

SADA – 5 - řešení

1. Upravte daný výraz a stanovte podmínky, kdy je reálný:

$$V = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Řešení:

$$V = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} - \frac{2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} - \frac{2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 b^2} = \left(\frac{a-b}{ab} \right)^2$$

$$\text{Podm.: } a \neq 0, b \neq 0, a \neq -b$$

2. Určete definiční obor funkce $y = \frac{3 \log(x-1)}{4-x^2}$.

Řešení:

$$x-1 > 0 \quad \wedge \quad 4-x^2 \neq 0$$

$$x > 1 \quad \wedge \quad x^2 \neq 4$$

$$x > 1 \quad \wedge \quad x \neq \pm 2$$

$$D(f) = (1; 2) \cup (2; +\infty)$$

3. Vyřešte rovnici $x+2 = \sqrt{2+x}$ a proveďte zkoušku.

Řešení:

$$(x+1)^2 = 2+x$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2 + x$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -2$$

$$L(-1) = -1 + 2 = 1$$

$$L(-2) = -2 + 2 = 0$$

$$P(-1) = \sqrt{2-1} = 1$$

$$P(-2) = \sqrt{2-2} = 0$$

$$L(-1) = P(-1)$$

$$L(-2) = P(-2)$$

Závěr: 2 řešení $x = -1, x = -2$

4. Řešte goniometrickou rovnici, stanovte podmínky řešitelnosti $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}$.

Řešení:

$$x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$t = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad 6b$$

$$x \neq \pi + k\pi \quad 2b$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad 8b$$

$$\text{substituce } x - \frac{\pi}{2} = t \quad 3b$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \quad 10b$$

$$\operatorname{tg} t = \sqrt{3} \quad 4b$$

5. Vyřešte rovnici $2 \cdot \log(x-3) = \log(14-2x)$ a stanovte podmínky její řešitelnosti.

Řešení:

$$\log(x-3)^2 = \log(14-2x) \quad 3b$$

$$\log(x^2 - 6x + 9) = \log(14 - 2x)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 14 - 2x \quad 5b$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 5 \quad 7b$$

$$\text{Podmínky: } \quad \text{i) } x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$\quad \text{ii) } 14-2x > 0 \Rightarrow x < 7$$

$$\text{tedy, } x \in (3, 7) \quad 9b \text{ a } K = \{5\} \subset (3, 7) \quad 10b$$

6. Je dána přímka $p = \{A, B\}$, $A = [-1, 2]$, $B = [2, 1]$. Bodem $C = [1, 2]$ ved'te přímku q kolmou na přímku p . Určete obecnou rovnici přímky q .

Řešení:

$$\text{a) směr přímky } p: \vec{p} = B - A = (3, -1), \quad 3b$$

b) obecná rovnice přímky $q: ax + by + c = 0$, vektor $\vec{n} = (a, b)$ je normálový směr přímky q , vektor \vec{n} je kolmé s \vec{p} , lze přímo psát $\vec{n} = \vec{p}$, a tedy $3x - y + c = 0$, $6b$

$$\text{c) } C \in q \Rightarrow 3 \cdot 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = -1, \quad 9b$$

$$\text{d) obecná rovnice přímky } q: 3x - y - 1 = 0. \quad 10b$$
