SADA – 3 - řešení

1. Upravte daný výraz a určete podmínky, kdy je reálný:
   $V=\left[(1+a)^{-1}+2a(1-a^2)^{-1}\right]:\left[1-a^{-1}\right]^{-1}$.

Řešení:

$$V=\left[\frac{1}{1+a}+\frac{2a}{1-a^2}\right]^{2b}:\left[1-\frac{1}{a}\right]^{-1}\ {}^{3b}=\frac{1-a+2a}{1-a^2}\ {}^{4b}:\left(\frac{a-1}{a}\right)^{-1}\ {}^{5b}=$$

$$=\frac{1+a}{(1-a)(1+a)}\cdot\frac{a-1}{a}\ {}^{7b}=-\frac{1}{a}\ {}^{8b}$$

Podm.: $a\neq 0\wedge a\neq\pm1\ {}^{10b}$

---

2. Vyřešte nerovnici $\dfrac{5y+3}{y-6}\geq 2$.

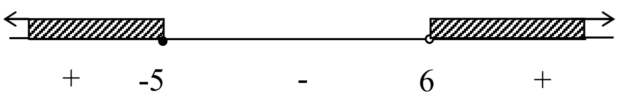
Řešení:

$$\frac{5y+3}{y-6}-2\geq 0\ {}^{1b}$$

$$\frac{5y+3-2(y-6)}{y-6}\geq 0\ {}^{3b}$$

$$\frac{3y+15}{y-6}\geq 0\ {}^{4b}$$

$$\frac{y+5}{y-6}\geq 0\ {}^{5b}\qquad y\neq 6\ {}^{6b}$$



$$x\in(-\infty;-5>\cup(6;\infty)^{10b}$$

---

3. Vyřešte rovnici $x-3=\sqrt{3-x}$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$$(x-3)^2=3-x\ {}^{2b}$$

$$x^2-6x+9=3-x\ {}^{3b}$$

$$x^2-5x+6=0\ {}^{4b}$$

$$D=25-4\cdot 6=25-24=1$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$$x_1=3$$

$$x_2=2\ {}^{7b}$$

$\mathrm{L}(3)=3-3=0$ $\qquad$ $\mathrm{L}(2)=2-3=-1$

$\mathrm{P}(3)=\sqrt{3-3}=0$ $\qquad$ $\mathrm{P}(2)=\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$

$\mathrm{L}(3)=\mathrm{P}(3)\ {}^{8b}$ $\qquad$ $\mathrm{L}(2)\neq\mathrm{P}(2)\ {}^{9b}$

Závěr: 1 řešení $x=3\ {}^{10b}$

---

4. Řešte goniometrickou rovnici $\sin(3x-\frac{\pi}{4})=1$.

Řešení:

subst. $3x-\frac{\pi}{4}=t$

$\sin t = 1$ 2b

$t=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 4b

$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 6b

$3x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ 8b

$x=\frac{1}{4}\pi+\frac{2}{3}k\pi$ 10b

---

5. Vyřešte rovnici $\log(x^3)=1-\log 5$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$\log(x^3)=\log 2$ 5b

$\log(x^3)=\log 10-\log 5$ 2b

$\log(x^3)=\log\frac{10}{5}$ 4b

$x^3=2$ 7b

$x=\sqrt[3]{2}$ 8b

Zkouška: $L(\sqrt[3]{2})=\log(\sqrt[3]{2})^3=\log 2$, $P(\sqrt[3]{2})=1-\log 5=\log\frac{10}{5}=\log 2$, $L(\sqrt[3]{2})=P(\sqrt[3]{2})$ 10b

---

6. Zjistěte, zda na přímce p určené body $A=[0,-1]$ a $B=\left[\frac{3}{2},1\right]$ leží bod $C=[2,2]$.

Řešení:

a) směrový vektor $\vec{p}=B-A=\left(\frac{3}{2},2\right)$, 3b

b) parametrické rovnice přímky $p: x=\frac{3}{2}t,\ y=-1+2t,\ t\in \mathrm{R}$, 5b

(obecná rovnice přímky $p: 4x-3y-3=0$),

c) $C\overset{?}{\in} p$, dosadíme souřadnice C do první rovnice, $2=\frac{3}{2}t \Rightarrow t=\frac{4}{3}$, 8b

d) dosadíme souřadnice C do druhé rovnice, $2=-1+2\cdot\frac{4}{3}$, ovšem $\mathrm{L}\neq \mathrm{P}$, $C\notin p$, 10b

(dosadíme souřadnice C do obecné rovnice přímky p, $2\cdot 2-3\cdot 2-3\neq 0$, $C\notin p$).
