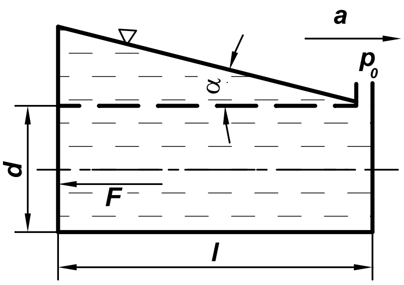
Řešení: $x_1 = tg\alpha \dfrac{L}{3}$, $F_1 = \rho.g.(h_1 + x_1)\dfrac{(h_1 + x_1)}{2} B$

$x_2 = tg\alpha \dfrac{L}{6}$, $F_2 = \rho.g.(h_2 - x_2)\dfrac{(h_2 - x_2)}{2} B$ $F = F_2 - F_1$

Příklad 5.1.2

V uzavřeném sudu je kapalina o hustotě ρ. Sud se na podvozku pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Určete tlakovou sílu F na levé kruhové dno, je-li délka sudu l a průměr d. V sudu je v nejvyšším bodě objemu odvzdušňovací otvor, v němž je tlak ovzduší $p = p_0$ (hladinová plocha atmosférického tlaku musí procházet odvzdušňovacím otvorem, což je rozhraní mezi kapalinou a ovzduším).

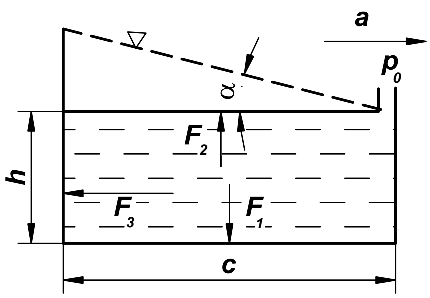
Zadáno:		
l =	1 m	
d =	0.6 m	
p =	101325 m	
a =	2.943 m.s^{-1}	
ρ =	800 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F = ?	N	1 330.71



Příklad 5.1.3

Nádrž ve tvaru hranolu s malým zavzdušňovacím otvorem ve víku u přední hrany se na podvozku pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Nádrž byla za klidu zcela zaplněna kapalinou o hustotě ρ. Stanovte za pohybu tlakovou sílu F_1 působící na dno nádrže, sílu F_2 na víko a sílu F_3 na zadní stěnu nádrže.

Zadáno:		
a =	4.905 ms^{-2}	
b =	0.5 m	
c =	1 m	
h =	0.5 m	
ρ =	720 kgm^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_1 = ?	N	2 648.70
F_2 = ?	N	882.90
F_3 = ?	N	1 324.35



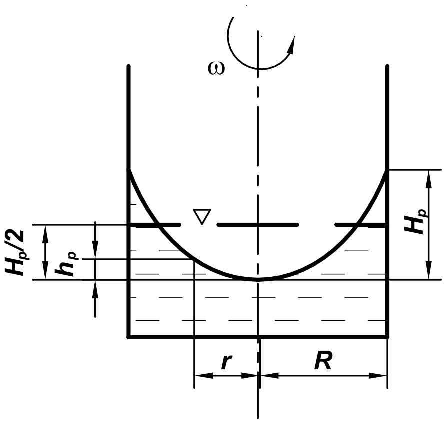
5.2. Pohyb rovnoměrně otáčivý

Pro určení tlakové síly na stěny při rovnoměrném otáčivém pohybu nádoby s kapalinou nutno definovat výšku H_p rotačního paraboloidu na poloměru R, pro kterou platí

$$H_p = \frac{u^2}{2g} = \frac{(R \cdot \omega)^2}{2g}$$

Na jiném poloměru r je výška paraboloidu určena analogickou rovnicí $h_p = \frac{u^2}{2g} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{2g}$

Poloha hladinové plochy tlaku ovzduší se vyšetří pro následující případy:



- Nepřetéká-li tekutina za pohybu z nádoby, je objem kapaliny v nádobě před pohybem a za pohybu stejný ($V = konst$).
- U otevřené válcové nádoby, pokud kapalina nevytéká, hladina se může volně zvednout, půlí původní hladina výšku paraboloidu h_p, protože objem rotačního paraboloidu je roven polovině objemu opsaného válce.

  Při přetékání se ustálí hladina tak, že prochází místem, kde tekutina začala přetékat, tj. okrajem nádoby.

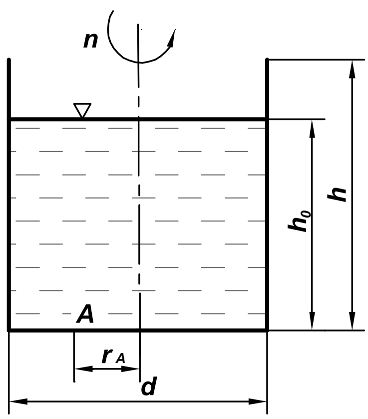
Po vyšetření hladinové plochy tlaku ovzduší za relativního klidu kapaliny se řeší úlohy stejně jako u nádoby s kapalinou v klidu. Tlak v kapalině je $p = \rho g h$, kde h je svislá vzdálenost daného bodu od hladiny tlaku ovzduší. Tlaková síla F od kapaliny na plochu S je $F = \rho g V$, kde V je zatěžovací objem dříve určený (hladinová plocha $p_0 = konst$ je rotační paraboloid).

Příklad 5.2.1

Stanovte otáčky nádoby n, při kterých se hladina p_0 = *konst.* dotkne dna nádoby a nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku. Vyteče zčásti kapalina z nádoby? Když ano, jaký objem V vyteče? Jaký relativní tlak p_A bude v místě A na poloměru r_A při rotaci nádoby s kapalinou?

Zadáno:

h_0 =	0.0667 m
h =	0.1 m
d =	0.1 m
r_A =	0.025 m
ρ =	1000 kg.m^{-3}



Vypočtěte:		Výsledky:
H_p = ?	m	0.10
n = ?	s^{-1}	4.459
p_A = ?	Pa	245.40
V = ?	m^3	0.000131

Řešení:

$$H_p = \begin{cases} 2h_0 & \text{pro } h_0 < \frac{h}{2} \\ h & \text{pro } h_0 \geq \frac{h}{2} \end{cases} \qquad V = \begin{cases} 0 & \text{je - li } h_0 \leq \frac{1}{2}.h \\ \frac{\pi.d^2}{4} h_0 - \frac{1}{2}\frac{\pi.d^2}{4} h & \text{je - li } h_0 \geq \frac{1}{2}.h \end{cases}$$

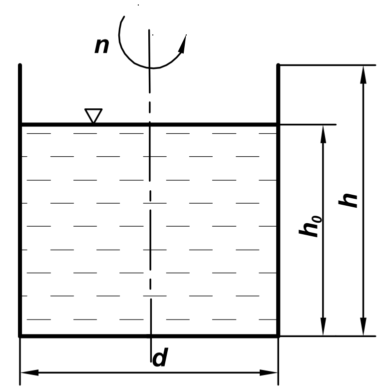
$$H_p = \frac{\left(\frac{d}{2}\cdot\omega\right)^2}{2g} = \frac{(d\cdot 2\pi n)^2}{8g} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{H_p.8g}{(2\pi)^2 d^2}}$$

$$p_A = \rho.g.h_A = \rho.g.\frac{(2\pi.n.r_A.2)^2}{8g}$$

Příklad 5.2.2

Válcová nádoba o průměru d a výšce h je zaplněna kapalinou do výšky h_0 ode dna nádoby. Určete maximální otáčky, při kterých kapalina nevyteče z nádoby a jaká bude výška paraboloidu.

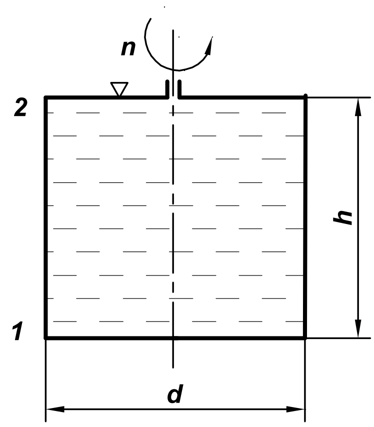
Zadáno:		
h_0 =	6.667 cm	
h =	10 cm	
d =	4 cm	
Vypočtěte:		Výsledky:
H_p = ?	m	0.06666
n = ?	s^{-1}	9.10066



Příklad 5.2.3

Nádoba je až po otvor naplněna vodou. Určete výšku rotačního paraboloidu hladinové plochy h_p, vypočítejte tlakovou sílu F_1 na dno a F_2 na víko nádoby, tlak p_1 a p_2 v místech *1* a *2* při rotaci nádoby otáčkami n. Nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku při rotaci. Otvor ve víku je velmi malý. Vypočítejte úhlovou rychlost ω.

Zadáno:		
h =	0.3 m	
d =	0.2 m	
n =	2 ot.s^{-1}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
ω = ?	s^{-1}	12.57
H_p = ?	m	0.08053
F_1 = ?	N	104.87
F_2 = ?	N	12.41
p_1 = ?	Pa	3 733.00
p_2 = ?	Pa	790.00



Řešení: $\omega = 2\pi n$ $$H_p = \frac{(\omega.d)^2}{8g}$$

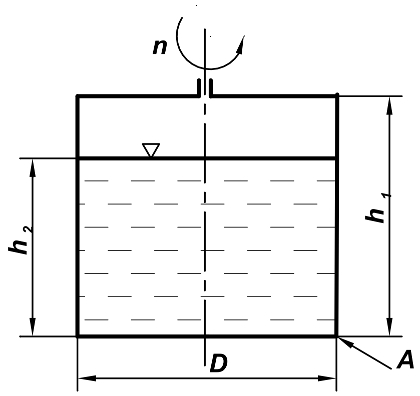
$$F_1 = \rho g\frac{\pi.d^2}{4}\left(h + \frac{1}{2}H_p\right) \qquad p_1 = (h + H_p)\rho g$$

$$F_2 = \rho g \frac{\pi . d^2}{4} \frac{H_p}{2} \qquad\qquad p_2 = H_p \rho g$$

Příklad 5.2.4

Stanovte otáčky n nádoby, při nichž se hladina atmosférického tlaku dotkne dna. Určete tlak p_A v bodě A při rotaci nádoby s kapalinou. Nádoba má ve víku malý otvor. Nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku při rotaci.

Zadáno:		
h_1 =	1.1 m	
h_2 =	0.9 m	
D =	1.4 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
n = ?	s^{-1}	1.75160
p_A = ?	Pa	29 675.29



Řešení:

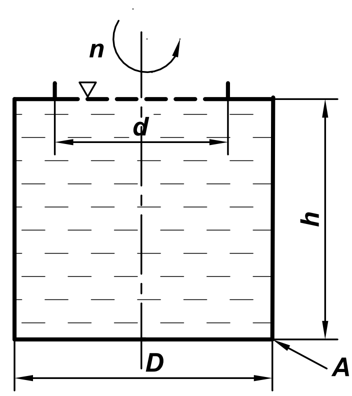
$$V_{kapaliny} = V'_{vzduchu} \Rightarrow \frac{\pi . D^2}{4}\left(h_1 - h_2\right) = \frac{\pi . d^2}{8} h_1 \Rightarrow d = D\sqrt{\frac{h_1 - h_2}{h_1}2}$$

$$h_1 = \frac{(\omega d)^2}{8g} \Rightarrow n = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{8gh_1}{d^2}}\frac{1}{2\pi},\; p_A = \rho g h_A = \rho g \frac{\omega^2 D^2}{8g}$$

Příklad 5.2.5

Nádoba je naplněna po okraj kapalinou. Vypočtěte objem kapaliny V, který přeteče otvorem ve víku nádoby při její rotaci otáčkami n, při kterých se hladinová plocha p_0=*konst* dotkne dna. Určete relativní tlak p_A v bodě A při rotaci nádoby. Kolikrát se zvětší tento tlak ve srovnání s původním tlakem za klidu.

Zadáno:		
d =	0.15 m	
D =	0.3 m	
h =	0.25 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
n = ?	s^{-1}	4.69979
V = ?	m^3	0.00221
p_A = ?	Pa	9 809.99
φ = ?		4.00



Hydrodynamika

6. Základní pojmy a rozdělení proudění

Proudění se vyšetřuje v prostoru, rovině nebo po křivce buď sledováním pohybu určité částice kapaliny jako hmotného bodu, nebo se sleduje celý proud v určitém časovém okamžiku. K popisu základních případů proudění se používají pojmy trajektorie částice, proudnice a proudová trubice. Dráha neboli trajektorie je obecně čarou, kterou probíhá částice tekutiny. Proudnice je čára, jejíž tečny v libovolném bodě udávají směr rychlosti. Proudová trubice je soustava proudnic, které procházejí uzavřenou křivkou. Přes stěnu proudové trubice tekutina nevytéká ani do ní nevtéká a každým průřezem téže proudové trubice protéká stejný hmotnostní průtok. V technické praxi je takovou proudovou trubicí potrubí.

6.1. Rozdělení proudění

Podle uspořádání proudění v prostoru se proudění rozděluje na trojrozměrné (prostorové), dvourozměrné (rovinné) a jednorozměrné (po křivce). Podle závislosti na čase se definuje proudění ustálené (stacionární), které je na čase nezávislé , a proudění neustálené (nestacionární), u něhož se veličiny v čase mění.

V nejjednodušších případech se předpokládá ideální kapalina, která je nevazká a nestlačitelná a neklade odpor proti pohybu. Předpoklad ideální kapaliny usnadnil odvození některých rovnic hydrodynamiky, které platí s určitými omezeními i pro skutečné kapaliny. Při řešení praktických úloh je uvažováno proudění skutečné kapaliny, která je vazká a stlačitelná, při pohybu klade proti němu odpor. Hydrodynamické veličiny pak závisejí na tom, jaký režim proudění se vyvine.

Proudění skutečných kapalin může být laminární nebo turbulentní. V případě jednorozměrného proudění v potrubí hranici tvoří experimentálně určené kritické Reynoldsovo číslo Re, definováno vztahem $\mathrm{Re} = \frac{v_s d}{\nu}$, kde v_s je střední rychlost v potrubí, d jeho průměr a ν kinematická viskozita. Kritická hodnota Re_{krit} pro potrubí kruhového průřezu je 2320. Při $\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}_{krit}$ se v potrubí vyvine uspořádané laminární proudění, pohyb se děje ve vrstvách a částice tekutiny se nepohybují napříč průřezem. Je-li $\mathrm{Re} \ge \mathrm{Re}_{krit}$, proudění je turbulentní, dochází k intenzivnímu míšení částic následkem jejich podružných (turbulentních) pohybů ve všech směrech.

Příklad 6.1.1

Kyslík proudí potrubím o světlosti d při absolutním tlaku p a teplotě t. Určete, při jaké rychlosti bude proudění ještě laminární, je-li dynamická viskozita kyslíku η a jeho měrná plynová konstanta r. Jaký maximální hmotnostní průtok Q_m se dopraví tímto potrubím při laminárním proudění?

Zadáno:

d = 0.050 m

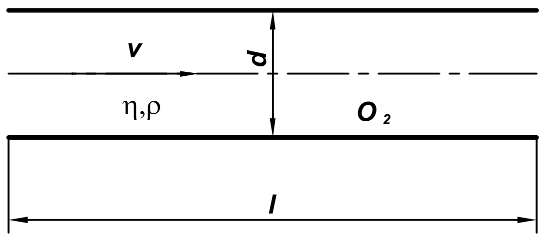
p = 1 MPa

t = 27 ^{0}C

η = 2.06E-04 Pa.s

r = 259.8 J.kg^{-1}.K^{-1}

Vypočtěte:		Výsledky:
ρ = ?	kg.m^{-3}	12.82
ν = ?	m^2.s^{-1}	0.0000161
v_{krit} = ?	m.s^{-1}	0.747
Q_m = ?	kg.s^{-1}	0.019



Řešení:

Ze stavové rovnice se určí hustota kyslíku

$$\frac{p}{\rho} = rT \Rightarrow \rho = \frac{p}{rT} = \frac{p}{r(t + 273.15)}$$

Kritická rychlost se vypočítá z kritické hodnoty Re čísla $\mathrm{Re}_{krit} = \frac{v_{krit} d}{\nu} = 2320 \Rightarrow v_{krit} = \frac{2320\nu}{d}$, kde kinematická viskozita $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Hmotnostní průtok se určí ze vztahu $Q_m = \frac{v_{krit}\pi d^2}{4}\rho$.

Příklad 6.1.2

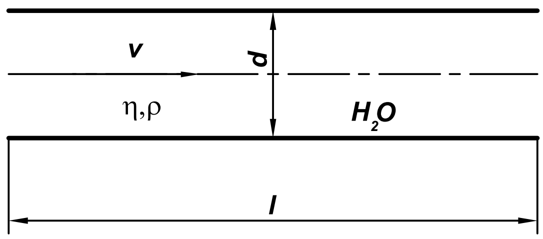
Určete kritickou rychlost v potrubí o průměru d, při níž se proudění laminární změní v turbulentní. Potrubím proudí voda o teplotě t. Kinematickou viskozitu odečtěte z přílohy.

Zadáno:

d = 0.1 m

t = 20 ^{O}C

Vypočtěte:		Výsledky:
v_{krit} = ?	m.s^{-1}	0.023
η = ?	Pa.s	1.01E-03



Příklad 6.1.3

Horké spaliny ve spalovacím prostoru parního generátoru mají kinematickou viskozitu ν. Při jaké rychlosti v_{s1} je možné očekávat přechod laminárního proudění v turbulentní, které je pro spalování výhodnější, je-li dáno Re_{krit} a paprsek má průměr d. Jaká bude rychlost spalin při $\mathrm{Re} = 3 \cdot 10^4$?

Zadáno:

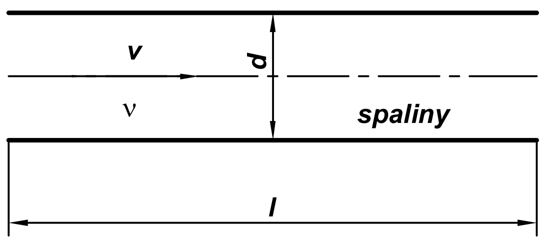
d = 0.030 m

ν = 1.2E-04 m^2.s^{-1}

Re_{krit} = 10000

Re = 3E+04

Vypočtěte:		Výsledky:
v_{s1} = ?	m.s^{-1}	40.00
v_{s2} = ?	m.s^{-1}	120.00

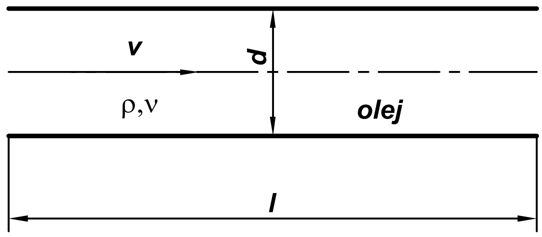


Příklad 6.1.4

Stanovte průměr potrubí d, při kterém se laminární prouděni mění v turbulentní. Potrubím proudí minerální olej o hustotě ρ, kinematické viskozitě ν a průtoku Q_v. Určete rychlost v v potrubí a dynamickou viskozitu η. Jaká je maximální rychlost v potrubí $v_{\max}$?

Zadáno:

Q_v =	4 dm^3.s^{-1}
ρ =	920 kg.m^{-3}
ν =	4.0E-05 m^2.s^{-1}



Vypočtěte:		Výsledky:
d = ?	m	0.05488
v = ?	m.s^{-1}	1.69099
$v_{\max}$ = ?	m.s^{-1}	3.38198
η = ?	Pa.s	0.03680

Řešení:

Přechod z laminárního do turbulentního proudění nastane při kritickém Reynoldsově čísle $\mathrm{Re}_{krit} = 2320$. Rychlost můžeme definovat pomocí objemového průtoku, který je zadán.

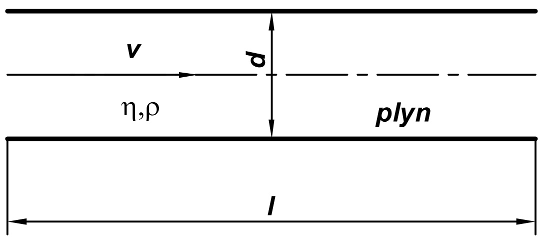
$$\mathrm{Re}_{krit} = \frac{vd}{\nu} \Rightarrow d = \frac{\mathrm{Re}_{krit}\,\nu}{v} = \frac{\mathrm{Re}_{krit}\,\nu\,\pi d^2}{4Q_v}, \qquad v = \frac{4Q_v}{\pi d^2}, \qquad \eta = \frac{\nu}{\rho}$$

Příklad 6.1.5

Kruhovým potrubím o průměru d proudí plyn, jehož dynamická viskozita je η a hustota je ρ. Pro zadaný hmotnostní průtok Q_m vypočítejte střední rychlost v potrubí v_s a určete režim proudění.

Zadáno:

d =	0.149 m
Q_m =	0.2 kg.s^{-1}
η =	16.38E-06 Pa.s
ρ =	1.15 kg.m^{-3}



Vypočtěte:		Výsledky:
v_s = ?	m·s^{-1}	9.974
Re = ?		104 415.10
ν = ?	m^2·s^{-1}	1.424E-05

Příklad 6.1.6

Kruhovým potrubím o průměru d proudí olej, jehož viskozita ν v závislosti na teplotě t je dána tabulkou. Sestrojte graf této závislosti. Pro zadaný průtok Q_v určete režim proudění oleje při teplotách t_1 a t_2. Při jaké teplotě se změní laminární proudění na turbulentní?

Zadáno:

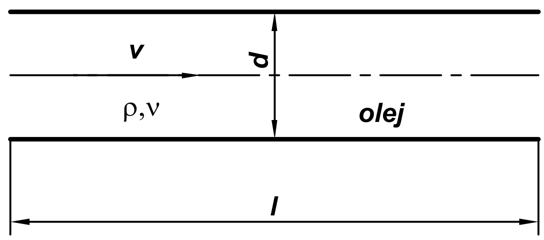
$d =$ 0.02 m

$Q_v =$ 0.003 m^3s^{-1}

$t_1 =$ 10 °C

$t_2 =$ 50 °C

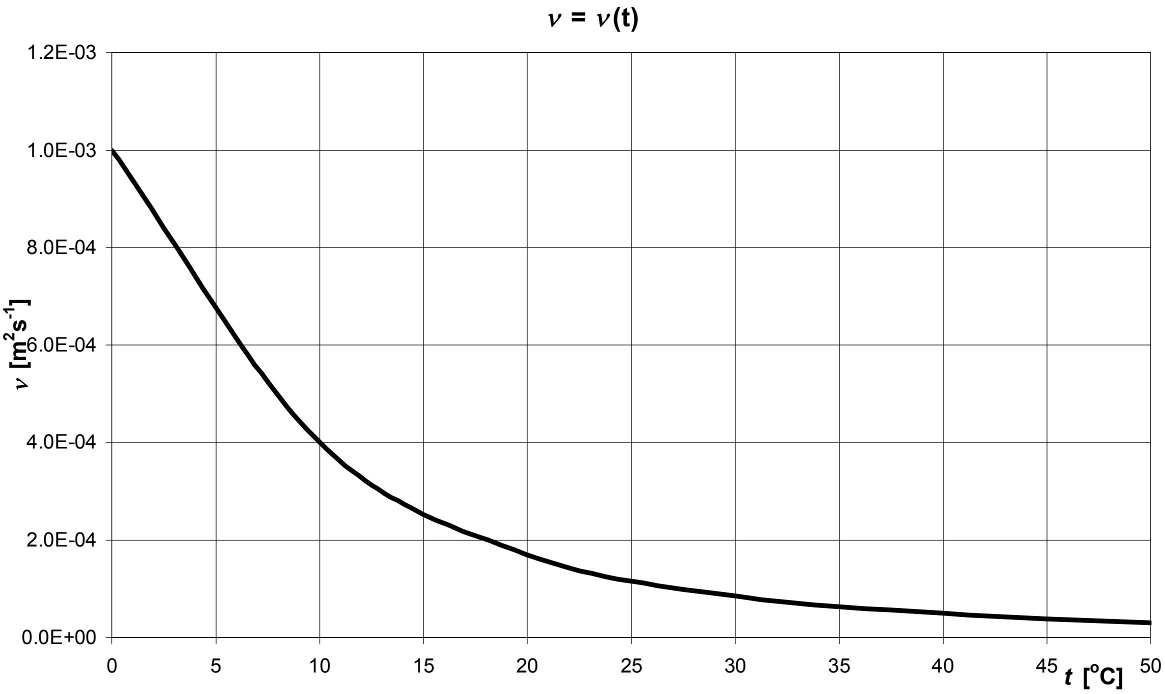
$\nu = \nu(t)$



Vypočtěte:		Výsledky:
$\mathrm{Re}_1 = ?$		477.46
$\mathrm{Re}_2 = ?$		6 366.18
$t = ?$	°C	31

Závislost kinematické viskozity na teplotě

t [°C]	0	10	20	30	40	50
ν [m^2s^{-1}]	1E-03	4E-04	1.7E-04	8.5E-05	5E-05	3E-05



7. Proudění dokonalých kapalin

Dokonalou kapalinou se rozumí kapalina nestlačitelná a nevazká. V technické praxi jsou časté případy jednorozměrného proudění s aplikací na proudění kapalin v potrubí. Mezi základní rovnice popisující proudění ideální kapaliny patří rovnice kontinuity (spojitosti) reprezentující zákon zachování hmotnosti a Bernoulliho rovnice pro ideální kapalinu, která je aplikací zákona zachování energie v mechanice tekutin.

7.1. Rovnice kontinuity

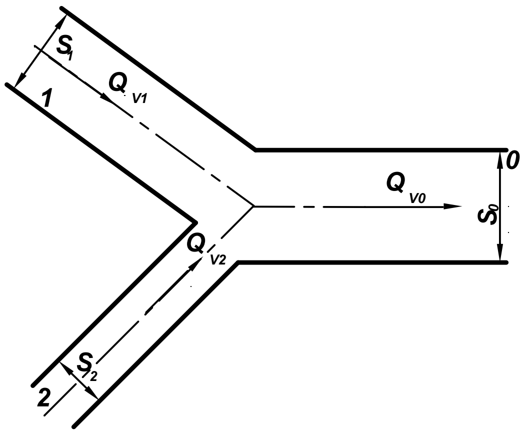
Rovnice kontinuity je aplikací zákona zachování hmotnosti. Pro jednorozměrné proudění lze odvodit rovnici kontinuity ve tvaru $\frac{\partial(\rho S v)}{\partial s}+\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}=0$, kde první člen představuje konvektivní a druhý člen lokální změnu hmotnosti. Při ustáleném proudění je tento člen roven nule a tedy $\frac{\partial(\rho S v)}{\partial s}=0 \Rightarrow \rho S v = konst$. Při ustáleném proudění protéká každým průřezem téže proudové trubice stejný hmotnostní průtok kapaliny $Q_m=\rho S v = konst$. Pro nestlačitelnou kapalinu lze za předpokladu $\rho = konst$ definovat rovnici pro objemový průtok ve tvaru $Q_v = S v = konst.$.

Příklad 7.1.1

Dvě potrubí o průřezech S_1 a S_2, kterými protéká objemový průtok Q_{v1} a Q_{v2}, se spojují v jedno potrubí o průřezu S_0. Určete průřezy S_0 a S_2, je-li zadáno S_1 a střední rychlost ve všech úsecích je stejná. Vypočítejte celkový hmotnostní průtok Q_m.

Zadáno:

Q_{v1} =	5 m^3 min^{-1}	
Q_{v2} =	3 m^3 min^{-1}	
S_1 =	0.04 m^2	
ρ =	890 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	2.083
S_0 = ?	m^2	0.064
S_2 = ?	m^2	0.024
Q_m = ?	kg.s^{-1}	118.667



Řešení:

$$Q_{v0}=Q_{v1}+Q_{v2}, \quad v_1=\frac{Q_{v1}}{S_1}, \quad v_1=v_2=v_0$$

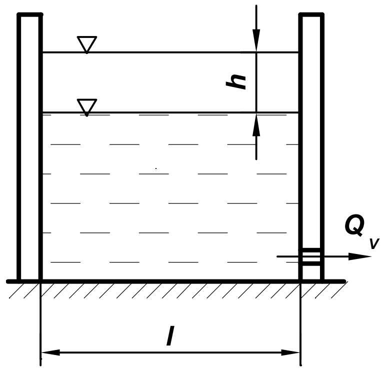
$$S_2=\frac{Q_{v2}}{v_2}, \quad S_0=\frac{Q_{v0}}{v_0},$$

$$Q_m=\rho S_0 v_0=\rho(Q_{v1}+Q_{v2})v_0$$

Příklad 7.1.2

Ve zdymadlové komoře o šířce b a délce l se sníží hladina vody o výšku h za čas t. Určete střední objemový průtok vody Q_v ve výpustném zařízení.

Zadáno:			
b =	40 m		
l =	300 m		
h =	8 m		
t =	30 min		
Vypočtěte:			Výsledky:
Q_v = ?		m^3s^{-1}	53.33



7.2. Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu

Tato rovnice je aplikací zákona zachování energie při proudění dokonalé kapaliny. Při pohybu kapaliny působí na její částice síly, které při posunutí po dráze konají práci. Sečtením těchto elementárních prací mezi dvěma průřezy 1 a 2, tj. integrací, se získá vztah pro celkovou energii proudící kapaliny. Podmínka rovnováhy sil objemových, tlakových a setrvačných $\mathbf{F}_o + \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_s$ při proudění dokonalé kapaliny je přitom vyjádřena Eulerovou rovnicí hydrodynamiky. Bernoulliho rovnice je tedy integrálem Eulerovy rovnice hydrodynamiky po dráze. Pro neustálené proudění je odvozena ve tvaru:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U + \int_0^s \frac{\partial v}{\partial t} \partial s = konst$$

Při ustáleném proudění dokonalé kapaliny v proudové trubici a za působení pouze tíže zemské je součet tlakové, kinetické a polohové energie konstantní a rovnice má tvar

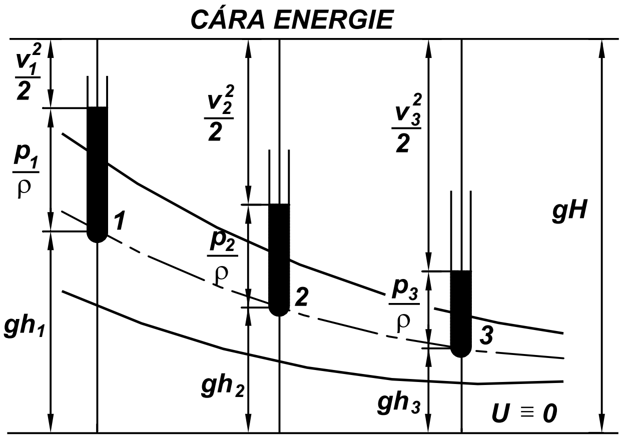
$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = 0$$

Pro dva průřezy téže proudové trubice 1 a 2 lze Bernoulliho rovnici napsat ve tvaru:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$

kde $\frac{p}{\rho}$ je energie tlaková, $\frac{v^2}{2}$ energie kinetická a gh energie potenciální. Energie jsou vztaženy na hmotnostní jednotku kapaliny a jejich rozměr je $\left[\mathrm{J.kg^{-1}}\right]$. Jestliže se vydělí celá rovnice tíhovým zrychlením, pak každý člen představuje energii vztaženou na tíhovou jednotku kapaliny a má rozměr délky.

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$



V uvedené rovnici je šest neznámých veličin a proto je její řešení podmíněno dodržením následujících pravidel:

1. V jednom průřezu musí být určující hydrodynamické veličiny $p,\ v,\ h$ známy. S výhodou se za známý průřez volí hladina v nádrži, kde je rychlost zanedbatelně malá a může se pokládat za rovnu nule, tlak je dán tlakem ovzduší nebo je zadán, potenciální energie kapaliny odpovídá definované výšce hladiny. Ve druhém průřezu musí být definovány dvě známé veličiny, v případě, že je zadána pouze jedna, musí se k řešení použít další rovnice, většinou rovnice kontinuity.
2. Hladina nulového potenciálu se volí v níže položeném průřezu. K této hladině se pak vztahuje potenciální energie (výšky) ostatních průřezů.
3. Tlaky v Bernoulliho rovnici mohou být absolutní nebo relativní, avšak na obou stranách rovnice definovány shodně.

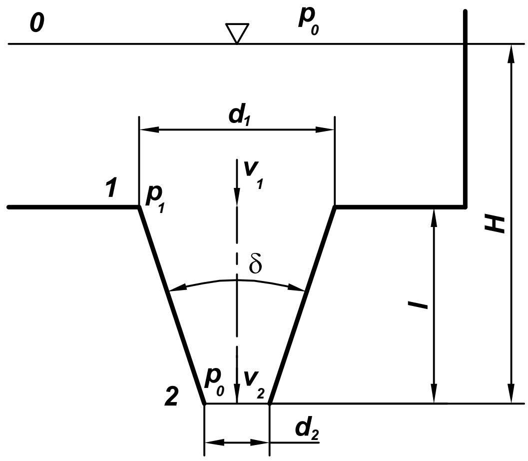
Příklad 7.2.1

Z nádoby vytéká voda průtokem Q_v svislým kuželovým potrubím o délce l, které se k výstupnímu průměru d_2 zužuje pod úhlem δ. Vypočtěte odpovídající výšku hladiny H a tlak p_1 v místě 1. Atmosférický tlak p_0 je 101325 Pa.

Zadáno:

Q_v	=	200 $m^3.h^{-1}$
l	=	1 m
d_2	=	75 mm
δ	=	10 °
ρ	=	1000 $kg.m^{-3}$

Vypočtěte:		Výsledky:
v_2 = ?	$m.s^{-1}$	12.575
H = ?	m	8.060
d_1 = ?	m	0.250
p_1 = ?	Pa (abs.tl.)	169 943.16



Řešení: Ze zadané hodnoty objemového průtoku se pomocí rovnice kontinuity vypočítá rychlost ve výstupním průřezu potrubí 2:

$$v_2 = \frac{4Q_v}{\pi.d_2^2}$$

Hladina v nádrži představuje průřez, ve kterém jsou známy hodnoty hydrodynamických veličin p, v, přitom rychlost na hladině se pokládá za rovnu nule.

Z Bernoulliho rovnice definované pro hladinu 0 a výtokový průřez 2 se vypočítá spád H:

$$\frac{p_0}{\rho}+0+gH=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+0 \Rightarrow H=\frac{v_2^2}{2g}$$

K výpočtu tlaku p_1 v místě připojení potrubí k nádrži se použije Bernoulliho rovnice definovaná pro hladinu 0 a průřez 1,

$$\frac{p_0}{\rho}+0+gH=\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gl\,,$$

kde rychlost $v_1=\frac{v_2 S_2}{S_1}=\frac{v_2 d_2^2}{d_1^2}=\frac{v_2 d_2^2}{\left(d_2+2l\,\mathrm{tg}(\delta/2)\right)^2}$. Tlak $p_1=\rho\left[\frac{p_0}{\rho}+g(H-l)-\frac{v_1^2}{2}\right]$.

Příklad 7.2.2

Z nádoby vytéká násoskovým potrubím o průměru d dokonalá kapalina o hustotě ρ do tlaku ovzduší p_0. Nádoba je otevřená a na hladině je rovněž atmosférický tlak. Jsou dány výšky h_1 a h_2. Vypočítejte objemový průtok Q_v a tlak p_1 v nejvyšším průřezu násosky.

Zadáno:

d = 12 cm

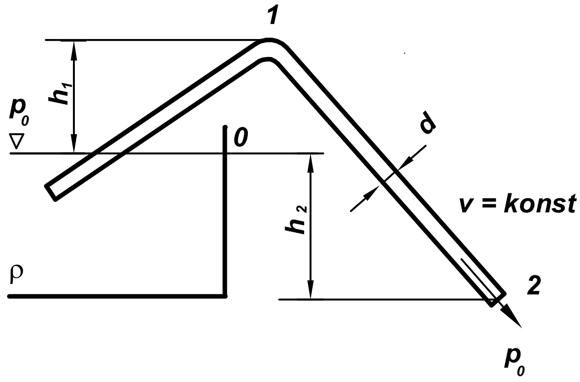
ρ = 1000 kg.m^{-3}

h_1 = 1 m

h_2 = 1 m

p_0 = 100000 Pa

Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.05010
p_1 = ?	Pa (abs. tl.)	80 380.00



Příklad 7.2.3

Jak velký musí být spád H, aby voda vytékala vodorovným potrubím, jehož konec je opatřen konfuzorem, do ovzduší výtokovou rychlostí v_2. Průměr potrubí je d_1, výstupní průměr je d_2. Kapalinu považujte za dokonalou.

Zadáno:

d_1 = 0.1 m

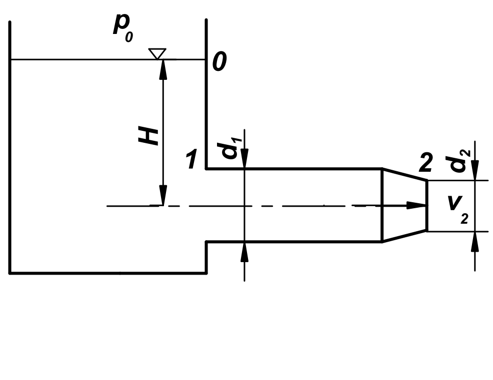
d_2 = 0.08 m

ρ = 1000 kg.m^{-3}

v_2 = 6 m.s^{-1}

p_0 = 100000 Pa

Vypočtěte:		Výsledky:
H = ?	m	1.83
p_1 = ?	Pa(abs.tl.)	110 627.2



7.2.1. Měření rychlosti kapaliny v potrubí a jejího tlaku

Měření rychlostí je jednou ze základních úloh experimentu v mechanice tekutin. V praxi se uplatňují metody nepřímé, kdy rychlost je měřena pomocí tlaku, jak vyplývá z Bernoulliho rovnice. Protože ztráty třením jsou na malé vzdálenosti odběrových míst zanedbatelné, může se při měření tlaků a rychlosti v potrubí aplikovat Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu.

Měření místní rychlosti

K měření místní rychlosti se může použít Pitotova nebo Prandtlova trubice. Pitotova trubice (zahnutá proti směru proudění) měří celkový tlak v určitém místě proudu, statický tlak je měřen piezometrickou trubicí připojenou k otvoru navrtanému kolmo ke stěně potrubí. Bernoulliho rovnici lze pro vodorovné potrubí napsat ve tvaru:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=konst \Rightarrow p+\frac{1}{2}\rho v^2=konst=p_c$$

nebo také

$$p_s+p_d=p_c$$

kde $p_d=p_c-p_s=\frac{1}{2}\rho v^2$ a $v=\sqrt{\frac{2\left(p_c-p_s\right)}{\rho}}=\sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}$. Rozdíl celkového a statického tlaku se může určit z rozdílu výšek hladin v připojených tlakoměrných trubicích

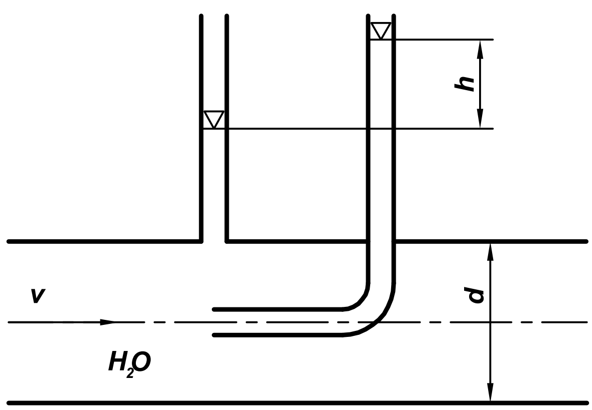
$$p_d=\rho g\left(h_c-h_s\right)$$

nebo, v případě větších tlaků, pomocí rozdílu hladin Δh odečteném na diferenciálním tlakoměru (U-trubice) $p_d=g\Delta h\left(\rho_m-\rho\right)$, kde $\rho_m \rangle \rho$ je hustota měřící kapaliny.

Příklad 7.2.4

Vypočítejte rychlost vody, která se měří Pitotovou trubici v ose potrubí. Určete dynamický tlak p_d.

Zadáno:		
h_s =	0.3 m	
h_c =	0.4 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	1.40
p_d = ?	Pa	981.00



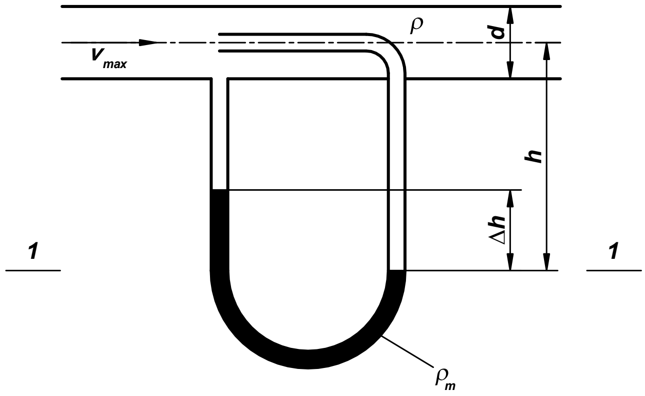
Řešení:

Rozdíl celkového a statického je roven tlaku dynamickému, který je ekvivalentní kinetické energii kapaliny

$$p_d=\rho g h_c-\rho g h_s=\rho g\left(h_c-h_s\right)=\rho g h=\frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v=\sqrt{2gh}$$

Příklad 7.2.5

Vypočítejte rychlost vody $v_{\max}$, která se měří Pitotovou trubicí v ose potrubí. Rozdíl celkového a statického tlaku je měřen pomocí U-trubice naplněné rtutí o hustotě ρ_m.



Zadáno:

Δh =	0.017 m	
ρ_m =	13600 kg.m^{-3}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
$v_{\max}$ = ?	m.s^{-1}	2.05
p_d = ?	Pa.	2 101.30

Řešení:

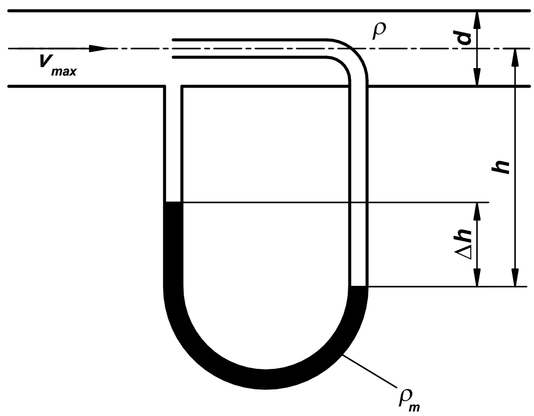
Rozdíl celkového a statického tlaku lze určit z podmínky rovnováhy hydrostatických tlaků na U-trubici definované k rovině 1-1, přitom se vždy sčítají měřené tlaky a hydrostatické tlaky .

$$p_L = p_p \Rightarrow p_s + \rho g(h - \Delta h) + \rho_m g \Delta h = p_c + \rho g h$$

$$p_d = p_c - p_s = g\Delta h(\rho_m - \rho) = \frac{1}{2}\rho v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2g\Delta h(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$

Příklad 7.2.6

Vypočítejte rychlost vzduchu $v_{\max}$, která se měří Pitotovou trubicí v ose potrubí. Rozdíl celkového a statického tlaku je měřen pomocí U-trubice naplněné lihem o hustotě ρ_m.



Zadáno:

Δh =	0.035 m	
ρ_m =	900 kg.m^{-3}	
ρ =	1.23 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
$v_{\max}$ = ?	m.s^{-1}	22.40
p_d = ?	Pa	308.59

Měření střední rychlosti

Střední rychlost lze stanovit z tlakového rozdílu mezi dvěma průřezy, z nichž jeden je zúžen, jak je tomu u Venturiho trubice, clony nebo dýzy. Oba měřené tlaky jsou statické. Zúžení průřezu způsobí zvýšení rychlosti a tím pokles statického tlaku. Ten je úměrný průtokové rychlosti. Při řešení je aplikována Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu a rovnice kontinuity.

Pro dva různé průřezy vodorovného potrubí a ideální kapalinu lze napsat Bernoulliho rovnici ve tvaru

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}\Rightarrow\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2}$$

Pomocí rovnice kontinuity lze vyloučit jednu z neznámých rychlostí v_1 nebo v_2

$$v_1 S_1=v_2 S_2\Rightarrow v_2=\frac{v_1 S_1}{S_2}=v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

a po dosazení do rovnice pro rozdíl tlaků se může odvodit vztah pro střední rychlost v potrubí v_1

$$\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{v_1^2}{2}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-\frac{v_1^2}{2}\quad\Rightarrow\quad v_1=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1\right]}}$$

Tlakový rozdíl p_1-p_2 lze určit z rozdílu hladin h_1, h_2 v připojených tlakoměrných trubicích nebo s využitím diferenciálního manometru, takže

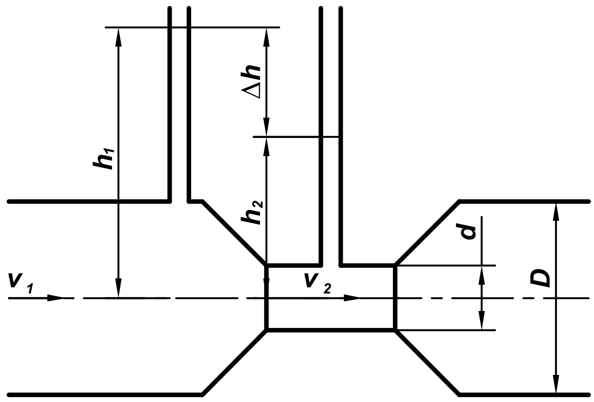
$$p_1-p_2=\rho g(h_1-h_2)\quad\text{nebo}\quad p_1-p_2=g\Delta h(\rho_m-\rho)$$

Příklad 7.2.7

Do potrubí o průměru D je zapojena Venturiho trubice s minimálním průměrem měřidla d. Vypočtěte objemový průtok vody Q_v, jsou-li výšky odečtené v tlakoměrných trubicích h_1 a h_2. Proudící kapalinu považujte za dokonalou.

