SADA – 2 - řešení

1. Upravte daný výraz a stanovte podmínky, kdy je reálný:

$$\mathrm{V}=\left(\frac{1}{\mathrm{y}-1}+1-\frac{\mathrm{y}+1}{\mathrm{y}}\right)^{-1}\quad .$$

Řešení:

$$\mathrm{V}=\left[\frac{y+y(y-1)-(y+1)(y-1)}{y(y-1)}\right]^{-1}\,{}^{4b}\!=\left[\frac{y+y^2-y-y^2+1}{y(y-1)}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{y(y-1)}\right]^{-1}\,{}^{6b}\!=\underline{\underline{y(y-1)}}\;{}^{8b}$$

Podm.: $\mathrm{y}\neq 0, \mathrm{y}\neq 1$ ^{10b}

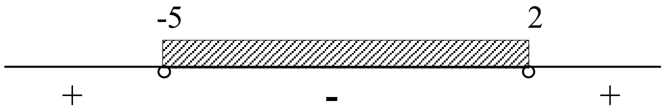
---

2. Určete všechna řešení nerovnice $\dfrac{2\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}-2}<1$.

Řešení:

$$\frac{2\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}-2}-1<0\;{}^{2b}\!\Rightarrow\frac{2\mathrm{x}+3-(\mathrm{x}-2)}{\mathrm{x}-2}\;{}^{4b}\!<0\Rightarrow\underline{\frac{\mathrm{x}+5}{\mathrm{x}-2}<0}\;{}^{5b}.$$

$\underline{\mathrm{x}\neq 2}$ ^{6b}



^{8b}

Nerovnice platí pro $x\in(-5;2)$. ^{10b}

---

3. Vyřešte rovnici $x-1=\sqrt{4-4x}$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$(x-1)^2=4-4x$ ^{2b}

$x^2-2x+1=4-4x$ ^{3b}

$x^2+2x-3=0$ ^{4b}

$D=4-4\cdot(-3)=4+12=16$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}$

$x_1=1$

$x_2=-3$ ^{7b}

$\mathrm{L}(1)=1-1=0$

$\mathrm{P}(1)=\sqrt{4-4}=0$

$\mathrm{L}(1)=\mathrm{P}(1)$ ^{8b}

$\mathrm{L}(-3)=-3-1=-4$

$\mathrm{P}(-3)=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$

$\mathrm{L}(-3)\neq\mathrm{P}(-3)$ ^{9b}

Závěr: 1 řešení $x=1$ ^{10b}

---

4. Řešte goniometrickou rovnici $1-2\cos(x+\frac{\pi}{3})=0$.

Řešení:

$\cos(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ 2b

substituce $x+\frac{\pi}{3}=t$ 3b

$\cos t=\frac{1}{2}$ 4b

$t_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 5b

$t_2=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ 6b

$x_1+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$x_1=2k\pi$ 8b

$x_2+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi+2k\pi$

$x_2=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$ 10b

---

5. Vyřešte rovnici $\frac{1}{3^{2x-1}}=9^2\cdot 3^x$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$3^{-(2x-1)}=(3^2)^2\cdot 3^x$ 4b

$3^{-2x+1}=3^{4+x}$ 5b

$-2x+1=4+x$ 7b

$3x=-3$

$x=-1$ 8b

Zkouška: $\mathrm{L}(-1)=\frac{1}{3^{2(-1)-1}}=\frac{1}{3^{-3}}=3^3=27$, $\mathrm{P}(-1)=81\cdot 3^{-1}=81:3=27$, L(-1)=P(-1) 10b

---

6. Určete obecnou rovnici osy (kolmé přímky procházející středem) úsečky AB, $A=[-2,1]$, $B=[2,2]$.

Řešení:

a) směrový vektor $\overrightarrow{AB}=B-A=(4,1)$, 3b

b) určíme střed $S, S=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=[-2,1]+\frac{1}{2}(4,1)=\left[0,\frac{3}{2}\right]$, 5b

c) osa má rovnici $ax+by+c=0$, normálový směr $\vec{n}=(a,b)=\overrightarrow{AB}=(4,1)$, $4x+y+c=0$, 8b

d) $S\in o\Rightarrow 4\cdot 0+1\cdot\frac{3}{2}+c=0\Rightarrow c=-\frac{3}{2}$, $o:4x+y-\frac{3}{2}=0$. 10b

---