SADA – 4 - řešení

1. Upravte daný výraz a stanovte podmínky, kdy je reálný: $V = \left(\frac{a}{a-1} - \frac{a+1}{a}\right) : \left(\frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a}\right)$.

Řešení:

$$V = \frac{a^2-(a+1)(a-1)}{a(a-1)} : \frac{a^2-(a-1)(a+1)}{a(a+1)} = {}^{3b}$$

$$= \frac{a^2-\left(a^2-1\right)}{a(a-1)} \cdot \frac{a(a+1)}{a^2-(a^2-1)} \;{}^{6b}\!= \frac{a+1}{a-1} \quad {}^{8b}$$

$Podm.:\ a \neq 0,\ a \neq \pm 1$ 10b

---

2. Vyřešte nerovnici $\frac{2x-1}{x-2} \geq 1$.

Řešení:

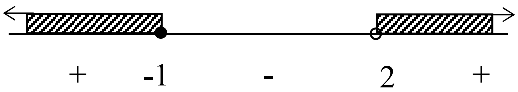
$$\frac{2x-1}{x-2} - 1 \geq 0 \quad {}^{2b}$$

$$\frac{2x-1-x+2}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 0 \quad {}^{5b}$$

$x \neq 2$ 6b

8b



$x \in (-\infty; -1 > \cup (2; \infty)$ 10b

---

3. Vyřešte rovnici $\sqrt{x} = x - 2$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$x = (x-2)^2$ 2b

$x = x^2 - 4x + 4$ 3b

$0 = x^2 - 5x + 4$ 4b

$D = 25 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$ 7b

$L(4) = \sqrt{4} = 2$

$P(4) = 4 - 2 = 2$

$L(4) = P(4)$ 8b

$L(1) = \sqrt{1} = 1$

$P(1) = 1 - 2 = -1$

$L(1) \neq P(1)$ 9b

Závěr: 1 řešení $x = 4$ 10b .

---

4. Řešte goniometrickou rovnici $2+4\cos(2x-\pi)=4$.

Řešení:

$\cos(2x-\pi)=\frac{1}{2}$ 2b

substituce $2x-\pi=t$ 3b

$\cos t=\frac{1}{2}$ 4b

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{\pi}{3}+2k\pi \\ t_2 &= \frac{5}{3}\pi+2k\pi \end{aligned}\right\}\ \text{6b}$$

$$2x_1-\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi \qquad 2x_2-\pi=\frac{5}{3}+2k\pi$$

$$2x_1=\frac{4}{3}\pi+2k\pi \qquad 2x_2=\frac{8}{3}\pi+2k\pi$$

$$x_1=\frac{2}{3}\pi+k\pi \ \text{8b} \qquad x_2=\frac{4}{3}\pi+k\pi \ \text{10b}$$

---

5. Vyřešte rovnici $\log(x+2)+\log(2-x)=\log 3$ a stanovte podmínky její řešitelnosti.

Řešení:

$\log\left((x+2)\cdot(2-x)\right)=\log 3$ 2b

$\log\left(4-x^2\right)=\log 3$ 3b

$4-x^2=3$ 5b

$x^2=1$

$x=\pm 1$ 7b

Podmínky: i) $x+2>0 \Rightarrow x>-2$

ii) $2-x>0 \Rightarrow x<2$ 9b

tedy, $x\in(-2,2)$ a $K=\{1,-1\}\subset(-2,2)$ 10b

---

6. Určete číslo a tak, aby přímka $p: ax-3y+4=0$ procházela průsečíkem přímek $r:\ 2x-y=0$ a $s: x+2y-5=0$.

Řešení:

a) průsečík P: z rovnice přímky r dostáváme $y=2x$, dosadíme do s, $x+2\cdot(2x)-5=0$, a tedy $x=1$ a $y=2, P=[1,2]$, 5b

b) $P\in p \Rightarrow a\cdot 1-3\cdot 2+4=0 \Rightarrow a=2$, přímka $p: 2x-3y+4=0$. 10b

---