Zadáno:

D =	0.2 m	
d =	0.08 m	
h_1 =	0.75 m	
h_2 =	0.43 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v_1 = ?	m.s^{-1}	0.406
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.01275



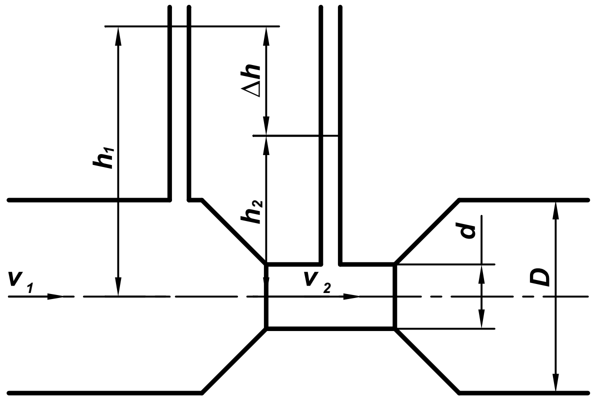
Řešení:

$$v_1=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4-1\right]}}=\sqrt{\frac{2\rho g(h_1-h_2)}{\rho\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4-1\right]}}=\sqrt{\frac{2g(h_1-h_2)}{\left(\frac{D}{d}\right)^4-1}}$$

Příklad 7.2.8

Objemový průtok vody Q_v v potrubí o průměru D je měřen pomocí Venturiho trubice s minimálním průměrem měřidla d. Výšky odečtené v tlakoměrných trubicích jsou h_1 a h_2. Proudící kapalinu považujte za dokonalou. Jaká je střední rychlost vody v potrubí? Vypočítejte Reynoldsovo číslo a určete režim proudění v potrubí.

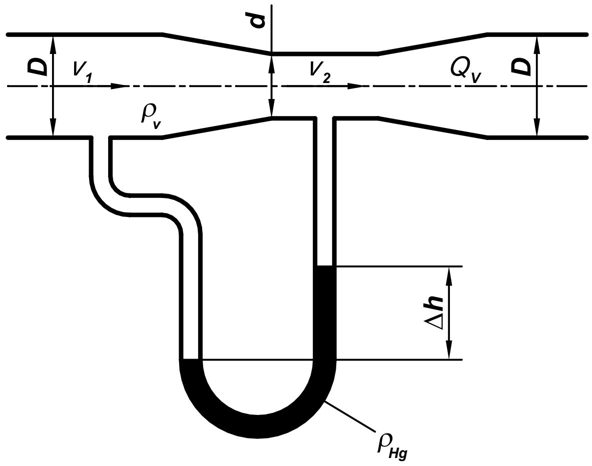
Zadáno:		
D =	0.4 m	
d =	0.125 m	
h_1 =	0.95 m	
h_2 =	0.18 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v_1 = ?	m.s^{-1}	0.381
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.04788
Re = ?		152 400



Příklad 7.2.9

Průtok vody v potrubí se měří Venturiho trubici spojenou s diferenciálním U - manometrem se rtuťovou náplní. Jsou dány průměry D, d a změřen rozdíl tlaků Δh. Vypočtěte objemový průtok Q_v za předpokladu, že se voda chová jako dokonalá kapalina. Určete Re číslo.

Zadáno:		
D =	0.25 m	
d =	0.075 m	
Δh	0.55 m	
ρ_{Hg} =	13600 kg.m^{-3}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v_1 = ?	m.s^{-1}	1.054
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.05174
Re = ?		263 500



Řešení: Z podmínky rovnováhy na U-manometru se určí rozdíl statických tlaků

$$\Delta p = p_1 - p_2 = g\Delta h\left(\rho_{Hg} - \rho\right)$$

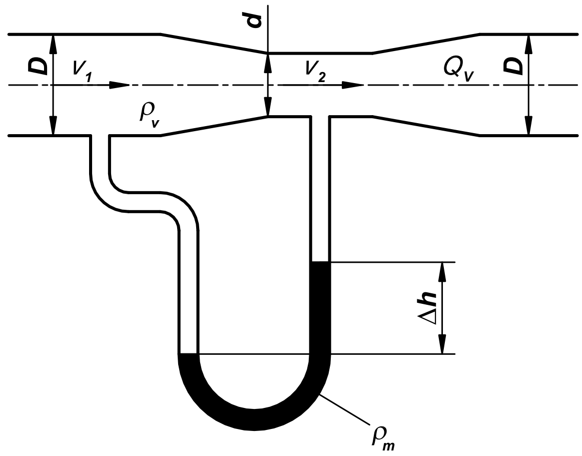
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right]}} = \sqrt{\frac{2g\Delta h\left(\rho_{Hg} - \rho\right)}{\rho\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right]}} = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1}\,\frac{\left(\rho_{Hg} - \rho\right)}{\rho}}$$

$$Q_V = v_1 S_1 = v_1\frac{\pi D^2}{4},\ Re = \frac{v_1 D}{\nu}$$

Příklad 7.2.10

Průtok vzduchu ve vodorovném potrubí se měří Venturiho trubici spojenou s U-trubicí, která je naplněna lihem o hustotě ρ_m. Jsou dány průměry D, d a změřen rozdíl tlaků Δh. Vypočtěte rychlost v_1 vzduchu v potrubí, jeho objemový průtok Q_v a hmotnostní průtok Q_m. Hustota vzduchu je ρ.

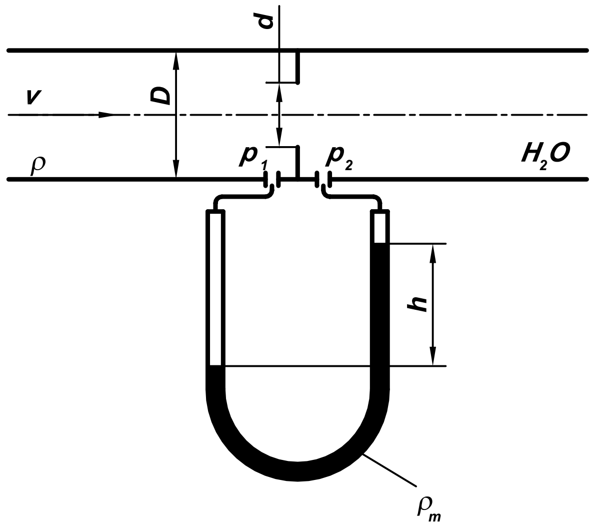
Zadáno:		
D =	0.125 m	
d =	0.050 m	
Δh =	0.315 m	
ρ_m =	900 kg.m^{-3}	
ρ =	1.18 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
v_1 = ?	m.s^{-1}	11.121
Q_V = ?	m^{3}s^{-1}	0.13648
Q_m = ?	kg.s^{-1}	0.16104



Příklad 7.2.11

Jaký je rozdíl tlaku $\Delta p = p_1 - p_2$ na cloně, jestliže potrubím protéká voda o hustotě ρ a na připojené U – trubici, která je naplněna kapalinou o hustotě ρ_m je naměřen rozdíl hladin rtuti h. Vypočtěte rychlost v vody v potrubí, když jsou známy průměry potrubí D a clony d. Ztráty na cloně zanedbejte. Vypočítejte hmotnostní průtok Q_m.

Zadáno:		
D =	0.150 m	
d =	0.075 m	
h =	0.120 m	
ρ_m =	13600 kg.m^{-3}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
Δp = ?	Pa	14 832.72
v = ?	m.s^{-1}	1.406
Q_m = ?	kg.s^{-1}	24.846



8. Proudění vazké tekutiny

8.1. Proudění skutečných kapalin

Při proudění skutečné kapaliny se projeví vliv viskozity odporem proti pohybu. Smykové napětí od viskozity je podle Newtona vyjádřeno vztahem $\tau = \eta \dfrac{dv}{dy}$. Třecí síla F_t, kterou působí vazká kapalina na plochu S a kterou je nutno při pohybu kapaliny překonat, je určena vztahem $F_t = \tau\, S$. Na překonání tohoto hydraulického odporu se spotřebuje část mechanické energie kapaliny, což se projeví poklesem rychlosti, tlaku nebo polohové výšky. Spotřebovaná energie se přemění v teplo. Velikost hydraulických odporů závisí na režimu proudění v potrubí, který může být laminární nebo turbulentní, viz kap.6. Kritériem je Reynoldsovo číslo $Re = \dfrac{v_s\, d}{\nu}$, jehož kritická hodnota pro potrubí kruhového průřezu je 2320. Při $Re \le Re_{krit}$ je v potrubí laminární proudění a ztráty rostou lineárně s průtokem. Je-li $Re > Re_{krit}$, vznikne kvalitativně zcela odlišný režim - turbulentní proudění, kdy částice konají neuspořádaný pohyb všemi směry. Pohyb částic kolmo ke stěně zvyšuje tok hybnosti ke stěně a proto je pokles tlaku ve směru proudění mnohem větší než v případě laminárního proudění.

Matematický model jednorozměrného proudění skutečné tekutiny v potrubí je dán rovnicí kontinuity vyjadřující zákon zachování hmotnosti (viz 7.1.), která pro skutečnou kapalinu má stejný tvar jako pro kapalinu ideální, tj.

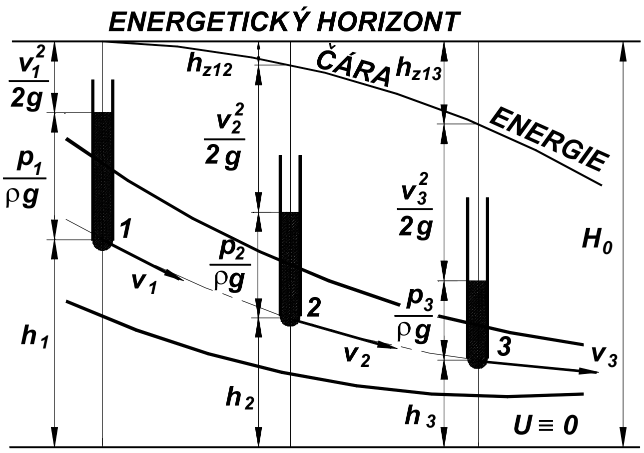
$$Q_v = v\ S = v \cdot \frac{\pi\, d^2}{4} = konst$$ v případě nestlačitelné kapaliny

$$Q_m = \rho\, v\, S = \rho\, v \frac{\pi\, d^2}{4} = konst$$ v případě kapaliny stlačitelné.

Podmínka rovnováhy sil při proudění skutečné kapaliny $\mathbf{F}_o + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_t = \mathbf{F}_s$ je vyjádřena Navier-Stokesovou rovnicí. Do podmínky rovnováhy sil je nutno na rozdíl od ideální kapaliny zahrnout třecí síly $\mathbf{F}_t$, které jsou důsledkem viskozity. Účinek těchto sil se musí objevit i v Bernoulliho rovnici pro skutečnou kapalinu, respektující zákon o zachování energie.

8.2. Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu

Všechny síly, a tedy i třecí síla $\mathbf{F}_t$, při posunutí po dráze konají práci. Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu musí tedy na rozdíl od rovnice pro ideální kapalinu obsahovat další člen, který představuje práci třecích sil na jednotku hmotnosti proudící tekutiny, což je rozptýlená (disipovaná) měrná energie e_r, spotřebovaná na překonání hydraulických odporů na úseku vymezeném dvěma průřezy proudové trubice. Tato rozptýlená energie, často označovaná jako měrná ztrátová energie e_z, zmenšuje mechanickou energii kapaliny (tlakovou + kinetickou + polohovou) a mění se v teplo. Rozdíl mezi energetickým horizontem a čárou energie ukazuje úbytek mechanické energie tekutiny.



Bernoulliho rovnici pro proudění skutečné tekutiny lze pro dva průřezy téže proudové trubice 1 a 2 napsat ve tvaru:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_2+e_r$$

kde měrnou rozptýlenou energii e_r (e_z) lze vyjádřit pomocí kinetické energie, tlakové, případně potenciální energie

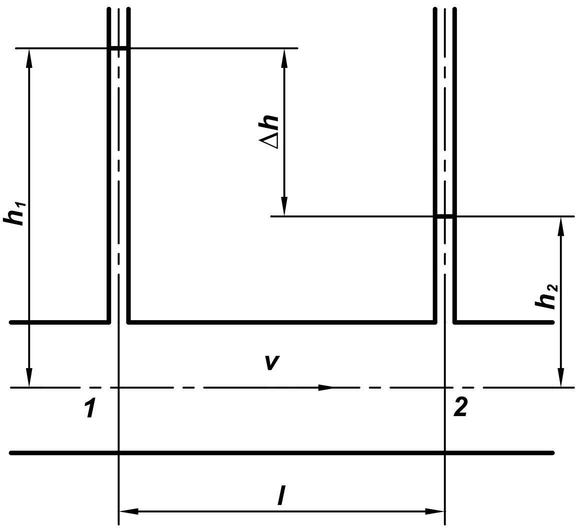
$e_z=\zeta\dfrac{v^2}{2}=\dfrac{p_z}{\rho}=g\,h_z$, kde ζ je ztrátový součinitel, p_z tlaková ztráta, h_z ztrátová výška. Nejčastěji se v Bernoulliho rovnici definuje měrná ztrátová energie pomocí ztrátové výšky. Rovnice pak má tvar

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_2+gh_z$$

Příklad 8.2.1

Ve vodorovném potrubí stálého průřezu d byla ve dvou průřezech vzdálených o délku l změřena pomocí piezometrických trubic diference tlakové energie, tj. výšky h_1, h_2, a dále byla změřena rychlost v proudícího oleje o kinematické viskozitě ν a hustotě ρ. Určete měrnou ztrátovou energii e_z, tlakovou ztrátu p_z a Reynoldsovo číslo Re.

Zadáno:		
l =	5 m	
d =	0.1 m	
v =	2 m.s^{-1}	
h_1 =	0.45 m	
h_2 =	0.2 m	
ν =	0.00017 m^{2}s^{-1}	
ρ =	890 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
e_z = ?	J.kg^{-1}	2.4525
p_z = ?	Pa	2 182.73
Re = ?		1 176.471



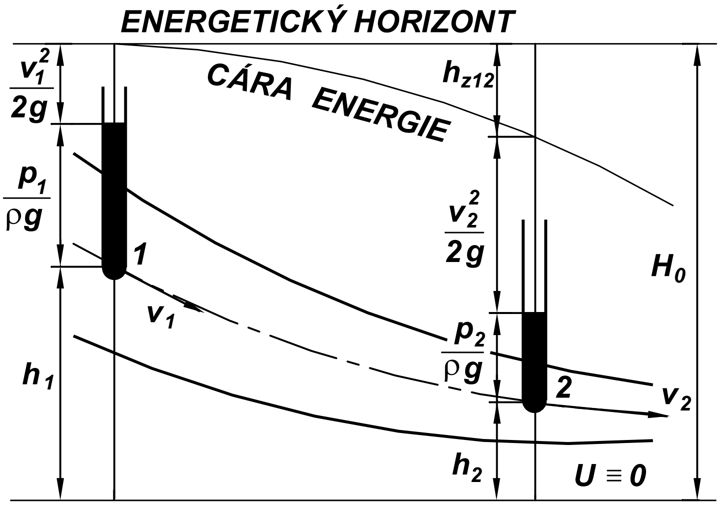
Příklad 8.2.2

V trubici obecného průřezu byla při proudění vody změřena ve dvou různých průřezech S_1, S_2 rychlost v_1, v_2 a současně i tlaková energie pomocí piezometrických trubic (výšky Δh_1, Δh_2). Zvolené průřezy jsou ve výškách h_1, h_2. Měrná hmotnost vody je ρ. Určete velikost měrné rozptýlené (ztrátové) energie e_z a tlakové ztráty p_z. Dále vypočtěte objemový průtok Q_v a hmotnostní průtok Q_m.

Zadáno:

S_1 =	0.035 m^2
v_1 =	1.2 m.s^{-1}
v_2 =	2.1 m
Δh_1 =	0.6 m
Δh_2 =	0.3 m
h_1 =	25 m
h_2 =	17 m
ρ =	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
e_z = ?	J.kg^{-1}	79.9380
p_z = ?	Pa	79 938.0
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.042
Q_m = ?	kg.s^{-1}	42.000



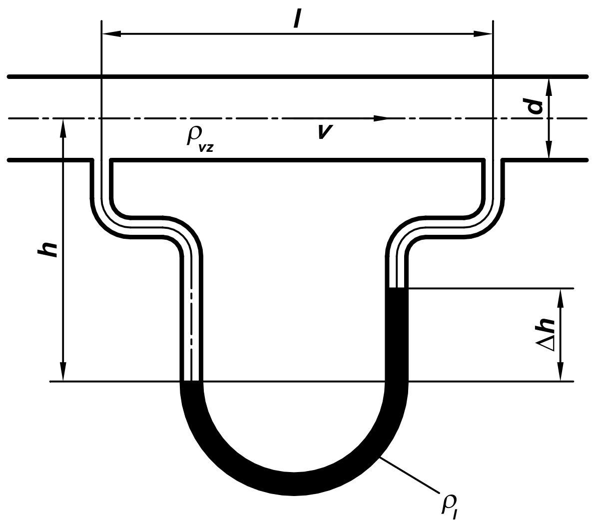
Příklad 8.2.3

Stanovte tlakovou ztrátu p_z třením na délce l ve vodorovném potrubí, jimž proudí vzduch o hustotě ρ_{vz}, přitom hustota měřící kapaliny je ρ_l. Přepočtěte tlakovou ztrátu p_z na ztrátovou výšku h_z a měrnou ztrátovou energii e_z.

Zadáno:

Δh =	0.03 m
ρ_l =	900 kg.m^{-3}
ρ_{vz} =	1.23 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
p_z = ?	Pa	264.508
e_z = ?	J.kg^{-1}	215.047
h_z = ?	m	21.921



9. Laminární proudění

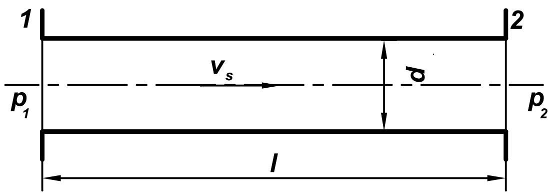
9.1. Proudění v trubici kruhového průřezu

Laminární proudění v trubici kruhového průřezu nastane při $\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}_{krit} = 2320$. Při řešení laminárního proudění se uplatňuje Newtonův vztah pro smykové napětí $\tau = \eta \frac{dv}{dy}$. Lze snadno odvodit, že průběh smykového napětí je dán vztahem $\tau = -\frac{i}{2} r$, kde $i = \frac{dp}{dl} = \frac{p_z}{L}$. Smykové napětí působí proti pohybu, maximální hodnoty nabývá na stěně, v ose potrubí je nulové.

Rychlostní profil je parabolický $v = \frac{1}{4\eta} \frac{p_z}{L} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - r^2 \right]$, maximální rychlost je v ose potrubí $v_{\max} = \frac{1}{16\eta} \frac{p_z}{L} d^2$, na stěně je rychlost nulová, střední rychlost v potrubí $v_s = \frac{1}{32\eta} \frac{p_z}{L} d^2$, poměr střední a maximální rychlosti $m = \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{1}{2}$ a objemový průtok z rovnice kontinuity $Q_v = \frac{\pi}{128\eta} \frac{p_z}{L} D^4$.

Příklad 9.1.1

Určete tlakovou ztrátu p_z ve vodorovném potrubí o průměru d a délce l, ve kterém proudí olej rychlostí v_s. Hustota oleje je ρ a kinematická viskozita ν.



Zadáno:		
d =	10 mm	
l =	15 m	
v_s =	2.5 m.s^{-1}	
ρ =	900 kg.m^{-3}	
ν =	0.00016 m^2.s^{-1}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Re = ?		156.25
p_z = ?	Pa	1 728 000

Řešení:

$$Re = \frac{d\, v_s}{\nu}, \quad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

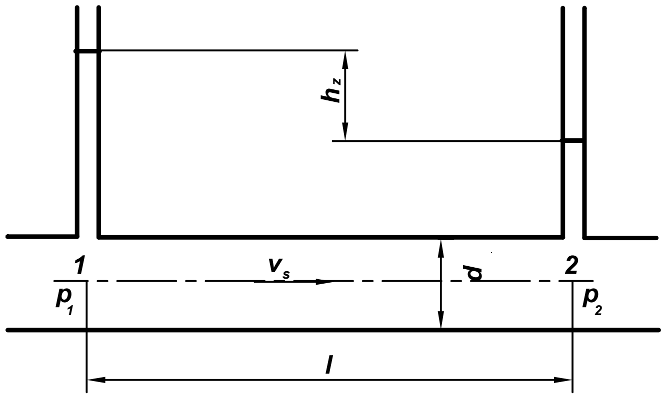
$$p_z = p_1 - p_2 = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_s^2}{2} \rho$$

Příklad 9.1.2

Určete objemový průtok nafty v potrubí kruhového průřezu o průměru d, jestliže na délce l byla změřena ztrátová výška h_z. Je dána hustota nafty ρ a kinematická viskozita ν.

Zadáno:		
d =	100	mm
l =	20	m
h_z =	2	m
ρ =	890	kg.m^{-3}
ν =	0.000225	m^2.s^{-1}

Vypočtěte:		Výsledky:
v_s = ?	m.s^{-1}	1.36250
Re = ?		605.56
λ = ?		0.10569
Q_V = ?	m^{3}s^{-1}	0.0107



Řešení:

$$h_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{v_s^2}{2g} = \frac{64}{\frac{v_s d}{\nu}}\frac{l}{d}\frac{v_s^2}{2g} = \frac{64\nu l}{d^2}\frac{v_s}{2g} \Rightarrow v_s = \frac{2gd^2 h_z}{64\nu l}$$

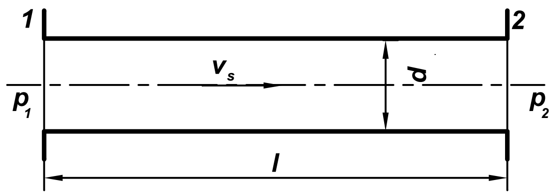
$$\mathrm{Re} = \frac{d.v_s}{\nu}, \qquad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}, \qquad Q_V = \frac{\pi d^2}{4} v_s$$

Příklad 9.1.3

Vodorovným přímým potrubím o délce l a průměru d protéká olej střední rychlostí v_s. Stanovte průtok oleje Q_V a potřebný tlakový spád Δp. Je dána hustota oleje ρ a kinematická viskozita ν.

Zadáno:		
d =	8	mm
l =	20	m
v_s =	5	m.s^{-1}
ρ =	900	kg.m^{-3}
ν =	0.0004	m^2.s^{-1}

Vypočtěte:		Výsledky:
Q_V = ?	m^{3}s^{-1}	0.00025
Δp = ?	Pa	18 000 000

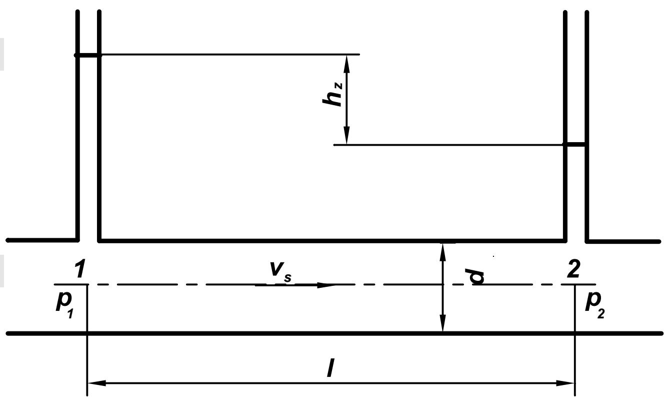


Příklad 9.1.4

Na cejchovním laboratorním potrubí průměru d se měří viskozita proudícího média. Průtok se měří odměrnou nádobou o objemu V a dobou jejího naplnění τ. Na délce potrubí l byl současně zjištěn pomocí piezometrických trubic tlakový rozdíl odpovídající Δh. Ověřte, zda je proudění laminární a určete kinematickou viskozitu.

Zadáno:		
d =	10	mm
l =	2	m
V =	1	dm^3
τ =	15	s
Δh =	300	mm

Vypočtěte:		Výsledky:
Q_V = ?	m^{3}s^{-1}	0.0000667
Re =		1 568
ν = ?	m^{2}s^{-1}	0.000005416



9.2. Proudění mezi paralelními deskami

Mezi rovnoběžnými deskami je tlakovým spádem $\Delta p = p_1 - p_2$ vyvoláno laminární proudění ve vodorovném směru. Rychlostní profil, průtok, střední rychlost a poměr střední a maximální rychlosti při laminárním proudění mezi paralelními deskami o šířce b, jejichž vertikální vzdálenost je h, jsou určeny vztahem

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{p_z}{L}(h-y)y,\ Q_v = \frac{1}{12\eta}\frac{p_z}{L}bh^3,\ v_s = \frac{1}{12\eta}\frac{p_z}{L}h^2,\ \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{2}{3}$$

Rychlostní profil představuje v nákresně kvadratická parabola. Maximální rychlost $v_{\max} = \frac{1}{8\eta}\frac{p_z}{L}h^2$ je uprostřed vzdálenosti desek , tj. $y = \frac{h}{2}$. Průběh smykového napětí je mezi deskami je $\tau = -\frac{p_z}{L}y$.

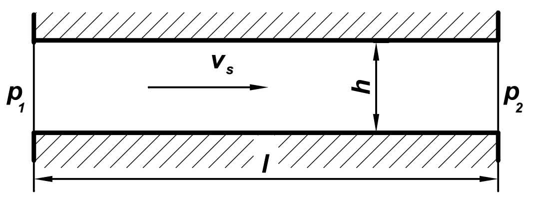
Jako průtok mezi dvěmi rovnoběžnými deskami lze řešit také průtok válcovou mezerou. Předpokládá se, že válcová mezera je velmi úzká. Šířka mezery v tomto případě se rovná obvodu kružnice, tedy $b = \pi d$ a vzdálenost desek h odpovídá tloušťce válcové mezery, čili $h = s$. Rychlostní profil, průtok, střední rychlost a poměr střední a maximální rychlosti jsou dány vztahy

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{p_z}{L}(s-y)s,\ Q_v = \frac{1}{12\eta}\frac{p_z}{L}\pi d s^3,\ v_s = \frac{1}{12\eta}\frac{p_z}{L}s^2,\ \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{2}{3}$$

Příklad 9.2.1

Obdélníková mezera má délku l, šířku b a výšku h. Jaký je potřebný tlakový rozdíl Δp, aby mezerou proudil olej o dynamické viskozitě η a objemovém průtoku Q_v?

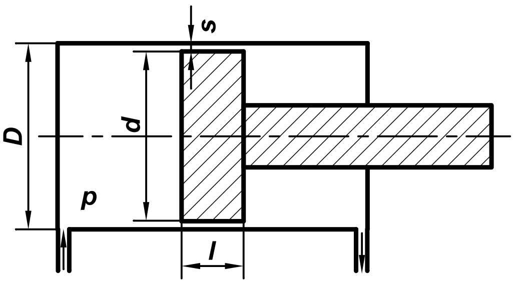
Zadáno:		
l =	200 mm	
b =	80 mm	
h =	0.06 mm	
Q_v =	0.2 dm^{3}min^{-1}	
η =	0.08 Pa.s	
Vypočtěte:		Výsledky:
Δp = ?	Pa	37 037 037



Příklad 9.2.2

V hydraulickém válci o průměru d a délce l se udržuje stálý tlak p. Určete největší přípustnou radiální mezeru s mezi pístem a válcem, přičemž při maximální možné výstřednosti pístu nesmí být objemové ztráty oleje o viskozitě η při teplotě 100^{0}C větší než zadané Q_v. Pro jednoduchost předpokládejte, že válcová mezera je velmi úzká a tudíž je rozvinuta na mezeru obdélníkovou o šířce $b = \pi d$.

Zadáno:		
d =	40 mm	
l =	80 mm	
Q_V =	0.005 $dm^3.s^{-1}$	
p =	2 MPa	
η =	0.0051 Pa.s	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
b = ?	m	0.12566
s = ?	m	0.000046

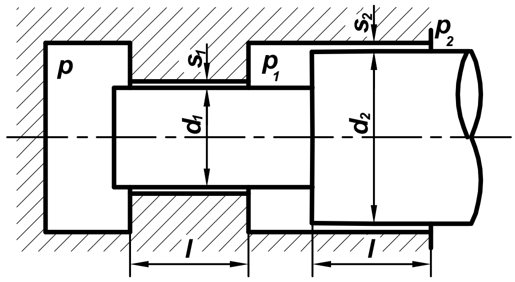


Řešení: $s=\sqrt[3]{\dfrac{12Q_V l\eta}{pb}}$

Příklad 9.2.3

Kapalina proudí z prostoru, kde je přetlak p do prostoru o tlaku p_2 dvěma kruhovými spárami o velikosti s_1 a s_2 a délkách l kolem pístů o průměrech d_1 a d_2. Určete tloušťku mezery s_2 tak, aby tlak v meziprostoru p_1 byl střední hodnotou tlaků p a p_2. Určete průtok Q_V oleje o dynamické viskozitě η.

Zadáno:		
d_1 =	25 mm	
d_2 =	50 mm	
l =	40 mm	
s_1 =	0.25 mm	
p =	0.4 MPa	
p_2 =	0 MPa	
η =	0.01 Pa.s	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
p_1 = ?	MPa	0.2
Q_V = ?	$dm^3.s^{-1}$	0.05113
s_2 = ?	mm	0.19843



9.3. Proudění mezi paralelními deskami s unášivým pohybem

Mezi rovnoběžnými deskami, z nichž jedna se pohybuje rychlostí u, proudí kapalina unášením jednou z ploch. Tlakový rozdíl je nulový. Průběh smykového napětí podle Newtonova zákona viskozity je $\tau=\eta\dfrac{u}{h}$. Rychlostní profil, průtok a střední rychlost proudění v mezeře jsou určeny vztahy

$$v=u\frac{y}{h},\; Q_V=\frac{1}{2}ubh,\; v_s=\frac{u}{2}$$

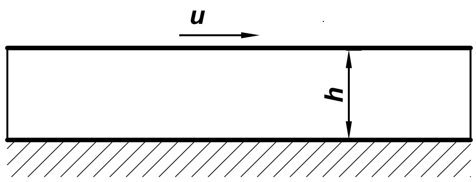
Je zřejmé, že rychlostní profil je lineární a střední rychlost je rovna polovině rychlosti unášené desky.

U válcové mezery je průtočná plocha $S=\pi d\,h$, takže průtok $Q_V=\dfrac{1}{2}u\pi d\,h$.

Příklad 9.3.1

U obdélníkové mezery šířky b a výšky h se horní stěna pohybuje unášivou rychlostí u vzhledem k pevné dolní stěně. Jaký objemový průtok oleje protéká mezerou?

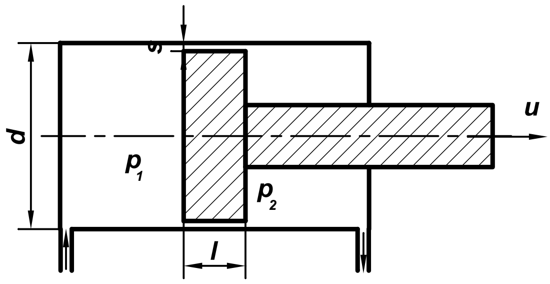
Zadáno:		
b =	200 mm	
h =	0.1 mm	
l =	15 m	
u =	0.75 m.s^{-1}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Q_V = ?	m^{3}s^{-1}	0.00000750



Příklad 9.3.2

Hydraulický válec o průměru d a délce l má soustředně uložený píst s výškou mezery h. Píst se pohybuje rychlostí u. Stanovte objemový průtok oleje o dynamické viskozitě η při zadaném tlakovém spádu Δp. Pro jednoduchost předpokládejte, že válcová mezera je velmi úzká a tudíž je rozvinuta na mezeru obdélníkovou o šířce $b = \pi d$.

Zadáno:		
d =	100 mm	
l =	50 mm	
h =	0.00005 m	
u =	0.5 m.s^{-1}	
Δp =	15 MPa	
η =	0.06 Pa.s	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
b = ?	m	0.31416
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.00002029



9.4. Proudění válcovou mezerou

V hydraulických strojích a zařízeních se často lze setkat s případy, kdy kapalina proudí válcovou mezerou. Průtok válcovou mezerou je v případě velmi úzké mezery určen jako průtok mezi dvěma deskami, viz kap. 9.2. Pokud se řeší průtok ve válcové mezeře jako průtok mezikružím, platí pro rychlostní profil, objemový průtok a střední rychlost tyto vztahy

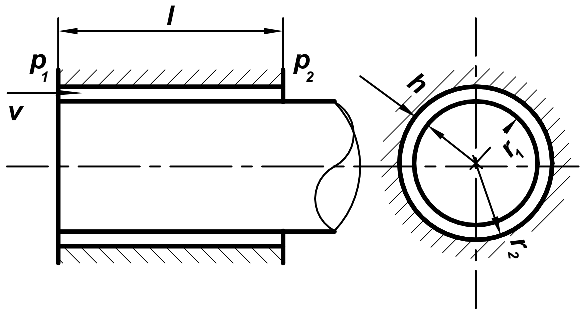
$$v = \frac{1}{4\eta}\frac{p_z}{L}\left(r_1^2 - r^2 + \left(r_2^2 - r_1^2\right)\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right) \qquad Q_v = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_z}{L}\left(r_2^2 - r_1^2\right)\left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)$$

$$v_s = \frac{1}{8\eta}\frac{p_z}{L}\left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)$$

Příklad 9.4.1

Určete objemový průtok válcovou soustřednou mezerou o délce l, vnějším poloměru r_2 a vnitřním poloměru r_1, při tlakovém rozdílu Δp. Dynamická viskozita oleje je η.

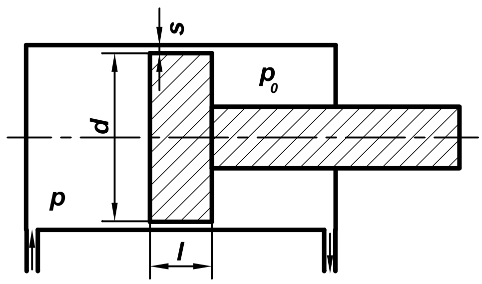
Zadáno:		
l =	20 mm	
r_1 =	24.97 mm	
r_2 =	25 mm	
Δp =	32 MPa	
η =	0.05 Pa.s	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	1.07152E-05



Příklad 9.4.2

V pracovním prostoru hydraulického válce se udržuje stálý tlak p. Určete objemové ztráty Q_v oleje o dynamické viskozitě η kruhovou spárou při soustředném uložení pístu ve válci. Průměr pístu je d, délka l a radiální vůle s. Výsledek porovnejte s výpočtem průtoku Q_{vp} získaným zjednodušeně jako proudění mezi paralelními deskami.

Zadáno:		
d =	120 mm	
l =	140 mm	
s =	0.1 mm	
p =	7 MPa	
η =	0.05 Pa.s	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	3.21210E-05
Q_{Vp} = ?	$m^3.s^{-1}$	3.14159E-05



9.5. Stékání po svislé stěně

Viskózní kapalina, která ulpívá na svislé stěně, stéká po ní účinkem tíhového zrychlení. Na rozhraní stékající vrstvy kapaliny o tloušťce h s ovzduším je tlak ovzduší p_o. Proudění je ustálené, tlak ve stékající vrstvě je konstantní. Rychlostní profil, průtok, střední rychlost a podíl střední a maximální rychlosti jsou určeny vztahem

$$v = \frac{g}{\nu}\left(h - \frac{x}{2}\right)x\,,\ Q_V = \frac{gb}{3\nu}h^3\,,\ v_s = \frac{g}{3\nu}h^2\,,\ \frac{v_s}{v_{max}} = \frac{2}{3}$$

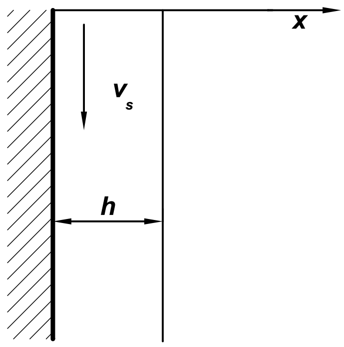
Průběh smykového napětí je

$$\tau = \rho g(h - x)$$

Příklad 9.5.1

Po svislé stěně stéká voda o teplotě t_1 a viskozitě ν_1. Jaký je objemový průtok Q_V a střední rychlost v_s, když tloušťka vrstvy stékající vody je h a šířka stěny je b. Zkontrolujte, zda se jedná o laminární proudění, tj. $\mathrm{Re} \leq 1000$ (z hydraulického průměru). V jakém poměru se změní objemový průtok při změně teploty kapaliny na t_2 a tudíž viskozity ν_1 na ν_2.

Zadáno:			
h =	0.4 mm		
b =	0.8 m		
ν_1 =	1.011E-06 $m^2.s^{-1}$		
ν_2 =	0.6E-06 $m^2.s^{-1}$		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
Q_{v1} = ?		$m^3.s^{-1}$	0.000166
Re = ?			819
Q_{v2} = ?		$m^3.s^{-1}$	0.000279
$\frac{Q_{v2}}{Q_{v1}}$ = ?			1.69



9.6. Proudění klínovou mezerou tvořenou rovinnými deskami

V teorii hydrodynamického mazání je významné proudění v klínové mezeře, která je tvořena dvěma plochami, z nichž spodní se pohybuje rychlostí u. Rychlostní profil, průtok, střední rychlost a podíl střední a maximální rychlosti jsou určeny vztahem

$$v=\left(\frac{i}{2\eta}y+\frac{u}{2}\right)(h-y),\; Q_v=\left(\frac{ih^2}{12\eta}+\frac{u}{2}\right)h=\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}u,\; v_s=\frac{g}{3\gamma}h^2,\; \frac{v_s}{v_{max}}=\frac{2}{3}$$

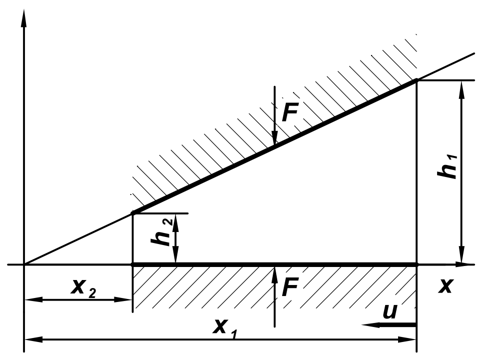
Maximální tlak v mezeře

$$p_{max}=\frac{3}{2}\frac{\eta u}{\psi^2}\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{3}{2}\frac{\eta u}{\psi}\frac{(h_1-h_2)^2}{h_1h_2(h_1+h_2)},\qquad h=\frac{h_1-h_2}{x_1-x_2}x=x.\mathrm{tg}\psi\doteq\psi x$$

Příklad 9.6.1

Klínová mezera tvořená rovinnými deskami je zatížena silou F. Rozměry mezery jsou h_1, h_2, x_1, x_2. Jak velký objemový průtok Q_v protéká klínovou mezerou a jaký je maximální tlak p_{max} oleje v mezeře, má-li tento dynamickou viskozitu η? Dolní deska má šířku b a pohybuje se rychlostí u.

Zadáno:			
F =	10000 N		
h_1 =	0.2 mm		
h_2 =	0.15 mm		
x_1 =	150 mm		
x_2 =	70 mm		
u =	15 ms^{-1}		
b =	1 m		
η =	0.05 Pa.s		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
Q_V = ?		$m^3.s^{-1}$	0.001286
p_{max} = ?		Pa	428 571



10. Turbulentní proudění

Turbulentní proudění je trojrozměrný, časově proměnný pohyb tekutiny, při němž veličiny charakterizující proudění (rychlost, tlak, hustota, teplota) se mění nahodile v čase. Okamžité hodnoty veličin neustále kolísají kolem střední hodnoty, takže v každém okamžiku je například rychlost dána součtem střední rychlosti a fluktuační složky. Pro složku rychlosti ve směru x tedy bude platit $\mathbf{v}_x = \overline{\mathbf{v}_x} + \mathbf{v}'_x$, kde $\overline{\mathbf{v}_x}$ je střední hodnota rychlosti v čase a $\mathbf{v}'_x$ je fluktuační složka. Střední hodnota $\overline{\mathbf{v}_x}$ (resp. $\overline{\mathbf{v}_y}, \overline{\mathbf{v}_z}$) za čas T se určí ze vztahu

$$\overline{\mathbf{v}}_x = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{v}_x dt\,.$$

Je-li časový interval dostatečně dlouhý, je střední hodnota fluktuační složky $\mathbf{v}'$ nulová

$$\overline{\mathbf{v}'}_x = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{v}'_x dt = 0\,.$$

10.1. Bernoulliho rovnice pro turbulentní proudění

Pro technické výpočty v praxi se turbulentní proud považuje za ustálené pole středních rychlostí místo neustáleného pole okamžitých rychlostí a lze použít vztahů odvozených dříve, např. rovnici kontinuity a Bernoulliho rovnici. Důležité jsou zejména střední hodnoty rychlosti a tlaku, které se mohou snadno určit běžnými přístroji. Např. rychlostní profil tekutiny proudící potrubím turbulentně vyjadřuje rozložení střední rychlosti. Na rozdíl od laminárního proudění v potrubí, kdy průběh rychlosti po průřezu lze odvodit z matematického popisu laminárního proudění, u turbulentního proudění lze tvar rychlostního profilu přibližně vyjádřit pomocí logaritmické nebo mocninné funkce. Konstanty vystupující v těchto závislostech jsou určeny experimentálně různými autory.

Je-li známo rozložení středních rychlostí $\bar{v}$ po průřezu, je možné integrací po průřezu stanovit objemový průtok Q_v, střední objemovou rychlost po průřezu $v = \frac{Q_v}{S}$, tj. rychlost, která se dosazuje do rovnice kontinuity, do Bernoulliho rovnice, do vztahu pro Re číslo a ztrátovou výšku h_z, a také poměru střední objemové rychlosti v ku maximální rychlosti $v_{\max}$ v ose potrubí.

Příklad 10.1.1

Vypočítejte rychlost vzduchu $v_{\max}$, která se měří Pitotovou trubici v ose potrubí. V U - trubici je líh o hustotě ρ_m. Stanovte střední rychlost v_s z maximální rychlosti $v_{\max}$. Předpokládejte rychlostní profil vyjádřený vztahem:

a) $v = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{n_0}$, kde r je vzdálenost od osy potrubí, $n_0 = f(\mathrm{Re})$

b) $v = v_{\max}\left(\frac{y}{R}\right)^{n}$, kde y je vzdálenost od stěny potrubí, $n = f(\mathrm{Re})$

Zadáno:

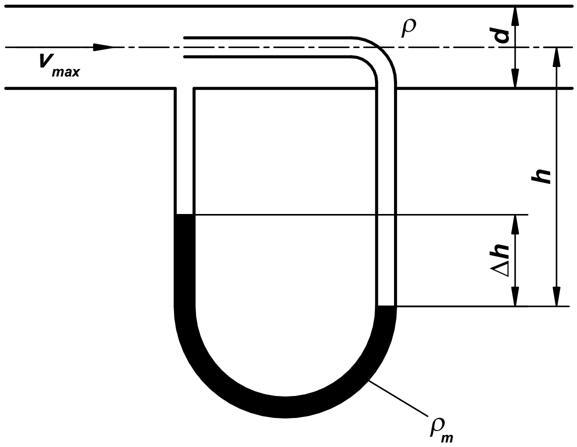
d = 0.200 m

h = 0.045 m

ρ_m = 980 kg.m^{-3}

ρ = 1.20 kg.m^{-3}

ν = 1.75E-05 m^{2}s^{-1}



Vypočtěte:		Výsledky:
p_d = ?	Pa	432.091
$v_{\max}$ = ?	m.s^{-1}	26.836
Re = ?		306 697
n_0 = ?		0.189
m = ?		0.841
v_s = ?	m.s^{-1}	22.569
n = ?		0.106
m = ?		0.858
v_s = ?	m.s^{-1}	23.04

Řešení:

Rozdíl celkového a statického je roven tlaku dynamickému. Určí se z rozdílu hladin Δh odečteném na diferenciálním tlakoměru (U-trubice) ze vztahu

$$p_d = g\Delta h(\rho_m - \rho), \text{ kde } \rho_m \rangle \rho$$

Rychlost v ose potrubí se vypočte z dynamického tlaku

$$p_d = \frac{1}{2}\rho \cdot v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2g\Delta h(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$

Pro exponent n_0 v mocninovém rychlostním profilu ad a) byl na základě experimentálních výsledků určen vztah

$$\frac{1}{n_0} = 1 + \sqrt[6]{\frac{\mathrm{Re}}{50}} \Rightarrow n_0 = \frac{1}{1 + \sqrt[6]{\frac{\mathrm{Re}}{50}}}$$

Poměr střední a maximální rychlosti v potrubí

$$m = \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{1}{1 + n_0} \text{ a } v_s = m \cdot v_{\max}$$

Hodnotu exponentu n v mocninovém rychlostním profilu ad b) lze určit ze vztahu, který definoval např. Troskolanski

$$\frac{1}{n} = 1.03 \ln \mathrm{Re} - 3.6 \Rightarrow n = \frac{1}{1.03 \ln \mathrm{Re} - 3.6}$$

Poměr střední a maximální rychlosti v potrubí

$$m = \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)} \text{ a } v_s = m \cdot v_{\max}$$

11. Hydraulický výpočet potrubí

Hydraulický výpočet potrubí je aplikací Bernoulliho rovnice, rovnice spojitosti a poznatků o hydraulických odporech třením a místních. Jak již bylo uvedeno, vznikají při proudění skutečných tekutin následkem viskozity hydraulické odpory, tj. síly, které působí proti pohybu částic tekutiny. Mechanismus hydraulických odporů je složitý jev, který se dosud nepodařilo exaktně vyřešit až na jednodušší případy laminárního proudění. Proto se v hydraulických výpočtech uplatňuje řada poloempirických metod. Z fyzikálního hlediska lze hydraulické odpory (ztráty) rozdělit na ztráty třením a ztráty místní.

