SADA – 1 - řešení

1. Upravte daný výraz a stanovte podmínky, kdy je reálný:

$$V = \frac{3a^2+3b^2}{a+b} : \frac{a-b}{a^2-b^2} : \left(\frac{3a}{a^2+b^2}\right)^{-1}.$$

Řešení:

$$V = \frac{3(a^2+b^2)}{a+b} \;{}^{1b} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} \;{}^{3b} \cdot \frac{3a}{a^2+b^2} \;{}^{5b} = 9a \;{}^{8b}$$

Podm.: $a \neq \pm b;\quad a \neq 0$ 10b.

---

2. Stanovte definiční obor funkce $y = \dfrac{3}{\log(x+2)} + \sqrt{x-4}$.

Řešení:

$\log(x+2) \neq 0$ 1b $\quad\wedge\quad x+2>0$ 2b $\quad\wedge\quad x-4 \geq 0$ 3b

$x+2 \neq 1,\; x \neq -1,$ 4b $\quad x > -2,$ 5b $\quad x \geq 4,$ 6b

$D(f) = \langle 4;\infty)$ 10b

---

3. Řešte rovnici $\sqrt{3x^2-3} = x+1$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$3x^2-3 = (x+1)^2$ 2b

$3x^2-3 = x^2+2x+1$ 3b

$2x^2-2x-4=0$ 4b

$x^2-x-2=0$

$D = 1+8 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{1\pm 3}{2}$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$ 7b

$L(2) = \sqrt{3\cdot 4-3} = \sqrt{9} = 3$

$P(2) = 2+1 = 3$

$L(2) = P(2)$ 8b

$L(-1) = \sqrt{3-3} = 0$

$P(-1) = -1+1 = 0$

$L(-1) = P(-1)$ 9b

Závěr: 2 řešení

$x = 2,\; x = -1$ 10b

---

4. Řešte goniometrickou rovnici $1-2\cdot\sin(x-\frac{\pi}{3})=0.$

Řešení:

$\sin(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ 2b

substituce $x-\frac{\pi}{3}=t$ 3b

$\sin t=\frac{1}{2}$ 4b

$t_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 6b

$t_2=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$

$x_1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 8b

$x_2-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$x_2=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$ 10b

---

5. Vyřešte rovnici $3^{x-2}=4-3^{x-1}$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$\frac{3^x}{9}=4-\frac{3^x}{3}$ 3b

$3^x=36-3\cdot3^x$

$4\cdot3^x=36$

$3^x=9$ 6b

$x=2$ 8b

Zkouška: $L(2)=3^{2-2}=3^0=1,\ P(2)=4-3^{2-1}=4-3=1,\ L(2)=P(2)$ 10b

---

6. Nalezněte obecnou rovnici přímky r, procházející středem úsečky $AB,\ A=[-2,2],\ B=[1,0]$ rovnoběžně s přímkou $p:-x+y=0.$

Řešení:

a) směrový vektor $\overrightarrow{AB}=(3,-2),$ 3b

b) určíme střed S, $S=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=[-2,2]+\frac{1}{2}(3,-2)=\left[-\frac{1}{2},1\right],$ 5b

c) r má stejný kolmý směr jako $p, r:-x+y+c=0,$ 8b

d) $S\in r\Rightarrow -1\cdot(-\frac{1}{2})+1\cdot1+c=0\Rightarrow c=-\frac{3}{2},\ r:-x+y-\frac{3}{2}=0.$ 10b

---