11.1. Třecí ztráty v potrubí

Ztráty třením vznikají vzájemným třením částic proudící tekutiny při rozdílných rychlostech a třením tekutiny o stěny zařízení. Při proudění skutečné tekutiny je rozložení rychlostí pro průtočném průřezu nerovnoměrné a v jednotlivých vrstvách a na stěnách vznikají tečné síly a napětí od viskozity. Při turbulentním proudění dochází navíc k výměně hybnosti a energie mezi jednotlivými vrstvami, což je spojeno s přídavnými silami, které zvyšují hydraulický odpor. Ztráty třením lze definovat stejným způsobem pro laminární i turbulentní proudění pomocí ztrátové výšky h_z podle Darcy-Weisbacha

$$h_z = \frac{p_z}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \zeta_t \frac{v^2}{2g}$$

kde λ je třecí součinitel, l je délka potrubí, d jeho průměr a v je střední rychlost v potrubí. Velikost ztráty třením závisí na režimu proudění v potrubí, který se určí na základě hodnoty Reynoldsova čísla.

Součinitel tření při laminárním proudění v potrubí

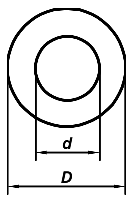
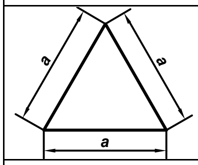
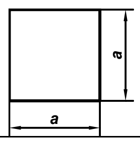
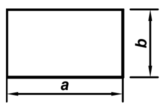
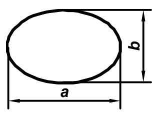
U laminárního proudění pro $\mathrm{Re} < 2320$ se hodnota třecího součinitele dá odvodit analyticky pro potrubí kruhového i nekruhového průřezu. V případě potrubí kruhového průřezu je za předpokladu vyvinutého laminárního proudění součinitel tření λ závislý pouze na Re a je dán vztahem

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Pro potrubí nekruhového průřezu platí analogická rovnice

$\lambda = \frac{A}{\mathrm{Re}}$, kde A je funkcí tvaru průřezu.

Hodnoty této konstanty respektive vztahy pro určení součinitele tření a ztrátového součinitele jsou uvedeny v následující tabulce.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$\mathrm{Re} = v\frac{(D-d)}{\nu}$</td><td colspan="4">$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{\left(1-\frac{d}{D}\right)^2}{1+\left(\frac{d}{D}\right)^2 + \frac{1-\left(\frac{d}{D}\right)^2}{\ln\frac{d}{D}}} = \frac{K_0}{\mathrm{Re}}$</td><td>$\zeta_t = \lambda \frac{l}{D-d}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$\mathrm{Re} = \frac{va}{\nu}$</td><td colspan="4">$\lambda = \frac{92.4}{\mathrm{Re}}$</td><td>$\zeta_t = \lambda \frac{l}{a}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$\mathrm{Re} = \frac{va}{\nu}$</td><td colspan="4">$\lambda = \frac{57}{\mathrm{Re}}$</td><td>$\zeta_t = \lambda \frac{l}{a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">$\mathrm{Re} = \frac{vb}{\nu}$</td><td colspan="4">$\lambda = \frac{K_1}{\mathrm{Re}}$</td><td>$\zeta_t = \lambda \frac{l}{b}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{b}{a} =$</td><td>1</td><td>0.8</td><td>0.5</td><td>0.333</td><td>0.25</td><td>0.1</td></tr>
<tr><td>$K_1 =$</td><td>57</td><td>64.7</td><td>93.2</td><td>137.6</td><td>181.8</td><td>465.9</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">$\mathrm{Re} = \frac{vb}{\nu}$</td><td colspan="4">$\lambda = \frac{K_2}{\mathrm{Re}}$</td><td>$\zeta_t = \lambda \frac{l}{b}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{b}{a} =$</td><td>1</td><td>0.7</td><td>0.5</td><td>0.3</td><td>0.2</td><td>0.1</td></tr>
<tr><td>$K_2 =$</td><td>64</td><td>55.2</td><td>50.9</td><td>47.4</td><td>45.7</td><td>42.9</td></tr>
</table>

Součinitel tření při turbulentním proudění v potrubí

Součinitel tření λ je závislý na velikosti Reynoldsova čísla Re a poměrné drsnosti $\varepsilon = \frac{d}{k}$, případně relativní drsnosti $k_r = \frac{k}{d}$, kde k je absolutní drsnost stěny potrubí v mm. Pro hladké potrubí $k = 0$ odvodil Blasius vztah pro součinitel tření při turbulentním proudění ve tvaru

$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}}$, který platí v rozmezí $Re_k \le Re \le 8.10^4$

Významná je také Prandtlova rovnice pro hydraulické hladké potrubí uváděna ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\,log\left(Re\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8$$

Mezi oblastí hydraulicky hladkých potrubí a oblastí vyvinutého turbulentního proudění je oblast přechodová, v níž součinitel tření λ závisí jak na Reynoldsově čísle, tak na relativní drsnosti $\frac{k}{d}$. Pro tuto oblast bylo různými autory odvozeno několik desítek rovnic, nejčastěji se však používá vzorec, který odvodil Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(0{,}27\frac{k}{d} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)$$

Tuto rovnici lze řešit pouze iteračnímí metodami, proto pro přímé určení λ je vhodnější vztah

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\,log\left(0{,}27\frac{k}{d} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{0.25}{\left[log\left(0.27\frac{k}{d} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right]^2}$$

Pro ruční výpočet lze také použít vztah podle Altšula

$$\lambda = 0.1\left(\frac{100}{Re} + \frac{k}{d}\right)^{0.25}$$

Pro vyvinuté turbulentní proudění je možné aplikovat pro výpočet λ vztah podle Nikuradseho, který vyšetřoval vliv drsnosti v bronzovém potrubí experimentálně již v letech 1930-1933.

$$\lambda = \frac{1}{\left(2\log\frac{d}{k} + 1{,}138\right)^2} \quad \text{pro} \quad \frac{k}{d}\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} \rangle 191{,}2$$

Další vztahy pro výpočet třecího součinitele λ jsou uvedeny v následující tabulce.

Autor	Oblast	Vzorec	Platnost
Blasius	Hydraulicky hladká potrubí	$\lambda = 0.3164\cdot\mathrm{Re}^{-0.25}$	$\mathrm{Re} \langle 8\cdot10^4$
Lees		$\lambda = 0.00714 + 0.61\cdot\mathrm{Re}^{-0.35}$	$\mathrm{Re} \langle 1.5\cdot10^6$
Drew		$\lambda = 0.0056 + 0.5\cdot\mathrm{Re}^{-0.32}$	$\mathrm{Re} \langle 10^6$
Herrman		$\lambda = 0.0054 + 0.395\cdot\mathrm{Re}^{-0.3}$	$\mathrm{Re} \langle 10^8$
Kármán-Nikuradse		$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\cdot\log\frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}{2.51}$	$\mathrm{Re} \langle 6\cdot10^4$
Konakov		$\lambda = (1.8\cdot\log\mathrm{Re} - 1.5)^{-2}$	
Nikuradse		$\lambda = 0.0032 + 0.221\cdot\mathrm{Re}^{-0.237}$	
Altšul	Přechodná oblast turbulentního proudění proudění	$\lambda = 0.1\left(\frac{100}{\mathrm{Re}} + \frac{k}{d}\right)^{0.25}$	
Colebrook-White		$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(0{,}27\frac{k}{d} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)$	$0.34 \le \frac{k\cdot\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\lambda}}{32.5d} \le 6.2$
Moody		$\lambda = 0.0055\left[1 + \left(2\cdot10^4\frac{k}{d} + \frac{10^6}{\mathrm{Re}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$	
Kármán	Hydraulicky drsná potrubí	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 + 2\cdot\log\frac{d}{2k}$	$4\cdot10^3 \langle \mathrm{Re} \langle \cdot10^7$
Nikuradse		$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\cdot\log\frac{3.7d}{k}$	$\frac{k\cdot\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\lambda}}{32.5d} \rangle 191.2$

Součinitel tření λ v oblasti turbulentního proudění

<u>Ztráty třením turbulentního proudění v potrubí nekruhového průřezu</u> jsou určeny stejnými vzorci jako pro kruhové potrubí. Místo průměru d kruhového potrubí je však třeba dosadit ekvivalent pro nekruhové průřezy, pomocí něhož se vypočte Re-číslo, součinitel tření a ztrátová výška. Tento ekvivalent se nazývá hydraulický průměr d_h a je určen vztahem

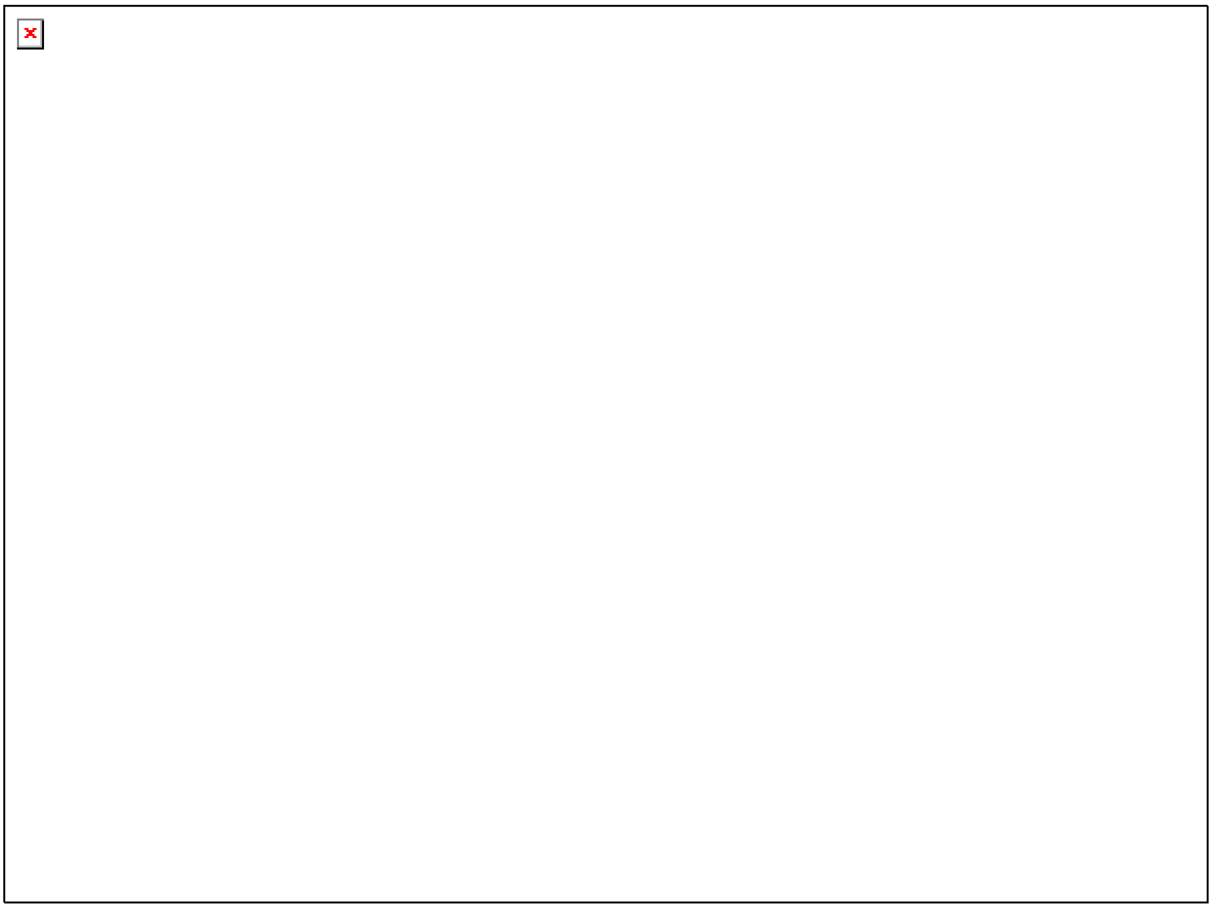
$$d_h = 4\frac{S}{o}$$

kde S je průtočná plocha a o je omočený obvod průřezu. Hydraulický průměr se může dosadit do výrazu pro poměrnou drsnost k_r, do Reynoldsova čísla , do vztahu pro ztrátovou výšku h_z a třecí součinitel λ

$$k_r = \frac{k}{d_h}, \quad \mathrm{Re} = \frac{v d_h}{\nu}, \quad h_z = \lambda \frac{1}{d_h}\frac{v^2}{2g}, \quad \lambda = f(\mathrm{Re}, k_r)$$

Pro přechod laminárního proudění v turbulentní v nekruhových průřezech se uvažuje kritická hodnota Reynoldsova čísla Re_{krit} stejná jako u kruhového potrubí.

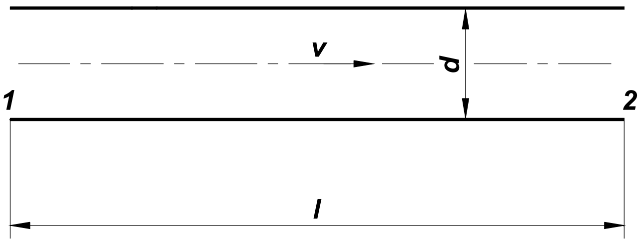
Výsledky měření Nikuradseho jsou uvedeny v interpretaci Moodyho v diagramu $\lambda = f(\mathrm{Re}, k_r)$, ze kterého lze odečíst hodnoty λ pro vypočtené Re číslo a hodnotu relativní drsnosti. Křivky pro různé poměrné drsnosti k_r se odpoutávají od přímky Blasiovy, která představuje průběh součinitele tření pro hladké potrubí. Z diagramu je zřejmé, že od určitého Reynoldsova čísla, které závisí na poměrné drsnosti, má součinitel tření stálou hodnotu.



Nikuradseho diagram v interpretaci Moodyho

Příklad 11.1.1

Stanovte tlakovou ztrátu p_z třením na délce l ve vodorovném potrubí o průměru d, jimž proudí minerální olej o hustotě ρ a viskozitě ν rychlostí v. Přepočtěte tlakovou ztrátu p_z na ztrátovou výšku h_z a měrnou ztrátovou energii e_z. Jaký je součinitel tření λ a Re-číslo? Určete průtok Q_v a hmotností průtok Q_m.



Zadáno :

l = 5	m	
d = 20	mm	
v = 4	$m.s^{-1}$	
ρ = 880	$kg.m^{-3}$	
ν = 1.6E-04	$m^2 s^{-1}$	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Re = ?		500.00
λ = ?		0.1280
h_z = ?	m	26.10
p_z = ?	Pa	225 316.08
e_z = ?	$J.kg^{-1}$	256.04
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.0012566
Q_m = ?	$kg.s^{-1}$	1.105808

Řešení:

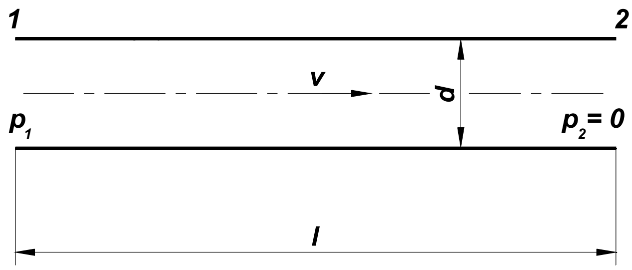
$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}, \quad \lambda = \begin{cases} \dfrac{0.3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}} & \text{pro} \quad \mathrm{Re} \geq 2320 \\ \dfrac{64}{\mathrm{Re}} & \text{pro} \quad \mathrm{Re} \langle 2320 \end{cases}$$

$$h_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}, \quad p_z = \rho g h_z, \quad e_z = g h_z$$

$$Q_v = \frac{v \pi d^2}{4}, \quad Q_m = \rho Q_v$$

Příklad 11.1.2

Do jaké vzdálenosti l se dopraví nafta vodorovným kruhovým potrubím o průměru d, máme-li k dispozici na pokrytí zrát třením po délce tlak p_1 a střední rychlost proudění nafty je v_s. Je dána kinematická viskozita ropy ν a její hustota ρ.



Zadáno:

d =	250 mm	
p_1 =	600000 Pa rel.tl	
v_s =	3 $m.s^{-1}$	
ρ =	890 $kg.m^{-3}$	
ν =	0.0005 $m^2 s^{-1}$	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Re = ?		1 500.000
λ = ?		0.042667
l = ?	m	877.802

Řešení:

$$\mathrm{Re} = \frac{v_s d}{\nu}, \quad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

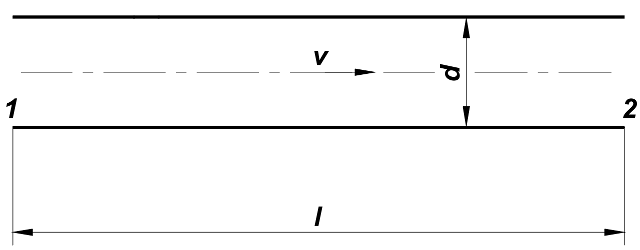
$$p_1 = \lambda \frac{l}{d}\frac{v_s^2}{2}\rho \Rightarrow l = \frac{2 p_1 d}{\lambda v_s^2 \rho}$$

Příklad 11.1.3

Vypočítejte součinitel tření λ, tlakovou ztrátu p_z, ztrátovou výšku h_z a měrnou ztrátovou energii e_z při proudění oleje v potrubí. Olej má měrnou hmotnost ρ a kinematickou viskozitu ν. Určete průtok Q_V a druh proudění. Stanovte dynamickou viskozitu η. Průměr potrubí je d délka l. Rychlost proudění je v.

Zadáno :

l =	1 m
d =	0.05 m
v =	3 m.s^{-1}
ρ =	890 kg.m^{-3}
ν =	4.0E-05 m^{2}s^{-1}



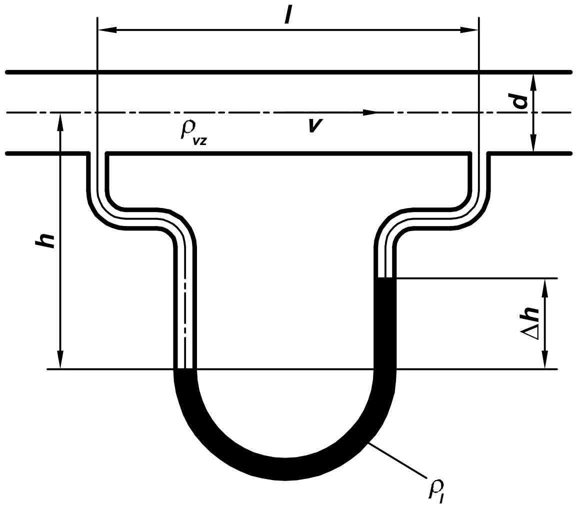
Vypočtěte:		Výsledky:
Re = ?		3 750.00
λ = ?		0.04038
h_z = ?	m	0.3705
p_z = ?	Pa	3 234.80
e_z = ?	J.kg^{-1}	3.6346
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.005890
η = ?	Pa.s	0.0356

Příklad 11.1.4

Stanovte součinitel tření v potrubí λ při proudění vzduchu, jestliže tlaková ztráta Δh na délce l je měřená lihovým U - manometrem. Určete průtok Q_V a hmotnostní průtok Q_m. Jaká je tlaková ztráta Δp, měrná ztrátová energie e_z a ztrátová výška h_z? Rychlost proudění v potrubí o délce l a průměru d je v.

Zadáno:

v =	15 m.s^{-1}
d =	0.04 m
l =	3 m
Δh =	50 mm
ρ_{vz} =	1.2 kg.m^{-3}
ρ_l =	890 kg.m^{-3}



Vypočtěte:		Výsledky:
Δp = ?	Pa	435.9564
h_z = ?	m	37.03
e_z = ?	J.kg^{-1}	363.30
λ = ?		0.0431
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.01885
Q_m = ?	kg.s^{-1}	0.02262

Řešení:

Z podmínky rovnováhy na U-trubici se určí tlaková ztráta Δp, přitom se definují tlaky z levé a pravé strany U-trubice ke tlakové hladině, kterou je rozhraní obou tekutin :

$$p_L = p_P$$

$$p_1 + h'\rho_{vz} g = p_2 + g(h' - \Delta h)\rho_{vz} + g\Delta h \rho_l \Rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \Delta h\, g(\rho_l - \rho_{vz})$$

Bernoulliho rovnice pro proudění skutečné tekutiny vodorovným potrubím má tvar:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 + \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2}$$

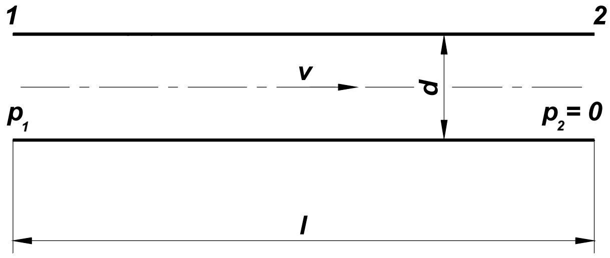
$$\Rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2}\rho \Rightarrow \lambda = \frac{2\Delta p\, d}{\rho_{vz} l\, v^2}$$

$$h_z = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}, \quad e_z = \frac{p_1 - p_2}{\rho},$$

$$Q_v = \frac{\pi d^2}{4} v, \quad Q_m = \rho Q_v$$

Příklad 11.1.5

Ve vodorovném potrubí délky l a průměru d proudí voda střední rychlostí v. Stanovte tlak na počátku potrubí p_1, jestliže jeho konec ústí do ovzduší. Výpočet proveďte pro potrubí hydraulicky hladké a pro drsné potrubí, je-li hodnota absolutní drsnosti k.



Zadáno:

v =	0.6 m.s^{-1}
d =	0.10 m
l =	150 m
ν =	10^{-6} m^{2}s^{-1}
k =	0.1 mm
ρ =	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
Re = ?		60 000.000
Hladké potrubí		
λ = ?		0.020
p_1 = ?	Pa rel.tl.	5 400.0
Drsné potrubí		
λ = ?		0.023
p_1 = ?	Pa rel.tl.	6 210.0

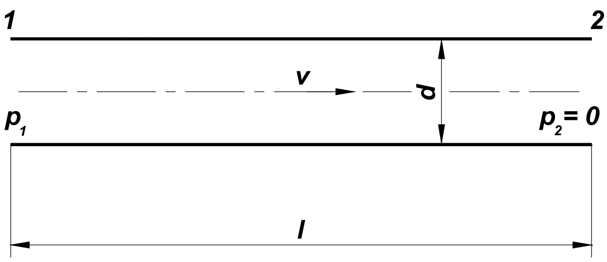
Řešení:

Hodnota Re čísla odpovídá turbulentnímu proudění. Neuvažujeme-li drsnost, můžeme pro výpočet λ použít vztah podle Blásia, určený pro hydraulicky hladká potrubí. Drsnost potrubí zvyšuje tlakové ztráty. Pro výpočet λ lze použít vztah např. dle Altšula.

Příklad 11.1.6

Ve vodorovném potrubí délky l a průměru d proudí vzduch střední rychlostí v. Vypočítejte součinitel tření λ, relativní drsnost a absolutní drsnost k v potrubí, jestliže byla měřením určena pro zadané parametry tlaková ztráta $\Delta p = p_1 - p_2$.

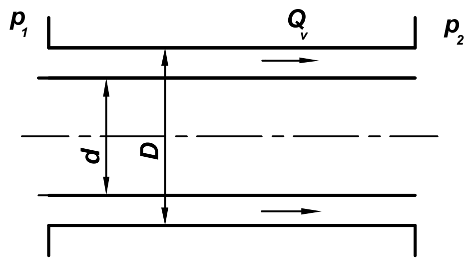
Zadáno:			
v =	17 m.s^{-1}		
d =	0.032 m		
l =	1.50 m		
ν =	15.8 E-06 m^{2}s^{-1}		
Δp =	251 Pa		
ρ =	1.152 kg.m^{-3}		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
Re = ?			34 430.380
λ = ?			0.0322
k_r = ?			0.008
k = ?		mm	0.256



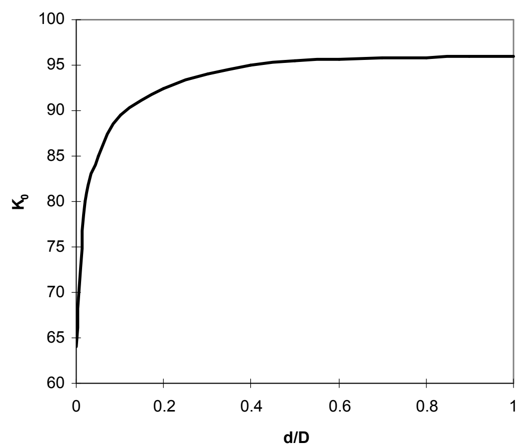
Příklad 11.1.7

Určete tlakovou ztrátu třením p_z při průtoku mazutu mezikružím o vnějším průměru D a vnitřním průměru d, je-li hmotnostní průtok Q_m. Délka potrubí je l. Je dána hustota ρ a dynamická viskozita η mazutu. Vzhledem k velké viskozitě se předpokládá laminární proudění. Konstantu K_0 pro výpočet třecího součinitele určete z přiloženého grafu.

Zadáno:			
Q_m =	72000 kg.hod^{-1}		
D =	0.156 m		
d =	0.05 m		
l =	350 m		
η =	0.1 Pa.s		
ρ =	920 kg.m^{-3}		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
v = ?		ms^{-1}	1.268
Re = ?			1 236.55
d/D = ?			0.32
λ = ?			0.0760
p_z = ?		Pa	185 597.495



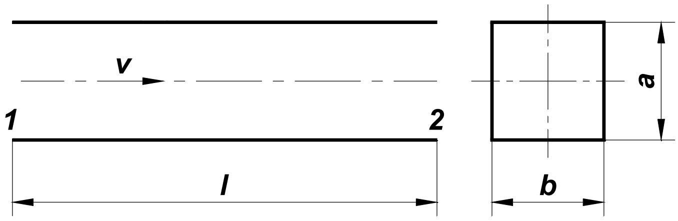
$$K_0 = f(d/D)$$



Příklad 11.1.8

Vzduch proudí rychlostí v obdélníkovým potrubím o rozměrech a, b a délce l. Stanovte tlakovou ztrátu p_z pro hladké potrubí. Jaký je hydraulický průměr d_h? Určete druh proudění. Stanovte součinitel tření λ. Vypočítejte měrnou ztrátovou energii e_z.

Zadáno:			
a =	0.04 m		
b =	0.05 m		
l =	2 m		
v =	11.2 m.s^{-1}		
ρ =	1.18 kg.m^{-3}		
ν =	1.95E-05 m^{2}s^{-1}		
Vypočtěte:		Výsledky:	
d_h = ?	m	0.04444	
Re = ?		25 524.51	
λ = ?		0.02500	
p_z = ?	Pa	83.269	
e_z = ?	J.kg^{-1}	70.567	



Řešení:

Pro nekruhový průřez definujeme hydraulický průměr d_h :

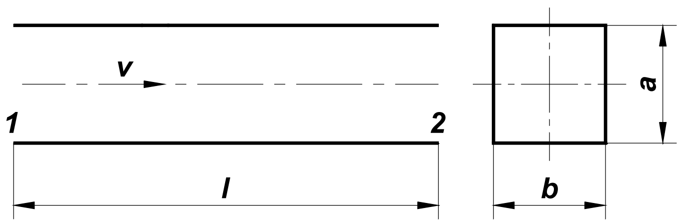
$$d_h = \frac{4S}{o} = \frac{4(ab)}{2(a+b)}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{v\,d_h}{\nu}\ ,\ \lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}\ ,\ p_z = \rho\lambda\frac{l}{d_h}\frac{v^2}{2}$$

Příklad 11.1.9

Jaké proudění nastane v potrubí obdélníkového průřezu při střední rychlosti vzduchu v ? Vypočtěte hydraulický průměr d_h , Reynoldsovo číslo Re a objemový průtok Q_v. Určete součinitel tření λ a ztrátovou výšku h_z pro jednotkovou délku kanálu.

Zadáno:		
a =	0.05 m	
b =	0.2 m	
l =	2 m	
v =	14 m.s^{-1}	
ν =	2E-05 m^{2}s^{-1}	
Vypočtěte:		Výsledky:
d_h = ?	m	0.080
Re = ?		56 000.00
λ = ?		0.021
h_z = ?	m	2.622
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.140



11.2. Místní ztráty

Místní odpory, neboli místní ztráty, vznikají v krátkých úsecích potrubí, kde dochází ke změně charakteru proudu, tj. velikosti rychlosti a směru proudu, případně k obojímu. Často dochází k odtržení proudu od stěny a ke vzniku víření, které je příčinou místní ztráty. Velikost místní ztráty závisí na typu, tvaru a konstrukci daného úseku potrubí nebo elementu a na materiálovém provedení, drsnosti, atd. Je zřejmé že k místním ztrátám bude docházet ve všech tvarovkách (kolena, odbočky, spojky, difuzory), armaturách (ventily, šoupátka, kohouty, klapky), měřících zařízeních (clony, dýzy, vodoměry) a dalších zařízeních (chladiče, čističe, filtry).

Velikost místních ztrát lze vyjádřit obdobně jako ztrátu třením pomocí ztrátové výšky h_z, tlakové ztráty p_z, nebo součinitele místní ztráty ς_m.

$$e_z = gh_z = \frac{p_z}{\rho} = \zeta_m \frac{v^2}{2} \Rightarrow h_z = \zeta_m \frac{v^2}{2g}$$

Hodnota ztrátového součinitele se určuje ve většině případů experimentálně, zpravidla při vyšších Re číslech. Určená hodnota je však platná jen při stejných podmínkách, za kterých byla změřena nebo ve fyzikálně podobných případech (stejná hodnota Re). Pro některé jednodušší případy lze součinitel místní ztráty odvodit (náhlé rozšíření a zúžení průřezu, kuželová potrubí). Místní odpory v potrubí se mohou vyjádřit ekvivalentní délkou l_e potrubí, v němž je ztráta třením stejná jako místní ztráta. Vztah pro ekvivalentní délku se odvodí z porovnání ztrát třecích a místních

$$\zeta_m \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l_e}{d} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow l_e = \frac{\zeta_m}{\lambda} d$$

Za součinitel tření a průměr se dosadí hodnoty platné pro rovný úsek potrubí. Při změnách průřezu se mění průtočná rychlost a místní ztráty se mohou vyjádřit v závislosti na přítokové rychlosti v_1 nebo odtokové rychlosti v_2, přitom pro přepočet ztrátových součinitelů lze odvodit vztah:

$$h_{zm} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \zeta_2 = \zeta_1 \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

Pro kruhové průřezy platí

$$\zeta_1 = \zeta_2 \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \zeta_2 \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \zeta_2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 ; \qquad \zeta_2 = \zeta_1 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4$$

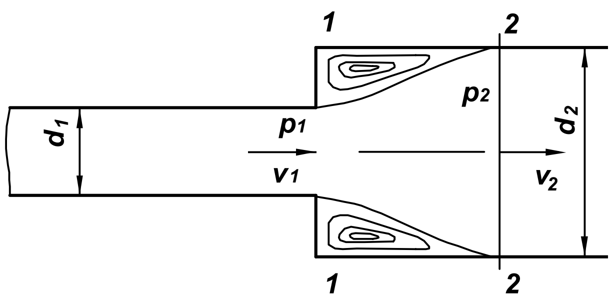
Pro praktické výpočty lze hodnoty součinitelů místní ztráty odečíst z grafů a nomogramů, které jsou součástí literatury zabývající se návrhem potrubního vedení.

Příklad 11.2.1

Stanovte tlakový rozdíl p_z potřebný k překonání náhlého rozšíření průřezu v potrubí, kterým protéká objemový průtok Q_v oleje o hustotě ρ. Určete hodnotu ztrátového součinitele ζ_1 a ζ_2.

Zadáno:

Q_v =	0.6 $dm^3.s^{-1}$		
d_1 =	0.014 m		
d_2 =	0.018 m		
ρ =	850 $kg.m^{-3}$		
Vypočtěte:			Výsledky:
v_1 = ?		$m.s^{-1}$	3.898
v_2 = ?		$m.s^{-1}$	2.358
h_z = ?		m	0.121
p_z = ?		Pa	1 007.930
ζ_1 = ?			0.156
ζ_2 = ?			0.426



Řešení:

Při náhlém rozšíření průřezu se odtrhne proud kapaliny od stěn a vytvoří se víry. Ve směru proudění klesá střední rychlost, a tedy stoupá statický tlak. Toto stoupnutí však bude nižší o tlakovou ztrátu p_z spojenou s rozšířením průřezu. Pomocí rovnice Bernoulliho a věty o změně hybnosti odvodil Borda vztah pro ztrátovou výšku

$$h_z = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}$$

kde

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2 \quad \text{a} \quad \zeta_2 = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 = \left[\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 - 1\right]^2$$

Rychlosti v_1 a v_2 se určí z rovnice kontinuity

$$Q_v = \frac{\pi}{4} d_1^2 \cdot v_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 \cdot v_2$$

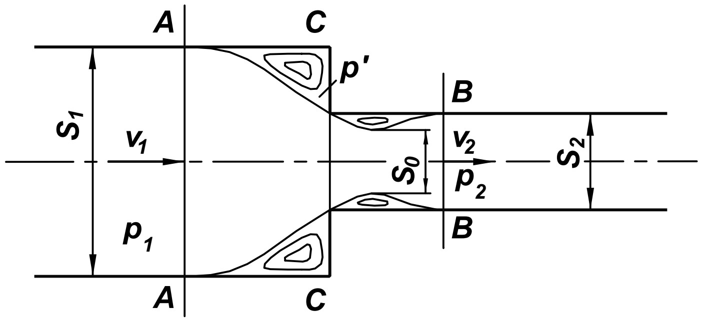
Příklad 11.2.2

Stanovte tlakový rozdíl Δp potřebný k překonání náhlého zúžení průřezu v potrubí, kterým protéká objemový průtok Q_v oleje o hustotě ρ. Určete hodnotu ztrátového součinitele ζ_1 a ζ_2. Uvažujte hodnoty stejné jako v předchozím případě. Porovnejte velikost tlakové ztráty se ztrátou při náhlém rozšíření průřezu.

Zadáno:

Q_v =	0.6 $dm^3.s^{-1}$	
d_1 =	0.018 m	
d_2 =	0.014 m	
ρ =	850 $kg.m^{-3}$	

Vypočtěte:		Výsledky:
v_1 = ?	$m.s^{-1}$	2.358
v_2 = ?	$m.s^{-1}$	3.898
h_z = ?	m	0.306
p_z = ?	Pa	2 551.581
ζ_1 = ?		1.080
ζ_2 = ?		0.395



Řešení:

Zúžením průřezu se vyvolá zrychlení kapaliny. Proud kapaliny nemůže následkem setrvačnosti sledovat tvar stěn potrubí, proto se odtrhne a vzniknou vířivé oblasti. Matematické řešení ztráty zúžením vychází ze změny hybnosti kapaliny.

Ztrátová výška náhlým zúžením průřezu je určena výrazy

$$h_z = \left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)\frac{S_1}{S_2}\frac{v_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)\frac{v_2^2}{2g}$$

kde

$$\zeta_1 = \left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)\frac{S_1}{S_2} \quad \text{a} \quad \zeta_2 = 1 - \frac{S_2}{S_1}$$

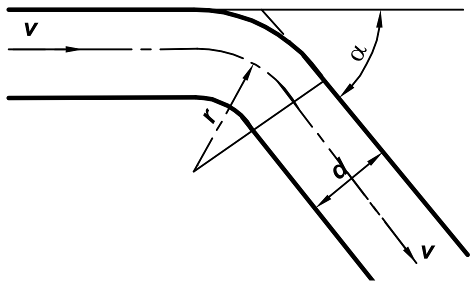
Příklad 11.2.3

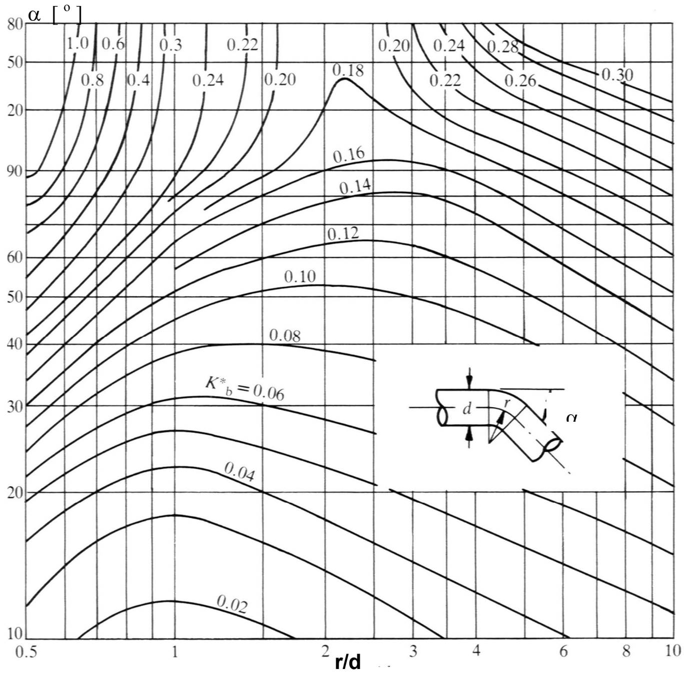
V oblouku o průměru d a poloměru r se mění směr proudění o úhel α. Stanovte ztrátovou výšku h_z, tlakovou ztrátu p_z pro zadané hodnoty úhlu α. Součinitel místní ztráty odečtěte z přiloženého diagramu. Potrubím proudí vzduch střední rychlostí v. Stanovte ekvivalentní délku potrubí l_e, je-li součinitel tření λ.

Zadáno:

d =	0.25 m	
r =	0.375 m	
v =	2.5 $m.s^{-1}$	
ρ =	1.2 $kg.m^{-3}$	
α_1 =	25 °	
α_2 =	45 °	
α_3 =	90 °	
λ =	0.02	

Vypočtěte:		Výsledky:
h_{z1} = ?	m	0.016
h_{z2} = ?	m	0.029
h_{z3} = ?	m	0.058
p_{z1} = ?	Pa	0.188
p_{z2} = ?	Pa	0.341
p_{z3} = ?	Pa	0.683
l_{e1} = ?	m	0.625
l_{e2} = ?	m	1.125
l_{e3} = ?	m	2.275





Součinitel místní ztráty pro ohyb kruhového průřezu

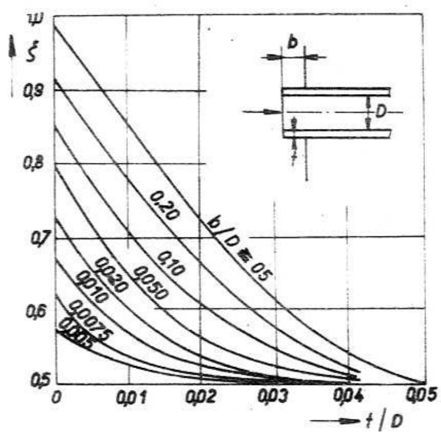
Příklad 11.2.4

Stanovte ztrátovou výšku pro vtok vody do potrubí průměru d, které je zasunuto do nádrže o délku b. Tloušťka stěny potrubí je t, rychlost v potrubí v.

Zadáno:

d =	0.2 m	
b =	0.1 m	
t =	4 mm	
v =	3.16 $m.s^{-1}$	

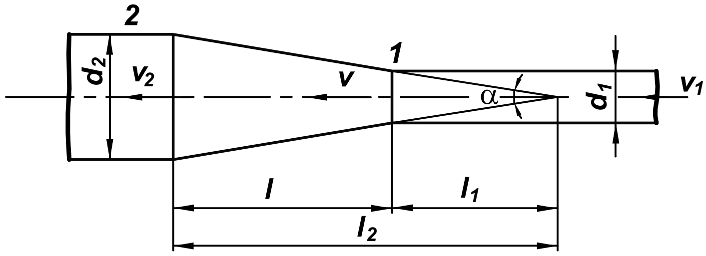
Vypočtěte:		Výsledky:
ζ = ?		0.73
h_z = ?	m	0.372
p_z = ?	Pa	3 649.320



Příklad 11.2.5

Náhlé rozšíření průřezu se nahradí kuželovým potrubím o průměrech d_1 a d_2 a délce l. Určete ztrátovou výšku h_z a tlakovou ztrátu p_z pro zadaný průtok vody Q_v a hodnoty porovnejte se ztrátou náhlým rozšířením průřezu. Součinitel tření určete podle Blasia. Vypočtěte úhel rozšíření α.

Zadáno:		
Q_v =	1.2 m^3.min^{-1}	
d_1 =	0.080 m	
d_2 =	0.120 m	
l =	0.25 m	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v_1 = ?	m.s^{-1}	3.979
v_2 = ?	m.s^{-1}	1.768
Re_1 = ?		318 320
Re_2 = ?		212 160
λ_s = ?		0.0140
p_z = ?	Pa	137.340
h_z = ?	m	0.014
h'_z = ?	m	0.24916
α = ?	°	9.15



Řešení:

Pokud je úhel α dostatečně malý, nedojde k odtržení proudu od stěny a hydraulická ztráta je v podstatě ztrátou třením po délce. Ta se určí integrací diferenciální rovnice, přičemž je uvažována změna průměru a rychlosti po délce kuželového potrubí. Mění se rovněž součinitel tření, takže pro výpočet je uvažována jeho střední hodnota $\lambda_s = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$. Vztah odvozený pro ztrátu třením v kuželovém potrubí má tvar:

$$h_z = \frac{\lambda_s}{4} \cdot \frac{l}{d_2 - d_1} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right] \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

Vypočtenou hodnotu h_z porovnáme s hodnotou definovanou pro ztrátu náhlým rozšířením průřezu

$$h'_z = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$, kde rychlost v_1, v_2 určíme z rovnice kontinuity.

11.3. Jednoduché potrubí

Jednoduché potrubí je po hydraulické stránce definováno průměrem d, délkou l, rychlostí v nebo průtokem Q_v, případně Q_m. Potrubím může tekutina proudit v důsledku gravitace nebo přetlaku na počátku potrubí. Hydraulický výpočet se v praxi provádí nejčastěji pro tři základní případy:

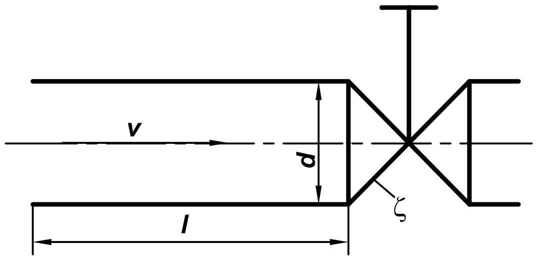
- při daném průtoku a rozměrech potrubí se určuje spád nebo tlakový rozdíl
- při daných rozměrech a daném tlakovém spádu, který je dán rozdílem hladin nebo jiným tlakovým zdrojem, se počítá průtok
- ze zadané hodnoty průtoku a spádu se určuje průměr potrubí

Pro hydraulický výpočet potrubí mají zásadní význam ztráty, ke kterým dochází při proudění skutečné kapaliny. Součinitele tření a místních ztrát bývají v některých případech zadány nebo se musí určit výpočtem či z grafů a nomogramů. Ztráty v potrubí závisí na rychlosti a tedy i průtoku. Vztah mezi ztrátovou výškou nebo tlakovou ztrátou a průtokem lze odvodit a také vynést graficky. Tato závislost je charakteristikou potrubí a má význam při grafickém řešení potrubí.

Příklad 11.3.1

Stanovte ztrátovou výšku h_z při proudění vody o kinematické viskozitě ν v drsném potrubí o průměru d, délce l, drsnosti k a rychlosti v. Přepočtěte ji na tlakovou ztrátu p_z a měrnou ztrátovou energii

e_z. Určete *Re*-číslo a součinitel tření λ pro drsné potrubí. Určete ztrátový součinitel tření v potrubí ζ_t. Součinitel místní ztráty v armatuře je ζ.



Zadáno:

v =	3 m.s^{-1}
d=	250 mm
l =	100 m
k =	0.4 mm
ζ =	6
ρ =	1000 kg.m^{-3}
ν =	1E-06 m^{2}s^{-1}

Vypočtěte:		Výsledky:
Re = ?		750 000
λ = ?		0.02040
h_z = ?	m	3.743
p_z = ?	Pa	36 718.830
e_z = ?	J.kg^{-1}	36.719
ζ_t = ?		8.160

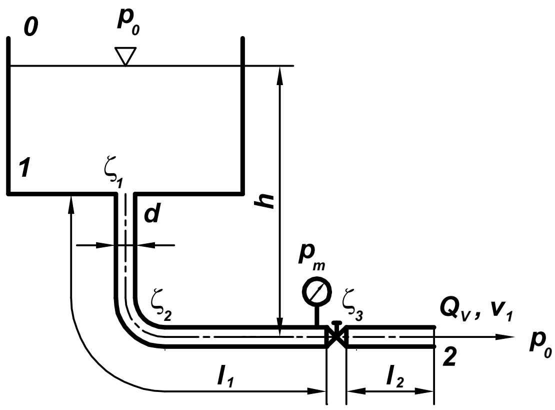
Řešení:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}, \quad \lambda = 0.1\left(\frac{k}{d} + \frac{100}{\mathrm{Re}}\right)^{0.25}, \quad \zeta_t = \lambda \frac{l}{d}$$

$$h_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}, \quad p_z = \rho g h_z, \quad e_z = \frac{p_z}{\rho}$$

Příklad 11.3.2

Stanovte rychlost vody a průtok v potrubí o délkách l_1 a l_2 a průměru d. Výška hladiny vody v nádrži je h. Spočítejte relativní tlak p_m naměřený na manometru před ventilem. Určete rychlostní součinitel φ a teoretickou výtokovou rychlost v_t. Určete ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní ztráty. Ztrátové součinitele na vtoku jsou ζ_1, v koleni ζ_2 a ve ventilu ζ_3 a součinitel tření je λ.



Zadáno:

h =	2 m
d =	0.05 m
l_1 =	1.5 m
l_2 =	0.3 m
λ =	0.0203
ζ_1 =	1
ζ_2 =	3
ζ_3 =	6
ρ =	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	1.829
v_t = ?	m.s^{-1}	6.264
φ = ?		0.29199
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.00359
l_e = ?	m	24.631
p_m = ?	Pa	10 238.27

Řešení:

Uvažujeme ustálené proudění potrubím se zadanými parametry. Bernoulliho rovnice pro hladinu a výtokový průřez (0-2) má po dosazení za odpory třením a místní tvar:

$\frac{p_0}{\rho}+0+gh=\frac{p_o}{\rho}+\frac{v^2}{2}+0+\left(\lambda.\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_v\right)\frac{v^2}{2}$. Z této rovnice lze vyjádřit skutečnou rychlost v:

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_v\right)}}=\sqrt{2gh}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_v\right)}}=v_t\varphi,$$

Je zřejmé, že rychlostní součinitel φ je dán poměrem skutečné a teoretické rychlosti

$$v_t=\sqrt{2gh},\quad \varphi=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_v\right)}}=\frac{v}{v_t}$$

Dále vypočteme objemový průtok a ekvivalentní délku potrubí, na které dojde ke stejně velké ztrátě třením, jako jsou ztráty místní

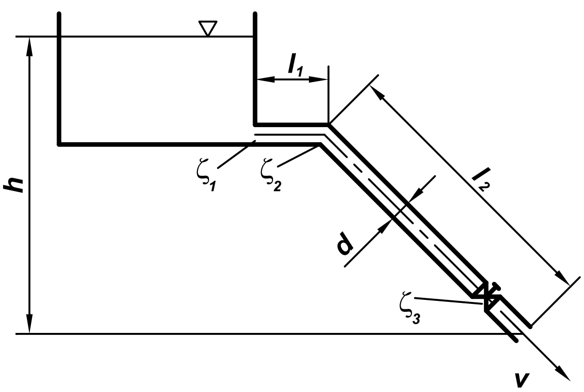
$$Q_v=\frac{\pi d^2}{4}v,\quad l_e=(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)\frac{d}{\lambda}$$

Tlak p_m před ventilem určíme z Bernoulliho rovnice pro průřezy 0 a 1

$$p_m=\rho gh-\rho\frac{v^2}{2}\left(1+\zeta_1+\zeta_2+\lambda\frac{l_1}{d}\right)$$

Příklad 11.3.3

Určete ztrátový součinitel ventilu ζ_3, jestliže je znám průměr potrubí d, délky l_1 a l_2, výška hladiny h, rychlost proudění v, součinitel tření λ, ztrátový součinitel při výtoku ζ_1 a ztrátový součinitel kolena ζ_2. Vypočtěte rychlostní součinitel φ a výtok Q_v. Určete ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní ztráty.



Zadáno:

d =	100 mm
l_1 =	50 m
l_2 =	50 m
h =	29 m
v =	3.09 m.s^{-1}
λ =	0.035
ζ_1 =	0.5
ζ_2 =	0

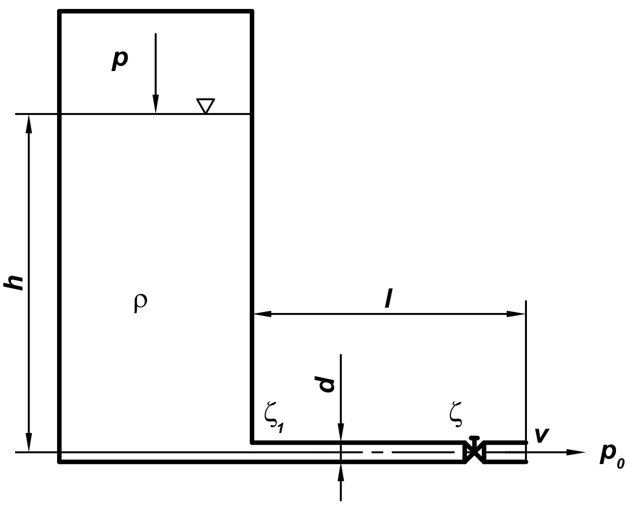
Vypočtěte:		Výsledky:
ζ_3 = ?		23.091
l_e = ?	m	67.403
v_t = ?	m.s^{-1}	23.853
φ = ?		0.12954
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.02427

Příklad 11.3.4

K nádrži s hladinou ve výšce h a o tlaku p je připojeno potrubí o *délce* l *a* průměru d. Součinitel tření v potrubí je λ a ztrátový součinitel na vtoku do potrubí je ζ_1. Kapalina proudí rychlostí v. Určete velikost ztrátového součinitele ventilu ζ, teoretickou výtokovou rychlost v_t, rychlostní součinitel φ, průtok Q_v.

Zadáno:

l =	500 m
d =	0.1 m
v =	2 m.s^{-1}
h =	5 m
p =	300000 Pa
λ =	0.001
ζ_1 =	0.8
ρ =	1000 kg.m^{-3}



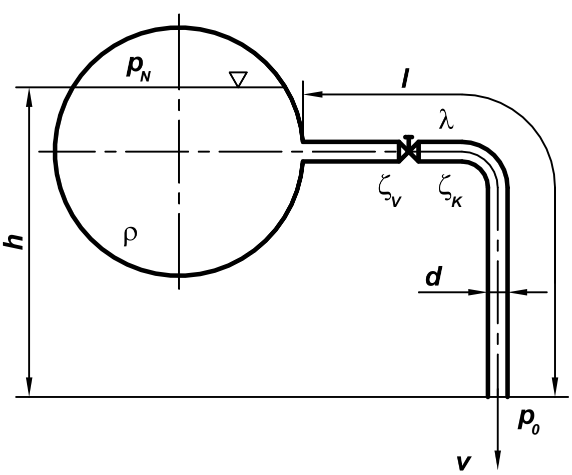
Vypočtěte:		Výsledky:
v_t = ?	m.s^{-1}	26.422
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.01571
φ = ?		0.07569
ζ = ?		167.751

Příklad 11.3.5

Stanovte přetlak v nádrži p_N, při kterém vytéká voda z připojeného potrubí o délce l a průměru d rychlostí v. Dále známe výšku hladiny h, součinitel tření λ, ztrátový součinitel v koleně ζ_k, a ventilu ζ_v. Vypočtěte rychlostní součinitel φ, teoretickou výtokovou rychlost v_t, průtok Q_v.

Zadáno:

v =	3 m.s^{-1}
l =	6 m
d =	0.02 m
ζ_k =	0.3
λ =	0.02
ζ_v =	18
h =	1 m
ρ =	1000 kg.m^{-3}



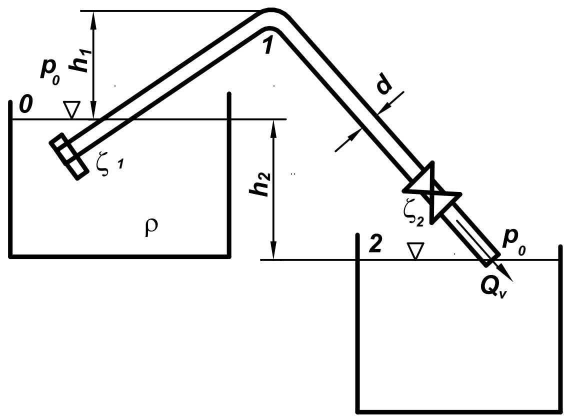
Vypočtěte:		Výsledky:
p_N = ?	Pa	104 040.00
v_t = ?	m.s^{-1}	15.090
φ = ?		0.19881
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.00094

Příklad 11.3.6

Násoskovým potrubím o průměru d a celkové délce $l = l_1 + l_2$, které překonává spád h_2, proudí voda. V nejvýše položeném průřezu násosky ve výšce h_1 nad hladinou v horní nádrži nesmí poklesnout tlak pod hodnotu $p_{\min}$. Pro zadané parametry potrubí určete objemový průtok Q_v a odpovídající ztrátový součinitel ventilu ζ_2. Stanovte ekvivalentní délku l_e.

Zadáno:

d =	0.2 m	
l_1 =	100 m	
l_2 =	60 m	
h_1 =	4 m	
h_2 =	6 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
$p_{\min}$ =	3E+04	Pa(abs.tl)
λ =	0.034	
ζ_1 =	5	



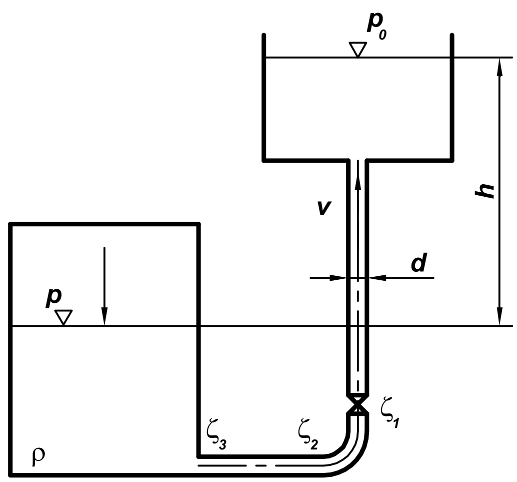
Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	1.635
ζ_2 = ?		11.837
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.051
l_e = ?	m	99.041

Příklad 11.3.7

Dvě nádrže s rozdílem hladin h jsou spojeny potrubím o délce l a průměru d, kterým proudí voda rychlostí v. V potrubí je umístěn ventil se ztrátovým součinitelem ζ_1, dále jsou známy ztrátové součinitele na vtoku do potrubí ζ_3, na výtoku z potrubí ζ_4 a v koleně ζ_2 a součinitel tření λ. Jaký absolutní tlak p musí být na hladině ve spodní nádrži, aby nastalo proudění vody ze spodní nádrže do horní. Vypočtěte průtok Q_v a určete ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní odpory.

Zadáno:

v =	5 m.s^{-1}
d =	0.3 m
l =	10 m
h =	7 m
$\sum\zeta$ =	14.7
λ =	0.02
ρ =	1000 kg.m^{-3}



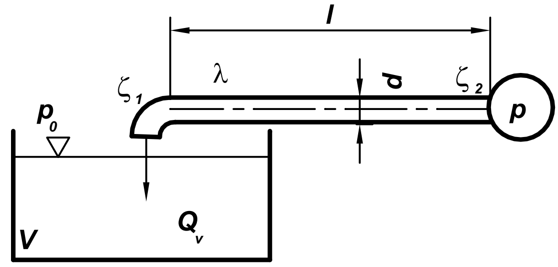
Vypočtěte:		Výsledky:
p =	? Pa	360 753.33
Q_v =	? m^3.s^{-1}	0.35343
l_e =	? m	220.50

Příklad 11.3.8

Za jak dlouho se naplní nádrž o objemu V vodou z potrubí o délce l a průměru d, ve kterém je přetlak p. Je dán součinitel tření λ a součinitele místní ztráty.

Zadáno:

d =	0.076 m
l =	45 m
$\sum\zeta$ =	4.3
λ =	0.027
V =	36 m^3
p =	2.5E+05 Pa



Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	4.847
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.022
t = ?	s	1636.364

11.4. Gravitační potrubí

Potrubí spojující dvě nádrže s volnými hladinami při daném spádu h je potrubí gravitační. Proudění je vyvoláno změnou polohové energie. Na hladinách je atmosférický tlak a nulová rychlost. Za těchto podmínek se Bernoulliho rovnice redukuje na vztah

$$h = h_z = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum\zeta\right) \cdot \frac{v^2}{2g}$$

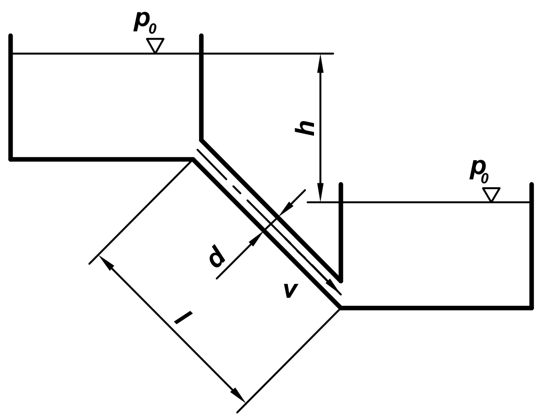
Často se jedná o dlouhé potrubí, ve kterém převažují ztráty třením nad místními ztrátami.

Příklad 11.4.1

Dvě otevřené nádrže s rozdílnou výškou hladin h jsou spojeny gravitačním potrubím o délce l a třecím součiniteli λ. Stanovte potřebný průměr potrubí d tak, aby se dosáhlo průtoku Q_v. Vypočtěte rychlost v potrubí v.

Zadáno:

l =	450 m
h =	17 m
Q_v =	0.1 m^3.s^{-1}
λ =	0.024



Vypočtěte:		Výsledky:
d = ?	m	0.22081
v = ?	m.s^{-1}	2.611

Řešení: $$\frac{p_0}{\rho} + 0 + 0 = \frac{p_0}{\rho} + 0 - g.h + \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2}, \qquad v = \frac{4 Q_v}{\pi d^2}$$

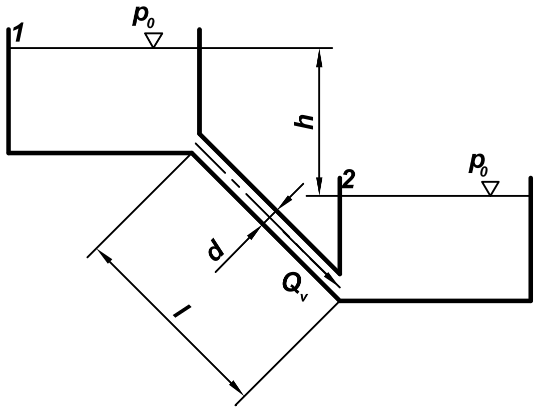
$$d = \frac{\lambda\, l\, v^2}{2\, g\, h} = \frac{16\,\lambda\, l\, Q_v^2}{2\, g\, h\, \pi^2 d^4} \Rightarrow d = \sqrt[5]{\frac{8\,\lambda\, l\, Q_v^2}{g\, h\, \pi^2}}$$

Příklad 11.4.2

Určete v gravitačním potrubí rychlost v a objemový průtok Q_v vody při zadaném průměru potrubí d, je-li dán spád h, délka potrubí l, a absolutní drsnost k. Místní ztráty zanedbejte.

Zadáno:

d =	400 mm		
h =	17 m		
l =	4550 m		
k =	0.1 mm		
Vypočtěte:			Výsledky:
λ = ?			0.0143
v = ?		m.s^{-1}	1.44
Q_v = ?		m^3.s^{-1}	0.181



Řešení:

Při řešení úlohy se vychází z Bernoulliho rovnice

$$h = h_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2\, g}$$

Protože není známá rychlost a tedy Re číslo, hodnotu λ lze určit přibližně z Darcyho vzorce

$$\lambda = 0.02\left(1 + \frac{1}{40 \cdot d}\right)$$

Střední rychlost v potrubí se vypočte ze spádu h

$$v = \sqrt{\frac{2\, g\, h\, d}{\lambda\, l}}$$

Určí se hodnota Re, znovu vypočte součinitel tření λ' ze vztahu dle Altšula

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}, \qquad \lambda' = 0.1\left(\frac{100}{\mathrm{Re}} + \frac{k}{d}\right)^{0.25}$$

a porovná s původní hodnotou λ. Pokud $\left|\lambda - \lambda'\right\rangle \delta$, kde δ je určeno požadavkem konvergence, musí se provést další přiblížení

$v' = v \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}$, $\quad \mathrm{Re}' = \frac{v' \cdot d}{\nu}$, $\quad \lambda'' = 0.1\left(\frac{100}{\mathrm{Re}'} + \frac{k}{d}\right)^{0.25}$, přitom se požaduje splnění nerovnosti $\left|\lambda' - \lambda''\right| \le \delta$. Není-li podmínka splněna, pokračuje se ve výpočtu dalším upřesněním rychlosti, Re čísla a součinitele tření tak dlouho, až je nerovnost splněna (např. $\delta = 0.0001$) .

11.5. Složené potrubí

Potrubí může být složené z více úseků o stejném či různém průměru. Potrubí s proměnným průřezem je možno považovat za sériově řazené úseky jednoduchých potrubí s konstantním průřezem. Ztráty v každém úseku se pak vyjádří pomocí odpovídající rychlosti.

Příklad 11.5.1

Stanovte průtok vody potrubím o délkách l_1 a l_2 a odstupňovaných průměrech d_1 a d_2.Vypočítejte teoretickou a skutečnou rychlost výtoku v_t,a v_2, rychlostní součinitel φ a objemový průtok Q_v. Ostatní zadané veličiny jsou uvedeny v tabulce.

Zadáno:

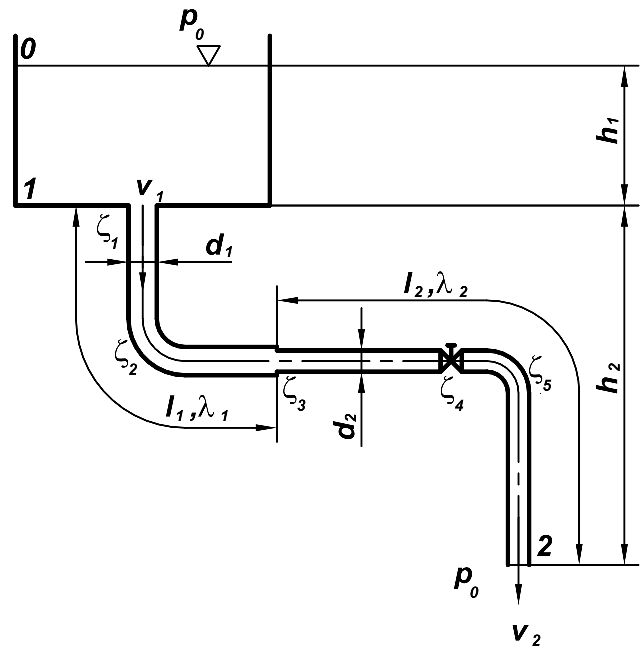
parametry potrubí 1:

l_1 =	300 m
d_1 =	0.1 m
λ_1 =	0.03
ζ_1 =	0.8
ζ_2 =	0.2

parametry potrubí 2:

l_2 =	300 m
d_2 =	0.04 m
λ_2 =	0.02
ζ_3 =	4
ζ_4 =	2
ζ_5 =	0.2
h_1 =	4 m
h_2 =	10 m

Vypočtěte:		Výsledky:
v_t = ?	$m.s^{-1}$	16.573
v_2 = ?	$m.s^{-1}$	1.312
φ = ?		0.07916
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.00165



Řešení:

Pro průřezy 0 a 2, které jsou součástí téže proudové trubice, platí Bernoulliho rovnice ve tvaru

$$\frac{p_0}{\rho}+0+g(h_1+h_2)=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_z$$

Ztrátová výška zahrnuje ztráty v potrubí 1 a 2, vyjádřené příslušnými rychlostmi v_1 a v_2.

$$\frac{p_0}{\rho}+0+g(h_1+h_2)=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+\left(\zeta_1+\zeta_2+\lambda_1\frac{l_1}{d_1}\right)\frac{v_1^2}{2}+\left(\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5+\lambda_2\frac{l_2}{d_2}\right)\frac{v_2^2}{2}$$

Z rovnice kontinuity lze rychlost v_1 v potrubí 1 vyjádřit pomocí výtokové rychlosti v_2:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_1 = v_2\frac{S_2}{S_1}=v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

Po dosazení do Bernoulliho rovnice se získá

$$\frac{p_0}{\rho}+0+g(h_1+h_2)=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+\left(\zeta_1+\zeta_2+\lambda_1\frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\frac{v_2^2}{2}+\left(\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5+\lambda_2\frac{l_2}{d_2}\right)\frac{v_2^2}{2}$$

Nyní jsou všechny ztrátové součinitele vztaženy na výtokovou rychlost v_2 a dále se postupuje stejně jako v případě jednoduchého potrubí

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g(h_1 + h_2)}{\left(\zeta_1 + \zeta_2 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 + \left(1 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2}\right)}},$$

$$v_t = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}, \quad \varphi = \frac{v_2}{v_t}, \quad Q_v = \frac{\pi . d_2^{\ 2}}{4} . v_2$$

11.6. Charakteristika potrubí

Charakteristika potrubí udává vzájemnou souvislost parametrů H a Q_v, kde H je tlaková výška a Q_v objemový průtok kapaliny. Vztah pro tlakovou výšku se odvodí z Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2 + g h_z$$

Je-li potrubí konstantního průřezu, pak $v = konst$ a tlaková výška

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = (h_2 - h_1) + h_z = h + \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right) \frac{v^2}{2g},$$

kde h vyplývá z rozdílu potenciální energie mezi dvěma průřezy a je na průtoku nezávislé, druhý člen pak představuje dynamickou složku tlakové výšky, která závisí na hydraulických odporech a tedy na rychlosti. Jestliže se do vztahu dosadí místo střední rychlosti tekutiny objemový průtok Q_v určený z rovnice kontinuity, získá se funkční závislost $H = h + f\left(Q_v^n\right)$, kde velikost exponentu n je dána režimem proudění v potrubí a ovlivňuje strmost charakteristiky:

- $n = 1$ pro laminární proudění $\Rightarrow H = h + k_L Q_v$
- $n = \frac{7}{4}$ pro turbulentní proudění v hydraulicky hladkém potrubí $\Rightarrow H = h + k_T Q_v^{\frac{7}{4}}$
- $n = 2$ při vyvinutém turbulentním proudění $\Rightarrow H = h + k_T' Q_v^2$

konstanty k vyplývají z parametrů potrubí a ztrátových součinitelů třením a místních. Pokud je potrubí vodorovné, je $h = 0$ a závislost se zjednoduší na tvar $H = f\left(Q_v^n\right)$. Často se místo závislosti tlakové výšky na průtoku $H = f\left(Q_v^n\right)$ uvádí vztah celkové měrné energie na průtoku $Y_{sp} = f\left(Q_v^n\right)$, zejména v souvislosti s hydrodynamickým čerpadlem, přitom platí $Y_{sp} = gH$.

Příklad 11.6.1

Určete charakteristiku potrubí o vnitřním průměru d a délce l, jestliže tímto potrubím protéká ropa o dané viskozitě ν. Maximální přípustná rychlost pro dopravu ropy je $v_{\max}$. Vyšetřete režim proudění a vykreslete charakteristiku v celém rozsahu povolené rychlosti. Potrubí je vodorovné.

Zadáno:

l = 860 m

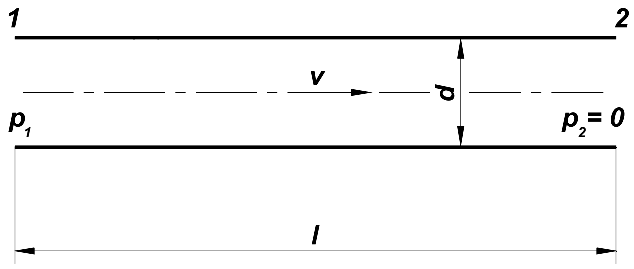
d = 150 mm

$v_{\max}$ = 2 m.s^{-1}

ν = 0.000085 m^2.s^{-1}

Vypočtěte:

$Y_{sp} = f(Q_V)$



Řešení:

Nejprve se vyšetří režim proudění v potrubí výpočtem Reynoldsova čísla při maximální rychlosti.

Reynoldsovo číslo pro maximální přípustnou rychlost $\mathrm{Re} = \dfrac{v_{\max} \cdot d}{\nu} = \dfrac{2 \cdot 0{,}15}{8{,}5 \cdot 10^{-5}} = 3529{,}412$

$\underline{\mathrm{Re} = 3529{,}412 \rangle\, 2320}$ ..... turbulentní proudění

Přechod z laminárního do turbulentního proudění nastane při kritické rychlosti v_{krit} :

$$v_{\mathrm{krit}} = \frac{\mathrm{Re} \cdot \nu}{d} = \frac{2320 \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-5}}{0{,}15} = 1{,}315\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Oblast laminárního proudění je vymezena rozsahem rychlostí 0 < v ≤ 1,315 m.s^{-1}.

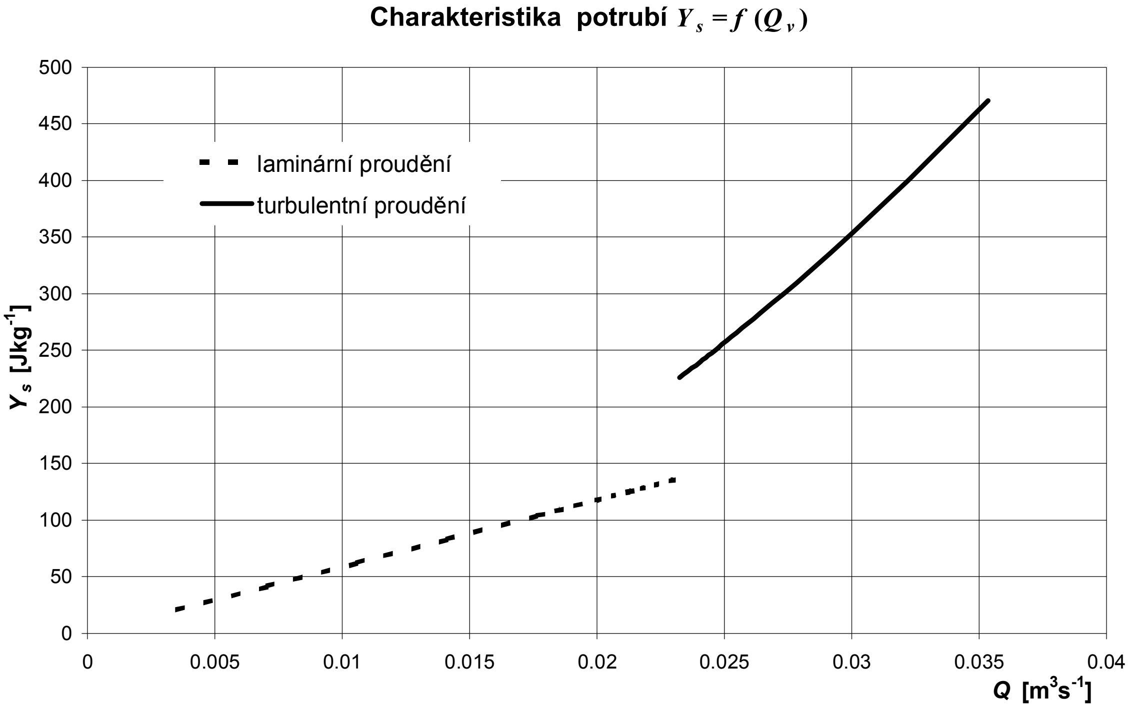
Odporovou křivku potrubí představuje funkční závislost měrné energie na objemovém průtoku $Y_{sp} = f(Q_v)$.

$$Y_{sp} = gh_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \lambda \frac{l}{d}\frac{16 Q_v^2}{2\pi^2 d^4} = \lambda \frac{8\, l\, Q_v^2}{d^5 \pi^2}$$

Součinitel tření je definován pro laminární proudění vztahem $\lambda = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}$, v oblasti turbulentní (bez uvážení drsnosti potrubí) je třecí součinitel definován vztahem dle Blasia $\lambda = \dfrac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$. Výpočet se provede v EXCELu a zapíše přehledně v následující tabulce:

v [ms^{-1}]	Re	λ_{lam}	λ_{turb}	Q_v [m^{3}s^{-1}]	Y_{Slam} [J/kg]	Y_{Sturb} [J/kg]
0	0	-	-	0	-	-
0.2	352.941	0.181	-	0.004	20.793	-
0.4	705.882	0.091	-	0.007	41.587	-
0.6	1058.824	0.060	-	0.011	62.380	-
0.8	1411.765	0.045	-	0.014	83.174	-
1	1764.706	0.036	-	0.018	103.967	-
1.2	2117.647	0.030	-	0.021	124.760	-
1.315	2320	0.028	0.046	0.023	136.751	225.997
1.4	2470.588	-	0.045	0.025	-	252.162
1.6	2823.529	-	0.043	0.028	-	318.541
1.8	3176.471	-	0.042	0.032	-	391.456
2	3529.412	-	0.041	0.035	-	470.715

Závislost $Y_{sp} = f(Q_v)$ je možno zobrazit graficky.



V místě přechodu z laminárního do turbulentního proudění je graf nespojitý, což vyplývá z následujícího odvození :

V oblasti laminárního proudění platí pro součinitel tření vztah $\lambda = \dfrac{64}{\mathrm{Re}} = \dfrac{64\nu}{vd}$ a tedy

$$Y_{sp} = gh_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \frac{64\nu}{vd}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \frac{32\nu l}{d^2}v = \frac{128\nu l}{\pi d^4}Q_v = \frac{128\cdot 8{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 860}{\pi\cdot 0{,}15^4}Q_v = 5883{,}18Q_v$$

Závislost $Y_{sp} = f(Q_v)$ je pro laminární proudění lineární.
V oblasti turbulentního proudění je pro hydraulicky hladké potrubí třecí součinitel popsán vztahem dle Blasia $\lambda = \dfrac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$ a tedy

$$Y_{sp} = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \frac{0.3164\cdot \nu^{0.25}}{(v\,d)^{0.25}}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \frac{0{,}1582\cdot \nu^{0.25} l}{d^{1.25}}v^{7/4} = 139{,}959 v^{7/4}$$

Po dosazení za rychlost pomocí průtoku (rovnice kontinuity)

$$Y_{sp} = 139{,}959\cdot v^{7/4} = 139{,}959\cdot\left(\frac{4}{\pi\cdot d^2}\right)^{7/4}\cdot Q_v^{7/4} = 163408{,}307\cdot Q_v^{7/4}$$

Měrná energie Y_{sp} v hydraulicky hladkém potrubí je úměrná $Q_v^{7/4}$.

V případě turbulentního proudění při $\mathrm{Re} \rangle 80000$ je λ funkcí Re a poměrné drsnosti $\dfrac{d}{k}$ a měrná energie $Y_{sp} \approx Q_v^{7/4} \div Q_v^2$.

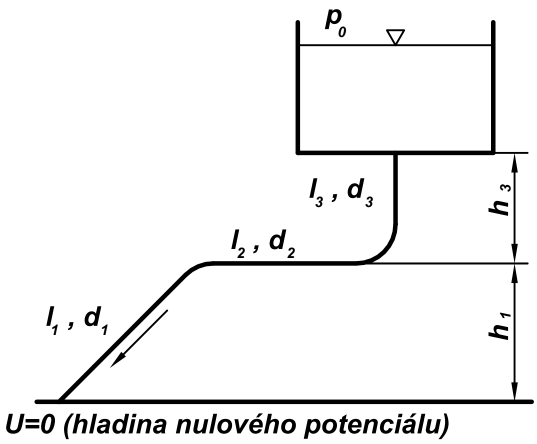
V oblasti vyvinutého turbulentního proudění λ nezávisí na Re a $Y_{sp} = f\left(Q_v^2\right)$.

Příklad 11.6.2

Určete tlakovou výšku H tak, aby potrubním systémem dle obrázku protékal objemový průtok Q_V. Potrubí tvoří tři úseky řazené sériově, předpokládá se turbulentní proudění. Charakteristiky jednotlivých úseků jsou dány rovnicemi:

$$H_1 = h_1 + K_1 \cdot Q_V^2,\quad H_2 = h_2 + K_2 \cdot Q_V^2,\quad H_3 = h_3 + K_3 \cdot Q_V^2$$

Potrubí je nové, ocelové a charakteristiky jednotlivých úseků jsou známy. Určete výslednou charakteristiku potrubí $H = f(Q_V)$. Řešte početně i graficky. Geodetická výška systému je $h_g = h_1 + h_3$



Zadáno:

Q_V =	100 m^3.hod^{-1}	
h_1 =	20 m	
h_2 =	0 m	
h_3 =	30 m	
K_1 =	10054	
K_2 =	27082	
K_3 =	85479	

Vypočtěte:		Výsledky:
$H = f(Q_V)$		
H = ?	m	144.61

Pozn.:

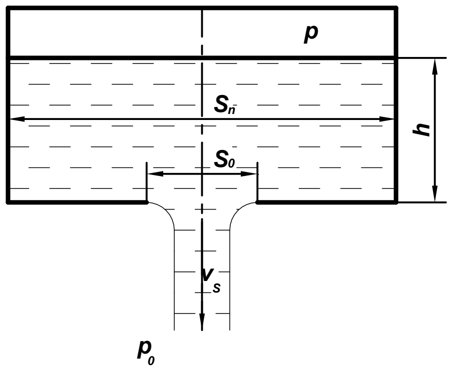
Výslednou charakteristiku potrubí lze určit graficky, úseky jsou řazeny sériově, protéká jimi stejný objemový průtok Q_V, sčítají se tedy tlakové výšky pro zvolené hodnoty průtoků. Z výsledné charakteristiky se odečte spád H odpovídající zadané hodnotě průtoku.

12. Výtok z nádob, přepady

12.1. Stacionární výtok kapaliny malým otvorem

Při výtoku kapalin z nádoby je teoretická výtoková rychlost určena z Bernoulliho rovnice

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v_0^2}{2}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_t^2}{2}$$



Z toho při použití rovnice kontinuity plyne vztah

$$v_t=\sqrt{\frac{2\left(gh+\dfrac{p-p_0}{\rho}\right)}{1-\left(\dfrac{S_o}{S_n}\right)^2}}$$

Při nerespektování poklesu hladiny (předpokládá se plocha hladiny v nádobě mnohonásobně větší, než je plocha výtokového otvoru a tedy $v_0=0$) a při atmosférickém tlaku nad hladinou v nádobě se vzorec pro teoretickou rychlost redukuje na známý Torricelliho vztah

$$v_t=\sqrt{2gh}$$

Skutečná výtoková rychlost je určena vztahem

$$v=\varphi\sqrt{2gh}$$

kde $\varphi=\dfrac{v}{v_t}$ je rychlostní součinitel, který je měřítkem ztrát. Souvisí se ztrátovým součinitelem ζ těmito vztahy

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \quad \text{resp.} \quad \zeta=\frac{1}{\varphi^2}-1$$

Teoretický průtok výtokovým otvorem splňuje rovnici kontinuity $Q_{vt}=v_t S_o$ a skutečný průtok

$$Q_v=\mu Q_{vt}=\mu S_o\sqrt{2gh}$$

Výtokový součinitel μ je dán součinem rychlostního součinitele φ a součinitele kontrakce $\varepsilon=\dfrac{S}{S_o}$, kde S je průřez proudu za otvorem, S_o je plocha otvoru

$$\mu=\frac{Q_v}{Q_{vt}}=\varphi\cdot\varepsilon$$

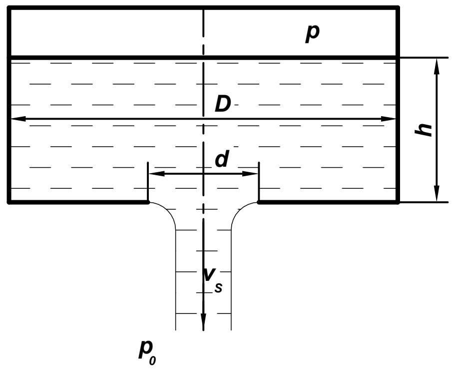
Pro ostrohranný otvor je $\varphi\cong 0.97,\ \varepsilon\cong 0.64\Rightarrow\mu\cong 0.62$, což platí pro velká Reynoldsova čísla. Pro průměr nádoby srovnatelný s průměrem otvoru se udává výtokový součinitel μ vztahem podle Weissbacha, pro kruhové otvory definovaný vztahem

$$\mu=0.62\left(1+0.0456\left(14.82^n-1\right)\right),\ n=\frac{S_o}{S_n}$$

Příklad 12.1.1

Stanovte skutečnou výtokovou rychlost v a průtok vody Q_V vytékající ostrohranným otvorem ve dně nádoby o průměru d. Válcová nádoba má průměr D, je naplněna do výšky h a přetlak v nádobě je p. Dále je dán rychlostní součinitel φ a součinitel kontrakce ε.

Zadáno:		
d =	4 cm	
D =	0.6 m	
h =	2 m	
p =	0.03 MPa rel.tl	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
φ =	0.97	
ε =	0.64	
Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	9.66317
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.00777

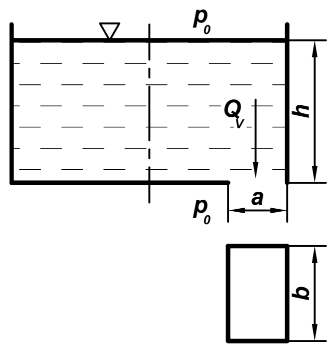


Řešení: $$v=\varphi\sqrt{\frac{2\left(gh+\frac{p-p_0}{\rho}\right)}{1-\left(\frac{S_o}{S_n}\right)^2}}=\varphi\sqrt{\frac{2\left(gh+\frac{p}{\rho}\right)}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}},\quad Q_V=\varepsilon S_o v$$

Příklad 12.1.2

Ve dně nádoby je malý ostrohranný obdélníkový otvor, jehož rozměry jsou a a b a který se hranou b dotýká boční stěny. Určete průtok otvorem Q_V, je-li otvor v hloubce h pod hladinou a je-li dán výtokový součinitel μ.

Zadáno:		
a =	30 mm	
b =	40 mm	
h =	3 m	
μ =	0.647	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.00596



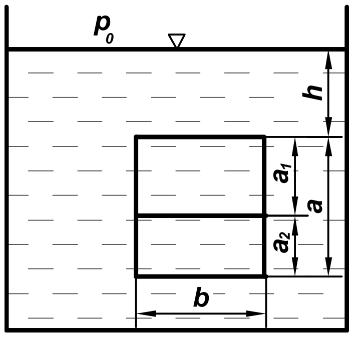
12.2. Výtok velkým otvorem v boční stěně

Výtok malým otvorem v boční stěně se řeší vztahy uvedenými v kap. 12.1. Při relativně velkém otvoru ve svislé stěně, pro který platí $\frac{h}{d}\le\frac{5}{1}$, je nutno respektovat závislost výtokové rychlosti kapaliny na hloubce h uvažovaného místa pod hladinou tlaku ovzduší. Výtok kapaliny z nádoby se určí integrací. Má-li otvor obdélníkový průřez o šířce b, potom výtok Q_V je dán vztahem

$Q_V = \frac{2}{3}\mu.b\sqrt{2g}\left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2}\right)$, kde h_1 je hloubka horního okraje otvoru pod hladinou a h_2 hloubka dolního okraje otvoru pod hladinou.

Příklad 12.2.1

Obdélníkový otvor v boční stěně je třeba rozdělit vodorovnou přepážkou tak, aby v obou částech otvoru byl stejný výtok Q_V kapaliny o hustotě ρ. Také se předpokládá stejný výtokový součinitel μ. Výška otvoru je a, šířka otvoru je b a hladina je ve výšce h nad horní hranou otvoru. Určete výšky otvorů a_1 a a_2 a jejich průtoky Q_V.



Zadáno:		
a =	0.4 m	
b =	0.8 m	
h =	0.4 m	
μ =	0.62	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_V = ?	$m^3.s^{-1}$	0.33875
a_1 = ?	m	0.21667
a_2 = ?	m	0.18333

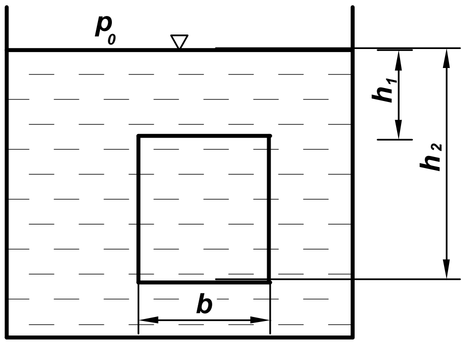
Řešení: $$Q_V = \frac{\frac{2}{3}\mu\, b\sqrt{2g}\left[(h+a)^{3/2} - h^{3/2}\right]}{2}$$

Horní otvor $$(h+a_1)^{3/2} = \frac{3}{2}\frac{Q_V}{\sqrt{2g}\mu b} + h^{3/2} \Rightarrow a_1 = \sqrt[3/2]{\frac{3}{2}\frac{Q_V}{\sqrt{2g}\mu b} + h^{3/2}} - h$$

Dolní otvor $a_2 = a - a_1$

Příklad 12.2.2

Určete průtok Q_V velkým obdélníkovým otvorem, je-li h_1 hloubka horního okraje a h_2 hloubka dolního okraje otvoru pod hladinou. Šířka otvoru je b, výtokový součinitel je μ.



Zadáno:		
h_1 =	0.24 m	
h_2 =	0.86 m	
b =	0.65 m	
μ =	0.61	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_V = ?	$m^3.s^{-1}$	0.796

12.3. Výtok ponořeným otvorem

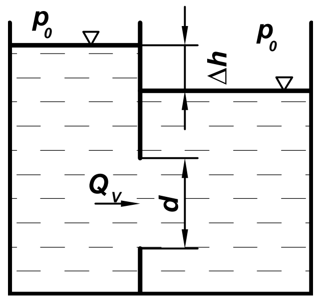
Při výtoku ponořeným otvorem se v podstatě jedná o průtok otvorem ve svislé stěně mezi dvěma nádobami. Rozdíl tlaků zprava a zleva na svislou stěnu je konstantní, výtoková rychlost je nezávislá na poloze uvažovaného místa pod hladinou a je po výšce otvoru stejná. Pokud v obou nádržích je kapalina o stejné hustotě ρ, pak pro teoretickou výtokovou rychlost platí $v_t = \sqrt{2g\Delta h}$.

Tento výraz je formálně shodný s Torricelliho výrazem, avšak Δh je výškový rozdíl hladin v obou nádržích.

Příklad 12.3.1

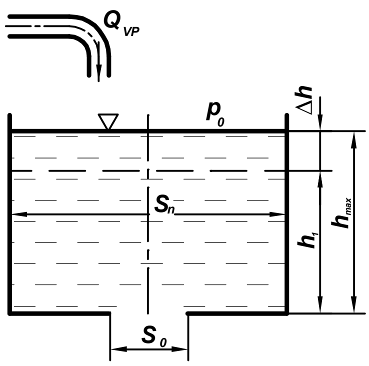
Dvě vodní nádrže mají společnou stěnu, v níž je kruhový ostrohranný otvor o průměru d. Určete, jaké množství vody protéká otvorem, je-li rozdíl hladin mezi oběma nádržemi Δh a je-li dán výtokový součinitel μ experimentálně.

Zadáno:		
Δh =	0.5 m	
d =	0.1 m	
μ =	0.62	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.01525



12.4. Výtok při současném přítoku

Z otevřené nádoby vytéká kapalina o průtoku Q_v otvorem o ploše S_o a současně přitéká průtok Q_{vp}, přičemž $Q_{vp} \neq Q_v$. Výtok při libovolné výšce h hladiny p_0 je určen vztahem



$$Q_v = \mu S_0 \sqrt{2gh}$$

Ustálenému stavu, kdy $Q_{vp} = Q_v$, odpovídá výška h_k, pro níž platí

$$Q_{vp} = Q_v = \mu S_0 \sqrt{2gh_k}$$

Doba potřebná pro změnu polohy hladiny z h_0 na h je dána vztahem

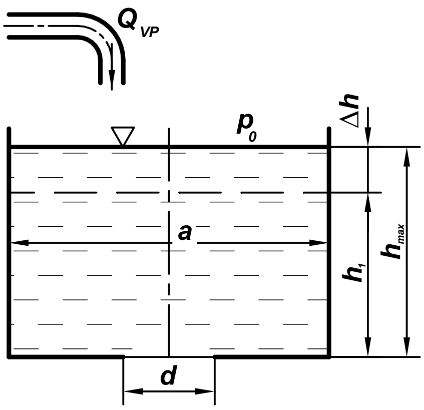
$$t = \frac{2S_n}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h} + \sqrt{h_k} \ln \frac{\sqrt{h_k} - \sqrt{h_0}}{\sqrt{h_k} - \sqrt{h}} \right)$$

Příklad 12.4.1

Do prázdné nádrže tvaru hranolu se čtvercovým dnem o ploše S_n a hraně a přitéká voda průtokem Q_{vp}. Současně voda začne vytékat ze dna nádoby kruhovým otvorem o poloměru d o výtokovém součiniteli μ. Určete výšku hladiny h_{max} odpovídající ustálenému stavu. Za jakou dobu se dosáhne úrovně hladiny o Δh nižší než je h_{max}.

Zadáno:

a =	0.8 m	
d =	30 mm	
Q_{vp} =	2 dm^3.s^{-1}	
μ =	0.62	
Δh =	0.1 m	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
h_{max} = ?	m	1.06148
t = ?	s	1410.6



Řešení:

$$Q_{vp} = \mu S_o \sqrt{2gh_{max}} \Rightarrow h_{max} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{vp}}{\mu S_o}\right)^2$$

$$t = \frac{2S_n}{\mu S_o \sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_{max}}\ln\frac{\sqrt{h_{max}}}{\sqrt{h_{max}} - \sqrt{h_{max} - \Delta h}} - \sqrt{h_{max} - \Delta h}\right]$$

12.5. Vyprazdňování nádob

U otevřené nádoby při nulovém přítoku doba potřebná ke změně polohy hladiny z h_0 na h je dána

$$t = \frac{2S_n}{\mu S_o \sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right)$$

a doba vyprázdnění, kdy $h = 0$ je určena jednodušším vztahem

$$t_v = 2\frac{V_0}{Q_{V0}} = 2\frac{S_n h_0}{\mu S_o \sqrt{2gh_0}} = 2t_0$$

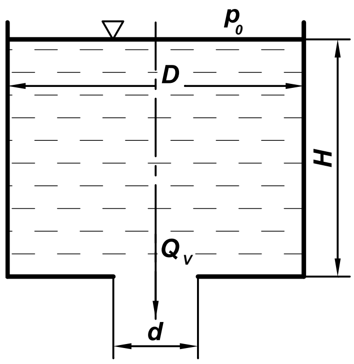
U nádob s proměnným průřezem lze nádobu rozdělit na části a určit doby snížení hladin a jejich součtem přibližně dobu vyprázdnění.

Příklad 12.5.1

Za jakou dobu t se vyprázdní válcová nádrž o průměru D, zaplněná vodou do výšky H, kruhovým ostrohranným otvorem o průměru d.

Zadáno:

D =	1.2 m	
d =	0.1 m	
H =	0.8 m	
μ =	0.62	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
t = ?	s	93.80



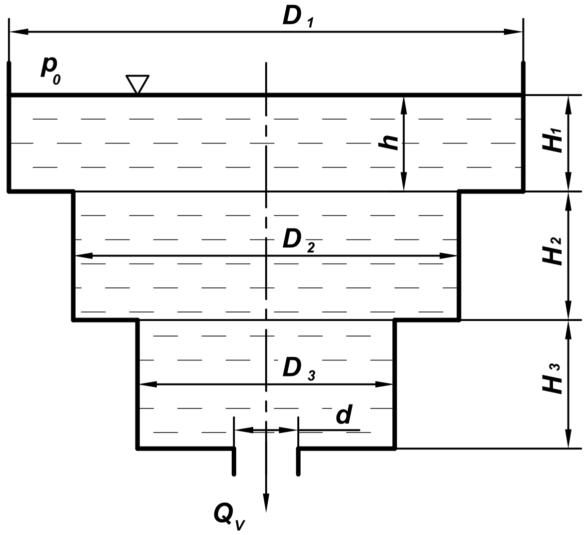
Příklad 12.5.2

Stanovte dobu vyprazdňování soustavy propojených nádob zaplněných vodou o průměrech D_1, D_2, D_3 a výškách H_1, H_2, H_3. Horní nádoba je zaplněna do výšky h a v dolní nádobě je kruhový ostrohranný otvor o průměru d.

Zadáno:

D_1 =	1 m
D_2 =	0.8 m
D_3 =	0.6 m
H_1 =	1 m
H_2 =	1 m
H_3 =	1 m
h =	0.75 m
d =	5 cm
μ =	0.62

Vypočtěte:		Výsledky:
t = ?	s	253.20



Řešení: $t = t_1 + t_2 + t_3$

$$t_1 = 2\frac{S_{n1}}{S_o}\frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h+H_2+H_3}-\sqrt{H_2+H_3}\right] = 2\left(\frac{D_1}{d}\right)^2\frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h+H_2+H_3}-\sqrt{H_2+H_3}\right]$$

$$t_2 = 2\frac{S_{n2}}{S_0}\frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_2+H_3}-\sqrt{H_3}\right] = 2\left(\frac{D_2}{d}\right)^2\frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_2+H_3}-\sqrt{H_3}\right]$$

$$t_3 = 2\frac{S_{n3}}{S_0}\frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\sqrt{H_3} = 2\left(\frac{D_3}{d}\right)^2\frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\sqrt{H_3}$$

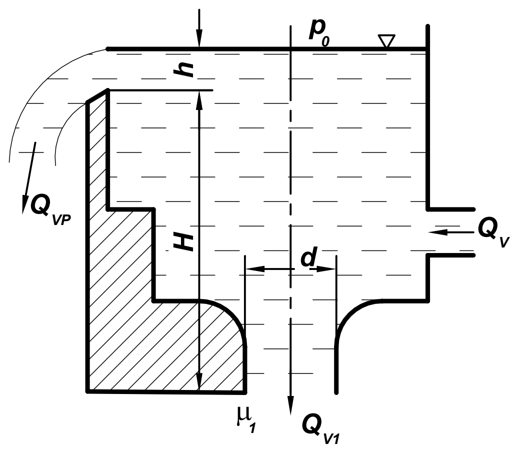
Příklad 12.5.3

Voda vytéká z nádrže otvorem o průměru d. Aby nekolísal výtok tímto otvorem, je u nádrže přepad o konstantní šířce b bez boční kontrakce. Výtokový otvor je pod přepadovou hranou v hloubce H. Určete přítok vody Q_v do nádrže a výtok Q_{v1} otvorem, když hladina v nádrži je nad přepadovou hranou ve výši h. Výtokový součinitel otvoru je μ a u přepadu μ_P. Jaký je největší přítok $Q_{v\max}$, při němž voda nepřetéká přepadem?

Zadáno:

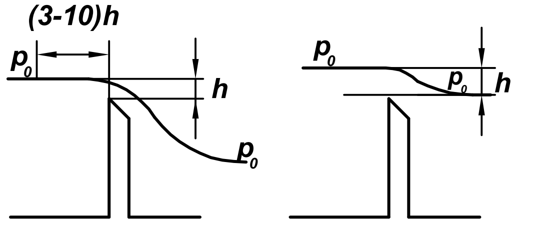
d =	120 mm
b =	0.7 m
H =	3 m
h =	100 mm
μ =	0.97
μ_P =	0.646

Vypočtěte:		Výsledky:
Q_{v1} = ?	$m^3.s^{-1}$	0.08556
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.12779
$Q_{v\max}$ = ?	$m^3.s^{-1}$	0.08417



12.6. Přepady

Přepad je výtok nezaplněným otvorem nebo otvorem s neuzavřeným obrysem. Nejnižší místo výtokového otvoru je korunou přepadu. Výška horní hladiny p_0 (před přepadem) nad korunou přepadu je přepadová výška h.



Dokonalý přepad *Nedokonalý přepad*

Podle polohy hladiny za přepadem se rozlišují přepady dokonalé a nedokonalé. Dokonalý přepad je takový, při němž spodní hladina neovlivňuje průtok přepadem a je pod korunou přepadu. Nedokonalý přepad má ovlivněn průtok spodní hladinou, která je výše než koruna přepadu.

Průtok dokonalým přepadem s volným proudem se stanoví jako výtok velkým obdélníkovým otvorem v boční stěně nádoby, kdy $h_1 = 0$ a $h_2 = h$, a tedy $Q_v = \frac{2}{3}\mu b h \sqrt{2gh}$. Součinitel přepadu $\mu = f(\mathrm{Re}, \mathrm{geom.tvar})$ má obdobný význam jako výtokový součinitel. Pro přepad s ostrou hranou a pro volný proud (vzduch má přístup pod přepadající proud), je střední hodnota součinitele přepadu $\mu = 0.65$, pokud šířka přepadu b je rovna šířce celého kanálu b_0. Vztahy pro výpočet μ je možné najít v odborné literatuře.

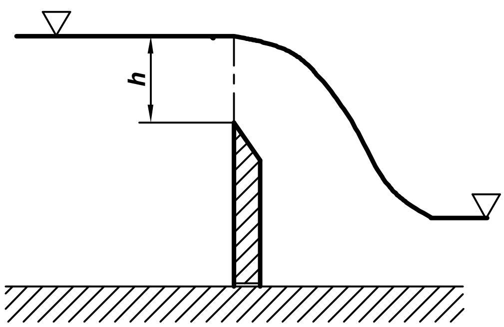
Průtok nedokonalým přepadem se stanoví jako součet dvou dílčích průtoků Q_{v1} a Q_{v2}, z nichž první je výtok velkým obdélníkovým otvorem v boční stěně, jehož výška je určena rozdílem výšek hladin před a za přepadem, průtok Q_{v2} je definován jako ponořeným otvorem, jehož výška h' je určena výškou hladiny za přepadem a korunou přepadu.

$Q_v = \frac{2}{3}\mu b h \sqrt{2gh} + \mu' b h' \sqrt{2gh} = b\sqrt{2gh}\left(\frac{2}{3}\mu h + \mu' h'\right)$. Ve většině případů se předpokládá, že $\mu = \mu'$.

Příklad 12.6.1

K měření vody byl postaven dokonalý přepad s obdélníkovým průřezem o šířce b. Maximální výška hladiny nad přepadovou hranou je h, součinitel přepadu je μ. Určete objemový průtok Q_v.

Zadáno:		
b =	0.6 m	
h =	0.4 m	
μ =	0.62	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.27790



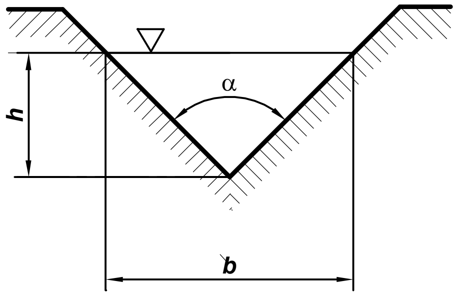
Příklad 12.6.2

Přepadem trojúhelníkového průřezu protéká objemový průtok Q_v vody. Jaká je výška hladiny, jestliže vrcholový úhel trojúhelníka je α a výtokový součinitel je μ.

Zadáno:

Q_v =	0.050 m^3.s^{-1}	
μ =	0.48	
α =	90 °	

Vypočtěte:		Výsledky:
h = ?	m	0.26241



Řešení:

$$Q_v = \frac{2}{3}\mu S\sqrt{2gh} = \frac{2}{3}\mu\frac{bh}{2}\sqrt{2gh} = \frac{2}{3}\mu\frac{2h^2}{2}\sqrt{2gh}$$, protože je-li $\alpha = \frac{\pi}{2}$, pak $b = 2h$.

$$h = \left(\frac{3Q_v}{2\mu\sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Příklad 12.6.3

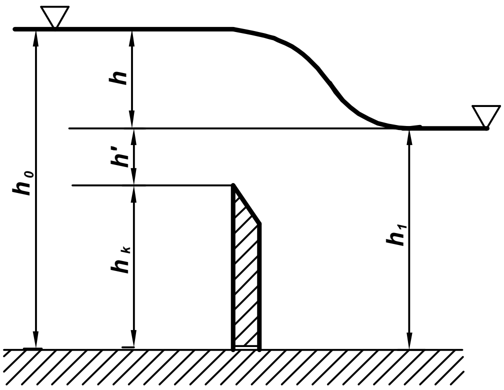
Určete šířku obdélníkového přepadu b bez bočního zúžení při průtoku Q_v. Výška hladiny nad dnem před přepadem je h_0, za přepadem h_1, výška koruny přepadu je h_k. K výpočtu výtokového součinitele μ použijte vztah podle Spolku švýcarských inženýrů

$$\mu = 0.615\left(1+\frac{1}{1000h+1.6}\right)\left[1+0.5\left(\frac{h+h'}{h_0}\right)^2\right],$$ kde $h+h'$ je výška hladiny nad korunou přepadu. Předpokládejte $\mu = \mu'$.

Zadáno:

Q_v =	1.50 m^3.s^{-1}	
h_0 =	1.2 m	
h_1 =	0.9 m	
h_k =	0.7 m	

Vypočtěte:		Výsledky:
h = ?	m	0.300
h' = ?	m	0.200
μ = ?		0.6717
b = ?	m	2.301

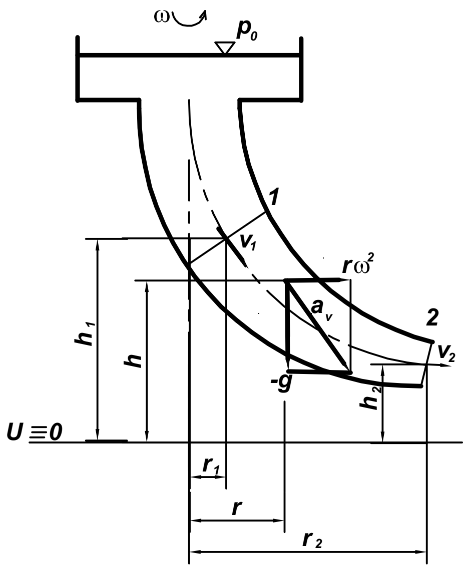


Řešení:

$$Q_v = \frac{2}{3}\mu bh\sqrt{2gh} + \mu bh'\sqrt{2gh} = \mu b\sqrt{2gh}\left(\frac{2}{3}h + h'\right) \Rightarrow b = \frac{Q_v}{\mu\sqrt{2gh}\left(\frac{2}{3}h + h'\right)}$$

13. Proudění v rotujícím kanále

13.1. Bernoulliho rovnice pro rotující kanál



Při průtoku kapaliny kanálem, který se otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy, působí na kapalinu kromě síly tíhové také odstředivá síla. Bernoulliho rovnice v obecném tvaru zahrnuje v potenciálu U práci všech objemových sil, které působí na proudící kapalinu

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}-U=konst\text{, přitom}$$

$$U=\int\left(a_x dx+a_y dy+a_z dy\right)$$

Na částici kapaliny v rotující proudové trubici působí složky zrychlení $a_r=r\omega^2;\ a_y=-g;\ a_z=0$.

Potom pro svislou osu rotace se určí potenciál integrací

$$U=\int dU=-g\int dy+\omega^2\int rdr=-gh+\frac{\omega^2 r^2}{2}+konst$$

Dosazením do obecné Bernoulliho rovnice dostane se pro rotující kanál rovnice

$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh-\frac{u^2}{2}=konst$, kde rychlost v je relativní rychlost kapaliny, jíž proudí v rotujícím kanále, u je obvodová neboli unášivá rychlost v uvažovaném místě rotujícího kanálu. Při odstředivém průtoku rotujícím kanálem se u zvětšuje a energie kapaliny se zvyšuje. Tak je tomu např. v odstředivých čerpadlech. Při dostředivém průtoku se unášivá rychlost u zmenšuje a energie kapaliny se snižuje. To je případ vodních turbin (např. Francisových). Přihlíží-li se k hydraulickým odporům při ustáleném proudění skutečné kapaliny rotujícím kanálem, má Bernoulliho rovnice pro dva průřezy jedné a téže proudové trubice tvar

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh_1-\frac{u_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_2-\frac{u_2^2}{2}+gh_z$$

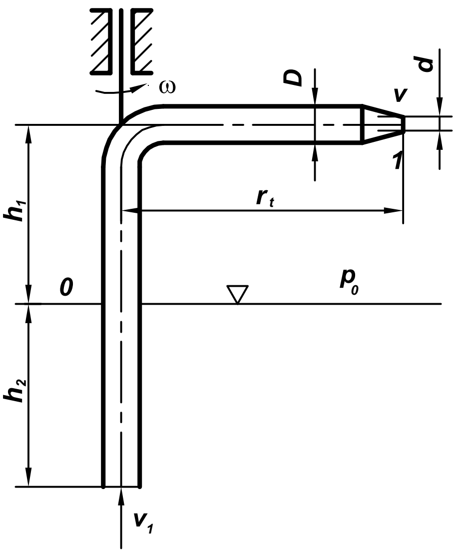
Kapalina protéká od průřezu 1 k průřezu 2.

Příklad 13.1.1

Stanovte otáčky n, při nichž voda vytéká z rotujícího nátrubku rychlostí v. Průměr rotující trubky je D. Konec trubky je zúžen na průměr d. Ústí trysky je na poloměru r_t a ve výšce h_1. Voda je nasávána z hloubky h_2. Dále jsou dány ztrátové součinitele dle schématu. Určete otáčky pro ideální kapalinu n_1, skutečnou kapalinu n_2 a otáčky n_3, při nichž začne kapalina vytékat z nátrubku.

Zadáno:

v =	8 m.s^{-1}
h_1 =	0.3 m
h_2 =	0.5 m
r_t =	0.5 m
D =	0.05 m
d =	0.03 m
λ =	0.022
ζ_k =	0.2
ζ_t =	0.05
ρ =	1000 kg.m^{-3}



Vypočtěte:		Výsledky:
n_1 = ?	s^{-1}	2.661
n_2 = ?	s^{-1}	2.838
n_3 = ?	s^{-1}	0.772

Řešení:

ad 1) Bernoulliho rovnice pro rotující kanál a ideální kapalinu má pro průřezy 0-1 tvar:

$$\frac{p_0}{\rho}+0+0=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh_1-\frac{u^2}{2}\Rightarrow u=\sqrt{2gh_1+v^2}$$

ad 2) V případě skutečné kapaliny je nutné uvažovat ztráty třením a místní

$$\frac{p_0}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh_1-\frac{u^2}{2}+\left(\lambda\frac{h_1+h_2+r_t}{D}+\zeta_k\right)\frac{v_1^2}{2}+\zeta_t\frac{v^2}{2}$$

$$u=\sqrt{2gh_1+\left(\lambda\frac{h_1+h_2+r_t}{D}+\zeta_k\right)v_1^2+(1+\zeta_t)v^2}$$

kde rychlost v_1 vypočteme z rovnice kontinuity $v_1S_1=vS\Rightarrow v_1=v\left(\frac{d}{D}\right)^2$

ad 3) Pokud voda z nátrubku nevytéká, je výtoková rychlost $v=0$ a rovněž ztráty v potrubí jsou nulové. Bernoulliho rovnice se zjednoduší na tvar

$$\frac{p_0}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+gh_1-\frac{u^2}{2}\Rightarrow u=\sqrt{2gh_1}$$

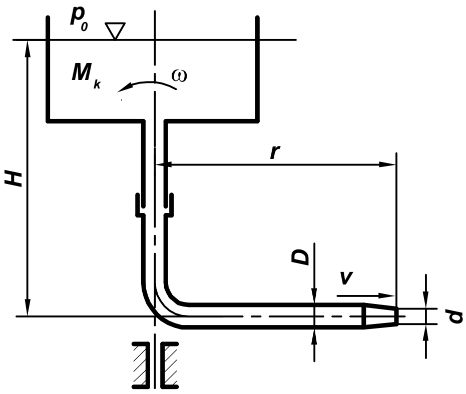
Otáčky n ve všech případech se vypočtou ze vztahu

$$n=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{u}{2\pi r_t}$$

Příklad 13.1.2

Z nádoby, která se otáčí konstantními otáčkami n, vytéká voda připojenou trubkou do ovzduší. Výtokový průřez je v hloubce H pod hladinou na poloměru r, výstupní průměr trubky je d. Určete objemový průtok vody Q_V a kroutící moment M_k potřebný k otáčení, jsou-li hydraulické i mechanické ztráty zanedbány.

Zadáno:		
d =	0.02 m	
H =	1.2 m	
r =	0.5 m	
n =	200 min^{-1}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v = ?	m.s^{-1}	11.541
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.00363
M_k = ?	N.m	9.503



Řešení:

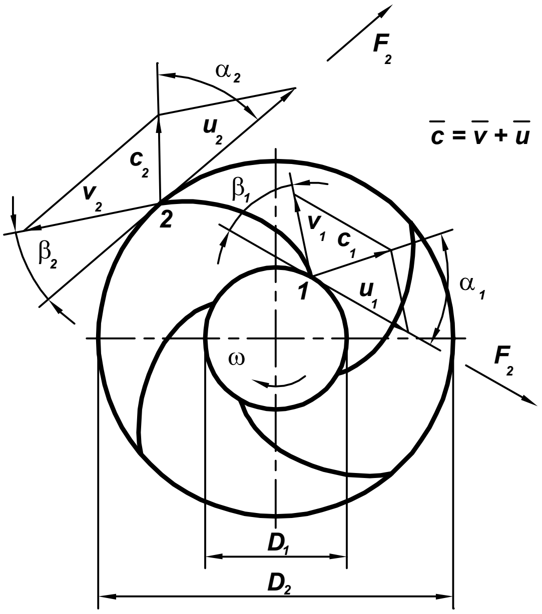
Kroutící moment se vypočte ze vztahu $M_k = \frac{P}{\omega} = \frac{Q_V \cdot \Delta p}{\omega} = \frac{Q_V \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2}{\omega} = \frac{1}{2}\rho Q_V \omega r^2$

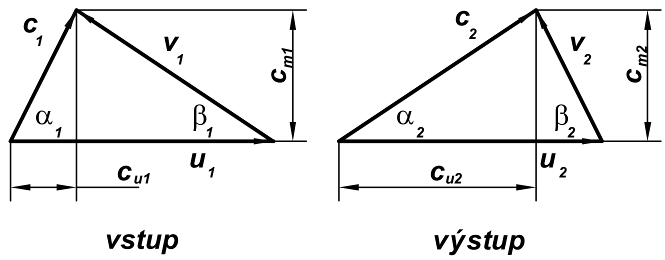
13.2. Odstředivé čerpadlo

Hydrodynamická čerpadla mění energii mechanickou na hydraulickou. Tato přeměna probíhá prostřednictvím energie kinetické. Přeměna mechanické energie na hydraulickou začíná na vstupní hraně a končí na výstupní hraně lopatky oběžného kola. Charakteristickým prvkem oběžného kola jsou rotující kanály vymezené lopatkami oběžného kola, v nichž je proudění popsáno pomocí rozšířené Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 - \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 - \frac{u_2^2}{2} + gh_{zo}$$

kde rychlosti v_1, v_2 jsou relativní, rychlosti $u_{1,} u_2$ jsou unášivé, index 1 značí vstup do oběžného kola, index 2 výstup z oběžného kola. Ztrátová výška h_{z0} zahrnuje ztráty spojené s průtokem kapaliny oběžným kolem (hydraulické). Vektorovým součtem relativní a unášivé rychlosti je rychlost absolutní $\mathbf{c} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.





Kinematické poměry na vstupu a výstupu z oběžného kola jsou určeny rychlostními trojúhelníky, jejichž základny tvoří unášivá rychlost $\mathbf{u}$, absolutní rychlost $\mathbf{c}$ s ní svírá úhel α a rychlost relativní $\mathbf{v}$ úhel β. Výškou v rychlostním trojúhelníku je meridiánová rychlost $\mathbf{c}_m$, která souvisí s ustáleným průtokem dle rovnice kontinuity, s měrnou energií kapaliny Y pak souvisí hybná složka absolutní rychlosti $\mathbf{c}_u$, která je průmětem absolutní rychlosti do směru rychlosti unášivé.

Vztah pro teoretickou měrnou energii čerpadla Y_t na základě kinematických poměrů v oběžném kole určuje Eulerova čerpadlová rovnice

$$gH_t = Y_t = \left(u_2 c_2 \cos\alpha_2 - u_1 c_1 \cos\alpha_1\right) = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$$

Skutečná měrná energie Y_d bude samozřejmě nižší.

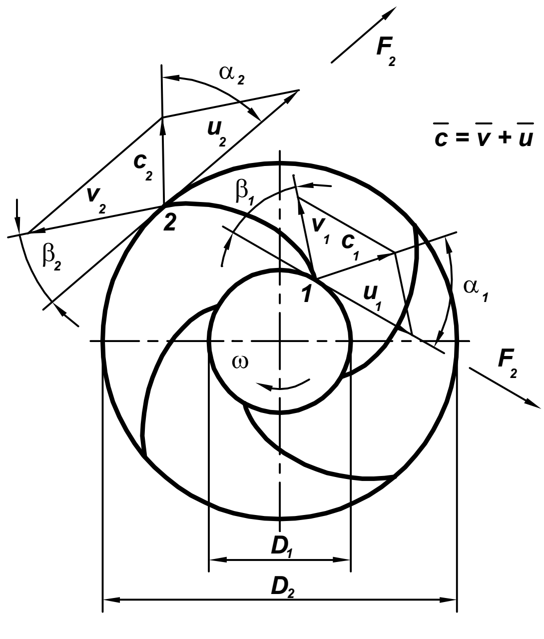
Příklad 13.2.1

Stanovte teoretickou měrnou energii Y_t radiálního kola hydrodynamického čerpadla. Je dán vnější a vnitřní průměr oběžného kola D_2 a D_1, vstupní a výstupní úhel lopatky β_1, β_2 meridiánová rychlost na vstupu c_{m1} a výstupu c_{m2} a kolo rotuje konstantní rychlostí ω.

Zadáno:

$D_1 =$	0.115 m
$D_2 =$	0.265 m
$\beta_1 =$	25 ^{0}
$\beta_2 =$	35 ^{0}
$c_{m1} =$	6.09 ms^{-1}
$c_{m2} =$	4.38 ms^{-1}
$\omega =$	303.68 s^{-1}

Vypočtěte:		Výsledky:
$u_1 =$?	m.s^{-1}	17.462
$u_2 =$?	m.s^{-1}	40.238
$c_{u1} =$?	m.s^{-1}	4.393
$c_{u2} =$?	m.s^{-1}	33.981
$Y_t =$?	Jkg^{-1}	1290.617



Řešení:

Teoretická měrná energie čerpadla je definována Eulerovou čerpadlovou rovnicí

$gH_t = Y_t = \left(u_2 c_2 \cos\alpha_1 - u_1 c_1 \cos\alpha_1\right) = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$, c_{u1}, c_{u2} se určí z rychlostních trojúhelníků

$$u_1 = \frac{D_1}{2}\omega, \quad c_{u1} = u_1 - \frac{c_{m1}}{tg\beta_1}, \quad u_2 = \frac{D_2}{2}\omega, \quad c_{u2} = u_2 - \frac{c_{m2}}{tg\beta_2}$$

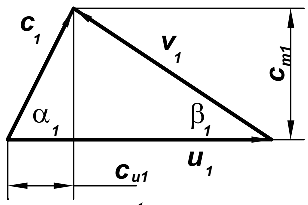
Příklad 13.2.2

Stanovte teoretickou měrnou energii Y_t radiálního oběžného kola hydrodynamického čerpadla. Jsou dány parametry $D_1, D_2, \beta_1, \beta_2, n$.

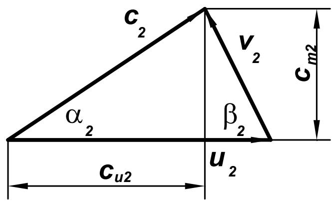
Zadáno:

$D_1 =$	110 mm
$D_2 =$	250 mm
$\beta_1 =$	19 °
$\beta_2 =$	36 °
$n =$	1500 min^{-1}
$c_{m1} =$	2 $m.s^{-1}$
$c_{m2} =$	5 $m.s^{-1}$

Vypočtěte:		Výsledky:
$c_{u1} = ?$	$m.s^{-1}$	2.831
$c_{u2} = ?$	$m.s^{-1}$	12.753
$c_1 = ?$	$m.s^{-1}$	3.466
$c_2 = ?$	$m.s^{-1}$	13.698
$Y_t = ?$	$J.kg^{-1}$	225.82



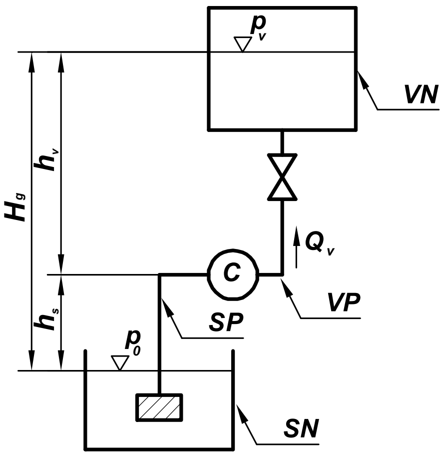
vstup



výstup

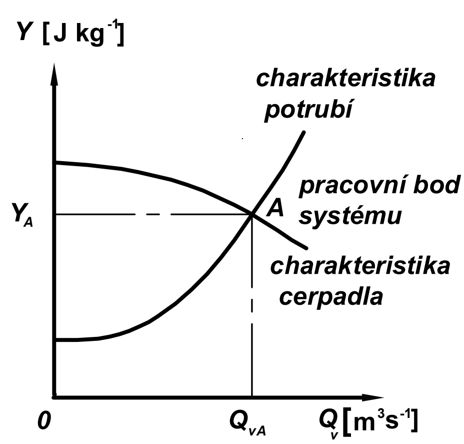
13.3. Čerpadlo a potrubí

Čerpadlo dodává kapalině energii, která je obecně potřebná ke zvýšení polohové energie, tlakové energie a k překonání hydraulických odporů při proudění reálné kapaliny.



Čerpadlo je součástí čerpacího systému, který se skládá ze sacího potrubí *SP* a výtlačného potrubí *VP*, sací nádrže *SN* a výtlačné nádrže *VN*. Dopravovaná kapalina protéká ze sací nádrže sacím potrubím, čerpadlem, výtlačným potrubím a vtéká do výtlačné nádrže. Množství kapaliny protékající čerpadlem udává průtok čerpadla Q_V, což je objem kapaliny za jednotku času. Hmotnostní průtok je $Q_m = \rho Q_v$.

Čerpadlo je v tomto systému aktivním prvkem, který kapalině energii dodává, při dopravě potrubím se naopak energie kapaliny spotřebovává. Při ustáleném provozu jsou obě složky čerpacího systému v rovnováze, tj. hlavní parametry Q_V, Y jsou stejné. Souvislost těchto parametrů je dána u potrubí charakteristikou potrubí, u čerpadla charakteristikou čerpadla. Charakteristiky čerpadla a potrubí se protínají v pracovním bodě systému, jak je znázorněno na obrázku.



Skutečnou měrnou energii čerpadla Y_d lze určit na základě energetické bilance systému, která se definuje pro hladinu v sací a výtlačné nádrži. Energie kapaliny ve výtlačné nádrži musí být rovna součtu energie kapaliny v sací nádrži a energie, kterou kapalině dodá čerpadlo, tj. $Y_0 + Y_d = Y_v$, tedy s využitím Bernoulliho rovnice platí:

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 + 0 + Y_d = \frac{p_v}{\rho} + g(h_s + h_v) + g(h_{zs} + h_{zv}) \Rightarrow Y_d = \frac{p_v - p_0}{\rho} + g(h_s + h_v) + g(h_{zs} + h_{zv})$$

Prvé dva členy na pravé straně jsou na průtoku nezávislé a představují statickou měrnou energii

$$Y_{st} = \frac{p_v - p_0}{\rho} + g(h_s + h_v) \neq f(Q_v)$$

Poslední člen vyjadřující hydraulické ztráty závisí na rychlosti a tedy objemovému průtoku

$$Y_z = g(h_{zs} + h_{zv}) = f(Q_v)$$

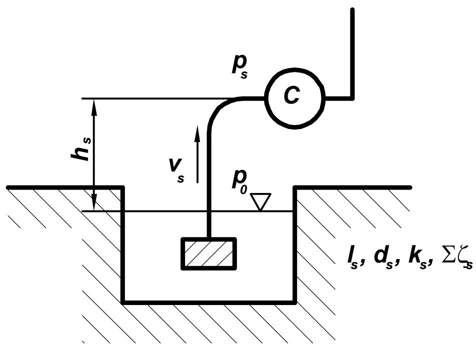
Ve většině případů čerpání kapalin je proudění turbulentní a ztráty jsou úměrné druhé mocnině průtoku dle vztahu $Y_z = k \cdot Q_v^2$, kde hodnota k vyplývá z definice hydraulických odporů. Závislost $Y_d = Y_{st} + kQ_v^2$ představuje charakteristiku potrubí. Užitečný výkon čerpadla je $P = Q_m.Y_d = \rho g Q_v.H_d$, příkon čerpadla se určí pomocí celkové účinnosti η_c ze vztahu

$$P_p = \frac{P}{\eta_č} = \frac{\rho g Q_v.H_d}{\eta_č} = \frac{p_d Q_v}{\eta_č} = \frac{\rho.Y_d Q_v}{\eta_č}, \text{ kde } \eta_č = \eta_h.\eta_0.\eta_m.$$

Příklad 13.3.1

Ověřte, zda v sacím hrdle čerpadla bude tlak p_s větší než tlak nasycené vodní páry 20°C teplé, který je dán jako p_N. V sacím potrubí je dána rychlost, geometrické parametry, místní ztráty a drsnost.

Zadáno:		
p_N = 2	kPa	
l_s = 6.5	m	
h_s = 6	m	
d_s = 80	mm	
v_s = 2.1	m.s^{-1}	
$\sum\zeta_s$ = 5		
k_s = 0.065	mm	
ρ = 1000	kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Re= ?		168 000
λ_s = ?	m	0.0194
h_{zs} = ?	m	1.478
p_s = ?	Pa	24 435.82



Řešení:

Pro sací potrubí lze napsat Bernouliho rovnici :

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 + 0 = \frac{p_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + g(h_{zs} + h_s)$$

Tlak v sacím hrdle je

$$p_s = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_s^2 - \rho g h_s - \rho g h_{zs}$$

Součinitel tření λ se určí podle velikosti Re čísla $\mathrm{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}$, v případě turbulentního proudění, kdy se uvažuje drsné potrubí, se λ určí dle Altšula $\lambda = 0.1\left(\frac{100}{\mathrm{Re}} + \frac{k}{d}\right)^{0.25}$.

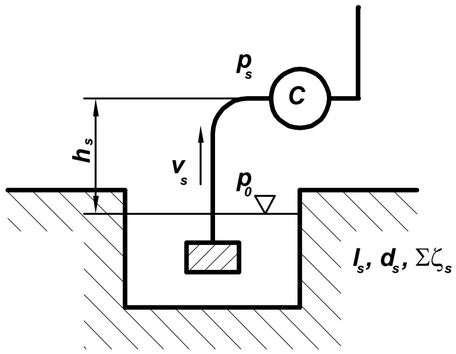
Ztrátová výška je $h_{zs} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum\varsigma\right)\frac{v^2}{2g}$. Z výsledku výpočtu vyplývá, že tlak $p_s \rangle p_N$.

Příklad 13.3.2

V jaké výšce h_s nad hladinou vody v nádrži je umístěno čerpadlo, jestliže tlak před vstupem do čerpadla je p_s. Určete průtok sacím potrubím Q_V. Stanovte ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní ztráty. Průměr potrubí je d_s a délka l_s. Voda proudí potrubím rychlostí v_s. Dále jsou známy třecí součinitel λ_s a součet všech místních ztrát $\sum\zeta_s$.

Zadáno:

$v_s =$	2 m.s^{-1}
$l_s =$	12 m
$d_s =$	0.2 m
$p_s =$	10000 Pa abs.
$\sum\zeta_s =$	23
$\lambda_s =$	0.022
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}



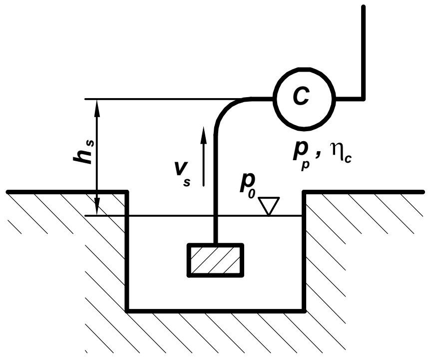
Vypočtěte:		Výsledky:
h_s = ?	m	4.012
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.06283
l_e = ?	m	209.091

Příklad 13.3.3

Čerpadlem o příkonu P_p, účinnosti η_c, průměru sacího potrubí d_s a rychlostí proudění v_s se dopravuje voda. Vypočtěte průtok Q_V, výkon čerpadla P a skutečnou měrnou energii čerpadla Y_d.

Zadáno:

$P_p =$	6 kW
$d_s =$	60 mm
$v_s =$	3 m.s^{-1}
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}
$\eta_c =$	0.75



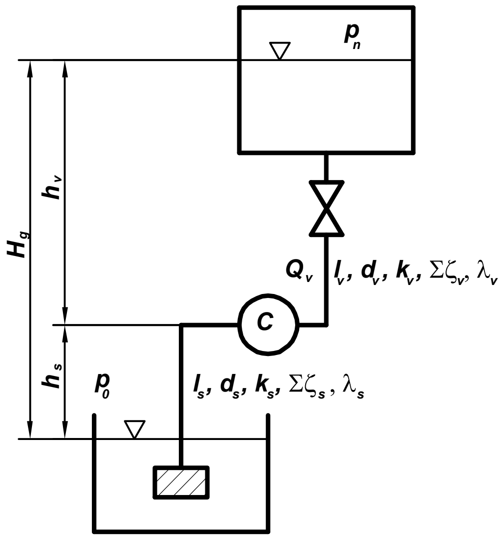
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.0085
P = ?	kW	4.500
Y_d = ?	J.kg^{-1}	529.412

Příklad 13.3.4

Stanovte hydraulický výkon P a příkon P_p pro potrubní systém, v němž se má dopravovat daný průtok vody Q_v z otevřené nádrže do horní tlakové nádrže, ve které je přetlak p_N. Jsou dány rozměry sacího a výtlačného potrubí potrubí, místní ztráty, drsnosti potrubí a účinnost čerpadla.

Zadáno:

$Q_v =$	500 dm^3min^{-1}
$p_N =$	0.12 MPa
$H_g =$	60 m
$l_s =$	8 m
$d_s =$	80 mm
$\sum\zeta_s =$	6
$k_s =$	0.08 mm
$l_v =$	57 m
$d_v =$	60 mm
$\sum\zeta_v =$	20
$k_v =$	0.06 mm
$\eta_c =$	70 %



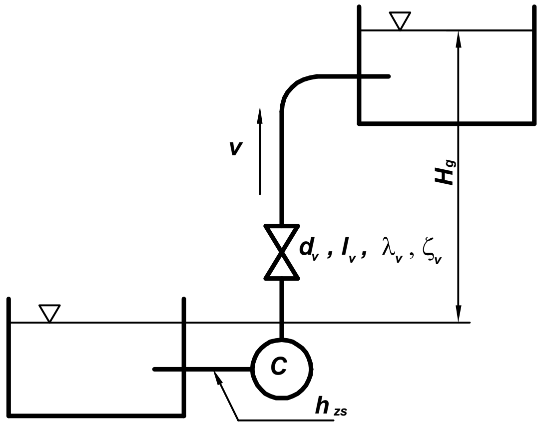
Vypočtěte:		Výsledky:
$v_s = ?$	$m.s^{-1}$	1.6579
$v_v = ?$	$m.s^{-1}$	2.9473
$\lambda_s = ?$		0.0205
$\lambda_v = ?$		0.0199
$h_{zs} = ?$	m	1.128
$h_{zv} = ?$	m	17.225
$Y_d = ?$	$J.kg^{-1}$	888.643
$P = ?$	kW	7.405
$P_p = ?$	kW	10.579

Příklad 13.3.5

Čerpadlo přečerpává vodu ze spodní nádrže do horní s hladinou ve výšce H_g. Parametry výtlačného potrubí jsou dány, ztráty v sacím potrubí jsou zadány pomocí ztrátové výšky h_{zs}. Účinnost čerpadla je η_c. Určete ztráty ve výtlačném potrubí h_{zv}, skutečnou měrnou energii Y_d, příkon čerpadla P_p a objemový průtok Q_v.

Zadáno:

$H_g =$	50 m
$l_v =$	400 m
$d_v =$	100 mm
$v_v =$	3 m.s^{-1}
$h_{zs} =$	1.1 m
$\zeta_v =$	8
$\lambda_v =$	0.038
$\eta_c =$	0.76



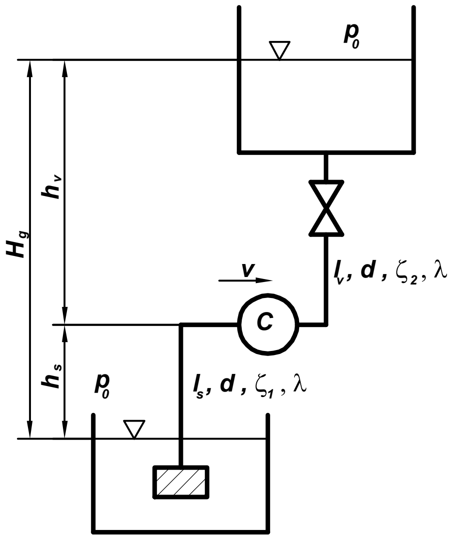
Vypočtěte:		Výsledky:
$h_{zv} =$?	m	73.394
$Y_d =$?	J.kg^{-1}	1 221.286
$P_p =$?	W	37 924.14
$Q_v =$?	m^3.s^{-1}	0.0236

Příklad 13.3.6

Čerpadlo přečerpává vodu ze spodní nádrže do horní potrubím, jehož parametry jsou dány. Průměr sacího a výtlačného potrubí je stejný. Určete ztráty v sacím a výtlačném potrubí h_{zs} a h_{zv}, skutečnou měrnou energii odstředivého čerpadla Y_d a výkon čerpadla P.

Zadáno:

$v =$	4 m.s^{-1}
$d =$	0.5 m
$l_s =$	6 m
$l_v =$	800 m
$h_s =$	3 m
$h_v =$	300 m
$\zeta_1 =$	5
$\zeta_2 =$	2
$\lambda =$	0.025

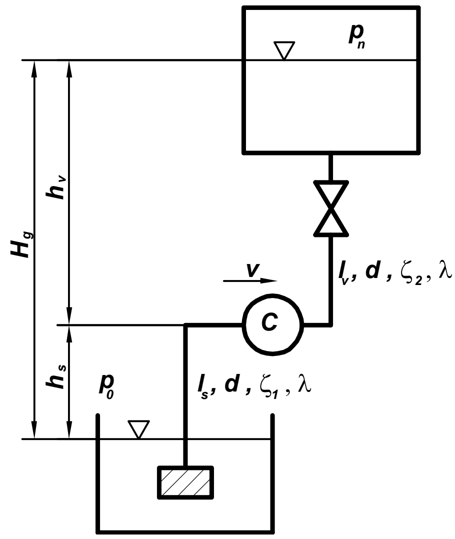


Vypočtěte:		Výsledky:
$h_{zs} =$?	m	4.32
$h_{zv} =$?	m	34.25
$Y_d =$?	J.kg^{-1}	3 350.80
$P =$?	kW	2 631.7

Příklad 13.3.7

Čerpadlo přečerpává vodu ze spodní nádrže do horní, ve které je tlak p_N. Sací a výtlačné potrubí mají stejný průměr d i součinitel tření λ. V potrubí proudí voda rychlostí v. Určete ztrátovou výšku v sacím a výtlačném potrubí h_{zs} a h_{zv}, objemový průtok Q_v, skutečnou měrnou energii odstředivého čerpadla Y_d, výkon čerpadla P a tlak na výstupu z čerpadla p_v.

Zadáno:		
$v =$	5 m.s^{-1}	
$p_N =$	200000 Pa abs.tl.	
$l_s =$	6 m	
$l_v =$	100 m	
$h_s =$	3 m	
$h_v =$	20 m	
$d =$	50 mm	
$\lambda =$	0.03	
$\zeta_1 =$	4	
$\zeta_2 =$	3	
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}	

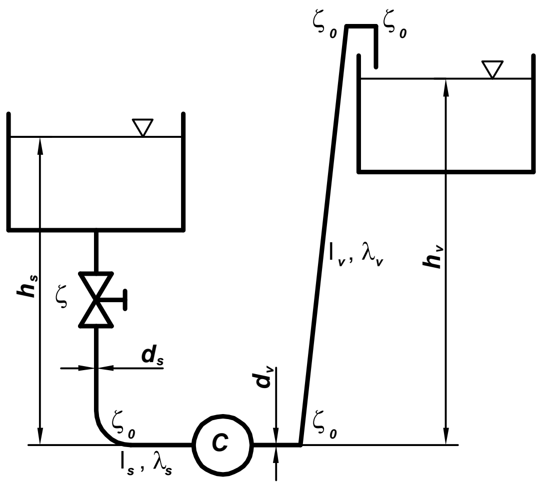


Vypočtěte:		Výsledky:
$h_{zs} = ?$		9.684
$h_{zv} = ?$	m	80.275
$Y_d = ?$	J.kg^{-1}	1 208.128
$P = ?$	W	11 839.65
$Q_V = ?$	m^3.s^{-1}	0.0098
$p_v = ?$	Pa	1 171 198

Příklad 13.3.8

Čerpadlo s negativní sací výškou přečerpává vodu ze spodní nádrže do horní potrubím se zadanými parametry. Určete ztrátové výšky h_{zs} a h_{zv}, skutečnou měrnou energii Y_d a výkon čerpadla P.

Zadáno:	
$h_s =$	-3 m
$h_v =$	12 m
$l_s =$	3 m
$l_v =$	26 m
$d_s =$	100 mm
$d_v =$	40 mm
$v_v =$	2 m.s^{-1}
$\lambda_s = \lambda_v =$	0.03
$\zeta =$	2
$\zeta_0 =$	0.3



Vypočtěte:		Výsledky:
$h_{zs} = ?$	m	0.0167
$h_{zv} = ?$	m	4.159
$Y_d = ?$	J.kg^{-1}	129.25
$P = ?$	W	324.841

Příklad 13.3.9

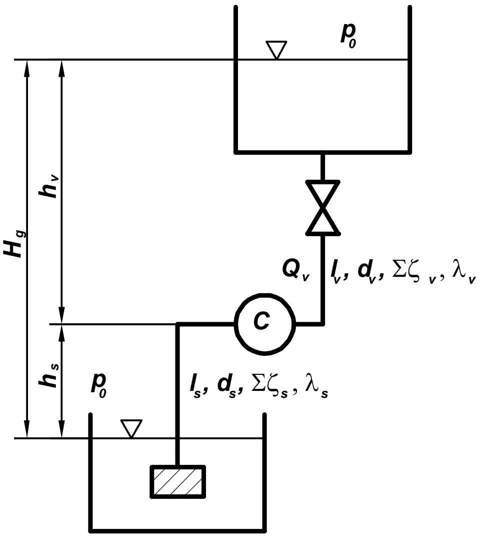
Odstředivé čerpadlo čerpá vodu ze spodní nádrže do horní, přičemž výškový rozdíl hladin je H_g. Obě nádrže jsou otevřené, na hladinách je atmosférický tlak. Parametry sacího i výtlačného potrubí jsou zadány. Charakteristika daného čerpadla byla určena měřením a je popsána rovnicí

$$Y_{s\check{c}} = 130 - \frac{10^3}{3} Q_v - \frac{10^6}{3} Q_v^2$$

Najděte pracovní bod čerpadla, tj. stanovte parametry systému Q_v a Y_d. Tento bod leží v průsečíku obou charakteristik. Úlohu řešte graficky a početně.

Zadáno:	
d_s =	100 mm
l_s =	10 m
λ_s =	0.025
$\sum \zeta_s$ =	2
d_v =	75 mm
l_v =	30 m
λ_v =	0.027
$\sum \zeta_v$ =	12
H_g =	8.15 m

Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.00707
Y_d = ?	$J.kg^{-1}$	110.997
P = ?	W	784.860



Měrná energie potrubí definovaná na základě energetické bilance systému je dána následujícím vztahem:

$$Y_{d(p)} = g H_g + g(h_{zs} + h_{zv}) = g H_g + \left(\lambda_s \cdot \frac{l_s}{d_s} + \sum \varsigma_s\right)\frac{v_s^2}{2} + \left(\lambda_v \cdot \frac{l_v}{d_v} + \sum \varsigma_v\right) \cdot \frac{v_v^2}{2}$$

Rychlosti proudění vody v sacím a výtlačném potrubí se stanoví pomocí průtoku

$$v_s = \frac{Q_v}{S_s}, \quad v_v = \frac{Q_v}{S_v}.$$

Po dosazení do rovnice pro měrnou energii :

$$Y_{d(p)} = g H_g + \left(\lambda_s \cdot \frac{l_s}{d_s} + \sum \varsigma_s\right) \cdot \frac{16 Q_v^2}{\pi^2 \cdot d_s^4 \cdot 2} + \left(\lambda_v \cdot \frac{l_v}{d_v} + \sum \varsigma_v\right) \cdot \frac{16 Q_v^2}{\pi^2 \cdot d_v^4 \cdot 2}.$$

Po úpravě

$$Y_{d(p)} = g H_g + \underbrace{\left[\left(\lambda_s \cdot \frac{l_s}{d_s} + \sum \varsigma_s\right) \cdot \frac{8}{\pi^2 \cdot d_s^4} + \left(\lambda_v \cdot \frac{l_v}{d_v} + \sum \varsigma_v\right) \cdot \frac{8}{\pi^2 \cdot d_v^4}\right]}_{k} \cdot Q_v^2$$

kde všechny veličiny v závorce jsou zadány a výraz v závorce odpovídá konstantě k v rovnici pro charakteristiku potrubí

$$Y_{d(p)} = g \cdot h_g + k \cdot Q_v^2 .$$

Po číselném vyjádření je rovnice měrné energie potrubí v následujícím výsledném tvaru.

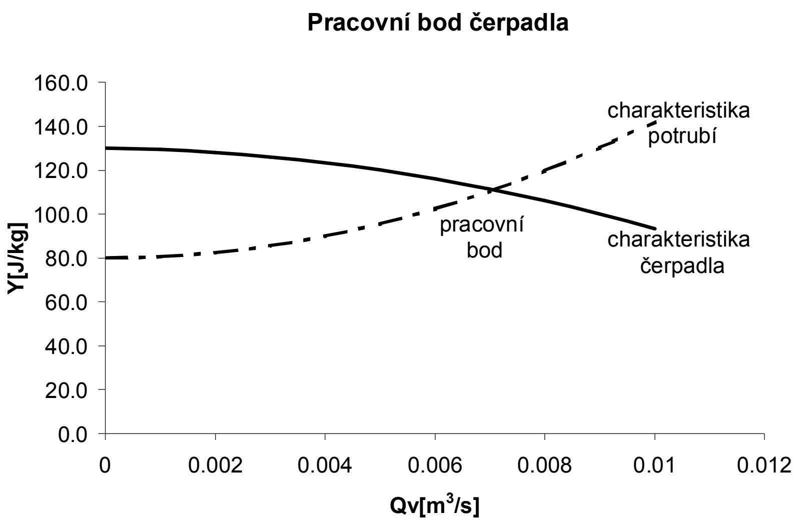
$$Y_{d(p)} = 79{,}952 + 620565{,}981 \cdot Q_v^2$$

Rovnice měrné energie čerpadla je dána jako

$$Y_{d(\check{c})} = 130 - \frac{10^3}{3} \cdot Q_v - \frac{10^6}{3} \cdot Q_v^2$$

Grafické řešení lze provést např. v programu Excel. V závislosti na průtoku se vyčíslí měrná energie potrubí i čerpadla. Z grafického řešení se určí průsečík obou charakteristik, který je hledaným bodem.

Q_v	$Y_{d(p)}$	$Y_{d(c)}$
0.001	80.572	129.333
0.002	82.434	128.000
0.003	85.537	126.000
0.004	89.881	123.333
0.005	95.466	120.000
0.006	102.292	116.000
0.007	110.359	111.333
0.008	119.668	106.000
0.009	130.217	100.000
0.01	142.008	93.333



Hodnotu průtoku Q_v lze také určit početně. Pracovní bod je společným bodem obou křivek. V tomto bodě je energie dodaná čerpadlem kapalině stejná jako energie potřebná pro dopravu kapaliny potrubím.

$$Y_{d(p)} = Y_{d(\check{c})}$$

$$79{,}952 + 620565{,}981 \cdot Q_v^2 = 130 - \frac{10^3}{3} \cdot Q_v - \frac{10^6}{3} \cdot Q_v^2$$

$$953899{,}314 \cdot Q_v^{\ 2} + \frac{10^3}{3} \cdot Q_v - 50{,}048 = 0$$

Řešením kvadratické rovnice se určí hodnota Q_v v pracovním bodě. Vypočtený objemový průtok se dosadí např. do rovnice pro měrnou energii čerpadla

$$Y_{d(\check{c})} = 130 - \frac{10^3}{3} \cdot Q_v - \frac{10^6}{3} \cdot Q_v^2$$

a vypočte se skutečná měrná energie čerpadla $Y_{d(\check{c})}$. Hydraulický výkon čerpadla je dán vztahem

$$P = \rho \, Q_v Y_{d(\check{c})}$$

14. Neustálené proudění v potrubí

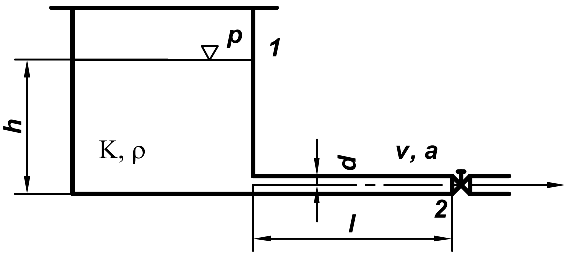
14.1. Bernoulliho rovnice pro neustálené proudění nestlačitelné kapaliny

V nejjednodušším případě neustáleného proudění, kdy se předpokládají malé změny rychlosti a tedy i tlaku, lze kapalinu považovat za nestlačitelnou ($\rho = konst,\ K \to \infty$) a potrubí za tuhé ($E \to \infty$). Pak rychlost proudění je jen funkcí času $v = v(t)$.

Bernoulliho rovnice pro neustálené proudění nestlačitelné kapaliny v tuhém potrubí je

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh + al = konst$$

kde $a = \frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$ je zrychlení sloupce kapaliny o délce l. Poslední člen představuje měrnou energii potřebnou k urychlení sloupce kapaliny.



Pro průřezy 1 v nádrži a 2 na konci potrubí, jímž protéká skutečná kapalina nestacionárně, platí Bernoulliho rovnice

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gh = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v^2}{2} + al + gh_z$$

Rovnice kontinuity $S.v = konst.$ je doplněna rovnicí $S.a = konst$. Pro potrubí složené z n úseků o různých průřezech se určí měrná energie pro urychlení ze vztahu

$$al = \sum_{k=1}^{n} a_k l_k = a_1\left(l_1 + l_2\frac{S_1}{S_2} + \ldots + l_n\frac{S_1}{S_n}\right) = a_1 S_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{S_k}$$

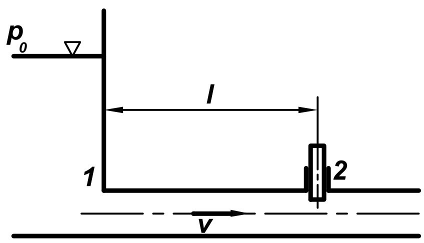
Příklad 14.1.1

Určete zvýšení tlaku $\Delta p = p_2 - p_1$ při náhlém uzavření ventilu v potrubí o délce l. Uzavírání proběhne za čas t_u. Počáteční rychlost vody je v. Předpokládá se nestlačitelná kapalina a tuhé potrubí.

Zadáno:

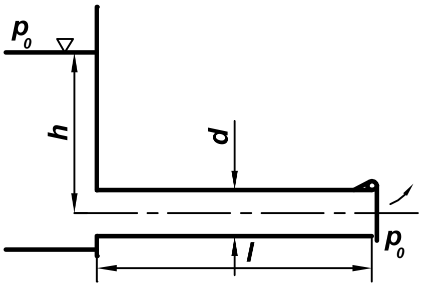
l =	2000	m
t_u =	1	s
v =	1	m.s^{-1}
ρ =	1000	kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
a = ?	m.s^{-2}	- 1.00000
Δp = ?	Pa	2 000 000



14.2. Rozběh proudu v potrubí při výtoku z nádoby

Doba rozběhu sloupce kapaliny o délce l v potrubí při jeho otevření se určí ze vztahu $t = \frac{\varphi^2 l}{v_s} \ln \frac{v_s + v}{v_s - v}$, kde $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$ je rychlostní součinitel pro potrubí, $v(t)$ je rychlost v čase t a v_s je ustálená rychlost. Rychlost $v(t)$ se vyjádří z Bernoulliho rovnice



$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh_2 + gh_z + l\frac{dv}{dt}\text{, resp.}$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v^2 - v_1^2}{2} + g(h_2 - h_1) + gh_z \right) \frac{1}{l}$$

Explicitní řešení lze odvodit, případně najít ve sbírkách řešených integrálů ve tvaru

$$v = v_s \frac{e^\tau - 1}{e^\tau + 1}$$

kde $\tau = \frac{t}{t_0} = \frac{v_s t}{\varphi^2 l}$, $t_0 = \frac{\varphi^2 l}{v_s}$ je poměrná doba. Zrychlení sloupce kapaliny v potrubí je pak dáno vztahem $a = \frac{2v_s}{t_0} \frac{e^\tau}{\left(e^\tau + 1\right)^2}$. Časová konstanta T potrubí je $T = 2t_0 = \frac{v_s l}{gH}$,

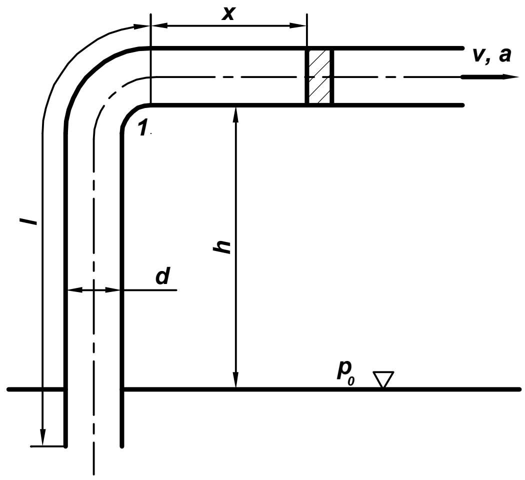
kde $gH = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2)$.

Diferenciální rovnici lze také řešit numericky pomocí univerzálních matematických software, jako DERIVE, MathCad, MathLab. Výhodou je větší univerzálnost těchto software, rychlé grafické vyhodnocení. Výsledky je třeba vždy kontrolovat alespoň pro zjednodušené řešení (např. ustálené proudění, kdy časové derivace jsou rovny nule).

Příklad 14.2.1

V potrubí se pohybuje píst vpravo od průřezu 1 s konstantním zrychlením a. Stanovte, za jaký čas a v jaké vzdálenosti $x_{\max}$ přestane kapalina sledovat pohyb pístu, tj. dojde k odtržení proudu od pístu při poklesu statického tlaku na tlak nasycených par vody p_n při dané teplotě t_n. Na počátku děje je při $x = 0$ rychlost $v = 0$ a potrubí o délce l je zaplněno vodou. Měrná hmotnost vody při tlaku p_n je ρ. Průměr potrubí je d a výška h. Celkový součinitel ztrát je ζ.

Zadáno:		
l =	5 m	
d =	90 mm	
h =	1 m	
p_n =	0.02 MPa	
ρ =	990 kg.m^{-3}	
ζ =	3	
a =	1.5 m.s^{-2}	
Vypočtěte:		Výsledky:
t = ?	s	3.39507
$x_{\max}$ = ?	m	8.64488



Řešení:

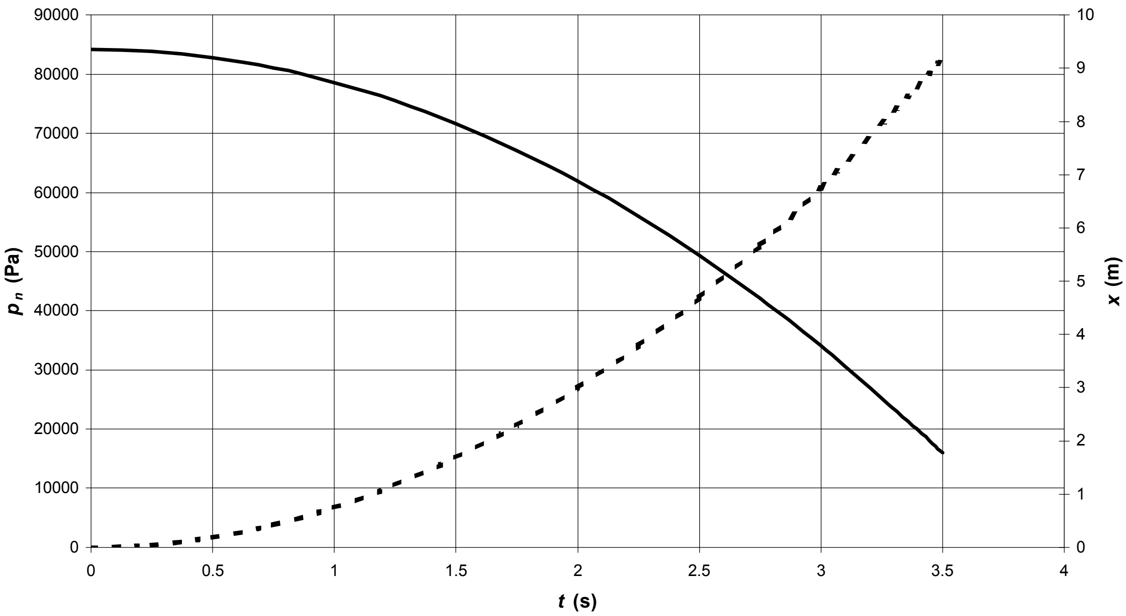
Použije se Bernoulliho rovnice pro nejméně příznivý případ, kdy je tlak před pístem právě roven p_n :

$$\frac{p_0}{\rho} = gh + \frac{p_n}{\rho} + \frac{v^2}{2} + a(l+x) + \zeta\frac{v^2}{2}$$

Za rychlost $v = at$ a dráhu $x = \frac{1}{2}at^2$ se dosadí do předchozí rovnice, získá se závislost

$$p_n = p_0 - \rho\left(gh + \frac{1+\zeta}{2}(at)^2 + a\left(l + \frac{1}{2}at^2\right)\right)$$

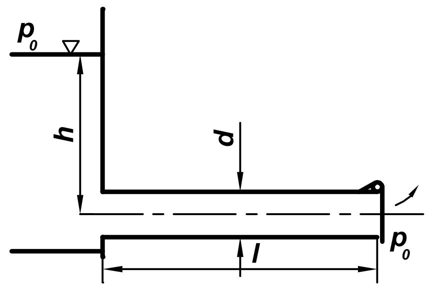
což je kvadratická závislost, z níž se vyjádří jediná neznámá t, pro kterou se také vyjádří dráha. Jednodušší možností je v EXCELu tuto závislost tabelovat a hodnotu času pro určitou hodnotu p_n odečíst, případně v při řešení v tabulce upřesnit iteračně pomocí příkazů Nástroje-Najít řešení.



Příklad 14.2.2

K velké nádobě je připojené vodorovné potrubí konstantního průřezu, naplněné vodou a uzavřené klapkou. Délka potrubí je l, průměr d, součinitel tření λ, výška hladiny v nádrži h. Určete průběh rychlosti $v(t)$ během rozběhu sloupce kapaliny. Za kolik vteřin bude výtoková rychlost rovna 99% rychlosti ustálené. Určete časovou konstantu potrubí.

Zadání:		
l =	5 m	
d =	0.1 m	
λ =	0.023	
h =	1.25 m	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$v = v(t)$	$m.s^{-1}$	
T = ?	s	1.3829

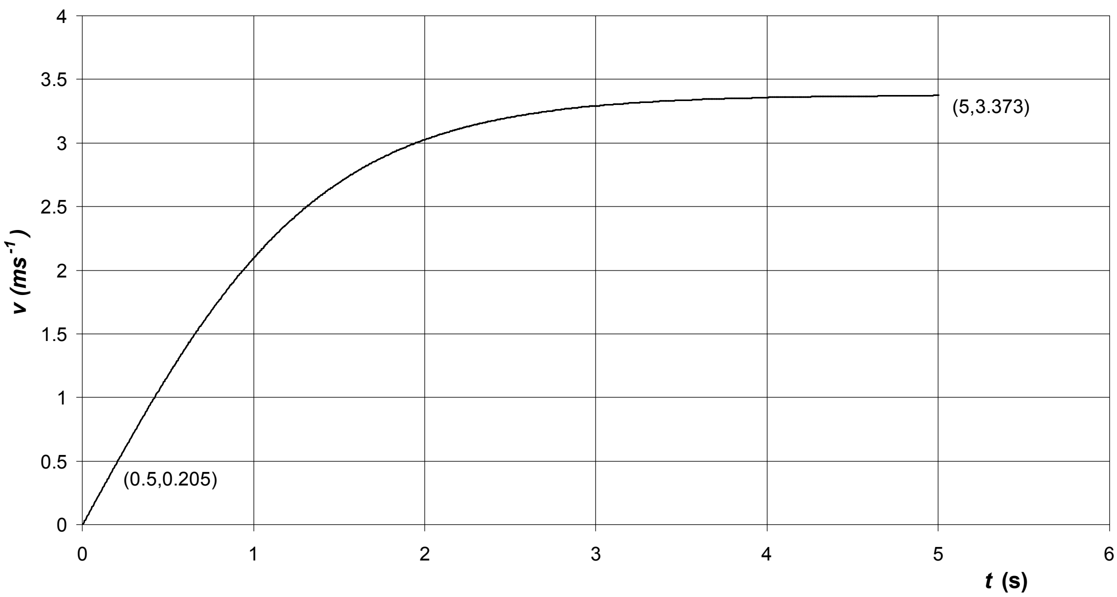


Řešení:
Využije se Bernoulliho rovnice pro neustálené proudění ve tvaru:

$$\frac{p_0}{\rho}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\zeta\frac{v^2}{2}+l\frac{dv}{dt}$$

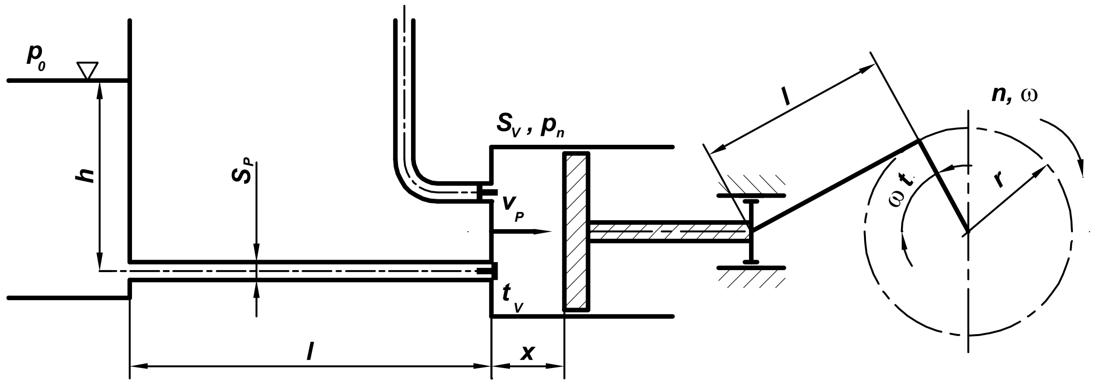
resp. $$\frac{dv}{dt}=\left(gh-\frac{1+\lambda\frac{l}{d}}{2}v^2\right)\frac{1}{l}$$ s počáteční podmínkou $v(0)=0$. Tato rovnice se řeší numericky metodou Runge-Kutta v MathCadu a výsledkem je tabulka rychlosti závislé na čase, přitom její průběh je vyhodnocen graficky. Z grafu lze také odečíst hodnoty potřebné k určení T.

v = f(t)



Příklad 14.2.3

Pístová napáječka čerpá vodu do kotle. Je dána výška h, délka sacího potrubí l, poloměr kliky r, poměr průřezů válce a potrubí S_v / S_p a počet otáček n. Celkový ztrátový součinitel vztažený na rychlost pístu je ζ. Během rovnoměrného otáčení kliky se píst pohybuje nerovnoměrně. Určete periodu děje, minimální tlak $p_{\min}$ a polohu pístu $x_{p\min}$, při které tento tlak nastane. Jaká teplota vody tomu odpovídá? Řešení proveďte pro nekonečně dlouhou ojnici. Předpokládá se, že minimální tlak bude na pístu.



Zadáno:

h =	2 m
l =	1 m
r =	0.5 m
$\dfrac{S_v}{S_p}$ =	5
n =	1 s^{-1}
ζ =	13

Vypočtěte: Výsledky:

T = ?	s	
$p_{\min}$ = ?	Pa	
$x_{p\min}$ = ?	m	
$v = v(t)$	m.s^{-1}	

Řešení:

Závislost tlaku na píst na čase lze určit z Bernoulliho rovnice a rovnice kontinuty

$$\frac{p_0}{\rho}+gh=\frac{p_n}{\rho}+\frac{v_p^2}{2}(1+\zeta)+a_p x+al$$

$$aS_p=a_p S_v$$

Sloučením obou rovnic se získá vztah pro vyjádření tlaku před pístem

$$\frac{p_n}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+gh-\left(\frac{v_p^2}{2}(1+\zeta)+a_p\left(x+\frac{S_v}{S_p}l\right)\right)$$

$$\frac{p_n}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+gh-e_a$$

Ze schématu lze odvodit vztahy pro dráhu, rychlost a zrychlení

$$x=r(1-\cos\omega t),\; v_p=\frac{dx}{dt}=r\omega\sin\omega t\,,\; a_p=\frac{dv_p}{dt}=r\omega^2\cos\omega t$$

Nejnepříznivější stav je určen minimální hodnotou tlaku před pístem, tj. jeho nulovou derivací

$$\frac{dp_n}{dt}=-\left((1+\zeta)v_p a_p+\frac{da_p}{dt}\left(x+\frac{S_v}{S_p}l\right)+a_p v_p\right)=$$

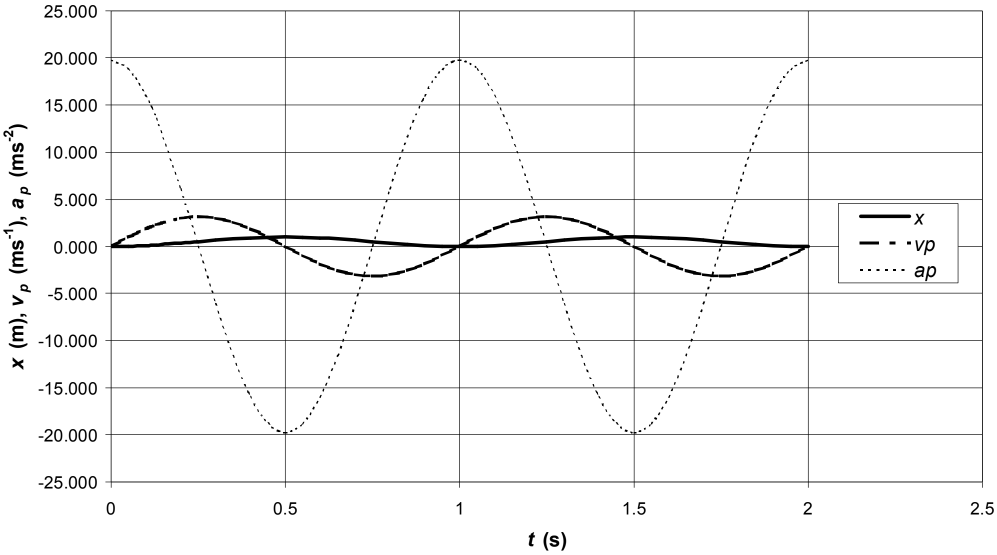
$$=-\left((1+\zeta)v_p a_p-r\omega^3\sin(\omega t)\left(x+\frac{S_v}{S_p}l\right)+a_p v_p\right)$$

Provede se vyhodnocení dráhy, rychlosti, zrychlení, tlaku a jeho derivace tabelací v EXCELu po dobu dvou period (perioda $T=\dfrac{1}{n}$). Všechny potřebné informace se vyčtou z tabulky nebo grafu, přitom hodnota nulové derivace tlaku se dá upřesnit interpolací při použití příkazu Nástroje, Hledat řešení.

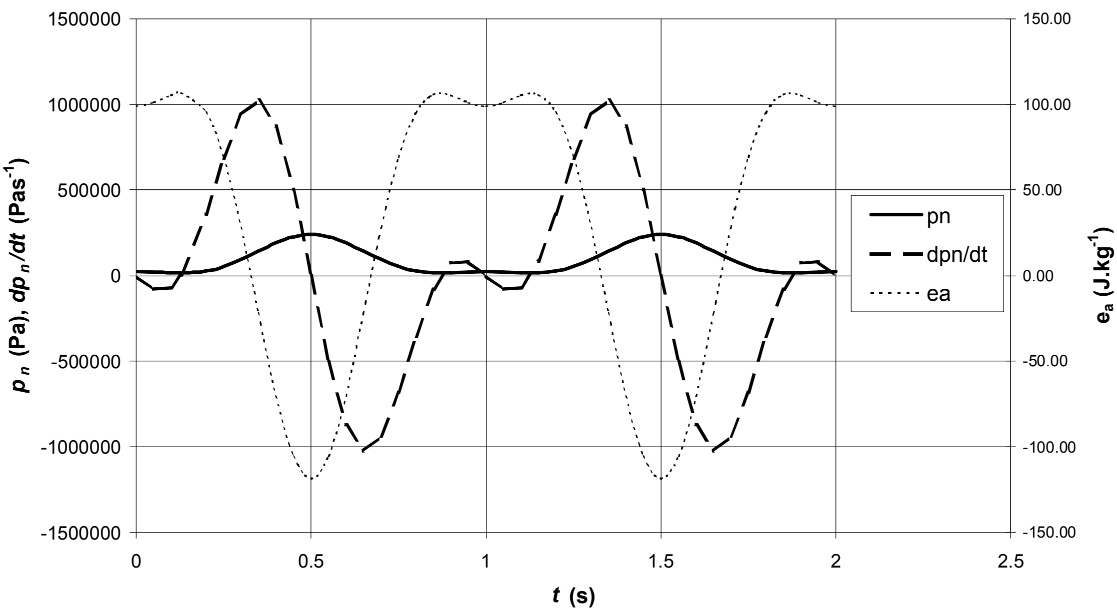
T	x	v_p	a_p	e_a	p_n	$\frac{dp_n}{dt}$
0	0.000	0.000	19.739	98.70	22249	0
0.1	0.095	1.847	15.969	105.24	15704	-70869
0.129354	0.156	2.281	13.571	106.41	14538	0
0.2	0.345	2.988	6.100	95.10	25849	357151
0.3	0.655	2.988	-6.100	28.00	92946	940352
0.4	0.905	1.847	-15.969	-70.42	191367	872770
0.5	1.000	0.000	-19.739	-118.44	239380	0
0.6	0.905	-1.847	-15.969	-70.42	191367	-872770
0.7	0.655	-2.988	-6.100	28.00	92946	-940352
0.8	0.345	-2.988	6.100	95.10	25849	-357151
0.9	0.095	-1.847	15.969	105.24	15704	70869
1	0.000	0.000	19.739	98.70	22249	0

atd.

Dráha, rychlost a zrychlení jako funkce času



Měrná energie a tlak na píst jako funkce času



Minimální tlak je skutečně nižší než tlak nasycených par. Tento problém se dá odstranit zvětšením h.

14.3. Hydraulický ráz

Hydraulický ráz je neustálené proudění stlačitelné tekutiny, charakterizované periodicky se opakujícími tlakovými a průtokovými pulzacemi jako odezva na dynamickou (časově závislou) změnu, jako například náhlé uzavření potrubí. U kapaliny bez vnitřního tření nedochází k útlumu a pulzace by se neustále opakovaly. Ve skutečných kapalinách se vnitřním třením pulzace utlumí až prakticky zaniknou. K hydraulickému rázu může dojít při přerušení provozu hydraulického systému nebo při změně provozních podmínek (uzavírání potrubí, výpadek čerpadla, přerušení dodávky el. proudu).

Předpokládejme náhlé uzavření armatury, čímž se okamžitě zastaví výtok kapaliny. Při zastavení kapaliny dochází k přeměně kinetické energie na deformační práci spojenou se stlačením sloupce kapaliny. Stlačená kapalina má větší tlak o hodnotu Δp. Tlaková vlna se šíří od místa vzniku rázu rychlostí zvuku a a za čas $t = \frac{l}{a}$ proběhne celý úsek potrubí až k nádrži, za čas $T = 2t = \frac{2l}{a}$ se vrátí do místa svého vzniku. Doba T se označuje jako doba běhu vlny.

Pokud doba uzavírání armatury $t_z \le T$, dojde k totálnímu hydraulickému rázu, při němž se veškerá kinetická energie přemění na deformační práci. Změna tlaku Δp při totálním hydraulickém rázu ($t_z \le T$) je určena Žukovského výrazem:

$$\Delta p = \rho\, a \Delta v$$

kde a je skutečná rychlost zvuku určená vztahem

$$a = \kappa . a_t = \kappa \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

a κ je součinitel zahrnující vliv pružných deformací potrubí, který se určí ze vztahů:

tenkostěnné potrubí $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{Kd}{Es}}}$

tlustostěnné potrubí $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{E}{K}\dfrac{D^2 + d^2}{D^2 - d^2}}}$ nebo $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{E}{K}\dfrac{2.6D^2 + 1.2d^2}{D^2 - d^2}}}$

kde K (Pa) modul objemové pružnosti kapaliny

E (Pa) modul pružnosti materiálu potrubí

d (m) průměr potrubí

s (m) tloušťka stěn potrubí

$D = d + 2s$

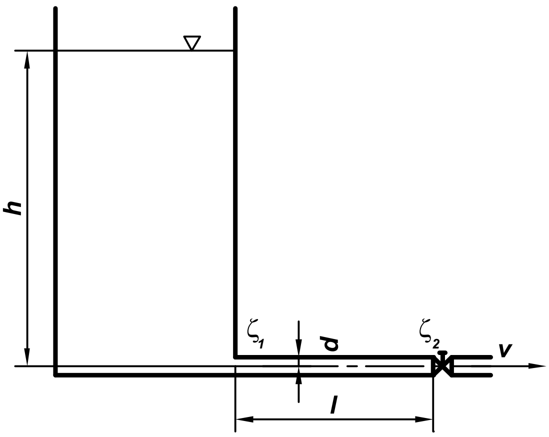
Je-li časová změna $t_z \rangle T$, pak nastává tzv. částečný hydraulický ráz. Při lineární změně rychlosti kapaliny v čase je změna tlaku určena vztahem $\Delta p_č = \Delta p \dfrac{T}{t_z}$. Stoupnutí tlaku je tedy menší než v případě totálního hydraulického rázu.

Příklad 14.3.1

Vypočtěte průtok Q_v, celkový ztrátový součinitel ζ pro potrubí délky l a průměru d a rychlostní součinitel φ. Určete potřebný spád h. Stanovte zvýšení tlaku Δp před ventilem při jeho náhlém uzavření. Uvažujte pružné potrubí, součinitel pružnosti potrubí κ, součinitel tření λ, ztrátový součinitel na vtoku do potrubí ζ_1, ztrátový součinitel ventilu ζ_2. Vypočtěte dobu běhu tlakové vlny *T*. Stanovte maximální dobu uzavírání ventilu $t_{z\max}$ při které ještě dojde k totálnímu rázu. Uvažujte modul objemové pružnosti vody K. Voda proudí v potrubí rychlostí v.

Zadáno:

v =	4	$m.s^{-1}$
l =	4000	m
d =	300	mm
κ =	0.9	
λ =	0.024	
ζ_1 =	0.5	
ζ_2 =	1.2	
K =	2E+09	Pa
ρ =	1000	$kg.m^{-3}$



Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.28274
ζ = ?		321.700
h = ?	m	263.160
v_t = ?	$m.s^{-1}$	71.855
φ = ?		0.056
a_t = ?	$m.s^{-1}$	1 414.214
Δp = ?	Pa	5 656 856.0
T = ?	s	6.285
$t_{z\max}$ = ?	s	6.285

Řešení:

V prvé části úlohy je řešen hydraulický výpočet potrubí:

$$Q_v = \frac{\pi.d^2}{4}.v\,,$$

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \lambda\frac{l}{d}\,,\quad h = \frac{v^2}{2g}(1+\zeta)$$

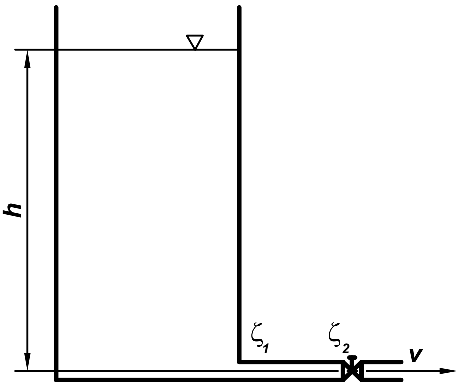
$$v_t = \sqrt{2.g.h}\,,\quad \varphi = \frac{v}{v_t}$$

Stoupnutí tlaku při totálním hydraulickém rázu ($t_z \le T$) je určeno Žukovského výrazem $\Delta p = \rho a \Delta v$, kde a je skutečná rychlost šíření tlakové vlny v kapalině, definovaná vztahem $a = \kappa\sqrt{\frac{K}{\rho}}$. Součinitel κ zahrnuje vliv pružných deformací potrubí. Doba běhu vlny je určena vztahem $T = \frac{2l}{a}$, kde l je zadaná délka potrubí.

Příklad 14.3.2

Stanovte výtokovou rychlost v z nádrže, ve které je hladina vody ve výšce h. Vypočtěte teoretickou výtokovou rychlost v_t a rychlostní součinitel φ. Určete zvýšení tlaku Δp při totálním hydraulickém rázu. Ztrátový součinitel na vtoku do potrubí je ζ_1, ztrátový součinitel ventilu je ζ_2 a skutečná rychlost zvuku a_s.

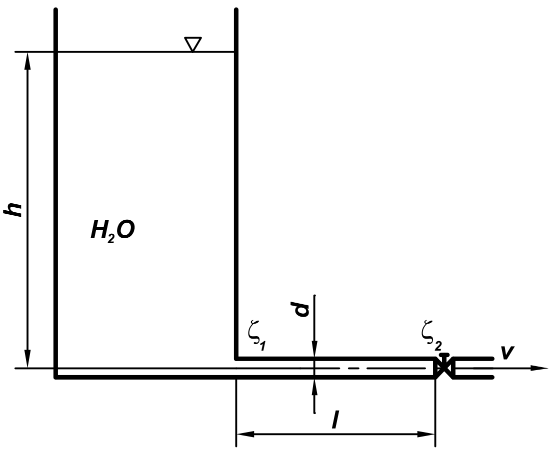
Zadáno:		
h =	4 m	
ζ_1 =	0.5	
ζ_2 =	16	
a_s =	1200 m.s^{-1}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	2.118
v_t = ?	m.s^{-1}	8.859
φ = ?		0.239
Δp = ?	MPa	002.54



Příklad 14.3.3

Vypočtěte teoretickou rychlost v_t a skutečnou výtokovou rychlost v. Určete průtok Q_v. Vypočítejte stoupnutí tlaku Δp při náhlém uzavření armatury na konci potrubí. Vypočtěte rychlostní součinitel φ. Výška hladiny v nádrži je h a připojené potrubí je délky *l* a průměru d. Dále jsou známy ztrátové součinitele vtoku ζ_1 a ventilu ζ_2, třecí součinitel λ. Skutečná rychlost zvuku je a_s.

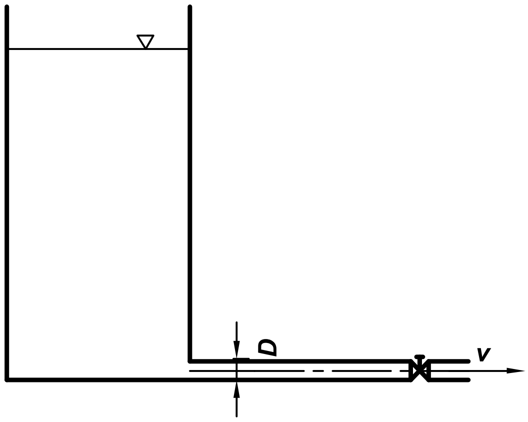
Zadáno:		
h =	20 m	
l =	400 m	
d =	0.1 m	
a_s =	1100 m.s^{-1}	
ζ_1 =	5	
ζ_2 =	5	
λ =	0.025	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
v_t = ?	m.s^{-1}	19.809
v = ?	m.s-1	1.880
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.01477
Δp = ?	Pa	2 068 000.0
φ = ?		0.09491
T = ?		0.72727



Příklad 14.3.4

Určete zvýšení tlaku Δp při totálním hydraulickém rázu při náhlém uzavření ventilu na potrubí. Uvažujte pružné tenkostěnné potrubí, jehož vnější průměr je D a vnitřní průměr d. Modul objemové pružnosti vody je K. Voda proudí v potrubí rychlostí v.

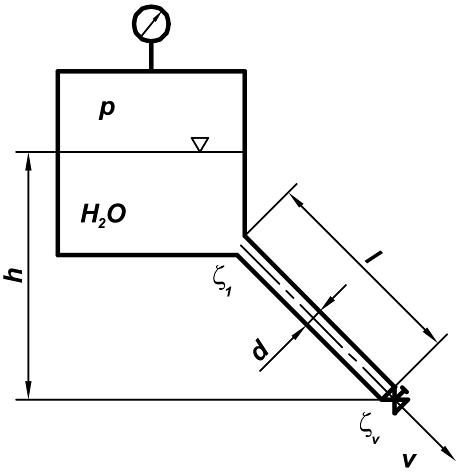
Zadáno:		
D =	0.2 m	
d =	0.19 m	
v =	2 ms^{-1}	
K =	2.3E+09 Pa	
E =	2E+11 Pa	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
κ = ?		0.834
a = ?	m.s^{-1}	1264.824
Δp = ?	Pa	2 529 648.00



Příklad 14.3.5

K uzavřené nádrži je připojeno potrubí délky l a průměru d, ve kterém proudí voda rychlostí v. Stanovte tlak p na hladině ve výšce h, rychlostní součinitel φ a objemový průtok Q_V. Dále určete zvýšení tlaku Δp v důsledku hydraulického rázu při náhlém snížení průtokové rychlosti o Δv a vypočtěte dobu běhu vlny T.

Zadáno:		
v =	2 m.s^{-1}	
l =	15 m	
d =	0.4 m	
h =	2 m	
Δv =	1.5 m.s^{-1}	
ζ_1 =	1	
ζ_V =	12.5	
λ =	0.022	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
κ =	0.92	
K =	2.0E+09 Pa	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
p = ?	Pa	111 030.0
φ = ?		0.25545
Q_V = ?	m^3.s^{-1}	0.25133
a = ?	m.s^{-1}	1 301.076
Δp = ?	Pa	1 951 614.0
T = ?	s	0.02306



15. Věta o změně hybnosti

Věta o změně hybnosti se v inženýrské praxi s výhodou používá v těch případech, kdy je sledován jen výsledný silový účinek tekutiny na stěnu pevného tělesa. Síla $\mathbf{F}$ vyvolaná proudící kapalinou (akce) je rovna změně průtokové hybnosti podle vztahu

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_h = \frac{m}{\Delta t}\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\right) = Q_m\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\right) = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$$

kde $\mathbf{H} = Q_m \cdot \mathbf{v}$ je průtoková hybnost. To znamená, že síla proudu tekutiny působící na kontrolní oblast se rovná změně hybnostního toku protékajícího kontrolní oblastí, která je volena tak, aby obepínala těleso nebo plochu, na něž se vyšetřuje silový účinek. Tekutina do této oblasti vstupuje rychlostí $\mathbf{v}_1$ a vystupuje z ní rychlostí $\mathbf{v}_2$. Směr vektoru síly $\mathbf{F}_h$ je určen směrem vektoru $\Delta\mathbf{v}$, který je vektorovým rozdílem přitékající a odtékající rychlosti. Pro výpočet složky síly ve směru s platí hybnostní věta

$$\mathbf{F}_{hs} = Q_m\left(\mathbf{v}_{2s} - \mathbf{v}_{1s}\right)$$

kde rychlosti $\mathbf{v}_{1s}$ a $\mathbf{v}_{2s}$ jsou složky rychlosti $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ do směru s.

15.1. Deska v klidu

Paprsek kapaliny dopadající kolmo na rovinnou desku změní směr proudění. Jestliže paprsek vytéká z trysky vodorovně, po dopadu na desku se změní směr proudění o 90^0, kapalina odtéká ve směru kolmém na směr paprsku a složka vektoru odtékající rychlosti ve směru vodorovném je nulová. Změnou hybnosti se vyvolá síla $\mathbf{F}_h$. Kontrolní objem V se volí tak, aby ve vstupním průřezu proudu kapaliny byla nenarušená rychlost $\mathbf{v}_1$, podobně ve výstupním průřezu musí proud mít směr odtokové rychlosti shodný s povrchem desky. Rovnice pro výpočet účinků paprsků na stojící desku, kolmou na směr paprsku má tvar

$$\mathbf{F}_h = \rho \cdot Q_v\left(\mathbf{v} - 0\right) = \rho \cdot S \cdot v^2$$

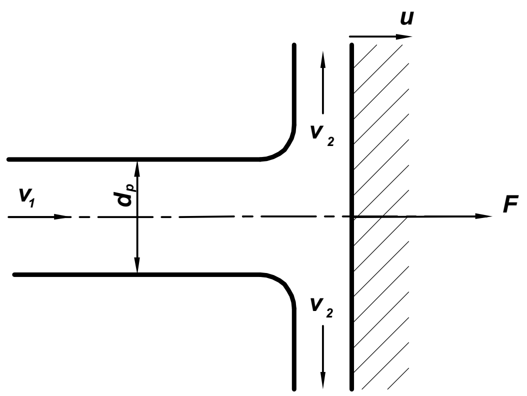
Příklad 15.1.1

Vypočítejte silový účinek vodního proudu, který vytéká z trysky rychlostí v_1 a dopadá na stojící desku. Je dán průměr vodního proudu d_p, odtoková rychlost z desky v_2 je ve směru jejího povrchu.

<u>Zadáno:</u>

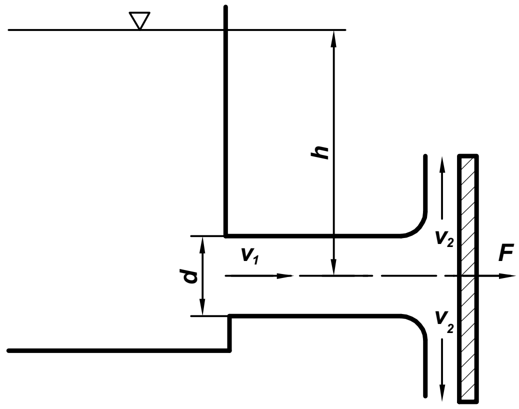
d_p =	110 mm
v_1 =	2 m.s^{-1}
ρ =	1000 kg.m^{-3}

<u>Vypočtěte:</u>		<u>Výsledky:</u>
F = ?	N	38.013
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.01901



Příklad 15.1.2

Otvorem ve stěně rozlehlé nádrže vytéká voda. Stanovte, jakou silou působí vodní proud na stojící velkou desku. Vliv gravitace na vytékající proud zanedbejte. Je dána hloubka otvoru pod hladinou h, průměr otvoru d, součinitel kontrakce ε, a rychlostní součinitel výtokového otvoru φ.

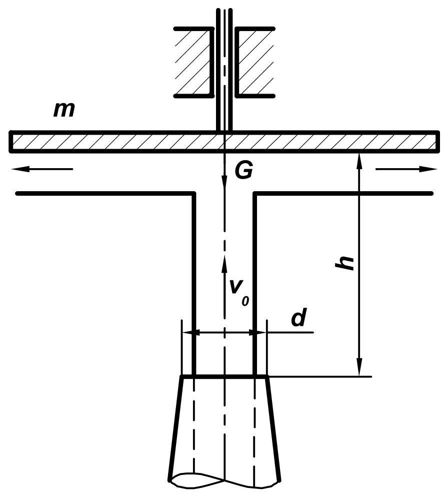


Zadáno:

$d =$	110 mm		
$h =$	20 m		
$\varepsilon =$	0.64		
$\varphi =$	0.97		
Vypočtěte:			Výsledky:
$v_1 = ?$		$m.s^{-1}$	19.215
$S_p = ?$		m^2	0.00608
$F = ?$		N	2 244.835

Příklad 15.1.3

V jaké výšce h nad ústím trysky bude nesena rozlehlá deska o hmotnosti m proudem vody, který vytéká z trysky o průměru d rychlostí v_0. Tření v ložisku zanedbejte. Jakou rychlostí v_y dopadá paprsek na desku? Voda odtéká z desky ve směru jejího povrchu.



Zadáno:

$v_0 =$	6 $m.s^{-1}$		
$d =$	0.05 m		
$m =$	6 kg		
$\rho =$	1000 $kg.m^{-3}$		
Vypočtěte:			Výsledky:
$v_y = ?$		$m.s^{-1}$	4.996
$h = ?$		m	0.56269

Řešení: Hybnostní síla musí být v rovnováze se silou tíhovou, tj. $F_H = G$, přitom paprsek dopadá na desku rychlostí v_y, a tedy

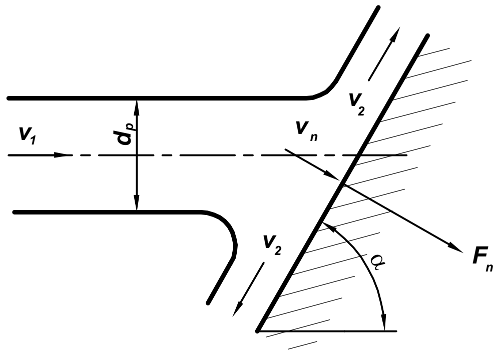
$$\rho \cdot S \cdot v_0 \cdot v_y = m \cdot g \Rightarrow v_y = \frac{m \cdot g}{\rho \cdot S \cdot v_0} = \frac{4 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot \pi \cdot d^2 \cdot v_0}$$

Z Bernoulliho rovnice definované pro ústí trysky a průřez ve výšce h plyne:

$$\frac{v_0^2}{2} + 0 = \frac{v_y^2}{2} + g \cdot h \Rightarrow h = \frac{v_0^2 - v_y^2}{2 \cdot g}$$

Příklad 15.1.4

Vypočítejte silový účinek vodního proudu F_n, který vytéká z trysky rychlostí v_1 a dopadá na stojící desku, skloněnou pod úhlem α. Je dán průměr vodního proudu d_p, odtoková rychlost z desky v_2 je ve směru jejího povrchu. Rovnice pro výpočet účinků paprsků na stojící desku, šikmou na směr paprsku má tvar $F_n = \rho S_P v_1 v_n = \rho \cdot Q_v\, v_1 \sin\alpha$.



Zadáno:

d_p =	110 mm	
v_1 =	2 m.s^{-1}	
α =	45 ^{0}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	

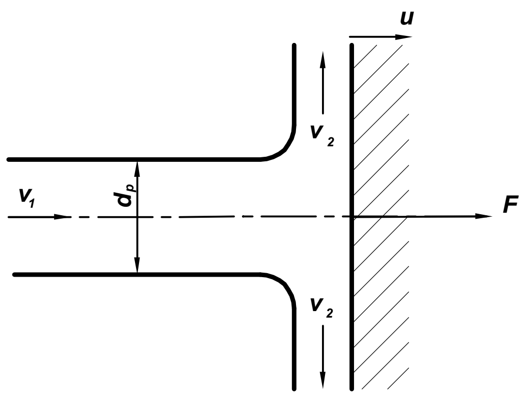
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.01901
F_n = ?	N	26.879

15.2. Pohybující se deska

Na unášenou desku při kolmém dopadu proudu kapaliny působí síla $\mathbf{F}_h = Q_m \Delta\mathbf{v}$, kde relativní rychlost dopadu paprsku na desku je $(v-u)$, pokud $v \rangle u$. Odtoková rychlost má ve směru síly F_h nulovou složku a tedy $\Delta v = (v - u - 0) = v - u$. Hmotnostní průtok kapaliny, který dopadne na desku je $Q_m = \rho S(v-u)$. Silový účinek je tedy $F_h = \rho S(v-u)^2$.

Příklad 15.2.1

Vypočítejte silový účinek vodního proudu, který vytéká z trysky rychlostí v_1 a dopadá na desku pohybující se rychlostí u ve směru vytékajícího paprsku. Je dán průměr vodního proudu d_p, odtoková rychlost z desky v_2 je ve směru jejího povrchu.



Zadáno:

d_p =	110 mm	
v_1 =	17.72 m.s^{-1}	
u =	5 m.s^{-1}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	

Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.12088
F = ?	N	1537.594

15.3. Rotační těleso

Paprsek kapaliny dopadající na rotační plochu ve směru její osy vyvolává sílu $\mathbf{F}_h = Q_m \, \Delta\mathbf{v}$, kde $Q_m = \rho S v_1$ a změna rychlosti $\Delta v = v_1 - v_2 \cos\alpha$. Silový účinek na rotační těleso se tedy vypočítá ze vztahu $F_h = \rho S v_1 (v_1 - v_2 \cos\alpha) = \rho S v_1^2 (1 - \varphi \cos\alpha)$, kde $\varphi \le 1$.

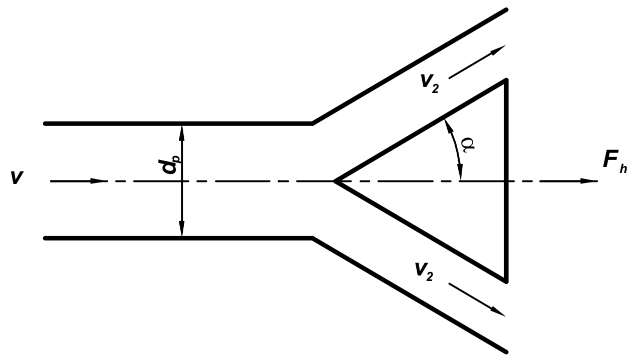
Příklad 15.3.1

Stanovte, jak velkou silou působí paprsek kapaliny o průměru d_p, který vytéká z trysky rychlostí v_1, na pevnou stěnu mající tvar kužele s osou totožnou s osou paprsku. Směr odtokové rychlosti z desky je dán úhlem α.

Zadáno:

d_p =	110 mm	
v_1 =	17.72 m.s^{-1}	
α =	35 ^{O}	
φ =	1	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	

Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.16840
F_h = ?	N	540.113



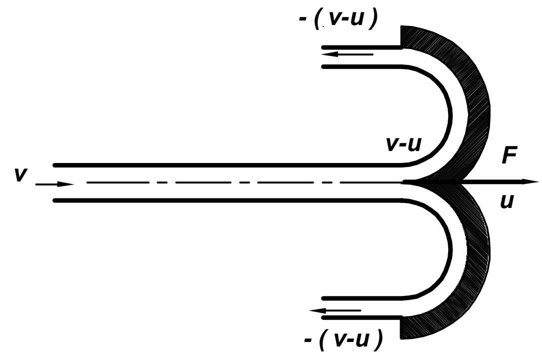
15.4. Peltonovo kolo

Peltonovo kolo se skládá z korečků, na něž dopadá paprsek vody. Na korečku mění proud kapaliny svůj směr a tím vyvolává silový účinek. Pokud se koreček pohybuje unášivou rychlostí u, proud na něj dopadá relativní rychlostí $(v - u)$. V ideálním případě se změní směr proudění o 180^{O}, takže z korečku odtéká relativní rychlostí $-(v - u)$. Změna rychlosti po průtoku korečkem je ve směru síly F_h (směr unášivé rychlosti) určena vztahem $\Delta v = (v - u) - [-(v - u)] = 2(v - u)$. Neuvažují se hydraulické ztráty. Hmotnostní průtok je $Q_m = \rho S v$, kde v je rychlost přitékajícího paprsku. Silový účinek na Peltonovo kolo je tedy $F_h = 2\rho S v (v - u)$.

Příklad 15.4.1

Stanovte, jakou silou F_{h1} působí vodní proud o průměru d_p na stojící lopatku Peltonovy turbíny. Proud dopadá na tuto lopatku rychlostí v. Jaký bude silový účinek na Peltonovo kolo F_{h2}, pokud se bude otáčet otáčkami n. Lopatky jsou na poloměru r.

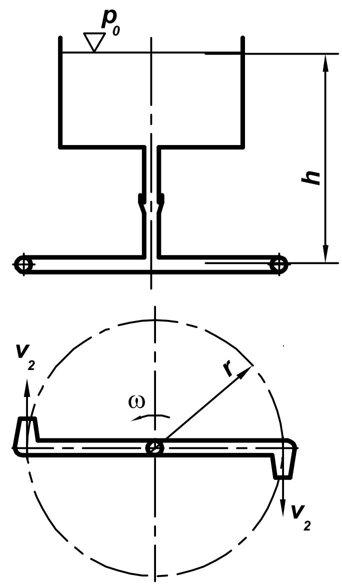
Zadáno:		
d_p =	110 mm	
v =	17.72 m.s^{-1}	
α =	180 ^{O}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
n =	2 s^{-1}	
r =	0.8 m	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F_{h1} = ?	N	5968.067
F_{h2} = ?	N	2 582.19



Příklad 15.4.2

Segnerovo kolo tvoří dvě ohnuté trubky o průměru d, jejichž výtokové průřezy jsou na poloměru r. Výška hladiny nad Segnerovým kolem je h. Vypočtěte kroutící moment působící od vytékající vody na stojící kolo. Ztráty při proudění vody zanedbejte.

Zadáno:		
d =	0.02 m	
r =	0.4 m	
h =	2 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v = ?	m.s^{-1}	6.264
F_h = ?	N	24.654
M = ?	N.m	9.862



15.5. Silový účinek proudu na potrubí

Výsledná síla $\mathbf{F}$, která působí na potrubí, je dána hybnostní silou od změny hybnosti kapaliny $\mathbf{F}_h$, výslednou tlakovou silou $\mathbf{F}_p$, vlastní tíhou potrubí $\mathbf{F}_{gp}$ a kapaliny $\mathbf{F}_{gk}$. Výsledná síla je dána vektorovým součtem sil

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_{h1} - \mathbf{F}_{h2} + \mathbf{F}_{p1} - \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F}_{gp} + \mathbf{F}_{gk}$$

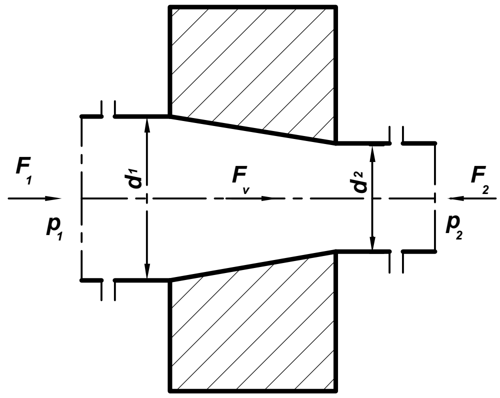
Síly ze změny hybnostního toku jsou určeny vektorovým rozdílem $\mathbf{F}_h = Q_m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$. Tlakové síly ve vstupním a výstupním průřezu jsou dány vztahy $\mathbf{F}_{p1} = p_1 S_1, \mathbf{F}_{p2} = p_2 S_2$, přitom působí ve směru normály k průřezu.

Příklad 15.5.1

Stanovte velikost a směr síly F_v působící na kotevní potrubí. Vlastní tíhu potrubí a vody neuvažujte. Ztráty zanedbejte.

Zadáno:

d_1 =	1 m
d_2 =	0.8 m
Q_v =	2 m^3.s^{-1}
p_1 =	0.785 MPa



Vypočtěte:		Výsledky:
v_1 = ?	m.s^{-1}	2.546
v_2 = ?	m.s^{-1}	3.979
p_2 = ?	Pa	780 324.84
F_h = ?	N	-2 866.000
F_p = ?	N	224 304.04
F_v = ?	N	221 438.04

Řešení:

Z Bernoulliho rovnice se určí tlak $p_2 = \left(p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 \right)$, kde rychlosti v_1, v_2 se vypočtou pomocí rovnice kontinuity $v_1 = \frac{4 Q_v}{\pi d_1^2}$, $v_2 = \frac{4 Q_v}{\pi d_2^2}$. Výsledná síla bude působit ve směru vodorovném a určí se součtem sil hybnostních a tlakových

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_{h1} - \mathbf{F}_{h2} + \mathbf{F}_{p1} - \mathbf{F}_{p2} = \mathbf{F}_h + \mathbf{F}_p$$

16. Obtékání těles

16.1. Odpor těles a tloušťka mezní vrstvy

Odpor tělesa je síla, kterou působí těleso na prostředí (a naopak) při obtékání a vyjadřuje se vztahem:

$$F_0 = \frac{1}{2}\rho c_0 S_p v_\infty^2$$

kde ρ hustota prostředí

c_0 součinitel celkového odporu

S_p charakteristická plocha obtékaného tělesa

v_∞ rychlost nenarušeného proudu prostředí

Odpor tělesa se skládá z následujících složek

- třecí odpor (silový účinek způsobený třením v mezní vrstvě)

$$F_f = \frac{1}{2}\rho c_f S_f v_\infty^2$$

kde c_f součinitel třecího odporu

S_f smočená plocha obtékaného tělesa

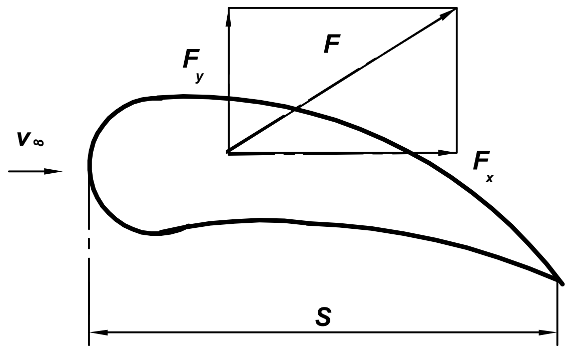
- tlakový odpor (v důsledku vzniku vířivé oblasti při odtržení proudu od tělesa)

$$F_p = \frac{1}{2}\rho c_p S_p v_\infty^2$$

kde c_p součinitel tlakového odporu

S_p příčný průřez obtékaného tělesa

Příkladem mohou být síly, které vyvolává tekutina na obtékaný letecký profil. Ty je možno rozložit na složku kolmou ke směru pohybu (vztlak) a na složku rovnoběžnou se směrem pohybu (odpor). Výsledná síla se označuje jako hydraulická (aerodynamická) síla F



$$F = \frac{1}{2}\rho c S v_\infty^2 = c\, S\, p_d$$

Odpor F_x je určen vztahem

$$F_x = c_x S \rho \frac{v_\infty^2}{2}$$

a vztlak F_y je určen vztahem

$$F_y = c_y S \rho \frac{v_\infty^2}{2}$$

kde je c součinitel výsledné aerodynamické síly, S půdorysná plocha leteckého profilu,

c_x součinitel odporu, c_y součinitel vztlaku a p_d je dynamický tlak $p_d = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2$.

Při řešení třecího odporu na desce se výpočet tloušťky mezní vrstvy a odpor hladké desky rovnoběžné se směrem proudu řídí vztahy odlišnými pro oblasti laminárního a turbulentního proudění a smíšené oblasti, uvedenými v následující tabulce. Kritické Reynoldsovo číslo desky je následující:

$$\mathrm{Re}_k = \frac{v_\infty x_k}{\nu} = 5.10^5$$

kde x_k je vzdálenost od náběžné hrany, ve které laminární mezní vrstva přechází do turbulentní.

druh mezní vrstvy	tloušťka mezní vrstvy	součinitel odporu desky	pozn.
laminární	$\delta_x = \frac{3{,}46x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$c_x = \frac{1{,}33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$	$\mathrm{Re}_x \langle\langle \mathrm{Re}_k$
turbulentní	$\delta_x = \frac{0{,}37x}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}}$	$c_x = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_L}}$	$\mathrm{Re}_x \rangle\rangle \mathrm{Re}_k$
smíšená	$\delta_x = \frac{3{,}46x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$ pro $x \langle x_k$ $\delta_x = \frac{0{,}37x}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}}$ pro $x \rangle x_k$	$c_x = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_L}} - \frac{1700}{\mathrm{Re}_L}$	$\mathrm{Re}_x \approx \mathrm{Re}_k$

Pozn. $\mathrm{Re}_L = \mathrm{Re}_x$ pro $x = L$, kde L je délka desky.

Příklad 16.1.1

Tenká a hladká rovinná deska je obtékána rovnoběžným proudem vzduchu. Určete délku laminární vrstvy při rychlosti $v_\infty = 20$ ms^{-1}. Kritické Reynoldsovo číslo desky je Re_k a viskozita vzduchu je ν.

Zadáno:

v_∞ = 20 m.s^{-1}

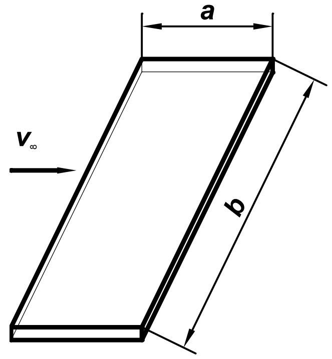
Re_k = 500000

ν = 0.000015 m^{2}s^{-1}

Vypočtěte:		Výsledky:
x_k = ?	m	0.37500

Řešení:

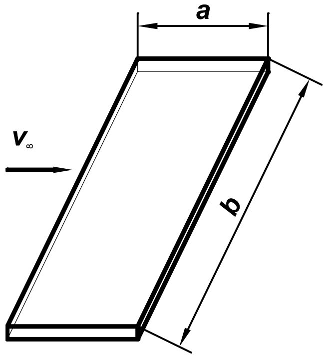
$$x_k = \frac{Re_k\, \nu}{v_\infty}$$



Příklad 16.1.2

Tenká a hladká deska o rozměrech a, b je obtékána z obou stran rovnoběžným proudem vzduchu rychlostí $v_{\infty 1}$ resp. $v_{\infty 2}$ o hustotě ρ_{vz} a viskozitě ν. Stanovte charakter proudění v mezní vrstvě, součinitele odporu desky, třecí odpory a tloušťky mezní vrstvy na konci desky pro obě varianty rychlostí.

Zadáno:		
$v_{\infty 1}$ =	30 m.s^{-1}	
$v_{\infty 2}$ =	100 m.s^{-1}	
ρ_{vz} =	1.2 kg.m^{-3}	
ν =	0.000015 m^{2}s^{-1}	
a =	0.1 m	
b =	1 m	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Re_{L1} = ?		200 000
Re_{L2} = ?		666 667
c_{x1} = ?		0.00297
c_{x2} = ?		0.00506
F_{x1} = ?	N	0.32076
F_{x2} = ?	N	6.072
δ_{x1} = ?	m	0.00077
δ_{x2} = ?	m	0.00253



Řešení:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{v_\infty a}{\nu} \qquad F_x = 2 c_x S \rho \frac{v_\infty^2}{2}$$

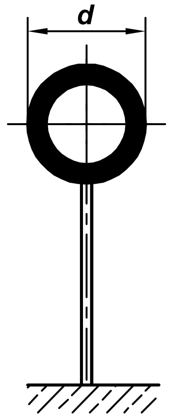
$$c_x = \frac{1{,}33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \qquad \delta_x = \frac{3{,}46x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad \text{laminár.proudění}$$

$$c_x = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_L}} \qquad \delta_x = \frac{0{,}37x}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}} \qquad \text{turbul. proudění}$$

Příklad 16.1.3

Jak velká síla F_x bude působit na dopravní značku o průměru d při rychlosti větru v. Hustota vzduchu je ρ_{vz} a součinitel odporu kruhové desky je c_x.

Zadáno:		
d =	0.6 m	
v_∞ =	120 km.hod^{-1}	
ρ_{vz} =	1.23 kg.m^{-3}	
c_x =	1.1	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F_{x1} = ?	N	212.42



17. Proudění v korytech

Při průtoku koryty je kapalina vedena stěnami, které neohraničují celý průtočný průřez, jen jeho část, takže vzniká volná hladina. Na této hladině se stýká proud kapaliny s ovzduším. Může jít o průtok neplným potrubím, stokami, umělými otevřenými kanály nebo přirozenými koryty potoků a řek. Zpravidla jde v těchto případech o turbulentní proudění.

Při ustáleném průtoku mohou nastat dva případy, a to pohyb rovnoměrný, při němž se rychlost proudu a tím i průtočný průřez (hloubka proudu) nemění po délce koryta, a pohyb nerovnoměrný, kdy se rychlost proudu a tím i průtočný průřez mění po délce koryta, tj. v závislosti na vzdálenosti s, avšak nemění se s časem t.

17.1. Rovnoměrný průtok

Rovnoměrný průtok nastane v korytě stálého průřezu, jestliže spád dna z na délce l je v rovnováze se ztrátovou výškou $h_z = h$, což vyplývá z Bernoulliho rovnice

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+g(h+z)=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh+gh_z \Rightarrow z=h_z$$

Hladina vody je v tomto případě rovnoběžná se dnem koryta a pro ztráty třením platí vzorec

$$z=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\Rightarrow\frac{z}{l}=\frac{\lambda}{d}\frac{v^2}{2g}=i$$, kde i je poměrný spád koryta.

Průřez koryta je zpravidla nekruhový, proto se zavádí hydraulický poloměr $r_h=\frac{S}{o}$ (je třeba upozornit na dříve uvedený hydraulický průměr $d_h=4\frac{S}{o}$, definovaný jako 4-násobek hydraulického poloměru r_h a nikoli 2- násobek). Po dosazení $d=d_h=4r_h$ do rovnice pro poměrný spád koryta lze vyjádřit rychlost rovnoměrného průtoku

$$i=\frac{\lambda}{8g}\frac{v^2}{r_h}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\sqrt{ir_h}=C\sqrt{ir_h}$$, což je Chézyho rovnice.

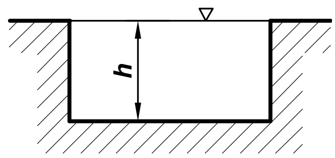
Rychlostní součinitel C pro střední rychlost rovnoměrného proudu v korytech je vázán se součinitelem tření vztahem $C=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$, tedy $C=f(\mathrm{Re},\varepsilon)$. Odborná literatura uvádí celou řadu empirických vztahů pro stanovení rychlostního součinitele, které byly stanoveny na základě měření a definují závislost rychlostního součinitele C na hydraulickém poloměru r_h a součiniteli drsnosti n_0, případně n_1, m, jejichž hodnoty závisí na druhu smáčeného povrchu, viz tab. v příloze 19.

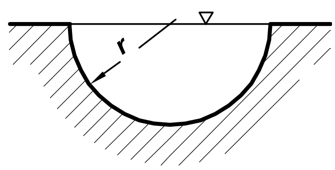
Při návrhu koryt, stok pod. bývá obvykle zadán průtok Q_v a volí se rychlost, z čehož se vypočítá průřez S a poměrný spád i. Aby poměrný spád, který je úměrný ztrátám, byl co nejmenší, je třeba volit profil nejmenšího odporu, tj. průtočný s největším hydraulickým poloměrem r_h. U přirozených toků je poměrný spád i velmi malý, u horských řek je 0,002, u velkých řek v nížinách jen 0,0002.

Manning	Pavlovskij	Bazin	Kutter
$C=\dfrac{1}{n_0}r_h^{\frac{1}{6}}$	$C=\dfrac{1}{n_0}r_h^{\frac{1}{5}\sqrt{n_0}}$	$C=\dfrac{87}{1+\dfrac{n_1}{\sqrt{r_h}}}$	$C=\dfrac{100}{1+\dfrac{m}{\sqrt{r_h}}}$

Příklad 17.1.1

Starý dřevěný žlab obdélníkového průřezu o šířce b a poměrném spádu i, který je zaplněn do výšky h, má být nahrazen betonovým kanálem s půlkruhovým průřezem tak, aby $S_1 = S_2$. Jaký musí mít nový kanál sklon, aby jím proteklo stejné objemové množství jako v původním kanále? Výpočet proveďte podle Pavlovského. Součinitel drsnosti dřevěného žlabu je n_{01} a pro betonový kanál n_{02}.





Zadáno:		
b =	0.5 m	
h =	0.4 m	
i_1 =	0.012	
n_{01} =	0.013	
n_{02} =	0.017	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
r_{h1} = ?	m	0.154
C_1 = ?	$m^{0.5}.s^{-1}$	73.710
v_1 = ?	$m.s^{-1}$	3.169
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.634
r_{h2} = ?	m	0.178
C_2 = ?	$m^{0.5}.s^{-1}$	56.235
i_2 =?		0.0178

Řešení:

Nejprve se určí průtok dřevěným korytem. Pro výpočet je nutné nejprve určit hydraulický poloměr původního koryta

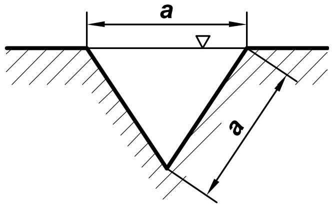
$r_{h1}=\dfrac{S}{o}=\dfrac{b\,h}{b+2h}$, rychlostní součinitel podle Pavlovského ze vztahu $C_1=\dfrac{1}{n_{01}}r_{h_1}^{\frac{1}{5}\sqrt{n_{01}}}$, rychlost z Chézyho rovnice $v_1=C\sqrt{ir_h}$ a průtok korytem $Q_{v1}=S_1v_1$. Za předpokladu, že $S_1=S_2$, $v_1=v_2$ se vypočte poloměr nového koryta $r=\sqrt{\dfrac{2S_1}{\pi}}$ a jeho hydraulický poloměr $r_h=\dfrac{\pi\,r^2}{2\pi r}=\dfrac{r}{2}$.

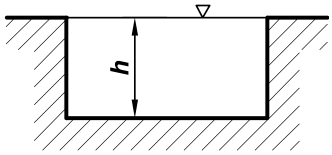
Rychlostní součinitel podle Pavlovského je $C_2=\dfrac{1}{n_{02}}r_{h_2}^{\frac{1}{5}\sqrt{n_{02}}}$ a sklon nového koryta se vypočítá z Chézyho rovnice $i=\left(\dfrac{v_1}{C_2}\right)^2\dfrac{1}{r_{h2}}$.

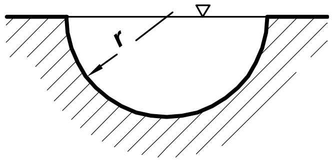
Příklad 17.1.2

Porovnejte objemové průtoky otevřenými betonovými kanály se stejným průtočným průřezem S, z nichž první průřez je rovnostranný trojúhelník o straně a, druhý obdélníkový s poměrem stran $b/h=2/1$ a poslední půlkruhový o poloměru r. Součinitel drsnosti je n_0 a poměrný sklon i.

Zadáno:		
S =	1 m^2	
i_1 =	0.005	
n_0 =	0.017	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
a = ?	m	1.520
C_1 = ?	m$^{0.5}$.s^{-1}	57.143
Q_{v1} = ?	m^3.s^{-1}	2.32
b = ?	m	1.414
C_2 = ?	m$^{0.5}$.s^{-1}	57.250
Q_{v2} = ?	m^3.s^{-1}	2.407
r = ?	m	0.798
C_3 = ?	m$^{0.5}$.s^{-1}	57.431
Q_{v3} = ?	m^3.s^{-1}	2.5652



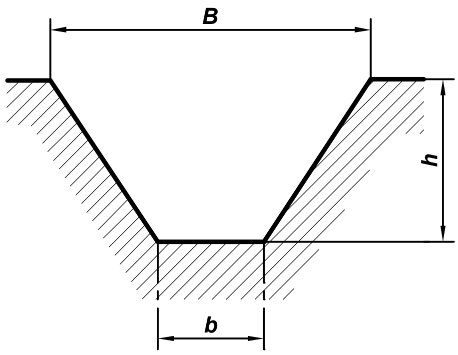




Příklad 17.1.3

Kanál se stěnami z lomového kamene má lichoběžníkový průřez o rozměrech B, b a hloubce h. Kanálem má protékat objemový průtok Q_v. Jaký poměrný spád musí mít tento kanál? Pro výpočet rychlostního součinitele použijte vztah podle Manninga, Pavlovského, Basina a Kuttera. V příloze vyhledejte součinitel drsnosti n_1, m. Výsledky porovnejte.

Zadáno:		
B =	5 m	
b =	1.4 m	
h =	1.2 m	
n_0 =	0.017	
Q_v =	6.0 m^{3}s^{-1}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
r_h = ?	m	0.671
C_M = ?	m$^{0.5}$.s^{-1}	55.039
C_P = ?	m$^{0.5}$.s^{-1}	58.215
C_B = ?	m$^{0.5}$.s^{-1}	55.713
C_K = ?	m$^{0.5}$.s^{-1}	59.829
v = ?	m.s^{-1}	1.563
i_M =		0.00120
i_P = ?		0.001074
i_B = ?		0.001173
i_K = ?		0.001017



18. Fyzikální podobnost a teorie modelování

18.1. Hydrodynamická podobnost při proudění kapalin

V mechanice tekutin lze aplikovat teorii hydrodynamické podobnosti. Hydrodynamická podobnost umožňuje určit veličiny a charakteristiky určitého jevu na základě znalosti veličin a charakteristik jiného, podobného jevu. Tato znalost může být získána teoreticky i experimentálně. Mají-li si být dva jevy podobné, musí splňovat kritéria hydrodynamické podobnosti. Ta lze definovat i v mechanice tekutin. Proudění tekutin představuje pohyb hmotných částic. Příčinou pohybu jsou síly, které dělíme na síly plošné $F \approx S$ a síly objemové (hmotnostní) $F \approx m \approx V$.

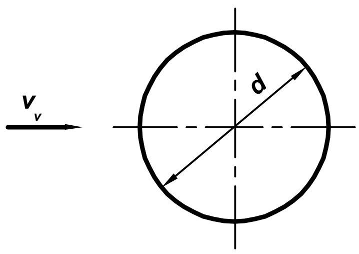
Kriteria hydrodynamické podobnosti proudění jsou definována na základě poměru dvou sil, které jsou hlavní (dominantní) pro daný jev. Například kriterium hydrodynamické podobnosti proudění, ve kterém budou dominantní síly setrvačné F_s a třecí F_t je známé Reynoldsovo číslo $\mathrm{Re} = \dfrac{v\,d}{\nu}$.

Příklad 18.1.1

Koule o průměru d je obtékána vodním proudem rychlostí v_v. Jak velkou rychlostí v_{vz} musí být obtékána vzdušným proudem, aby obě proudění byla fyzikálně podobná. Kinematická viskozita vody je ν_v a kinematická viskozita vzduchu je ν_{vz}.

Zadáno:

d =	1 m	
v_v =	2 m.s^{-1}	
ν_v =	0.000001 m^2.s^{-1}	
ν_{vz} =	0.000017 m^2.s^{-1}	
Vypočtěte:		Výsledky:
v_{vz} = ?	m.s^{-1}	34.00



Řešení: $\mathrm{Re}_v = \mathrm{Re}_{vz}$

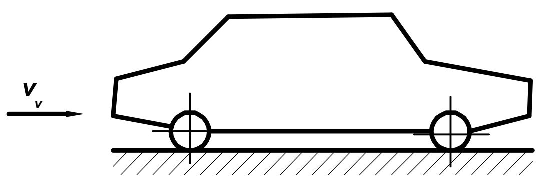
$$\frac{v_v d}{\nu_v} = \frac{v_{vz} d}{\nu_{vz}} \Rightarrow v_{vz} = \frac{v_v \nu_{vz}}{\nu_v}$$

Příklad 18.1.2

Aerodynamický odpor automobilu o výšce h (jako charakteristický rozměr) se určuje měřením jeho modelu v aerodynamickém tunelu. Určete výšku modelu h_m s ohledem na zachování fyzikální podobnosti, je-li nejvyšší rychlost automobilu v a dosažitelná rychlost v tunelu je v_m.

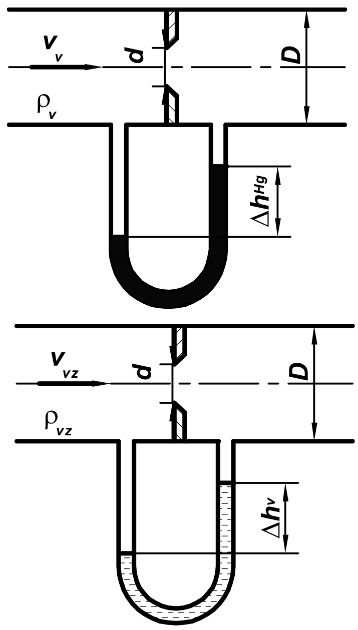
Zadáno:

h =	1.5 m	
v =	130 km.hod^{-1}	
v_m =	45 m.s^{-1}	
Vypočtěte:		Výsledky:
h_m = ?	m	1.20



Příklad 18.1.3

K měření průtoku vzduchu Q_{vz} se má použít nenormalizovaná clona o průměru d, která bude umístěna v potrubí o průměru D. Při cejchování této clony, které se provádělo vodou, se zjistilo, že průtokový součinitel μ je ještě konstantní při průtoku $Q_{v\min}$. Při této hodnotě průtoku byl naměřen na diferenčním manometru naplněném rtutí rozdíl hladin Δh_{Hg}. Určete odpovídající minimální průtok vzduchu $Q_{vz\min}$ a odpovídající údaj Δh_v na diferenčním manometru naplněném vodou. Kinematická viskozita vody je ν_v a kinematická viskozita vzduchu je ν_{vz}, hustota vody je ρ_v a vzduchu ρ_{vz}.



Zadáno:

d =	100	mm
D =	200	mm
$Q_{v\min}$ =	16	$dm^3.s^{-1}$
Δh_{Hg} =	45	mm
ν_v =	0.000001	$m^2.s^{-1}$
ν_{vz} =	0.000015	$m^2.s^{-1}$
ρ_v =	1000	$kg.m^{-3}$
ρ_{vz} =	1.166	$kg.m^{-3}$
ρ_{Hg} =	13600	$kg.m^{-3}$

Vypočtěte:		Výsledky:
$Q_{vz\min}$? =	$dm^3.s^{-1}$	240.00
Δh_v = ?	mm	160.56

Řešení:

$$\mathrm{Re}_{vz} = \mathrm{Re}_v \Rightarrow \frac{Q_{vz\min} d}{\nu_{vz}} = \frac{Q_{v\min} d}{\nu_v} \Rightarrow Q_{vz\min} = Q_{v\min} \frac{\nu_{vz}}{\nu_v}$$

$$\Delta p = \Delta h \rho g = \rho g \frac{v^2}{2} \approx \rho g Q^2 \Rightarrow \frac{\rho_{Hg} \Delta h_{Hg}}{\rho_v Q_v^2} = \frac{\rho_v \Delta h_v}{\rho_{vz} Q_{vz}^2} \Rightarrow \Delta h_v = \Delta h_{Hg} \frac{Q_{vz\min}^2}{Q_{v\min}^2} \frac{\rho_{vz} \rho_{Hg}}{\rho_v^2}$$

19. Přílohy

19.1. Hustota vody, vzduchu a rtuti, dynamická viskozita a kinematická viskozita vody a vzduchu v závislosti na teplotě

	Hustota $\rho(t)$ [kgm^{-3}]			Dynamická viskozita $\eta(t)$ [Pa.s]		Kinematická viskozita $\nu(t)$ [m^{2}s^{-1}]	
Teplota ^{0}C	**voda**	**rtuť**	**suchý vzduch**	**voda**	**suchý vzduch**	**voda**	**suchý vzduch**
0	999.9	13595.1	1.293	0.001794	1.720E-05	1.7938E-06	1.33024E-05
1	999.9	13592.6	1.288	0.001732	1.724E-05	1.7321E-06	1.33851E-05
2	1000	13590.1	1.284	0.001674	1.728E-05	1.6738E-06	1.34579E-05
3	1000	13587.6	1.279	0.001619	1.732E-05	1.6188E-06	1.35418E-05
4	1000	13585.2	1.274	0.001567	1.736E-05	1.5671E-06	1.36264E-05
5	1000	13582.7	1.27	0.001519	1.740E-05	1.5188E-06	1.37008E-05
6	1000	13580.2	1.265	0.001473	1.744E-05	1.4726E-06	1.37866E-05
7	999.9	13577.8	1.261	0.001429	1.748E-05	1.4289E-06	1.3862E-05
8	999.9	13575.3	1.256	0.001387	1.752E-05	1.3873E-06	1.3949E-05
9	999.9	13572.8	1.252	0.001348	1.756E-05	1.3479E-06	1.40256E-05
10	999.7	13570.4	1.247	0.00131	1.760E-05	1.3101E-06	1.41139E-05
15	999.1	13558	1.226	0.001145	1.785E-05	1.1456E-06	1.45595E-05
20	998.2	13545.7	1.205	0.001009	1.809E-05	1.0105E-06	1.50124E-05
25	997.1	13533.5	1.185	0.000893	1.832E-05	8.9600E-07	1.54599E-05
30	995.7	13521.2	1.165	0.000801	1.848E-05	8.0400E-07	1.58627E-05

Z tabelovaných dat lze metodou nejmenších čtverců odvodit funkční závislosti a indexy korelace:

hustota	ρ **[kg.m^{-3}]**	R^2
rtuť	$0.000511t^2 - 2.477t + 13595.075$	0.9999
voda	$0.0000638t^3 - 0.00878t^2 + 0.0669t + 999.880$	0.9994
suchý vzduch	$0.0000144t^2 - 0.00469t + 1.293$	0.9999
dynamická viskozita	η **[Pa.s]**	R^2
voda	$0.001745e^{-0.026939t}$	0.9957
suchý vzduch	$1.7189.10^5\, e^{0.00248t}$	0.9981
kinematická viskozita	ν **[m^{2}s^{-1}]**	R^2
voda	$1.744.10^{-6}\, e^{-0.0268t}$	0.9954
suchý vzduch	$1.3303.10^{-5}\, e^{0.00595t}$	0.9996

V literatuře lze vyhledat závislosti

voda $\rho = \dfrac{1000}{1 + 0.0000194(t-5)^{1.6923}}$ $\qquad \nu = \dfrac{1}{0.5593 + 0.0193t + 0.000131t^2 - 0.0000004t^3}$

vzduch $\rho = \dfrac{101325}{287 * (273.15 + t)}$ $\qquad \eta = (17.1998 + 0.042543t).10^{-6} \qquad (\nu = \dfrac{\eta}{\rho})$

19.2. Hustota suchého vzduchu ρ (*t,p*) [kg.m^{-3}] v závislosti na tlaku a teplotě

t [^{0}C] \ *p* [Pa]	95000	96000	97000	98000	99000	100000	101000
10	1.168	1.182	1.203	1.218	1.224	1.231	1.242
11	1.164	1.178	1.199	1.214	1.219	1.227	1.238
12	1.160	1.173	1.195	1.210	1.215	1.222	1.233
13	1.156	1.169	1.191	1.206	1.211	1.218	1.229
14	1.152	1.165	1.187	1.202	1.207	1.214	1.224
15	1.148	1.161	1.183	1.198	1.203	1.210	1.220
16	1.144	1.157	1.179	1.194	1.200	1.205	1.216
17	1.140	1.153	1.175	1.190	1.196	1.201	1.212
18	1.136	1.149	1.171	1.185	1.191	1.197	1.208
19	1.132	1.145	1.167	1.18	1.187	1.193	1.204
20	1.129	1.141	1.163	1.175	1.183	1.189	1.200
21	1.124	1.137	1.158	1.172	1.178	1.185	1.196
22	1.120	1.134	1.154	1.168	1.173	1.181	1.192
23	1.116	1.130	1.150	1.164	1.169	1.177	1.188
24	1.112	1.126	1.147	1.162	1.165	1.173	1.184
25	1.110	1.122	1.143	1.157	1.161	1.169	1.180
26	1.107	1.118	1.14	1.152	1.157	1.165	1.176
27	1.104	1.115	1.137	1.148	1.153	1.161	1.172
28	1.101	1.111	1.134	1.144	1.150	1.157	1.168
29	1.097	1.107	1.131	1.140	1.146	1.153	1.164
30	1.093	1.104	1.127	1.136	1.142	1.150	1.160

Z tabelovaných dat lze metodou nejmenších čtverců lze odvodit lineární závislost hustoty

$$\rho = 0{,}221657 - 0{,}00344t + 1{,}0422.10^{-5}\,p$$

Napětí nasycených par (0-40 ^{0}C)

$$p = 1175.9 + 646.74t$$

Absolutní vlhkost vzduchu f [g.m^{-3}]

$$f = 2.117545 + 0.41535022t + 0.02127063t^2 - 1.90997\cdot 10^{-4}t^3 + 5.235836\cdot 10^{-6}t^4$$

19.3. Napětí E nasycené vodní páry při teplotách 95$\div$140 ^{0}C

t [^{o}C]	*E* [kPa]	*t* [^{o}C]	*E* [kPa]
95	84.57	108	134.00
96	87.75	109	138.61
97	91.2	110	143.37
98	94.38	111	148.24
99	97.83	112	153.27
100	101.39	113	158.43
101	105.08	114	163.74
102	108.85	115	169.17
103	112.75	120	198.67
104	116.75	125	232.22
105	120.89	130	270.26
106	125.13	135	313.13
107	129.49	140	361.62

19.4. Dynamická viskozita vody a páry μ [μPa.s] v závislosti na teplotě a tlaku

p[MPa] / t [^{0}C]	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1	5	10
0	1792	1792	1792	1791	1791	1789	1780	1768
5	1518	1518	1518	1518	1517	1517	1510	1503
10	1306	1306	1306	1306	1305	1305	1301	1296
20	1002	1002	1002	1002	1001	1001	999.6	997.7
25	890.1	890.1	890.1	890.1	890.0	889.9	889.0	888.0
30	797.4	797.4	797.4	797.3	797.3	797.3	796.9	796.6
40	653.0	653.0	653.0	653.0	653.0	653.1	653.4	653.9
50	10.62	546.8	546.9	546.9	546.9	547.0	547.7	548.6
60	10.95	466.4	466.4	466.4	466.5	466.1	467.5	468.6
70	11.28	403.9	403.9	403.9	404.0	404.1	405.1	406.4
80	11.63	354.3	354.4	354.4	354.5	354.6	355.6	357.0
90	11.98	11.95	314.4	314.4	314.5	314.7	315.7	317.1
100	12.34	12.31	12.27	281.8	281.9	282.0	283.1	284.4
110	12.71	12.68	12.64	254.7	254.8	254.9	256.0	257.3
120	13.8	13.06	13.02	232.1	232.1	232.3	233.3	234.6
130	13.46	13.44	13.41	13.34	213.0	213.1	214.1	215.4
140	13.84	13.82	13.79	13.74	196.6	196.7	197.7	199.0
150	14.23	14.21	14.18	14.13	182.5	182.6	183.6	184.9
160	14.62	14.60	14.58	14.53	14.39	170.3	171.3	172.6
170	15.01	14.99	14.97	14.93	14.81	159.6	160.6	161.8
180	15.41	15.39	15.37	15.33	15.22	15.03	151.1	152.4
190	15.80	15.79	15.77	15.74	15.64	15.46	142.7	143.9
200	16.21	16.19	16.18	16.15	16.05	15.89	135.2	136.4
220	17.01	17.00	16.99	16.96	16.89	16.76	122.2	123.5
240	17.83	17.82	17.81	17.79	17.72	17.62	111.3	112.6
260	18.65	18.64	18.63	18.61	18.56	18.47	101.8	103.2
280	19.47	19.47	19.46	19.45	19.40	19.33	18.83	94.68
300	20.30	20.30	20.29	20.28	20.24	20.18	19.80	86.46
320	21.13	21.13	21.12	21.11	21.08	21.04	20.74	20.70
340	21.96	21.96	21.95	21.95	21.92	21.89	21.67	21.67
360	22.79	22.79	22.79	22.78	22.76	22.74	22.58	22.63
380	23.62	23.62	23.62	23.61	23.60	23.58	23.48	23.56
400	24.45	24.45	24.45	24.45	24.44	24.42	24.37	24.49
420	25.28	25.28	25.28	25.28	25.27	25.26	25.25	25.40
440	26.11	26.11	26.11	26.11	26.10	26.10	26.12	26.29
460	26.93	26.93	26.93	26.93	26.93	26.93	26.98	27.18
480	27.75	27.76	27.76	27.76	27.76	27.76	27.83	28.05
500	28.57	28.57	28.57	28.58	28.58	28.59	28.68	28.91

19.5. Kinematická viskozita vody a páry ν [mm^2s^{-1}] v závislosti na teplotě a tlaku

p[MPa] / t [^{0}C]	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1	5	10
0	1.7921	1.7920	1.7918	1.7915	1.7904	1.7887	1.7754	1.7594
5	1.5184	1.5183	1.5182	1.5179	1.5172	1.5160	1.5066	1.4954
10	1.3064	1.3064	1.3063	1.3061	1.3056	1.3047	1.2980	1.2900
20	1.0035	1.0035	1.0034	1.0033	1.0031	1.0026	0.99915	0.99502
25	0.89278	0.89275	0.89272	0.89265	0.89246	0.89215	0.88966	0.88671
30	0.80087	0.800085	0.800083	0.800078	0.800065	0.800042	0.79866	0.79658
40	0.65812	0.65811	0.65810	0.65808	0.65801	0.65791	0.65710	0.65616
50	157.89	0.55347	0.55347	0.55346	0.55344	0.55341	0.55315	0.55288
60	167.88	0.47437	0.47437	0.47437	0.47347	0.47438	0.47446	0.47459
70	178.31	0.41308	0.41308	0.41309	0.41311	0.41314	0.41343	0.41380
80	189.20	0.36463	0.36464	0.36465	0.36468	0.36473	0.36514	0.36567
90	200.52	39.707	0.32571	0.32572	0.32576	0.32582	0.32631	0.32694
100	212.28	42.091	20.810	0.29400	0.29404	0.29411	0.29465	0.29534
110	224.49	44.558	22.062	0.26785	0.26789	0.26796	0.26853	0.26926
120	237.12	47.109	23.353	0.24605	0.24609	0.24617	0.24676	0.24750
130	250.20	49.744	24.685	12.149	0.22777	0.22785	0.22845	0.22920
140	263.70	52.463	26.056	12.848	0.21224	0.21231	0.21292	0.21368
150	277.64	55.267	27.469	13.566	0.19898	0.19905	0.19966	0.20042
160	292.00	58.154	28.922	14.303	5.5218	0.18766	0.18827	0.18903
170	306.79	61.125	30.416	15.059	5.8373	0.17782	0.17843	0.17918
180	322.00	64.180	31.951	15.835	6.1590	2.9214	0.16987	0.17063
190	337.64	67.318	33.527	16.630	6.4873	3.0971	0.16241	0.16316
200	353.69	70.539	35.144	17.446	6.8225	3.2741	0.15587	0.15662
220	387.05	77.229	38.501	19.136	7.5143	3.6356	0.14504	0.14579
240	422.07	84.249	42.021	20.906	8.2354	4.0086	0.13655	0.13731
260	458.73	91.594	45.702	22.755	8.9863	4.3945	0.12981	0.13060
280	497.00	99.261	49.543	24.684	9.7675	4.7939	0.79612	0.12523
300	536.88	107.25	53.543	26.691	10.579	5.2073	0.89783	0.12088
320	578.34	115.55	57.700	28.775	11.420	5.6348	0.99837	0.39898
340	621.36	124.16	62.012	30.937	12.292	6.0767	1.0992	0.46571
360	665.93	133.08	66.478	33.176	13.194	6.5329	1.2010	0.52780
380	712.02	142.31	71.096	35.489	14.125	7.0034	1.3044	0.58797
400	759.62	151.84	75.864	37.877	15.086	7.4882	1.4095	0.64741
420	808.70	161.66	80.779	40.339	16.075	7.9872	1.5166	0.70673
440	859.25	171.78	85.841	42.874	17.094	8.5003	1.6258	0.76632
460	911.25	182.18	91.047	45.481	18.141	9.0273	1.7373	0.82640
480	964.68	192.87	93.396	48.158	19.216	9.5681	1.8510	0.88714
500	1019.5	203.84	101.89	50.906	20.318	10.123	1.9670	0.94865

19.6. Fyzikální vlastnosti plynů při 0 ^{0}C a tlaku 0.1MPa, pevných látek a kapalin při 18 ^{0}C

vlastnost	označení	jednotka
hustota	ρ	kg.m^{-3}
dynamická viskozita	η	Pa.s
délková a objemová teplotní roztažnost	α , β	deg^{-1} $\alpha = \frac{\Delta l}{l_0}\frac{1}{\Delta t}$, $\beta = \frac{\Delta V}{V_0}\frac{1}{\Delta t} \cong 3\alpha$,
tepelná kapacita	c	J.(kg.K)$^{-1}$
tepelná vodivost	λ	J.(m.s.K)$^{-1}$=W.(m.K)$^{-1}$
rychlost zvuku	a	m.s^{-1}
molová hmotnost	M	kg.kmol^{-1}

plyn	ρ	η	β	*c*	*a*	*M*
vzduch	1.25	0.0000171	0.003675	1005	332	29
etan	1.36			1730		
čpavek	0.77	0.0000093	0.003802	2189	415	17
dusík	1.25	0.0000166	0.003674	1038	338	28
chlor	3.22	0.0000123	0.003830	489	205	71
kyslík	1.43	0.0000192	0.003674	1009	316	32
oxid dusný N2O	1.98	0.0000137		858	264	44
oxid dusnatý NO	1.34	0.0000180		996	324	30
oxid siřičitý SO2	2.93	0.0000117		636	209	64
oxid uhelnatý CO	1.25	0.0000166		1042	337	28
oxid uhličitý CO2	1.98	0.0000138		837	258	44
metan CH4	0.72	0.0000102	0.003682	2206	430	16
vodík	0.09	0.0000084	0.003662	14270	1261	2
kapalina	ρ	η	β	*c*	*a*	
aceton	791	0.00033	0.00143	2130	1192	
etylalkohol	790	0.00124	0.00110	2500	1165	
glycerin	1260	0.80000	0.00049	2390	1923	
chloroform	1489	0.00058	0.00128	940	1005	
kyselina octová	1049	0.00126	0.00107	2010		
metylalkohol	791	0.00062	0.00119	2410	1156	
olej	915	0.00190	0.00072	1800	1381	
benzín	961			2090	1295	
rtuť	13551	0.00157	0.00018	138	1431	
toluen	866	0.00060	0.00109	1720	1620	
voda	999	0.00107	0.00019	4200	1497	
pevné látky	ρ	β	*c*	λ	*a*	
cín	7280	0.000023	234	0.645	2730	
hliník	2720	0.000023	921	2.449	5040	
sklo křemičité	2210	0.000006	840	0.013	5370	
měď	8930	0.000016	394	0.385	3710	
platina	21400	0.000009	132	0.712	2800	
stříbro	10510	0.000019	233	4.187	2700	
uhlík (démant)	3514	0.000001	494	1.674		
tuha	2260	0.000008	840	1.632		
wolfram	19300	0.000004	134	1.674	4310	
zinek	7120	0.000036	387	1.122	3810	
zlato	19300	0.000014	134	3.098	2100	
železo	7860	0.000012	481	0.837	5170	
ocel litá	7840	0.000011	461	0.586		
litina šedá	7200	0.000009	540	0.502		

19.7. Absolutní drsnosti potrubí k

Materiál	***k*** **[mm] (původní stav)**	***k*** **[mm] (korodovaný stav)**
Kovové materiály		
Tažené trubky mosazné, měděné, hliníkové apod.	0.0015 ÷ 0.003	0.003 ÷ 0.1
Bezešvé trubky ocelové	0.04 ÷ 0.1	0.1 ÷ 0.9
Tažené trubky ocelové	0.03 ÷ 0.12	0.12 ÷ 0.9
Svařované trubky ocelové	0.05 ÷ 0.1	0.1 ÷ 0.9
Ocelové trubky natřené	0.03 ÷ 0.06	0.06 ÷ 0.9
Pozinkované trubky ocelové	0.15 ÷ 0.5	0.5 ÷ 3.5
Nýtované ocelové trubky	0.9 ÷ 1.5	3 ÷ 6
Litinové trubky	0.15 ÷ 0.5	1 ÷ 1.5
Asfaltové trubky	0.03 ÷ 0.20	
Vodovodní potrubí po dvaceti a více letech v provozu		0.6 ÷ 3.0
Nekovové materiály		
Skleněné trubky, trubky z plastů	0.0015 ÷ 0.01	
Pryžové hadice	0.01 ÷ 0.03	
Hadice lněná, konopná a pryžovým povlakem	0.2 ÷ 0.8	
Kožené hadice	0.15	
Betonové potrubí	0.3 ÷ 6.0	
Cihelné potrubí	0.45 ÷ 6.0	
Drenážní trubky	0.45 ÷ 6.0	
Kameninové potrubí	0.3 ÷ 1.5	
Obložené potrubí z tesaného kamene	1 ÷ 6	
Dřevěné potrubí, kanál	0.20 ÷c 4.0	

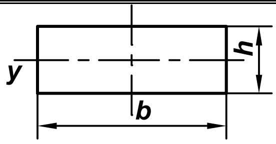
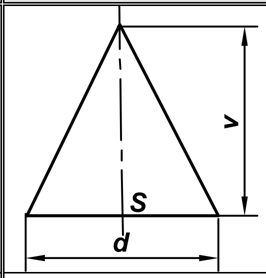
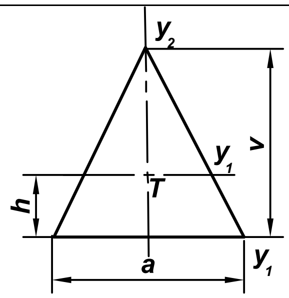
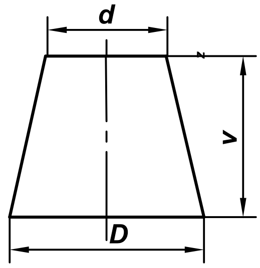
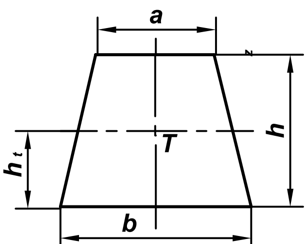
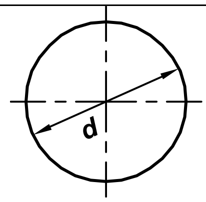
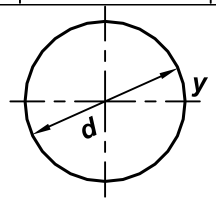
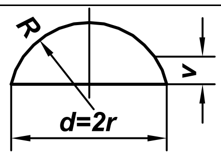
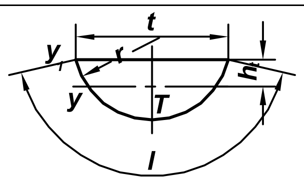
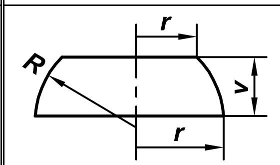
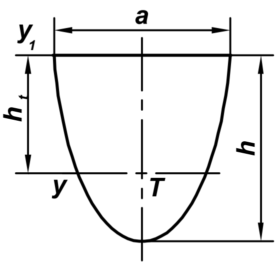
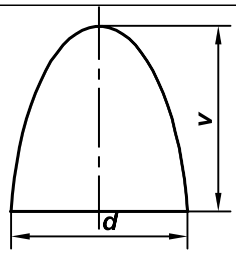
19.8. Stupeň drsnosti při proudění v otevřených kanálech

Jakost omočeného povrchu	**Stupeň drsnosti**			
	n_0	n_1	m	$\frac{1}{n_0}$
Hoblovaná dřeva, dobře hlazená omítka, cihly „zvonivky“	0.100	0.06	0.15	100.00
Dobře spojovaná prkna	-	-	0.20	-
Dlouhá železná a železobetonová potrubí (nová)	-	-	0.20	-
Drsná prkna	0.012	0.16	0.25	83.33
Kvádrové, dobře spárované cihelné zdivo	0.013	0.16	0.25	76.92
Čisté kameninové kanály	-	-	0.25	-
Kanály z cementových trub a jemnou usazeninou, podélně nýtované železné trouby (menších průměrů)	-	-	0.30	-
Obyčejné cihelné zdivo, stěny z fošen	-	-	0.35	-
Zdivo na maltu se špičatými kameny, hrubá betonová omítka	-	-	0.45	-
Zdivo z lomového kamene	0.017	0.46	0.55	58.82
Zdivo z lomového kamene s bahnitým dnem	-	-	0.75	-
Starší zdivo s bahnitým dnem, hladší skála	-	-	1.00	-
Dlažba, pravidelné koryto v zemi	-	0.85	1.50	-
Starý beton	0.020	-	-	50.00
Starší zemní kanály	0.025	1.30	1.75	40.00
Starší zemní kanály s kamením a porostem	0.030	1.75	2.00	33.33
Drenážní příkopy, hrubá skála	0.030	-	-	33.33
Horské bystřiny	0.080	3.50	-	12.50

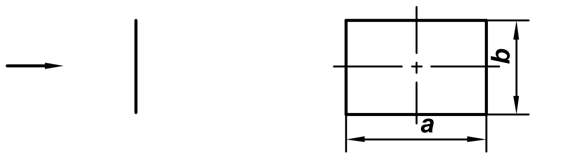
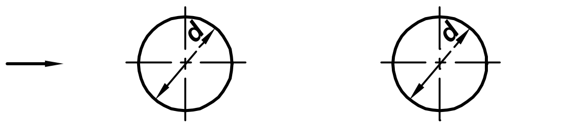
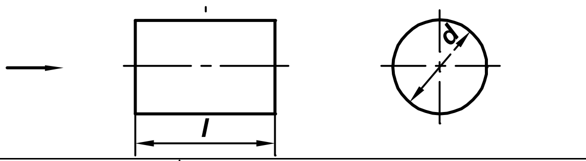
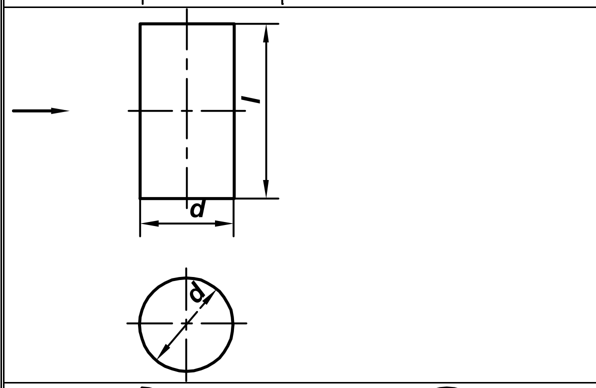
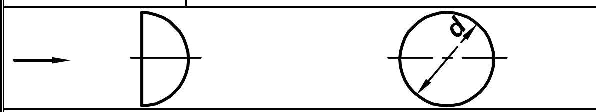
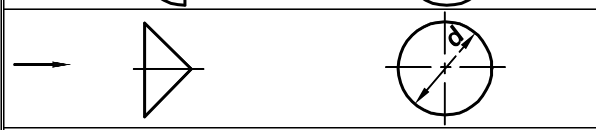
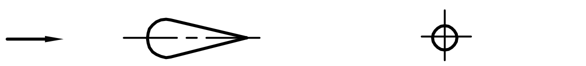
19.9. Rychlostní součinitel *C* podle Pavlovského

r_h \ n_0	0.011	0.013	0.017	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040
0.05	61.3	48.7	33.2	26.1	18.6	13.9	10.9	8.7
0.06	62.8	50.1	34.4	27.2	19.5	14.7	11.5	9.3
0.07	64.1	51.3	35.5	28.2	20.4	15.5	12.2	9.9
0.08	65.2	52.4	36.4	29.0	21.1	16.1	12.8	10.3
0.10	67.2	54.3	38.1	30.6	22.4	17.3	13.8	11.2
0.12	68.8	55.8	39.5	32.6	23.5	18.3	14.7	12.1
0.14	70.3	57.2	40.7	33.0	24.5	19.1	15.4	12.8
0.16	71.5	58.4	41.8	34.0	25.4	19.9	16.1	13.4
0.18	72.6	59.5	42.7	34.8	26.2	20.6	16.8	14.0
0.20	73.7	60.4	43.6	35.7	26.9	21.3	17.4	14.5
0.22	74.6	61.3	44.4	36.4	27.6	21.9	17.9	15.0
0.24	75.5	62.1	45.2	37.1	28.3	22.5	18.5	15.5
0.26	76.3	62.9	45.9	37.8	28.8	23.0	18.9	16.0
0.28	77.0	63.6	46.5	38.4	29.4	23.5	19.4	16.4
0.30	77.7	64.3	47.2	39.0	29.9	24.0	19.9	16.8
0.35	79.3	65.8	48.6	40.3	31.1	25.1	20.9	17.8
0.40	80.7	67.1	49.8	41.5	32.2	26.0	21.8	18.6
0.45	82.0	68.4	50.9	42.5	33.1	26.9	22.6	19.4
0.50	83.1	69.5	51.9	43.5	34.0	27.8	23.4	20.1
0.55	84.1	70.4	52.8	44.4	34.8	28.5	24.0	20.7
0.60	85.3	71.4	53.7	45.2	35.5	29.2	24.7	21.3
0.65	86.0	72.2	54.5	45.9	36.2	29.8	25.3	21.9
0.70	86.8	73.0	55.2	46.6	36.9	30.4	25.8	22.4
0.80	88.3	74.5	56.5	47.9	38.0	31.5	26.8	23.4
0.90	89.4	75.5	57.5	48.8	38.9	32.3	27.6	26.1
1.00	90.9	76.9	58.8	50.0	40.0	33.3	28.6	25.0
1.10	92.0	78.0	59.8	50.9	40.9	34.1	29.3	25.7
1.20	93.1	79.0	60.7	51.8	41.6	34.8	30.0	26.3
1.30	94.0	79.9	61.5	52.5	42.3	35.5	30.6	26.9
1.50	95.7	81.5	62.9	53.9	43.6	36.7	31.7	28.0
1.70	97.3	82.9	64.3	55.1	44.7	37.7	32.7	28.9
2.00	99.3	84.8	65.9	56.6	46.0	38.9	33.8	30.0
2.50	102.1	87.3	68.1	58.7	47.9	40.6	35.4	31.5
3.00	104.4	89.4	69.8	60.3	49.3	41.9	36.6	32.5

19.10. Těžiště a momenty setrvačnosti některých ploch a objemy těles

Plocha	J_y, h_t, S	Těleso	Objem
	obdélník $J_y = \frac{1}{12} b h^3$		kužel $V = \frac{1}{12}\pi d^2 v$ jehlan $V = \frac{1}{3} S v$
	trojúhelník $h_t = \frac{v}{3}$ $J_y = \frac{1}{36} a v^3$ $J_{y1} = \frac{1}{12} a v^3$ $J_{y2} = \frac{1}{4} a v^3$		komolý kužel $V = \frac{\pi}{12}\left(D^2 + Dd + d^2\right)v$ komolý jehlan $V = \frac{v}{3}\left(S + s + \sqrt{Ss}\right)$
	lichoběžník $h_t = \frac{h}{3}\frac{2a+b}{a+b}$ $J_y = \frac{h^3}{36}\frac{a^2 + 4abh^2}{a+b}$		koule $V = \frac{\pi}{6} d^3$
	kružnice $J_Y = \frac{\pi}{64} d^4$		kulová úseč $V = \frac{1}{6}\pi v\left(3r^2 + v^2\right) =$ $= \frac{1}{3}\pi v^2 (3R - v)$
	kruhová úseč $h_t = \frac{2}{3}\frac{rt}{l}$ $J_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{\pi}\right) r^4$ $J_{y1} = \frac{\pi}{8} r^4$		kulová vrstva $V = \frac{1}{6}\pi v\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2\right)$
	parabolická úseč $S = \frac{2}{3} ah$, $h_t = \frac{2}{5} h$ $J_y = \frac{8}{175} a h^3$ $J_{y1} = \frac{16}{105} a h^3$		rotační paraboloid $V = \frac{1}{8}\pi d^2 v$

19.11. Součinitelé odporu těles

Těleso		c_x	Rozsah Re
	kruhová deska	$1.1 \div 1.12$	$10^5 \div 4.10^6$
	obdélníková deska $\frac{a}{b} =$ 1 2 4 8 10 18	 1.1 1.15 1.19 1.27 1.29 1.40	 $10^5 \div 4.10^6$
	koule	$\frac{24}{\mathrm{Re}}$ 4 1.2 0.45 0.4 0.45	 10 10^3 10^3 10^4 10^5
	válec $\frac{l}{d}$ = 1 2 4 7	0.91 0.85 0.87 0.99	
	válec $\frac{l}{d}$ =1 2 5 10 40	0.63 0.68 0.74 0.82 0.98	$9.\ 10^5$
	dutá polokoule dutinou proti proudu	$1.35 \div 1.4$	$1.2\ .\ 10^5$
	dutá polokoule dutinou po proudu	$0.3 \div 0.4$	$1.2\ .\ 10^5$
	dutý kužel dutinou proti proudu	1.4	$1.2\ .\ 10^5$
	dutý kužel dutinou po proudu	0.4	$1.2\ .\ 10^5$
	těleso nejmenšího odporu	$0.003 \div 0.01$	

20. Laboratorní cvičení z hydromechaniky

20.1. Měření třecí ztráty v potrubí

Stanovte velikost tlakové ztráty třením $\Delta p_t = p_z$ a hodnotu třecího součinitele λ při různých rychlostech proudícího vzduchu v_s v hladkém potrubí. Vyneste do grafů závislosti $p_z = f(Q_V)$, $\lambda = f(\mathrm{Re})$. Naměřené hodnoty λ porovnejte s hodnotami třecího součinitele podle Blasia.

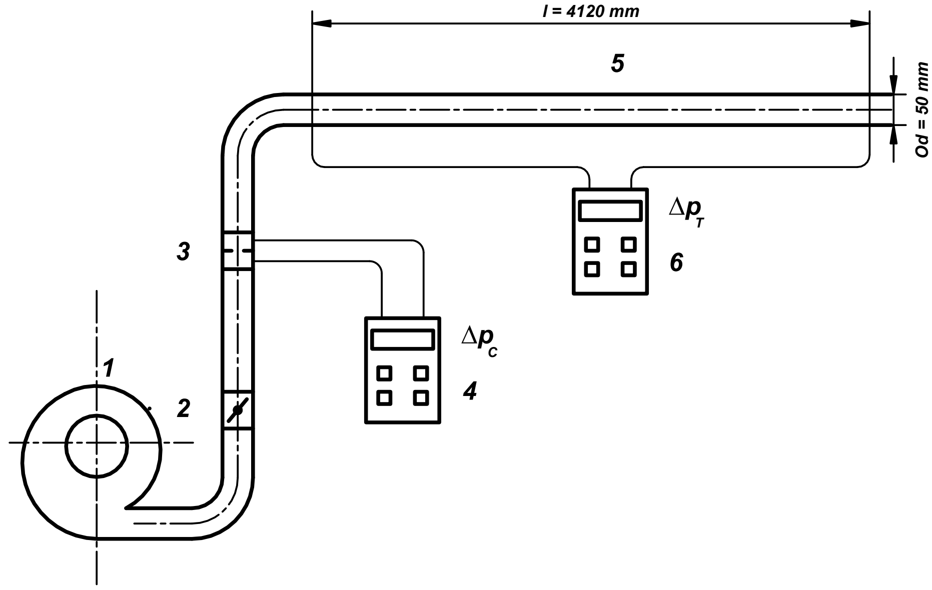


SCHÉMA MĚŘENÍ:

LEGENDA: 1 – ventilátor, 2 – klapka k regulaci průtoku vzduchu , 3 – clona k měření průtoku vzduchu, 4 – digitální měřič tlaku pro měření tlakové diference Δp_c na cloně, 5 – skleněné potrubí, 6 – digitální měřič tlaku k měření tlakové ztráty třením Δp_t v potrubí.

Zkušební zařízení sestává ze skleněného potrubí o vnitřním průměru d = 50 mm, kterým proudí vzduch. Vzdálenost mezi odběry pro měření tlakové ztráty je l = 4,12 m. Tlaková ztráta v potrubí i tlaková diference na cloně se měří digitálním tlakoměrem řady DMU CRESSTO. Střední rychlost v potrubí se stanoví na základě tlakové diference na cloně pomocí zpracovaného cejchovního diagramu clony $\Delta p_c \approx v_s$.

POSTUP MĚŘENÍ:

1. Před začátkem měření se odečte teplota vzduchu t_{vz} a hodnota barometrického tlaku p_b. Hustota a kinematická viskozita vzduchu se určí v závislosti na teplotě a barometrickém tlaku v laboratoři. Hodnoty ρ_{vz}, ν_{vz} se zapíší.
2. Před zapnutím ventilátoru se vynulují digitální tlakoměry. (Nikdy nespouštějte nulování během měření!).

3. Zapne se ventilátor jako zdroj proudícího vzduchu.
4. Rychlost proudění vzduchu a tedy průtok v potrubí se nastaví pomocí regulační klapky (2). Pro každé nastavení průtoku se odečtou hodnoty tlakové ztráty v důsledku tření Δp_t a tlakové diference na cloně Δp_c na digitálních tlakoměrech a naměřené hodnoty se zapíší do tabulky.

t_{vz} = ρ_{vz} =

$H_b[mm]$ = ν_{vz} =

Měřené veličiny			Počítané veličiny					
č.	Δp_t	Δp_c	v_s	Q_V	Re	λ	λ_B	Pozn.
	[Pa]	[Pa]	[m.s^{-1}]	[m^3·s^{-1}]	[-]	[-]	[-]	
1								
.								
.								
.								
.								
.								
.								
.								
.								
n								

VYHODNOCENÍ MĚŘENÍ :

- Střední rychlost v_s se odečte z cejchovního diagramu $\Delta p_c = f(v_s)$
- Objemový průtok se vypočte ze vztahu $Q_v = v_s \dfrac{\pi d^2}{4}$
- Reynoldsovo číslo se vypočte ze vztahu $\mathrm{Re} = \dfrac{v_s d}{\nu}$
- Třecí součinitel se určí ze vztahu $\Delta p_t = \rho \cdot \dfrac{\lambda \cdot l}{d} \dfrac{v_s^2}{2} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2d \cdot \Delta p_t}{l \cdot v_s^2 \cdot \rho}$
- Třecí součinitel podle Blasia se určí ze vztahu $\lambda_B = \dfrac{0.3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$
- Sestrojí se závislost tlakové ztráty třením na objemovém průtoku $p_z = f(Q_V)$, pomocí regrese se stanoví koeficienty závislosti.
- Naměřené hodnoty λ se zakreslí do diagramu $\lambda = f(\mathrm{Re})$ v logaritmických souřadnicích a pro srovnání se vyhodnotí součinitel tření λ_B pro hydraulicky hladké potrubí dle Blasia.
- V závěru se uvedou poznatky plynoucí z měření a vlastní komentář k dosaženým výsledkům.

20.2. Experimentální stanovení charakteristiky čerpadla $Y_s = f(Q_v)$

Stanovte měřením závislost měrné energie čerpadla Y_s na objemovém průtoku Q_v.

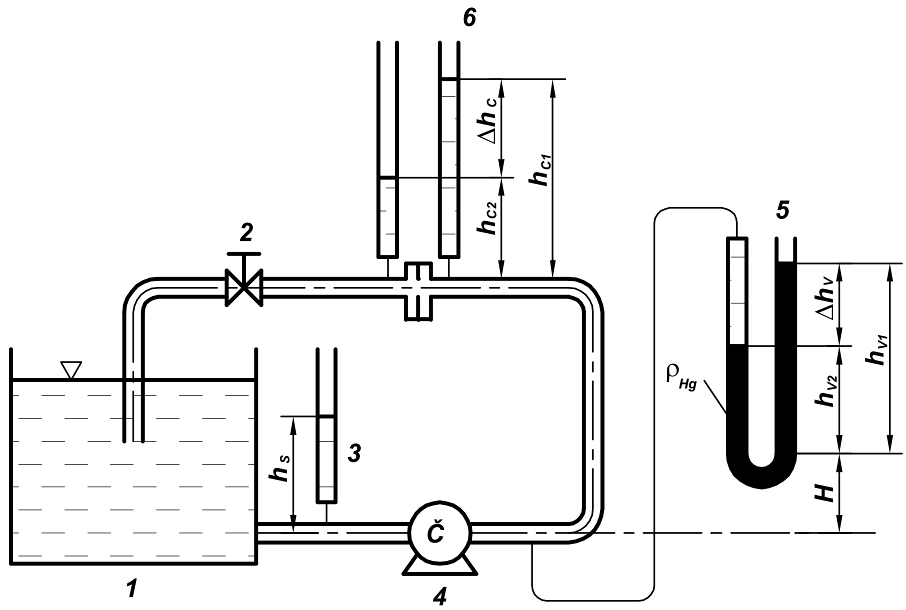


SCHÉMA MĚŘENÍ:

LEGENDA : 1 - nádrž s vodou, 2 - kohout, 3 - piezometrická trubice pro měření tlaku na sání do čerpadla, 4 - čerpadlo, 5 - U-trubice se rtutí pro měření tlaku na výstupu z čerpadla, 6 – clona s piezometrickými trubicemi trubice pro měření průtoku vody Q_V

PARAMETRY ČERPADLA :

Oběhové teplovodní čerpadlo PICCOLA		**Oběhové čerpadlo Wilo EA 60/1´´, s manuálním nastavením 4 stupňů otáček**	
provozní napětí	220V, 50Hz	provozní napětí	220V, 50Hz
proud	0,38A	proud	0,39A, 0.31A, 0.25A, 0.19A
příkon	65W	příkon	86W, 70W, 55W, 42W
otáčky	1400/min	otáčky	2000, 1600, 1500, 1300
dopravované množství	Q_V =1900 l/hod		
dopravní výška	H_d =1,8m		
teplota čerpané vody	t <90°C		
váha	5,95kg		

Zkušební uspořádání je provedeno v souladu s normou ČSN 110035 - Strojní čerpadla - zkoušení. Čerpanou kapalinou je voda o hustotě ρ =1000 kg.m^{-3}. Průtok vody potrubím Q_v je měřen cejchovanou clonou s piezometrickými trubicemi dle ČSN 257710 - Měření průtoku tekutin základními škrtícími orgány. Na základě měření tlaku na vstupu do čerpadla p_s měřeného piezometrickou trubicí a tlaku na výstupu z čerpadla p_v měřeného U-trubicí naplněnou rtutí se stanoví měrná energie čerpadla pro různé hodnoty průtoků. Odběry tlaků jsou ve stejné výši, průměr sacího a výtlačného potrubí je stejný.

POSTUP MĚŘENÍ:

1. Před začátkem měření se odečte teplota vzduchu a hodnota barometrického tlaku v laboratoři. Pro zjištěné laboratorní podmínky se odečtou z tabulek potřebné konstanty, tj. hustota vody ρ_v a hustota rtuti ρ_{Hg} .
2. Zapne se čerpadlo. Pomocí kohoutu na výtlačném potrubí se mění při konstantních otáčkách čerpadla objemový průtok Q_v .
3. Pro každou nastavenou hodnotu průtoku se odečtou hodnoty h_{1c} a h_{2c} v piezometrických trubicích, pomocí kterých je měřen tlak před a za clonou, výška sloupce vody h_s v piezometrické trubici připojené k sacímu potrubí čerpadla a výška hladin rtuti h_{1v} , h_{2v} v U-trubici, pomocí níž je měřen tlak ve výtlačném potrubí.
4. Provede se měření pro nejméně 8 hodnot průtoku. Naměřené hodnoty se zapíší do tabulky.

t_{vz} = ρ_v =

$H_b[mm]$ = ρ_{Hg} =

Měřené veličiny						**Počítané veličiny**					
č.	h_{c1}	h_{c2}	h_s	h_{v1}	h_{v2}	Δh_c	Q_v	p_s	Δh_v	p_v	Y_s
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[m^{3}s^{-1}]	[Pa]	[mm]	[Pa]	[Jkg^{-1}]
1											
.											
.											
.											
.											
.											
.											
.											
.											
n											

VYHODNOCENÍ MĚŘENÍ :

- Z hodnot h_{1c} a h_{2c} se určí diference na cloně $\Delta h_c = h_{1c} - h_{2c}$. Průtok Q_v se stanoví z přiloženého cejchovního diagramu clony $Q_v = f(\Delta h_c)$
- Hodnota tlaku v sacím potrubí se určí ze vztahu $p_s = \rho_v g.h_s$

  (Pozn. : Tlaky se vztahují k tlakové rovině, která prochází osou čerpadla!)
- Hodnota tlaku ve výtlačném potrubí p_v se odvodí z podmínky rovnováhy v U-trubici a je dána vztahem $p_v = \rho_{Hg} g.\Delta h_v + \rho_v g(H_v + h_{2v})$, kde H_v je výška nuly U-manometru nad osou čerpadla.
- Měrná energie čerpadla představuje zvýšení energie 1kg kapaliny při průtoku čerpadlem

  $Y_s = g.H_d = \dfrac{p_v - p_s}{\rho_v}$, kde H_d je dopravní výška čerpadla.
- Měrná energie čerpadla Y_s se graficky vyhodnotí v závislosti na objemovém průtoku Q_v, stanoví se koeficienty závislosti.
- V závěru se uvedou poznatky plynoucí z měření a vlastní komentář k dosaženým výsledkům.

SOUVISEJÍCÍ NORMY :

ČSN 11 0035 - Strojní čerpadla-zkoušení

ČSN 25 7710 - Měření průtoku tekutin základními škrtícími orgány

ON 11 0054 - Zkušební program čerpadla

20.3. Měření rychlostního profilu volného kruhového proudu

Proveďte měření rychlostního profilu kruhového volného proudu, nakreslete rychlostní profil, vypočítejte objemový průtok a střední rychlost.

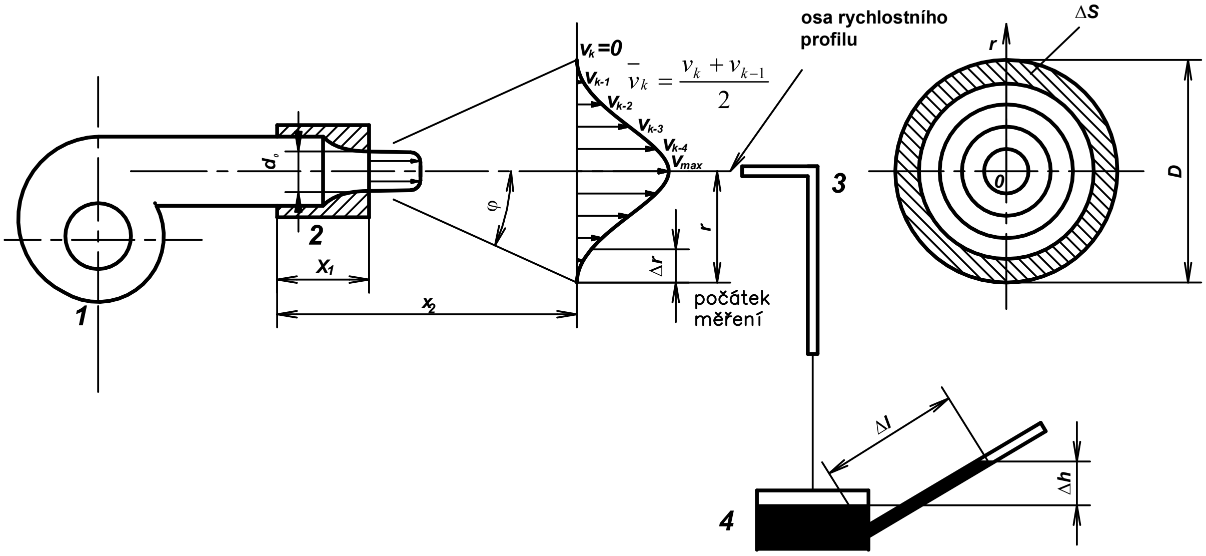


SCHÉMA MĚŘENÍ:

LEGENDA : 1 – ventilátor, 2 – dýza, 3 – Pitotova trubice s vodorovným posunem ve směru proudění a ve směru na něj kolmém, 4 – mikromanometr se sklopným ramenem

Vzduch z ventilátoru proudí dýzou o průměru d_0 =29 mm. Měření rychlostí je prováděno Pitotovou trubicí, umístěnou na posuvném stojanu, umožňujícím pohyb trubice ve vodorovné rovině ve směru proudění vzduchu z dýzy a ve směru na něj kolmém. Dynamický tlak je měřen pomocí mikromanometru se sklopným ramenem, měřící kapalinou je líh. Sklopení při malých tlakových diferencích dovoluje zvětšit přesnost odečítání měřené hodnoty Δl. Pro výpočet tlakové diference použijeme vztah $\Delta h = \Delta l \sin \alpha$. Hodnota $\sin \alpha$ bývá přímo udána na manometru u příslušné polohy ramene.

POSTUP MĚŘENÍ :

- Odečte se barometrický tlak a teplota v laboratoři, z tabulek se stanoví hustota vzduchu ρ_{vz} a měřicí kapaliny ρ_m.
- Před zapnutím ventilátoru se zkontroluje sklon ramene mikromanometru a jeho vynulování.
- Nastaví se vzdálenost ústí Pitotovy trubice od výstupu z dýzy x. Příčný posuv je umožněn pohybem stojanu po šroubovici se stoupáním závitu $s = 2\ mm$.
- Zapne se ventilátor
- Pitotovou trubicí se změří alespoň dva rychlostní profily a to těsně u dýzy a ve vzdálenosti cca 15 cm od výstupu z dýzy

(Pozn. Hodnoty tlakových výšek se měří od kraje rychlostního profilu ($v \cong 0 \Rightarrow \Delta h \cong 0$). Pitotova trubice se posunuje napříč proudem s krokem $\Delta r = s = 2mm$. Měření rychlostního profilu se ukončí, když rychlost a tedy Δl klesne opět na nulu. Průměr rychlostního profilu $D = n.\Delta r$. Jeho osa leží ve středu rychlostního profilu, tj. poloměr $R = \frac{n}{2}\Delta r$. Hodnoty Δl odečtené pro každou polohu Pitotovy trubice na mikromanometru se sklopným ramenem se zapíší do tabulky pro další zpracování.

t_{vz} = ρ_m =

$H_b[mm]$= ρ_{vz} =

Pro každý profil se naměřené a vyhodnocené veličiny zapíšou do tabulky.

Měřené veličiny			**Vypočtené veličiny**					
č.	$\sum \Delta r$	Δl	r	Δh	v	$\bar{v}$	ΔS	ΔQ_v
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[m.s^{-1}]	[m.s^{-1}]	[m^2]	[m^{3}s^{-1}]
0	0	0	R		0			
1	2	.	.		.			
.	4	.	.		.			
.	.	.	4		.			
.	.	.	2		.			
.	.	.	0		$v_{\max}$.			
.	.	.	2		.			
.	.	.	4		.			
		.	.		.			
.	.	.	.		.			
n	n.2	0	R		0			

$\sum \Delta Q_v$

VYHODNOCENÍ MĚŘENÍ :

- Pro výpočet dynamického tlaku p_d platí z rovnováhy na U-manometru :

$$p_c - p_d = p_d = g\,\Delta h(\rho_m - \rho_{vz}) = \frac{1}{2}\rho_{vz} v^2$$

kde ρ_m měrná hmotnost měrné kapaliny (lihu) při dané teplotě *t*

ρ_{vz} měrná hmotnost vzduchu při dané teplotě *t*

$\Delta h = \Delta l \sin \alpha$ tlaková výška určená z měření na mikromanometru

- Rychlost v určitém místě proudu je vypočtena ze vztahu

$$v = \sqrt{2g\Delta h \frac{\rho_m - \rho_{vz}}{\rho_{vz}}}$$

- Průřez proudu je rozdělen na mezikruží pro která platí $r_k - r_{k-1} = \Delta r = 2mm$.

  Průměrná rychlost v mezikruží $\bar{v}_k = \dfrac{v_k + v_{k-1}}{2}$

  Plocha mezikruží $\Delta S = \pi\left(r_k^2 - r_{k-1}^2\right)$

  Průtok mezikružím průměrnou rychlostí $\Delta Q_{vk} = \pi\left(r_k^2 - r_{k-1}^2\right)\bar{v}_k$

- Celkový průtok je dán součtem $Q_v = \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_{vk}$

(Pozn. Pozor! Součtem přes celý průřez je každé mezikruží zahrnuto dvakrát. Musí se tedy výsledný objemový průtok dělit 2 nebo sčítat jen přes polovinu rychlostního profilu .)

- Střední rychlost je určena vztahem $v_{str} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \Delta Q_{vk}}{S} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \Delta Q_{vk}}{\pi R^2}$
- Rychlostní profily se vykreslí do jednoho grafu a porovnají se maximální rychlosti a průtoky získané z obou rychlostních profilů
- Výsledky a komentáře k měření se uvedou v závěru.

21. Přehled použitých označení

Označení	Měřící jednotka	Význam
A	J	práce
A	Pa.s	vírová, zdánlivá viskozita
C	$m^{1/2}.\ s^{-1}$	Chézyho součinitel
E	$N\ .\ m^{-2}$	modul objemové pružnosti v tahu
E	J	energie
F	$N = kg\ .\ m\ .\ s^{-2}$	síla
F_0	N	objemová síla (= F_m)
F_p	N	tlaková síla – plošná síla
F_s	N	setrvačná síla
F_t	N	tečná síla, třecí síla
G	N	tíha (= F_g)
H	$kg\ .\ m\ .\ s^{-1}$	hybnost
H	m	tlaková výška
J_x	m^4	moment setrvačnosti průřezu k ose x
J_{xy}	m^4	deviační moment průřezu
J_y	m^4	moment setrvačnosti průřezu k ose y
K	$N\ .\ m^{-2}$	modul objemové pružnosti tekutiny
M	$m^4\ .\ s^{-1}$	moment dipólu
M_y	m^3	statický moment plochy k ose y
P	W	výkon
Q	J	teplo
Q_m	$kg\ .\ s^{-1}$	hmotnostní průtok
Q_v	$m^3\ .\ s^{-1}$	objemový průtok
R	m	poloměr
S	m^2	plocha
T	K	absolutní teplota
T	s	doba běhu vlny
U	$J\ .\ kg^{-1}$	potenciál vnějších sil
V	m^3	objem
W	$J = N\ .\ m$	práce
Y	$J\ .\ kg^{-1}$	měrná energie
Y_d	$J\ .\ kg^{-1}$	skutečná měrná energie čerpadla
Y_t	$J\ .\ kg^{-1}$	teoretická měrná energie čerpadla
a	$m\ .\ s^{-2}$	zrychlení
a	$m\ .\ s^{-1}$	rychlost zvuku
c	$m\ .\ s^{-1}$	rychlost
c_x	1	součinitel odporu

d	m	průměr
d_h	m	hydraulický průměr
e	$J \cdot kg^{-1}$	měrná energie
e_z	$J \cdot kg^{-1}$	ztrátová měrná energie (= e_r = Y_z)
g	$m \cdot s^{-2}$	tíhové zrychlení
h	m	výška, svislá vzdálenost, hloubka
h_z	m	ztrátová výška
i	$Pa.m^{-1}$	spád tlaku
$\boldsymbol{i,j,k}$	1	jednotkové vektory
k	m	absolutní drsnost stěny
l	m	směšovací délka
l	m	délka, vzdálenost
l_e	m	ekvivalentní délka potrubí
m	kg	hmotnost
n	1	index toku
p	$Pa = N \cdot m^{-2}$	tlak, hydrostatický tlak
p_c	Pa	celkový tlak
p_d	Pa	dynamický tlak
p_s	Pa	statický tlak
p_z	Pa	tlaková ztráta
q	$J \cdot kg^{-1}$	teplo sdělené 1 kg látky
r	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	měrná plynová konstanta
r	m	poloměr
r_h	m	hydraulický poloměr
s	m	dráha
t	^{o}C	teplota
t	s	čas
t_z	s	doba uzavírání armatury
u	$m \cdot s^{-1}$	unášivá, obvodová rychlost
v	$m \cdot s^{-1}$	rychlost, relativní rychlost
v	$m^3 \cdot kg^{-1}$	měrný objem
v_{max}	$m \cdot s^{-1}$	maximální rychlost
v_s	$m \cdot s^{-1}$	střední rychlost z průtoku
v^*	$m. \; s^{-1}$	třecí rychlost
w	$m \cdot s^{-1}$	rychlost
x	m	souřadnice
y	m	souřadnice
z	m	souřadnice
Γ	$m^2 \cdot s^{-1}$	cirkulace rychlosti

Φ	$m^{2} . s^{-1}$	rychlostní potenciál
Ψ	$m^{2} . s^{-1}$	proudová funkce
α	rad	úhel, směrový úhel
β	rad	úhel, směrový úhel
β	K^{-1}	součinitel teplotní objemové roztažnosti
γ	rad	úhel, směrový úhel
γ	$N . m^{-3}$	měrná tíha
δ	m	tloušťka mezní vrstvy
δ	$m^{2} . N^{-1}$	součinitel stlačitelnosti
ε	$rad . s^{-1}$	úhlová deformace
ε	1	součinitel kontrakce proud
ε	1	relativní drsnost stěny trubky
ε	1	intenzita turbulence
ζ	1	ztrátový součinitel
η	$Pa . s$	dynamická viskozita
$\eta_{č}$	1	celková účinnost čerpadla
η_h	1	hydraulická účinnost čerpadla
η_m	1	mechanická účinnost čerpadla
η_v	1	objemová účinnost čerpadla
κ	1	součinitel (vliv pružnosti potrubí)
κ	1	izoentropický exponent
λ	1	součinitel tření
μ	1	výtokový součinitel
ν	$m^{2} . s^{-1}$	kinematická viskozita
ξ	1	stupeň rázu
π	1	bezrozměrový parametr
ρ	$kg . m^{-3}$	hustota (měrná hmotnost)
σ	Pa	normálové napětí
σ	$N . m^{-1}$	povrchové napětí
τ	Pa, $N . m^{-2}$	tečné (smykové napětí)
τ_p	Pa, $N . m^{-2}$	počáteční smykové napětí
φ	rad	úhel
φ	1	rychlostní součinitel
ω	s^{-1}	úhlová rychlost

Bezrozměrná čísla:

Eu - Eulerovo
Fr - Froudovo
Gu - Gumbelovo
Ma - Machovo
Ne - Newtonovo
Re - Reynoldsovo
Sh - Strouhalovo
We - Weberovo

Poznámka:

- střední hodnoty značeny pruhem
- fluktuační hodnoty značeny čárkou
- vektory značeny tučně